MECÂNICA DOS FLUIDOS

FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES

YUNUS A. ÇENGEL
JOHN M. CIMBALA

Mc Graw Hill
bookman

o fluxo em tubulações e o escoamento em canais abertos, respectivamente. Este livro foi escrito com suficiente amplitude de cobertura a ponto de poder ser usado em uma seqüência de dois cursos, se desejado.

FILOSOFIA E MÉTODO

Adotamos a mesma filosofia dos livros *Termodinâmica,* de Y. A. Çengel e M. A. Boles, *Heat Transfer: A Practical Approach*, de Y. A. Çengel, e *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*, de Y. A. Çengel e R. H. Turner, todos publicados pela McGraw-Hill. Ou seja, nossa meta é oferecer um livro didático de engenharia que:

- Comunique-se diretamente com a mente dos engenheiros de amanhã, de uma maneira simples, mas precisa.
- Conduza os estudantes ao claro entendimento e sólida compreensão dos princípios básicos da mecânica dos fluidos.
- Estimule o raciocínio criativo, o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e da percepção intuitiva da mecânica dos fluidos.
- Seja lido pelos estudantes com interesse e entusiasmo em vez de ser meramente um auxílio para resolver problemas.

Nossa filosofia é que a melhor maneira de aprender é através da prática. Portanto, fizemos um esforço especial ao longo de todo o livro para reforçar a matéria apresentada (tanto no próprio capítulo como nos capítulos anteriores). Por exemplo, muitos dos exemplos de problemas ilustrados e problemas de final de capítulo são abrangentes, obrigando o estudante a rever os conceitos aprendidos nos capítulos anteriores.

Em todo o livro apresentamos exemplos gerados pela dinâmica de fluidos computacional (CFD) e apresentamos um capítulo introdutório sobre o assunto. Nosso objetivo não é ensinar detalhes sobre os algoritmos numéricos associados à CFD — isto é mais apropriadamente apresentado em um curso separado, tipicamente no nível de pós-graduação. Ao contrário, nossa intenção é apresentar aos estudantes universitários as capacidades e limitações da CFD como uma ferramenta de engenharia. Usamos as soluções CFD de modo muito similar à maneira como usamos os resultados experimentais obtidos em uma prova no túnel aerodinâmico, ou seja, para reforçar a compreensão da física de escoamento dos fluidos e fornecer visualizações do escoamento que tenham qualidade e ajudem a explicar o comportamento do fluido.

CONTEÚDO E ORGANIZAÇÃO

Este livro é organizado em quinze capítulos, iniciando com os conceitos fundamentais dos fluidos e dos escoamentos de fluidos e encerra com uma introdução à dinâmica dos fluidos computacional, cuja aplicação está cada vez mais comum, até mesmo nos cursos de graduação universitários.

- O Capítulo 1 apresenta uma introdução básica aos fluidos, classificações do escoamento dos fluidos, volume de controle *versus* formulações de sistemas, dimensões, unidades, algarismos significativos e técnicas de resolução de problemas.
- O Capítulo 2 é dedicado à propriedade dos fluidos como, por exemplo, densidade, pressão de vapor, calores específicos, viscosidade e tensão superficial.
- O Capítulo 3 trata da estática e pressão dos fluidos, inclusive manômetros e barômetros, forças hidrostáticas em superfícies submersas, capacidade de flutuação e estabilidade e fluidos que se movimentam como sólidos.
- O Capítulo 4 aborda tópicos relacionados à cinemática dos fluidos como, por exemplo, as diferenças entre as descrições Lagrangieana e Euleriana dos

Ç395m Çengel, Yunus A.

Mecânica dos fluidos [recurso eletrônico] : fundamentos e aplicações / Yunus A. Çengel, John M. Cimbala ; tradução: Katia Aparecida Roque, Mario Moro Fecchio ; revisão técnica: Fábio Saltara, Jorge Luis Balino, Karl Peter Burr ; consultoria técnica: Helena Maria de Ávila Castro. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2012.

Editado também como livro impresso em 2007.
ISBN 978-85-8055-066-5

1. Engenharia. 2. Mecânica dos fluidos. I. Cimbala, John M. II. Título.

CDU 532

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB 10/2052

MECÂNICA DOS FLUIDOS

FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES

YUNUS A. ÇENGEL
Department of Mechanical Engineering University of Nevada, Reno

JOHN M. CIMBALA
Department of Mechanical and Nuclear Engineering, The Pennsylvania State University

Tradução
KATIA APARECIDA ROQUE
MARIO MORO FECCHIO

Revisão Técnica
PROF. DOUTOR FÁBIO SALTARA
Escola Politécnica da USP

JORGE LUIS BALIÑO
Graduado e Doutorado em Engenharia Nuclear
pelo Instituto Balseiro (Universidad Nacional de Cuyo, Argentina)
Professor Doutor do Departamento de Engenharia Mecânica da USP

KARL PETER BURR
Engenheiro Naval, Ph. D. em Hidrodinâmica pelo Massachusetts Institute of Technology
Pesquisador no Depto. de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica USP

Consultoria Técnica
HELENA MARIA DE ÁVILA CASTRO
Professora Doutora do Instituto de Matemática e Estatística da USP

Versão impressa
desta obra: 2007

AMGH Editora Ltda.
2012

Obra originalmente publicada sob o título Fluid Mechanics: Fundamentals and Aplications
© 2006 by The McGraw-Hill Companies, Inc.
ISBN da obra original: 0-07-247236-7

Editora: *Gisélia Costa*

Preparação de Texto: *Mônica de Aguiar Rocha*

Imagem da Capa: © *Getty/Eric Meola, Niagara Falls*

Diagramação: *ERJ Composição Editorial e Artes Gráficas Ltda.*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
AMGH Editora Ltda. (AMGH EDITORA é uma parceria entre
ARTMED Editora S.A. e MCGRAW-HILL EDUCATION).
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 - Santana
90040-340 Porto Alegre RS
Fone (51) 3027-7000 Fax (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte,
sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação,
fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

SÃO PAULO
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio 05095-035 São Paulo SP
Fone (11) 3665-1100 Fax (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

Dedicatória

A todos os estudantes — com a esperança de aumentar seu desejo e entusiasmo para explorar o funcionamento interno de nosso maravilhoso universo, do qual a mecânica dos fluidos é uma parte pequena, mas fascinante. Nossa esperança é que este livro desenvolva seu interesse em aprender não somente sobre a mecânica dos fluidos, mas sobre a vida.

Sobre os Autores

Yunus A. Çengel é Professor Emérito de Engenharia Mecânica na Universidade de Nevada, Reno. É bacharel em engenharia mecânica pela Universidade Técnica de Istambul e Mestre e Ph.D. em engenharia mecânica pela Universidade Estadual da Carolina do Norte. Suas áreas de pesquisa são a energia renovável, dessalinização, análise de exergia, aperfeiçoamento da transferência de calor, transferência de calor por radiação e conservação de energia. Serviu como diretor do Industrial Assessment Center (IAC) na Universidade de Nevada, Reno, de 1996 a 2000. Dirigiu equipes de alunos de engenharia em numerosas instalações industriais na região norte do Estado de Nevada e na Califórnia para fazerem avaliações e preparou relatórios de conservação de energia, minimização de resíduos e melhoria da produtividade.

O Dr. Çengel é co-autor do livro didático amplamente adotado, *Termodinâmica*, 5ª edição, também publicado pela McGraw-Hill Interamericana do Brasil. Ele também é o autor do livro didático *Heat Transfer: A Practical Approach*, 2ª edição e co-autor do livro didático *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*, 2ª edição, ambos publicados pela McGraw-Hill. Alguns dos seus livros didáticos foram traduzidos para o chinês, japonês, coreano, espanhol, turco, italiano e grego.

O Dr. Çengel recebeu diversos *Outstanding Teacher Awards*, e recebeu também o ASEE Meriam/Wiley Distinguished Author Award pela excelência como autor em 1992 e novamente em 2000.

O Dr. Çengel é engenheiro profissional registrado no Estado de Nevada, é membro da American Society of Mechanical Engineers (ASME) e da American Society for Engineering Education (ASEE).

John M. Cimbala é professor de Engenharia Mecânica na Universidade Estadual da Pensilvânia, na University Park. É bacharel em Engenharia Aeroespacial pela Universidade Estadual da Pensilvânia e é Mestre em Aeronáutica pelo Califórnia Institute of Technology (CalTech). Recebeu seu Ph.D. em Aeronáutica do CalTech em 1984 sob a supervisão do professor Anatol Roshko, a quem será eternamente grato. Suas áreas de pesquisa incluem mecânica dos fluidos computacional, fluido-mecânica experimental e transferência de calor, turbulência, modelagem de turbulência, turbomaquinaria, qualidade do ar no interior de ambientes e controle de poluição atmosférica. Durante o ano acadêmico de 1993–94, o professor Cimbala obteve uma licença sabática da universidade e trabalhou no Langley Research Center da NASA, onde aprimorou seus conhecimentos em dinâmica dos fluidos computacional (CFD) e modelagem de turbulência.

O Dr. Cimbala é co-autor do livro didático *Indoor Air Quality Engineering: Environmental Health and Control of Indoor Pollutants* (2003), publicado pela Marcel-Dekker, Inc. Ele também colaborou em partes de outros livros, e é o autor e co-autor de dezenas de *papers* para periódicos e conferências. Mais informações podem ser encontradas em **www.mne.psu.edu/cimbala**.

O professor Cimbala recebeu diversos *Outstanding Teaching Awards* e vê os livros que escreve como uma extensão do seu amor pelo magistério. É membro do American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), da American Society of Mechanical Engineers (ASME), da American Society for Engineering Education (ASEE) e da American Physical Society (APS).

SUMÁRIO

Prefácio xii

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS 1

1–1 Introdução 2
O Que é Fluido? 2
Áreas de Aplicação da Mecânica dos Fluidos 4
1–2 Condição de Não-Escorregamento 5
1–3 Uma Breve História da Mecânica dos Fluidos 6
1–4 Classificação de Escoamentos de Fluidos 8
Regiões de Escoamento Viscoso *versus* Não Viscoso 8
Escoamento Interno *versus* Externo 9
Escoamento Compressível *versus* Incompressível 9
Escoamento Laminar *versus* Turbulento 10
Escoamento Natural (ou Não Forçado) *versus* Forçado 10
Escoamento em Regime Permanente *versus* em Regime Não Permanente 10
Escoamentos Uni, Bi e Tridimensionais 12
1–5 Sistema e Volume de Controle 13
1–6 Importância das Dimensões e Unidades 14
Algumas Unidades SI e Inglesas 15
Homogeneidade Dimensional 17
Razões de Conversão de Unidades 18
1–7 Modelagem Matemática de Problemas de Engenharia 19
Modelagem na Engenharia 19
1–8 Técnica de Resolução de Problema 20
Passo 1: Definição do Problema 20
Passo 2: Diagrama Esquemático 21
Passo 3: Hipóteses e Aproximações 21
Passo 4: Leis Físicas 21
Passo 5: Propriedades 21
Passo 6: Cálculos 21
Passo 7: Raciocínio, Verificação e Discussão 21
1–9 Pacotes de Aplicativos para Engenharia 22
Engineering Equation Solver (EES) (Solucionador de Equações de Engenharia) 23
FLUENT 24
1–10 Exatidão, Precisão e Algarismos Significativos 24
Resumo 27
Referências e Leituras Sugeridas 27
Aplicação em Foco: O Que Explosões Nucleares e Pingos de Chuva Têm em Comum 28
Problemas 29

CAPÍTULO 2
PROPRIEDADES DOS FLUIDOS 31

2–1 Introdução 32
Meio Contínuo 32
2–2 Densidade e Gravidade Específica 33
Densidade dos Gases Ideais ou Perfeitos 33
2–3 Pressão de Vapor e Cavitação 35
2–4 Energia e Calores Específicos 36
2–5 Coeficiente de Compressibilidade 38
Coeficiente de Expansão Volumétrica 39
2–6 Viscosidade 41
2–7 Tensão Superficial e Efeito Capilar 45
Efeito Capilar 47
Resumo 48
Referências e Leituras Sugeridas 49
Aplicação em Foco: Cavitação 50
Problemas 51

CAPÍTULO 3
PRESSÃO E ESTÁTICA DOS FLUIDOS 56

3–1 Pressão 57
Pressão em um Ponto 58
Variação da Pressão com a Profundidade 59
3–2 O Manômetro 61
Outros Dispositivos de Medição da Pressão 64
3–3 O Barômetro e a Pressão Atmosférica 65
3–4 Introdução à Estática dos Fluidos 68
3–5 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Planas Submersas 69
Caso Especial: Placa Retangular Submersa 72
3–6 Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Curvas Submersas 74
3–7 Flutuação e Estabilidade 77
Estabilidade de Corpos Imersos e Flutuantes 80
3–8 Fluidos em Movimento de Corpo Rígido 82
Caso Especial 1: Fluidos em Repouso 84
Caso Especial 2: Queda Livre de um Corpo Fluido 84
Aceleração em uma Trajetória Reta 84
Rotação em um Contêiner Cilíndrico 86
Resumo 89
Referências e Leituras Sugeridas 90
Problemas 90

CAPÍTULO 4
CINEMÁTICA DOS FLUIDOS 103

4–1 Descrições Lagrangiana e Euleriana 104
Campo de Aceleração 106
Derivada Material 109
4–2 Fundamentos da Visualização do Escoamento 110
Linhas de Corrente e Tubos de Corrente 110
Linhas de Trajetória 112

Linhas de Emissão 113
Linhas de Tempo 115
Técnicas de Refração para Visualização do Escoamento 116
Técnicas de Visualização do Escoamento em Superfícies 117

4–3 Representação Gráfica dos Dados de Escoamento de Fluidos 117
Gráficos de Perfil 117
Gráficos Vetoriais 118
Gráfico de Contornos 119

4–4 Outras Descrições Cinemáticas 119
Tipos de Movimento ou Deformação dos Elementos de Fluido 119
Vorticidade e Rotacionalidade 124
Comparação entre Dois Escoamentos Circulares 127

4–5 O Teorema de Transporte de Reynolds 128
Dedução Alternativa do Teorema de Transporte de Reynolds 133
Relação entre a Derivada Material e o TTR 135
Resumo 135

Aplicação em Foco: Atuadores Fluídicos 136
Referências e Leituras Sugeridas 137
Problemas 137

CAPÍTULO 5
EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DE MASSA, DE BERNOULLI E DE ENERGIA 148

5–1 Introdução 149
Conservação de Massa 149
Conservação do Momento 149
Conservação de Energia 149

5–2 Conservação de Massa 150
Vazões em Massa e Volume 150
Princípio de Conservação de Massa 151
Volumes de Controle Móveis ou Deformáveis 153
Balanço de Massa para Processos com Escoamento em Regime Permanente 154
Caso Especial: Escoamento Incompressível 154

5–3 Energia Mecânica e Eficiência 156

5–4 A Equação de Bernoulli 161
Aceleração de uma Partícula de Fluido 161
Dedução da Equação de Bernoulli 162
Balanço de Forças Transversal às Linhas de Corrente 164
Escoamento Compressível Não Permanente 164
Pressões Estática, Dinâmica e de Estagnação 164
Limitações do Uso da Equação de Bernoulli 166
Linha Piezométrica (HGL) e Linha de Energia (EGL) 167

5–5 Aplicações da Equação de Bernoulli 169

5–6 Equação Geral da Energia 175
Transferência de Energia por Calor, Q 176
Transferência de Energia por Trabalho, W 176

5–7 Análise de Energia de Escoamentos em Regime Permanente 179
Caso Especial: Escoamento Incompressível sem Nenhum Dispositivo de Trabalho Mecânico e Atrito Desprezível 182
Fator de Correção da Energia Cinética, α 182
Resumo 188
Referências e Leituras Sugeridas 189
Problemas 189

CAPÍTULO 6
ANÁLISE DE MOMENTO NOS SISTEMAS DE ESCOAMENTO 197

6–1 Leis de Newton e Conservação do Momento 198

6–2 Escolhendo um Volume de Controle 199

6–3 Forças Que Atuam sobre um Volume de Controle 200

6–4 A Equação do Momento 203
Casos Especiais 204
Fator de Correção do Fluxo do Momento, β 205
Escoamento em Regime Permanente 206
Escoamento em Regime Permanente com uma Entrada e uma saída 207
Escoamento sem Forças Externas 207

6–5 Revisão do Movimento de Rotação e do Momento Angular 215

6–6 Equação do Momento Angular 217
Casos Especiais 219
Escoamento sem Torques Externos 220
Dispositivos com Escoamento Radial 220
Resumo 225
Referências e Leituras Sugeridas 226
Problemas 226

CAPÍTULO 7
ANÁLISE DIMENSIONAL E MODELAGEM 231

7–1 Dimensões e Unidades 232

7–2 Homogeneidade Dimensional 233
Adimensionalização das Equações 234

7–3 Análise Dimensional e Similaridade 238

7–4 O Método das Variáveis Repetidas e o Teorema Pi de Buckingham 242

Destaque Histórico: Pessoas Homenageadas pelos Parâmetros Adimensionais 249

7–5 Testes Experimentais e Semelhança Incompleta 256
Configuração de uma Experiência e Correlação dos Dados Experimentais 256
Semelhança Incompleta 257
Teste no Túnel de Vento 257
Escoamentos com Superfícies Livres 260

Aplicação em Foco: Como uma Mosca Voa 262
Resumo 263
Referências e Leituras Sugeridas 263
Problemas 264

CAPÍTULO 8
ESCOAMENTO EM TUBOS 277

8–1 Introdução 278

8–2 Escoamentos Laminar e Turbulento 279
Número de Reynolds 279

8–3 A Região de Entrada 280
Comprimentos de Entrada 282

8–4 Escoamento Laminar em Tubos 282
Queda de Pressão e Perda de Carga 284
Tubos Inclinados 286
Escoamento Laminar em Tubos Não Circulares 287

8–5 Escoamento Turbulento em Tubos 290
Tensão de Cisalhamento Turbulenta 291
Perfil da Velocidade Turbulenta 292
O Diagrama de Moody 295
Tipos de Problemas de Escoamento de Fluidos 297

8–6 Perdas Menores 301

8–7 Redes de Tubulações e Seleção de Bomba 307
Sistemas de Tubulações com Bombas e Turbinas 309

8–8 Medição de Vazão e Velocidade 316
Sonda de Pitot e Sonda Estática de Pitot 317
Medidores de Vazão por Obstrução: Orifício, Venturi e Medidores de Bocal 318
Medidores de Vazão por Deslocamento Positivo 321
Medidores de Vazão Tipo Turbina 322
Medidores de Vazão de Área Variável (Rotâmetros) 323
Medidores de Vazão Ultra-Sônicos 324
Medidores de Vazão Eletromagnéticos 326
Medidores de Vazão de Vórtice 327
Anemômetros Térmicos (Fio Quente e Filme Quente) 328
Velocimetria Laser Doppler 329
Velocimetria por Imagem de Partícula 330

Aplicação em Foco: Como Funcionam, ou Não Funcionam, os Medidores de Vazão de Placa de Orifício 333

Resumo 334
Referências e Sugestões de Leitura 335
Problemas 336

CAPÍTULO 9

ANÁLISE DIFERENCIAL DE ESCOAMENTO DE FLUIDO 345

9–1 Introdução 346

9–2 Conservação da Massa – A Equação da Continuidade 346
Dedução Usando o Teorema do Divergente 347
Dedução Usando um Volume de Controle Infinitesimal 348
Forma Alternativa da Equação da Continuidade 351
Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas 351
Casos Especiais da Equação da Continuidade 352

9–3 A Função Corrente 357
A Função Corrente em Coordenadas Cartesianas 357
A Função Corrente em Coordenadas Cilíndricas 363
A Função Corrente Compressível 365

9–4 Conservação do Momento Linear – Equação de Cauchy 365
Dedução Usando o Teorema do Divergente 366
Dedução Usando um Volume de Controle Infinitesimal 367
Forma Alternativa da Equação de Cauchy 369
Dedução Usando a Segunda Lei de Newton 369

9–5 A Equação de Navier-Stokes 370
Introdução 370
Fluidos Newtonianos *versus* Fluidos Não Newtonianos 371
Dedução da Equação de Navier-Stokes para Escoamento Incompressível, Isotérmico 372
Equações da Continuidade e de Navier-Stokes em Coordenadas Cartesianas 374
Equações da Continuidade e de Navier-Stokes em Coordenadas Cilíndricas 374

9–6 Análise Diferencial dos Problemas de Escoamento de Fluidos 375
Cálculo do Campo de Pressão para um Campo de Velocidade Conhecido 375
Soluções Exatas das Equações da Continuidade e de Navier-Stokes 380
Condições de Contorno 381

Resumo 397
Referências e Leituras Sugeridas 397
Problemas 397

CAPÍTULO 10

SOLUÇÕES APROXIMADAS DA EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES 409

10–1 Introdução 410

10–2 Equações de Movimento na Forma Adimensional 411

10–3 A Aproximação de Escoamento Lento 414
Arrasto em uma Esfera em Escoamento Lento 416

10–4 Aproximação para Regiões do Escoamento sem Viscosidade 418
Dedução da Equação de Bernoulli em Regiões de Escoamento Sem Viscosidade 419

10–5 A Aproximação de Escoamento Irrotacional 422
Equação da Continuidade 422
Equação do Momento 422
Dedução da Equação de Bernoulli em Regiões Irrotacionais do Escoamento 424
Regiões Irrotacionais de Escoamento Bidimensionais 427
Superposição em Regiões Irrotacionais de Escoamento 430
Escoamentos Planares Irrotacionais Elementares 430
Escoamentos Irrotacionais Formados pela Superposição 436

10–6 A Aproximação da Camada Limite 445
As Equações da Camada Limite 449
O Procedimento de Camada Limite 453
Espessura de Deslocamento 457
Espessura do Momento 460
Camada Limite Turbulenta sobre uma Placa Plana 462
Camadas Limites com Gradientes de Pressão 467
A Técnica Integral de Momento para Camadas Limites 471

Resumo 479
Referências e Leituras Sugeridas 479

Aplicação em Foco: Formação de Gotículas 480
Problemas 481

CAPÍTULO 11

ESCOAMENTO SOBRE CORPOS: ARRASTO E SUSTENTAÇÃO 490

11–1 Introdução 491

11–2 Arrasto e Sustentação 492

11–3 Arrastos de Atrito e Pressão 495
Reduzindo o Arrasto por Carenagem 496
Separação de Escoamento 497

11–4 Coeficientes de Arrasto de Geometrias Comuns 499
Sistemas Biológicos e Arrasto 500
Coeficiente de Arrasto de Veículos 502
Superposição 504

11–5 Escoamento Paralelo sobre Placas Planas 506
Coeficiente de Atrito 507

11–6 Escoamento sobre Cilindros e Esferas 510
Efeito da Rugosidade da Superfície 512

11–7 Sustentação 514
Efeitos de Extremidade das Pontas das Asas 517
Sustentação Gerada pela Rotação 519

Resumo 523
Referências e Leituras Sugeridas 524

Aplicação em Foco: Redução de Arrasto 525
Problemas 526

CAPÍTULO 12
ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL 533

12–1 Propriedades de Estagnação 534

12–2 Velocidade do Som e Número de Mach 537

12–3 Escoamento Isentrópico Unidimensional 539
Variação da Velocidade do Fluido com a Área de Escoamento 541
Relações de Propriedades para o Escoamento Isentrópico de Gases Ideais 543

12–4 Escoamento Isentrópico através de Bocais 545
Bocais Convergentes 546
Bocais Convergentes-Divergentes 550

12–5 Ondas de Choque e Ondas de Expansão 553
Choques Normais 554
Choques Oblíquos 559
Ondas de Expansão de Prandtl–Meyer 563

12–6 Escoamento de Duto com Transferência de Calor e Atrito Desprezível (Escoamento de Rayleigh) 566
Relações de Propriedades para o Escoamento de Rayleigh 571
Escoamento Estrangulado de Rayleigh 573

12–7 Escoamento em Duto Adiabático com Atrito (Escoamento de Fanno) 575
Relações de Propriedades para o Escoamento de Fanno 577
Escoamento de Fanno Estrangulado 581

Aplicação em Foco: Interações de Onda de Choque/Camada Limite 584

Resumo 585
Referências e Leituras Sugeridas 586
Problemas 586

CAPÍTULO 13
ESCOAMENTO EM CANAL ABERTO 595

13–1 Classificação dos Escoamentos em Canal Aberto 596
Escoamentos Uniformes e Variados 596
Escoamentos Laminar e Turbulento em Canais 597

13–2 Número de Froude e Velocidade de Onda 598
Velocidade das Ondas de Superfície 600

13–3 Energia Específica 602

13–4 Equações de Continuidade e Energia 605

13–5 Escoamento Uniforme em Canais 607
Escoamento Crítico Uniforme 608
Método da Superposição para Perímetros Não Uniformes 609

13–6 Melhores Seções Transversais Hidráulicas 611
Canais Retangulares 613
Canais Trapezoidais 613

13–7 Escoamento Gradualmente Variado 616
Perfis de Superfície Líquida em Canais Abertos, $y(x)$ 617
Alguns Perfis de Superfície Representativos 620
Solução Numérica para o Perfil de Superfície 622

13–8 Escoamento Rapidamente Variado e Salto Hidráulico 623

13–9 Controle e Medição do Escoamento 627
Comporta de Escoamento 627

Resumo 636
Referências e Sugestões de Leitura 637
Problemas 637

CAPÍTULO 14
TURBOMÁQUINAS 646

14–1 Classificações e Terminologia 647

14–2 Bombas 649
Curvas de Desempenho da Bomba e Escolha de uma Bomba para um Sistema de Tubulação 650
Cavitação de Bomba e Carga de Sucção Líquida Positiva 655
Bombas em Série e Paralelo 658
Bombas de Deslocamento Positivo 661
Bombas Dinâmicas 663
Bombas Centrífugas 663
Bombas Axiais 672

14–3 Leis de Semelhança de Bombas 680
Análise Dimensional 680
Velocidade Específica de Bomba 682
Leis de Semelhança 684

14–4 Turbinas 687
Turbinas por Deslocamento Positivo 688
Turbinas Dinâmicas 688
Turbinas por Impulso 688
Turbinas de Reação 691

14–5 Leis de Semelhança para Turbinas 699
Parâmetros Adimensionais para Turbinas 699
Velocidade Específica da Turbina 702
Turbinas a Gás e Vapor 704

Aplicação em Foco: Atomizadores de Combustível Giratórios 706

Resumo 707
Referências e Leituras Sugeridas 707
Problemas 707

CAPÍTULO 15

INTRODUÇÃO À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL 716

15–1 Introdução e Fundamentos 717

Motivação 717
Equações do Movimento 717
Procedimento da Solução 718
Equações Adicionais do Movimento 720
Geração e Independência de Malha 720
Condições de Contorno 724
A Prática Leva à Perfeição 728

15–2 Cálculos CFD Laminares 728

Região de Entrada de Escoamento de Tubo em Re = 500 729
Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular em Re = 150 731

15–3 Cálculos CFD Turbulentos 737

Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular em Re = 10.000 739
Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular em Re = 10^7 741
Projeto do Estator de um Ventilador Axial com Pás Direcionais 741

15–4 CFD com Transferência de Calor 748

Elevação de Temperatura por meio de um Trocador de Calor com Escoamento Cruzado 749
Resfriamento de um Conjunto de Chips de Circuito Integrado 751

15–5 Cálculos da CFD para o Escoamento Compressível 754

Escoamento Compressível através de um Bocal Convergente-Divergente 756
Choques Oblíquos sobre uma Cunha 759

15–6 Cálculos da CFD para o Escoamento em Canal Aberto 760

Escoamento sobre uma Saliência na Parte Inferior de um Canal 760
Escoamento através de uma Comporta Basculante (Salto Hidráulico) 761

Aplicação em Foco: Um Estômago Virtual 763

Resumo 764
Referências e Leituras Sugeridas 764
Problemas 765

APÊNDICE

TABELAS E DIAGRAMAS DE PROPRIEDADES (EM UNIDADES SI) 766

TABELA A–1 Massa Molar, Constante de Gás e Calores Específicos dos Gases de Algumas Substâncias 767

TABELA A–2 Propriedades dos Pontos de Ebulição e Congelamento 772

TABELA A–3 Propriedades da Água Saturada 773

TABELA A–4 Propriedades do Refrigerante Saturado-134a 774

TABELA A–5 Propriedades da Amônia Saturada 775

TABELA A–6 Propriedades do Propano Saturado 776

TABELA A–7 Propriedades dos Líquidos 777

TABELA A–8 Propriedades dos Metais Líquidos 778

TABELA A–9 Propriedades do Ar à Pressão de 1 atm 779

TABELA A–10 Propriedades dos Gases à Pressão de 1 atm 776

TABELA A–11 Propriedades da Atmosfera a Grandes Altitudes 782

FIGURA A–12 Diagrama de Moody para o Fator de Atrito do Escoamento Completamente Desenvolvido em Tubos Circulares 783

TABELA A–13 Funções de Escoamento Compressível Isentrópico Unidimensional para um Gás Ideal com $k = 1,4$ 784

TABELA A–14 Funções de Choque Normal Unidimensional para um Gás Ideal com $k = 1,4$ 785

TABELA A–15 Funções de Escoamento de Rayleigh para um Gás Ideal com $k = 1,4$ 786

TABELA A–16 Funções de Escoamento de Fanno para um Gás Ideal com $k = 1,4$ 787

Glossário 788
Índice 799

PREFÁCIO

A mecânica dos fluidos é um tema excitante e fascinante, com aplicações práticas ilimitadas que variam de sistemas biológicos microscópicos a automóveis, aviões e propulsão de aeronaves. Contudo, ela é também, historicamente, um dos assuntos mais desafiadores para os estudantes universitários. Diferentemente das matérias ministradas anteriormente como física, química e mecânica aplicada, em que os estudantes freqüentemente aprendem equações e depois "jogam números" em suas calculadoras para encontrar a solução sem pensar na lógica, a análise apropriada de um problema de mecânica dos fluidos exige muito mais. Muitas vezes, os estudantes precisam avaliar primeiro o problema, levantar e justificar hipóteses e/ou aproximações, aplicar as leis físicas pertinentes em suas formas apropriadas e resolver as equações resultantes bem antes de inserirem quaisquer números em suas calculadoras. Muitos problemas de mecânica dos fluidos exigem mais do que apenas conhecimento do assunto; eles exigem também intuição física e experiência. Esperamos que este livro, através de suas meticulosas explicações dos conceitos e do uso de numerosos exemplos práticos, esboços, figuras e fotografias, preencha o vazio entre o conhecimento e a aplicação adequada desse conhecimento.

A mecânica dos fluidos é um tema maduro; as equações e aproximações básicas estão bem estabelecidas e podem ser encontradas em numerosos livros introdutórios. Os livros se distinguem uns dos outros pela maneira como a matéria é apresentada. Um livro de mecânica dos fluidos acessível deve apresentar a matéria em uma ordem progressiva, do item mais simples ao mais difícil, construindo cada capítulo sobre os alicerces lançados nos capítulos anteriores. Desta maneira, até mesmo os aspectos mais tradicionalmente desafiadores da mecânica dos fluidos podem ser aprendidos eficazmente.

A mecânica dos fluidos é, por sua própria natureza, um assunto altamente visual, e os estudantes aprendem mais rapidamente através da visualização. Portanto, é imperativo que um bom livro de mecânica dos fluidos também ofereça figuras, fotografias e apoios visuais de qualidade que ajudem a explicar a importância e o significado das expressões matemáticas.

OBJETIVOS

Este livro destina-se a ser usado como livro-texto no primeiro curso de mecânica dos fluidos para estudantes de engenharia do curso de graduação. Presume-se que os alunos tenham um *background* adequado em cálculo, física, mecânica aplicada e termodinâmica. Os objetivos deste texto são:

- Abordar *os princípios e as equações básicas* da dinâmica dos fluidos.
- Apresentar numerosos e diversos *exemplos de engenharia* do mundo real para dar aos alunos uma percepção de como a mecânica dos fluidos é aplicada na prática da engenharia.
- Desenvolver um *entendimento intuitivo* da mecânica dos fluidos ao enfatizar a física e apresentar figuras e apoios visuais atraentes para reforçar os conceitos.

O livro contém material suficiente para dar aos professores flexibilidade em relação a quais tópicos enfatizar. Por exemplo, os professores de engenharia aeronáutica e aeroespacial podem enfatizar o escoamento potencial, o coeficiente de resistência aerodinâmica, o escoamento compressível, turbomaquinaria e CFD, enquanto os professores de engenharia mecânica e civil podem optar por enfatizar

escoamentos dos fluidos, padrões de escoamento, visualização do escoamento, vorticidade e rotacionalidade e o teorema de transporte de Reynolds.

- O Capítulo 5 introduz as leis fundamentais de conservação de massa, momento e energia, com ênfase no uso apropriado da massa, equação de Bernoulli, as equação da energia e as aplicações dessas equações em engenharia.
- O Capítulo 6 aplica o teorema de transporte de Reynolds ao momento linear e ao momento angular e enfatiza aplicações práticas de engenharia na análise do momento de um volume de controle finito.
- O Capítulo 7 reforça o conceito de homogeneidade dimensional e introduz o teorema Pi de Buckingham de análise dimensional, similaridade dinâmica e o método das variáveis repetidas — úteis em todo o resto do livro e em muitas disciplinas de Ciências e Engenharia.
- O Capítulo 8 é dedicado ao escoamento em tubulações e dutos. Discutimos as diferenças entre o escoamento laminar e turbulento, perdas de atrito em tubulações e dutos e perdas menores em redes de tubulação. Explicamos também como escolher apropriadamente uma bomba ou ventilador que sirva em uma rede de tubulações. Finalmente, discutimos vários dispositivos experimentais que são usados para medir a vazão e a velocidade do escoamento.
- O Capítulo 9 trata da análise diferencial do escoamento de fluidos e inclui a derivação e aplicação da equação da continuidade, a equação de Cauchy e a equação de Navier–Stokes. Introduzimos também a função corrente e descrevemos sua utilidade na análise dos escoamentos de fluidos.
- O Capítulo 10 discute várias aproximações das equações de Navier–Stokes e apresenta exemplos de soluções referentes a cada aproximação, inclusive o escoamento lento, escoamento não-viscoso, escoamento irrotacional e camadas-limite.
- O Capítulo 11 aborda as forças que atuam sobre os corpos (resistência e sustentação), explicando a distinção entre atrito e arrasto de pressão e fornecendo os coeficientes de arrasto para muitos formatos geométricos comuns. Este capítulo enfatiza a aplicação prática de medições obtidas no túnel aerodinâmico conjugadas com os conceitos de similaridade dinâmica e análise dimensional introduzidos anteriormente, no Capítulo 7.
- O Capítulo 12 estende a análise do escoamento de fluidos ao escoamento compressível, em que o comportamento dos gases é fortemente afetado pelo número de Mach, e são introduzidos os conceitos de ondas de expansão, ondas de choque normais e oblíquas e vazão bloqueada.
- O Capítulo 13 trata do escoamento em canais abertos e alguns dos recursos particulares associados ao escoamento de líquidos que têm superfícies livres como, por exemplo, as ondas superficiais e saltos hidráulicos.
- O Capítulo 14 examina a turbomaquinaria mais detalhadamente, inclusive as bombas, ventiladores e turbinas. Enfatiza a como as bombas e turbinas funcionam, em vez de seu projeto detalhado. Discutimos também o projeto global de bombas e turbinas, com base nas leis da similaridade dinâmica e análises simplificadas do vetor velocidade.
- O Capítulo 15 descreve os conceitos fundamentais da dinâmica dos fluidos computacional (CFD) e mostra aos estudantes como usar códigos CFD comerciais como uma ferramenta para resolver problemas complexos de mecânica dos fluidos. Enfatizamos a aplicação da CFD em vez dos algoritmos usados em códigos CFD.

Cada capítulo contém um grande número de problemas no final, que pode ser usado como trabalho de casa e de classe e que são adequados para serem usados pelos professores. Os problemas que envolvem cálculos do final dos capítulos trabalham com o sistema internacional de unidades (SI) apenas, mas nos

Exemplos desenvolvidos nos capítulos mantivemos alguns deles em unidades do sistema inglês. Finalmente, um amplo apêndice é apresentado, fornecendo as propriedades termodinâmicas e de fluidos de diversos materiais, não apenas do ar e da água como na maioria dos textos introdutórios sobre fluidos. Muitos dos problemas de final de capítulo exigem o uso das propriedades que se encontram nesses apêndices.

FERRAMENTAS DE APRENDIZAGEM

ÊNFASE NA FÍSICA

Um recurso particular deste livro é a ênfase dada aos aspectos físicos da matéria de estudo, além das representações e manipulações matemáticas.

Os autores acreditam que a ênfase na educação de estudantes dos cursos universitários deve concentrar-se no desenvolvimento de uma compreensão dos mecanismos físicos subjacentes e no perfeito domínio da resolução de problemas práticos que o engenheiro provavelmente encontrará na vida real. O desenvolvimento intuitivo também deve transformar o curso em uma experiência mais inovadora e valiosa para os estudantes.

USO EFETIVO DA ASSOCIAÇÃO

Uma mente observadora não terá nenhuma dificuldade para entender a engenharia. Afinal de contas, todos os princípios da engenharia são fundamentados em nossas *experiências do dia a dia* e em *observações experimentais*. Portanto, uma abordagem intuitiva, física, é usada ao longo deste livro inteiro. Freqüentemente, são traçados *paralelos* entre a matéria ministrada e as experiências diárias dos alunos a fim de que eles possam relacionar a matéria com aquilo que já sabem.

AUTODIDATISMO

A matéria do livro é apresentada em um nível que o estudante médio pode seguir confortavelmente. Ela fala aos estudantes, não sobre estudantes. De fato, ele é *auto-instrutivo*. Observando que os princípios científicos têm como base observações experimentais, a maioria das derivações deste livro é fundamentada amplamente em argumentos físicos e, deste modo, fácil de seguir e entender.

USO EXTENSIVO DE IMAGENS

Figuras são importantes instrumentos de aprendizagem que ajudam o aluno a entender a situação, e este livro faz uso eficaz de gráficos. Ele contém mais figuras e ilustrações do que qualquer outro livro desta categoria. As figuras chamam a atenção e estimulam a curiosidade e o interesse. A maioria das figuras deste livro pretender servir de meio para enfatizar alguns conceitos-chave que, de outro modo, passariam despercebidos; algumas servem como resumos.

ABERTURA DE CAPÍTULOS E RESUMOS

Cada capítulo inicia com uma visão geral da matéria a ser abordada. Um resumo é incluído no fim de cada capítulo, proporcionando uma rápida revisão dos conceitos básicos e relações importantes, além de destacar os pontos-chave da matéria.

NUMEROSOS EXEMPLOS RESOLVIDOS COM UM PROCEDIMENTO SISTEMÁTICO DE RESOLUÇÃO

Cada capítulo contém diversos exemplos resolvidos que clarificam a matéria e ilustram o uso dos princípios básicos. Uma abordagem intuitiva e sistemática é usada na resolução dos exemplos de problemas, enquanto mantém um estilo coloquial informal. Primeiramente, o problema é estabelecido e depois os objetivos são identificados. As hipóteses são então declaradas, juntamente com suas justificativas. As propriedades necessárias para resolver o problema também são listadas.

Os valores numéricos são usados juntamente com suas unidades para enfatizar que números sem unidades não são significativos, e as manipulações de

unidades são tão importantes quanto manipular os valores numéricos com uma calculadora. O significado das conclusões é discutido depois das soluções. Esta abordagem também é usada consistentemente nas soluções apresentadas no manual de soluções do professor. (Para ter acesso, é necessário que o professor cadastre-se na editora.)

UMA GRANDE VARIEDADE DE PROBLEMAS REALISTAS DE FINAL DE CAPÍTULO

Os problemas de final de capítulo estão agrupados sob tópicos específicos para tornar mais fácil a escolha do problema tanto pelos professores quanto pelos alunos. Dentro de cada grupo de problemas encontram-se as Questões Conceituais, indicadas por "C," para verificar o nível de entendimento que os estudantes têm dos conceitos básicos. Os Problemas de Revisão são mais abrangentes por natureza e não estão diretamente ligados a nenhuma seção específica de um capítulo – em alguns casos exigem uma revisão da matéria aprendida nos capítulos anteriores. Problemas de Projeto e Ensaio destinam-se a estimular os estudantes a fazer julgamentos no âmbito da engenharia, a realizar uma exploração independente de tópicos de interesse e a comunicar suas descobertas de maneira profissional. Problemas com o são resolvidos usando-se o EES ou outro software adequado de engenharia. Diversos problemas relacionados a economia e segurança foram incorporados ao texto para ampliar o conhecimento a respeito de custos e segurança entre os estudantes de engenharia. Respostas a problemas selecionados estão listadas imediatamente depois do problema por uma questão de conveniência para os estudantes.

USO DE NOTAÇÃO COMUM

O uso de uma notação diferente para as mesmas quantidades em diferentes cursos de engenharia há muito é uma fonte de descontentamento e confusão. Um estudante que trata tanto da mecânica dos fluidos como da transferência de calor, por exemplo, precisa usar a notação Q para a taxa de vazão volumétrica em um curso e para a transferência de calor em outro. A necessidade de haver uma unificação das notações na área da engenharia freqüentemente tem sido levantada, até mesmo em alguns relatórios de conferências patrocinadas pela National Science Foundation através das Foundation Coalitions, mas pouco esforço se fez até hoje a este respeito. Por exemplo, consulte o relatório final da "Mini-Conference on Energy Stem Innovations", realizada em 28 e 29 de maio de 2003, na Universidade de Wisconsin. Neste livro, fizemos um esforço consciente para minimizar este conflito ao adotarmos a familiar notação de termodinâmica $\dot{V}$ para taxa de vazão volumétrica, reservando, assim, a notação Q para a transferência de calor. Além disso, usamos coerentemente um ponto sobre a letra para denotar a taxa de tempo. Achamos que tanto os estudantes quanto os professores apreciarão este esforço para promovermos uma notação comum.

ESCOLHA DE UNIDADES DO SISTEMA INTERNACIONAL (SI) OU DO SISTEMA INTERNACIONAL E INGLÊS CONJUNTAMENTE

Em reconhecimento do fato de que as unidades inglesas ainda são amplamente usadas em algumas indústrias, tanto o SI como as unidades do sistema inglês são usados neste texto, com ênfase no SI. Nos Problemas usamos apenas o SI, mas nos Exemplos usamos SI e inglês. A matéria deste livro pode ser abordada usando-se uma combinação de unidades do sistema internacional e do sistema inglês conjuntamente, ou somente do SI, dependendo da preferência do professor.

ABORDAGEM CONJUNTA DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI E DAS EQUAÇÕES DA ENERGIA

A equação de Bernoulli é uma das equações mais freqüentemente usadas na mecânica dos fluidos, mas é também uma das mais usadas de maneira equivocada. Portanto, é importante enfatizar as limitações do uso desta equação idealizada e mostrar como levar em conta apropriadamente as imperfeições e

prejuízos irreversíveis. No Capítulo 5, fazemos isso introduzindo a equação da energia diretamente na equação de Bernoulli e demonstrando como as soluções de muitos problemas práticos de engenharia diferem daqueles que são obtidos usando-se esta equação. Isso ajuda os estudantes a obterem uma visão realista.

UM CAPÍTULO SEPARADO SOBRE A CFD

Códigos comerciais de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) são amplamente usados no exercício da engenharia, no projeto e análise de sistemas de escoamento e tornaram-se extremamente importantes para os engenheiros terem um sólido entendimento dos aspectos fundamentais, capacidades e limitações da CFD. Reconhecendo que a maioria dos currículos escolares de graduação em engenharia não tem espaço para um curso integral de CFD, um capítulo foi incluído aqui para compensar esta deficiência e para fornecer aos alunos uma base adequada sobre as potencialidades e fragilidades da CFD.

APLICAÇÃO EM FOCO

Ao longo do livro são realçados exemplos denominados Aplicação em Foco, nos quais uma aplicação real da mecânica dos fluidos é apresentada. Um recurso particular desses exemplos especiais é que eles foram escritos por autores convidados renomados. As aplicações foram projetadas para mostrar aos estudantes como a mecânica dos fluidos tem diversas aplicações em uma ampla variedade de campos. Incluem também vistosas fotografias de pesquisas dos autores convidados.

GLOSSÁRIO DE TERMOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Ao longo de todos os capítulos, quando um termo ou conceito chave é introduzido e definido, ele aparece em **negrito preto**. Termos fundamentais de mecânica dos fluidos aparecem em **negrito azul**, e esses termos fundamentais também aparecem em um abrangente glossário no final do livro desenvolvido pelo professor James Brasseur, da Universidade Estadual da Pensilvânia. Este glossário exclusivo é uma excelente ferramenta de aprendizagem e revisão para os estudantes à medida que progridem no estudo da mecânica dos fluidos.

FATORES DE CONVERSÃO

Fatores de conversão freqüentemente usados, constantes físicas e propriedades do ar e da água a 20°C e temperatura e pressão freqüentemente usadas estão relacionados nas páginas iniciais do livro, para fácil consulta.

NOMENCLATURA

Uma lista dos símbolos, subscritos e sobrescritos importantes usados no texto está listada nas páginas iniciais e finais do livro, para fácil consulta.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer com muito apreço pelos numerosos e valiosos comentários, sugestões, críticas construtivas e elogios recebidos dos seguintes avaliadores e revisores:

Mohammad Ali
Kettering University

Darryl Alofs
University of Missouri, Rolla

Farrukh Alvi
Florida A & M University & Florida State University

Ryoichi Amano
University of Wisconsin–Milwaukee

Michael Amitay
Rensselaer Polytechnic Institute

Haris Catrakis
University of California, Irvine

Louis N. Cattafesta III
University of Florida

Soyoung Cha
University of Illinois at Chicago

Tiao Chang
Ohio University

Young Cho
Drexel University

T. P. Ashokbabu
National Institute of Technology, India

Idirb Azouz
Southern Utah University

Kenneth S. Ball
University of Texas at Austin

James G. Brasseur
The Pennsylvania State University

Glenn Brown
Oklahoma State University

John Callister
Cornell University

Frederick Carranti
Syracuse University

Kevin W. Cassel
Illinois Institute of Technology

Dwayne Edwards
University of Kentucky

Richard Figliola
Clemson University

Charles Forsberg
Hofstra University

Fred K. Forster
University of Washington

Rong Gan
The University of Oklahoma

Philip Gerhart
University of Evansville

Fred Gessner
University of Washington

Sam Han
Tennessee Technological University

Mark J. Holowach
Ballston Spa, NY

Neal Houze
Purdue University

Barbara Hutchings
Fluent Incorporated

Niu Jianlei
Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong

David Johnson
University of Waterloo

Matthew Jones
Brigham Young University

Zbigniew J. Kabala
Duke University

Fazal Kauser
California State Polytechnic University, Pomona

Pirouz Kavehpour
University of California, Los Angeles

Jacob Kazakia
Lehigh University

Po-Ya (Abel) Chuang
The Pennsylvania State University

William H. Colwill
American Hydro Corporation

A. Terrence Conlisk Jr.
The Ohio State University

Daniel Cox
Texas A&M University

John Crepeau
University of Idaho

Jie Cui
Tennessee Technological University

Lisa Davids
Embry-Riddle Aeronautical University

Jerry Drummond
The University of Akron

Kraemer Luks
The University of Tulsa

G. Mahinthakumar
North Carolina State University

Saeed Manafzadeh
University of Illinois at Chicago

Daniel Maynes
Brigham Young University

James M. McDonough
University of Kentucky

Richard S. Miller
Clemson University

Shane Moeykens
Fluent Incorporated

Joseph Morrison
NASA Langley Research Center

Karim Nasr
Kettering University

C. O. Ng
University of Hong Kong, Hong Kong

Wing Ng
Virginia Polytechnic Institute

Tay Seow Ngie
Nanyang Technological University, Singapore

John Nicklow
Southern Illinois University at Carbondale

Nagy Nosseir
San Diego State University

Emmanuel Nzewi
North Carolina A&T State University

Ali Ogut
Rochester Institute of Technology

Michael Olsen
Iowa State University

Roger Pawlowski
Lawrence Technological University

Bryan Pearce
The University of Maine

Richard Keane
University of Illinois at Urbana–Champaign

Jamil Khan
University of South Carolina

N. Nirmala Khandan
New Mexico State University

Jeyhoon Khodadadi
Auburn University

Subha Kumpaty
Milwaukee School of Engineering

James A. Liburdy
Oregon State University

Chao-An Lin
National Tsing Hua University, Taiwan

Winoto SH
National University of Singapore, Singapore

Muhammad Sharif
The University of Alabama

Mark Stone
Washington State University

Chelakara Subramanian
Florida Institute of Technology

Constantine Tarawneh
The University of Texas–Pan American

Sahnaz Tigrek
Middle East Technical University

Hsu Chin Tsau
Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong M.

Blair Perot
University of Massachusetts Amherst

Alexander Povitsky
The University of Akron

Guy Riefler
Ohio University

Kurt Rosentrater
Northern Illinois University

Subrata Roy
Kettering University

Joseph Sai
Texas A&M University–Kingsville

Gregory Selby
Old Dominion University

Gary S. Settles
The Pennsylvania State University

Erol Ulucakli
Lafayette College

Oleg Vasilyev
University of Missouri

Zhi Jian Wang
Michigan State University

Timothy Wei
Rutgers, The State University of New Jersey

Minami Yoda
Georgia Institute of Technology

Mohd Zamri Yusoff
Universiti Tenaga Nasional, Malaysia

Os autores também agradecem aos autores convidados que contribuíram com fotografias e artigos para as seções *Aplicação em Foco*:

Michael L. Billet
The Pennsylvania State University

James G. Brasseur
The Pennsylvania State University

Werner J. A. Dahm
University of Michigan

Brian Daniels
Oregon State University

Michael Dickinson
California Institute of Technology

Gerald C. Lauchle
The Pennsylvania State University

James A. Liburdy
Oregon State University

Anupam Pal
The Pennsylvania State University

Ganesh Raman
Illinois Institute of Technology

Gary S. Settles
The Pennsylvania State University

Lorenz Sigurdson
University of Alberta

Nossos agradecimentos especiais ao professor Gary Settles e aos seus colegas da Penn State (Lori Dodson-Dreibelbis, J. D. Miller e Gabrielle Tremblay). Similarmente, os autores são gratos a diversas pessoas da Fluent Inc., que ajudaram a disponibilizar as maravilhosas animações de CFD e nos modelos do software FLUENT FLOWLAB: Shane Mocykens, Barbara Hutchings, Liz Marshall, Ashish Kulkarni, Ajay Parihar e R. Murali Krishnan.

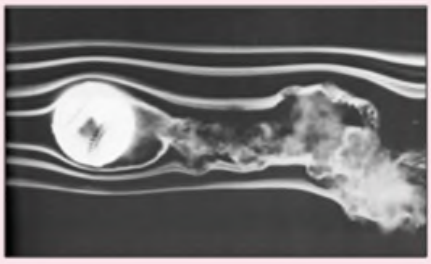
Os autores também agradecem ao professor James Brasseur, da Penn State, por criar o precioso glossário de termos de mecânica dos fluidos, ao professor Glenn Brown, da Oklahoma State, por apresentar muitos itens de interesse histórico ao longo do livro, ao professor Mehmet Kanoglu, da Gaziantep University, por preparar as soluções dos problemas de EES, e ao professor Tahsin Engin, da Sakarya University, por contribuir com diversos problemas de final de capítulo.

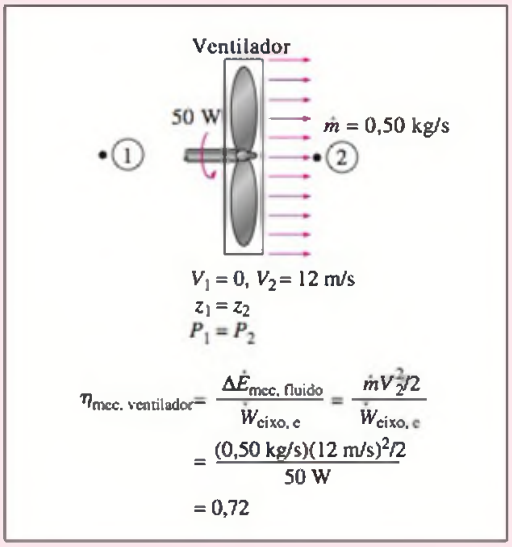
Finalmente, agradecemos especialmente a nossas famílias, particularmente às nossas esposas, Zehra Çengel e Suzanne Cimbala, pela contínua paciência, compreensão e apoio durante a preparação deste livro, que envolveu muitas longas horas, durante as quais elas precisaram cuidar sozinhas das preocupações familiares porque seus maridos estavam com a cara colada na tela do computador.

Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

Guia de Estudo

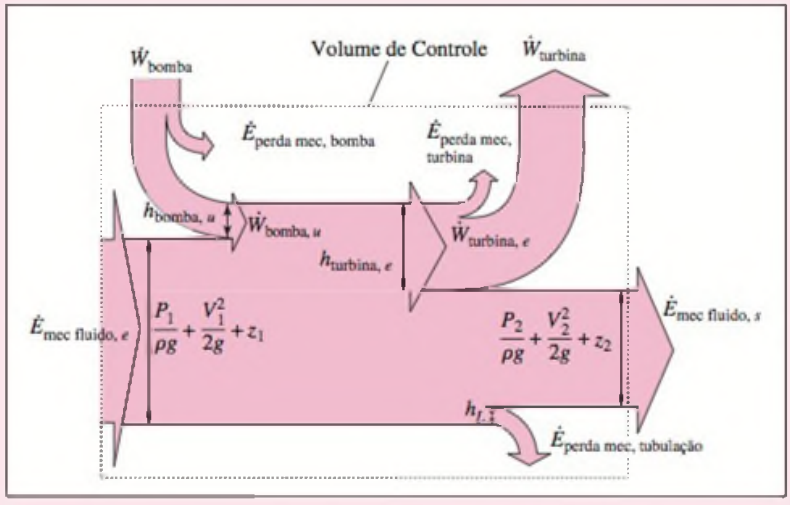
A mecânica dos fluidos é um assunto altamente **visual**, e nosso livro traz mais **ilustrações** e **fotos** do que qualquer outro livro sobre mecânica dos fluidos. Incluímos muitas das fotos clássicas encontradas no *Album of Fluid Motion* de Van Dyke.





Nosso livro enfatiza os **aspectos físicos da mecânica dos fluidos**, além das representações e manipulações matemáticas. Os autores acreditam que é preciso continuar enfatizando no curso de graduação o desenvolvimento dos conceitos físicos básicos e a capacidade de solução de problemas práticos que um engenheiro pode enfrentar no mundo real.

As **equações de Bernoulli** e **da energia** são usadas com freqüência (e quase sempre mal utilizadas) na mecânica dos fluidos. Os autores apresentam a equação da energia logo após a equação de Bernoulli e demonstram como as soluções de muitos problemas práticos da engenharia diferem daqueles obtidos com a equação de Bernoulli. Isso ajuda os alunos a desenvolverem uma visão realista da equação de Bernoulli.



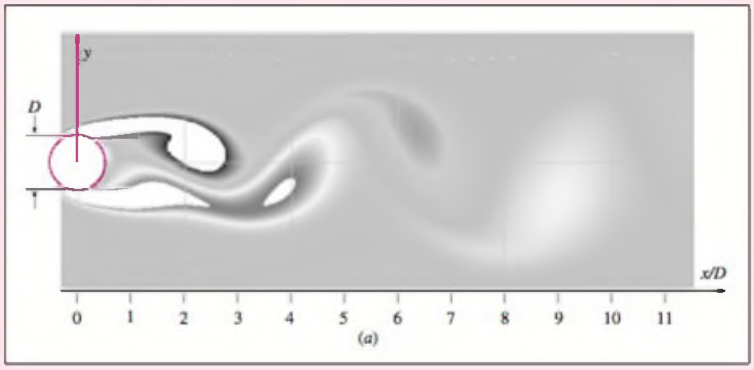
Guia de Estudo

O livro *Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações* oferece aos professores **flexibilidade de tópicos**. Por exemplo, após abordar os fundamentos, os professores de engenharia mecânica podem optar por se concentrar na análise de volume de controle, análise dimensional, escoamentos em tubos e turbomaquinaria. Os professores de engenharia civil podem optar por enfatizar os escoamentos em tubos, escoamentos em canal aberto e muitos exemplos do tipo "rio e barco", enquanto os professores de engenharia aeronáutica e aeroespacial podem se concentrar no escoamento potencial, forças de arrasto e sustentação, escoamento compressível, turbomaquinaria e CFD.

Uma riqueza de materiais sobre a **história da mecânica dos fluidos** está integrada ao texto, incluindo:

- A seção "Uma Breve História da Mecânica dos Fluidos" no Capítulo 1 apresenta os pontos altos no desenvolvimento da teoria e da prática. Vai além de uma simples lista de nomes e datas, oferecendo uma perspectiva da importância do papel da mecânica dos fluidos ao longo da história.
- O Capítulo 7 apresenta uma lista das pessoas homenageadas com parâmetros adimensionais. Essa é uma compilação exclusiva e não pode ser encontrada em nenhum outro material impresso.
- O texto cita indivíduos que realizaram contribuições significativas. A exatidão e justiça de todos os créditos foram verificadas com as referências históricas.

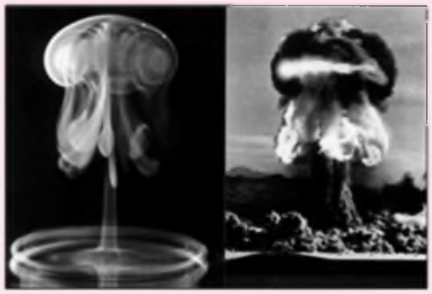
Em todo o livro há exemplos gerados pela **dinâmica dos fluidos computacional (CFD),** e oferecemos um capítulo introdutório em CFD. Nosso objetivo é apresentar aos alunos da graduação as capacidades e limitações da CFD como uma *ferramenta de engenharia.*



Guia de Estudo

Em todo o livro há recursos especiais chamados **Aplicação em Foco**, que mostram uma aplicação no mundo real da mecânica dos fluidos. Um aspecto exclusivo desses exemplos é que eles foram escritos por autores convidados de prestígio. Os tópicos de Aplicação em Foco incluem:

- Como uma mosca voa
- Formação de uma gota
- Um estômago virtual
- O que as explosões nucleares e as gotas de chuva têm em comum



cinemática [122]: ao contrário da *dinâmica*, os aspectos da cinemática de um escoamento de fluido são aqueles que não envolvem diretamente o balanço de forças da Segunda Lei de Newton. A cinemática se refere às descrições e derivações matemáticas baseadas apenas na conservação de massa (continuidade) e nas definições relacionadas ao escoamento e à deformação.

Os termos e conceitos fundamentais da mecânica dos fluidos aparecem em **azul negrito** ao longo do texto, e também em um Glossário no final do livro escrito pelo Professor James Brasseur, da The Pennsylvania State University.

Cada capítulo contém **problemas de exemplo** resolvidos e provenientes do mundo real. Os autores usam uma **abordagem consistente para a solução de problemas,** mantendo seu estilo coloquial informal. Essa abordagem de solução de problemas também é utilizada em todas as soluções apresentadas no manual de soluções do professor.

FIGURA 11–9
Esquema do Exemplo 11–1.

EXEMPLO 11–1 **Medição do Coeficiente de Arrasto de um Carro**

O coeficiente de arrasto de um carro em condições de projeto a 1 atm, 70°F 60 mi/h deve ser determinado experimentalmente em um grande túnel de vento com um teste em escala real (Figura 11–9). A área frontal do carro é de 22,26 pés^2. Se a força que age sobre o carro na direção do escoamento é medida como 68 lbf, determine o coeficiente de arrasto desse carro.

SOLUÇÃO A força de arrasto que age sobre um carro é medida em um túnel de vento. O coeficiente de arrasto do carro em condições de teste deve ser determinado.

Hipóteses 1 O escoamento de ar é em regime permanente e incompressível. **2** A seção transversal do túnel é suficientemente grande para simular escoamento livre sobre o carro. **3** A parte inferior do túnel também se movimenta à velocidade do ar para aproximar as condições reais de operação ou esse efeito é desprezível.

Propriedades A densidade do ar a 1 atm e 70°F é $\rho = 0{,}07489$ lbm/pé^3.

Análise A força de arrasto que age sobre um corpo e o coeficiente de arrasto são dados por

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2} \quad \text{e} \quad C_D = \frac{2F_D}{\rho A V^2}$$

onde A é a área frontal. Substituindo e observando que 1 mi/h = 1,467 pés/s, o coeficiente de arrasto do carro é determinado como

$$C_D = \frac{2 \times (68 \text{ lbf})}{(0{,}07489 \text{ lbm/pé}^3)(22{,}26 \text{ pé}^2)(60 \times 1{,}467 \text{ pé/s})^2} \left(\frac{32{,}2 \text{ lbm} \cdot \text{pés/s}^2}{1 \text{ lbf}} \right) = 0{,}34$$

Discussão Observe que o coeficiente de arrasto depende das condições de projeto, e seu valor pode ser diferente com condições diferentes como o número de Reynolds. Portanto, os coeficientes de arrasto publicados para veículos diferentes podem ser comparados de modo significativo apenas se forem determinados sob condições semelhantes. Isso mostra a importância do desenvolvimento de procedimentos de teste padrão para a indústria..

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo introdutório, apresentamos os conceitos básicos comumente usados na análise do escoamento dos fluidos. Começamos o capítulo com uma discussão dos estados da matéria e das diversas maneiras de classificar o escoamento dos fluidos, tais como *regiões de escoamento viscoso* versus *não viscoso, escoamento interno* versus *externo, escoamento compressível* versus *incompressível, escoamento laminar* versus *turbulento, escoamento natural* versus *forçado e escoamento em regime permanente (estacionário)* versus *escoamento em regime não permanente.* Discutimos também a condição de não-escorregamento nas interfaces sólido-fluido e apresentamos uma breve história do desenvolvimento da mecânica dos fluidos.

Depois de apresentarmos os conceitos de sistema e volume de controle, revemos os *sistemas de unidades* que serão usados. Em seguida, discutimos como os modelos matemáticos para problemas de engenharia são montados e como interpretar os resultados obtidos pela análise de tais modelos. Segue a apresentação de uma *técnica de solução de problemas*, intuitiva e sistemática, que pode ser usada como um modelo na solução dos problemas de engenharia. Por fim, discutimos exatidão (acurácia), precisão e algarismos significativos nas medidas e cálculos de engenharia.

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura deste capítulo você deve ser capaz de:

- Compreender os conceitos básicos de mecânica dos fluidos e reconhecer os vários tipos de problema de escoamento de fluidos encontrados na prática
- Modelar problemas de engenharia e resolvê-los de maneira sistemática
- Ter conhecimento prático de acurácia, precisão e algarismos significativos e reconhecer a importância da homogeneidade dimensional nos cálculos de engenharia

FIGURA 1–1
A mecânica dos fluidos trata de líquidos e gases em movimento ou em repouso.
© Vol. 16/Photo Disc.

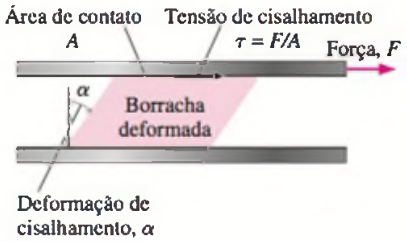


FIGURA 1–2
Deformação de uma borracha escolar posicionada entre duas placas paralelas sob a influência de uma força de cisalhamento.

1–1 ▪ INTRODUÇÃO

A **mecânica** é a ciência física mais antiga que trata de corpos tanto estacionários como em movimento sob a influência de forças. O ramo da mecânica que trata dos corpos em repouso é denominado **estática**, ao passo que o ramo que trata dos corpos em movimento denomina-se **dinâmica**. A subcategoria **mecânica dos fluidos** é definida como a ciência que trata do comportamento dos fluidos em repouso (*estática dos fluidos*) ou em movimento (dinâmica dos fluidos) e da interação entre fluidos e sólidos ou outros fluidos nas fronteiras. A mecânica dos fluidos também é chamada de **dinâmica dos fluidos**, considerando os fluidos em repouso como um caso especial de movimento com velocidade zero (Figura 1–1).

A mecânica dos fluidos divide-se também em várias categorias. O estudo do movimento dos fluidos que são praticamente incompressíveis (tais como líquidos, especialmente água e gases em baixa velocidade) é geralmente denominado **hidrodinâmica**. Uma subcategoria da hidrodinâmica é a **hidráulica**, que trata do escoamento dos líquidos em tubulações e canais abertos. A **dinâmica dos gases** trata do escoamento dos fluidos que sofrem mudanças de densidade significativas, como o caso do escoamento de gases em alta velocidade através de bocais. A categoria **aerodinâmica** trata do escoamento de gases (especialmente ar) sobre corpos tais como aeronaves, foguetes e automóveis em velocidades altas ou baixas. Algumas outras categorias especializadas, como **meteorologia**, **oceanografia** e **hidrologia** tratam de escoamentos que ocorrem naturalmente.

O Que É Fluido?

Você se lembra da física que uma substância existe em três estados ou fases fundamentais: sólido, líquido e gasoso. (Em temperaturas muito altas também existe o plasma.) Uma substância no estado líquido ou gasoso é denominada **fluido**. A distinção entre um sólido e um fluido é baseada na capacidade da substância resistir a uma tensão de cisalhamento (ou tangencial) aplicada, que tende a mudar sua forma. O sólido resiste à tensão de cisalhamento aplicada deformando-se, ao passo que o fluido deforma-se continuamente sob a influência da tensão de cisalhamento, não importando quão pequena ela seja. Nos sólidos a tensão é proporcional à *deformação*, mas nos fluidos a tensão é proporcional à *taxa de deformação*. Quando uma força de cisalhamento constante é aplicada, o sólido eventualmente pára de deformar-se num certo ângulo de deformação fixo, enquanto o fluido nunca pára de deformar-se e a taxa de deformação tende para um certo valor

Considere um bloco retangular de borracha posicionado firmemente entre duas placas. Quando a placa superior é tracionada com força F, enquanto a placa inferior é mantida fixa, o bloco de borracha deforma-se, como mostrado na Figura 1–2. O ângulo de deformação (chamado de *deformação por cisalhamento ou deslocamento angular*) aumenta proporcionalmente à força aplicada F. Supondo que não haja deslizamento entre a borracha e as placas, a superfície superior da borracha é deslocada em um valor igual ao deslocamento da placa superior, enquanto a superfície inferior permanece estacionária. No equilíbrio, a força líquida que atua sobre a placa na direção horizontal deve ser nula e, portanto, uma força de mesma intensidade, mas oposta a F deve estar atuando sobre a placa. A força oposta que se desenvolve na interface placa-borracha devida ao atrito é expressa por $F = \tau A$, onde τ é a tensão de cisalhamento e A é a área de contato entre a placa superior e a borracha. Quando a força é removida, a borracha volta à sua posição original. Tal fenômeno também é observado em outros sólidos como um bloco de aço, desde que a força não ultrapasse o regime elástico. Se esse experimento for feito com um fluido (com duas placas grandes paralelas colocadas num grande corpo de água, por exemplo), a camada de fluido em contato com a placa superior move-se continuamente com a velocidade da placa, não importando quão pequena a força F seja. A velocidade do fluido decresce com a profundidade devido ao atrito entre as camadas de fluido, chegando a zero na camada em contato com a placa inferior.

Você se lembra de que na estática a **tensão** é definida como força por unidade de área e é determinada dividindo-se a força pela área sobre a qual ela atua. A com-

ponente normal da força que atua sobre a superfície por unidade de área é chamada de **tensão normal**, a componente tangencial da força que atua sobre uma superfície por unidade de área é chamada de **tensão de cisalhamento** (Figura 1–3). Num fluido em repouso, a tensão normal é chamada de **pressão**. As paredes que suportam um fluido eliminam a tensão de cisalhamento e, assim, um fluido em repouso está no estado de tensão de cisalhamento nulo. Quando as paredes são removidas ou o recipiente do líquido é inclinado, desenvolve-se uma tensão e o liquído esparrama-se ou move-se para manter a superfície livre na horizontal.

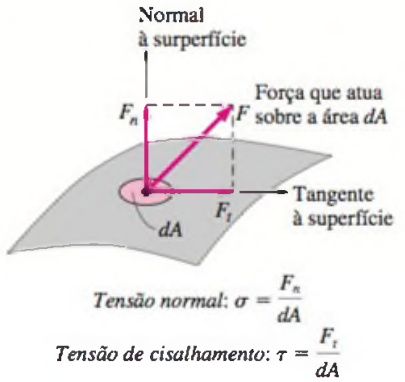


FIGURA 1–3
Tensão normal e tensão de cisalhamento na superfície de um elemento de fluido. No caso de fluidos em repouso, a tensão de cisalhamento é nula e a pressão é a única tensão normal.

Num líquido, grupos de moléculas movem-se uns em relação aos outros, mas o volume permanece relativamente constante devido às fortes forças de coesão entre as moléculas. Como resultado, o líquido toma a forma do recipiente no qual está contido e, no caso de um recipiente maior sujeito a um campo gravitacional, forma-se uma superfície livre. Um gás, por outro lado, expande-se até encontrar as paredes do recipiente e preenche todo o espaço disponível. Tal fato ocorre porque as moléculas estão bastante espaçadas e as forças coesivas entre elas são muito pequenas. Ao contrário dos líquidos, os gases não formam uma superfície livre (Figura 1–4).

Embora sólidos e fluidos sejam facilmente distinguíveis na maioria dos casos, tal distinção não é tão clara em alguns casos limítrofes. Por exemplo, o *asfalto* parece e comporta-se como um sólido, visto que resiste à tensão de cisalhamento durante curtos períodos de tempos. Mas deforma-se lentamente e comporta-se como um fluido quando tais forças são exercidas durante longos períodos de tempo. Alguns plásticos, chumbo e misturas de argila exibem comportamento similar. Tais casos limítrofes estão além do objetivo deste texto. Os fluidos que abordaremos neste livro serão claramente reconhecidos como fluidos.

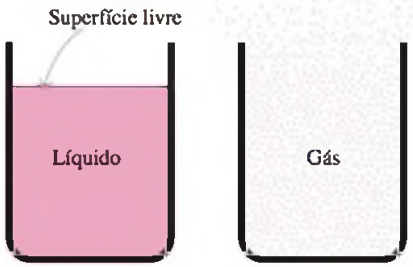


FIGURA 1–4
Ao contrário do líquido, o gás não forma uma superfície livre e expande-se para preencher todo o espaço disponível.

As ligações intermoleculares são mais fortes nos sólidos e mais fracas nos gases. Uma razão é que as moléculas nos sólidos estão agrupadas mais próximas umas das outras, enquanto nos gases elas estão separadas por distâncias relativamente grandes (Figura 1–5).

As moléculas de um sólido são arranjadas num padrão que se repete por todo o sólido. Devido às pequenas distâncias entre as moléculas de um sólido, as forças atrativas entre elas são maiores e mantêm as moléculas em posições fixas. O espaço entre moléculas no estado líquido não é muito diferente daquele no estado sólido, exceto que as moléculas não estão mais em posições fixas umas em relação às outras, mas podem girar e transladar-se livremente. Num líquido, as forças intermoleculares são mais fracas em relação aos sólidos, porém ainda são mais fortes em comparação aos gases. As distâncias entre moléculas aumentam ligeiramente à medida que um sólido se liquefaz, sendo a água uma exceção notável.

No estado gasoso, as moléculas estão distantes umas das outras e não existe ordem molecular. As moléculas do gás movem-se aleatoriamente, colidindo umas contra as outras e contra as paredes do recipiente em que estão contidas. As forças intermoleculares são muito pequenas, particularmente em baixas densidades, e as

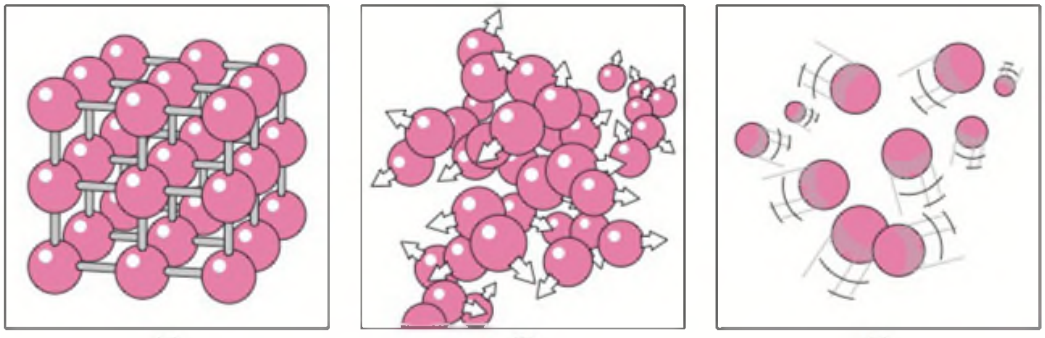


FIGURA 1–5
Arranjo de átomos em estados diferentes: (*a*) as moléculas estão em posições relativamente fixas num sólido, (*b*) grupos de moléculas movem-se em torno uns dos outros no estado líquido, (*c*) as moléculas movem-se aleatoriamente no estado gasoso.

FIGURA 1–6
Numa escala microscópica, a pressão é determinada pela interação entre moléculas individuais de gás. Entretanto, podemos medir a pressão, numa escala macroscópica, com um manômetro.

colisões são o único modo de interação entre as moléculas. As moléculas em estado gasoso possuem nível de energia consideravelmente maior do que quando estão nos estados líquido ou sólido. Portanto, o gás precisa liberar uma grande quantidade de energia antes que se condense ou congele.

As palavras *gás* e *vapor* geralmente são usadas como sinônimos. O estado de vapor de uma substância é costumeiramente chamado de *gás* quando está acima da temperatura crítica. Usualmente, *vapor* significa gás que não está muito distante do estado de condensação.

Qualquer sistema fluido prático consiste em um grande número de moléculas, e as propriedades do sistema naturalmente dependem do comportamento dessas moléculas. Por exemplo, a pressão de um gás num recipiente é o resultado do momento transferido entre as moléculas e as paredes do recipiente. Entretanto, não é necessário conhecer o comportamento das moléculas do gás para determinar a pressão no recipiente. Seria suficiente instalar um manômetro no recipiente (Figura 1–6). Essa abordagem macroscópica ou clássica não requer o conhecimento do comportamento individual das moléculas e fornece um modo direto e fácil para solucionar problemas de engenharia. A abordagem microscópica mais elaborada ou *estatística*, baseada no comportamento médio de grandes grupos de moléculas individuais, é bastante complexa e usada neste texto apenas como suporte.

Áreas de Aplicação da Mecânica dos Fluidos

A mecânica dos fluidos é amplamente usada tanto nas atividades diárias como no projeto de sistemas de engenharia modernos, de aspiradores de pó a aeronaves supersônicas. Portanto, é importante desenvolver uma boa compreensão dos princípios básicos da mecânica dos fluidos.

Para começar, a mecânica dos fluidos desempenha uma função vital no corpo humano. O coração está constantemente bombeando sangue para todas as partes do corpo humano através das artérias e veias e os pulmões são as regiões de escoamento de ar em direções alternadas. É redundante dizer que todos os corações artificiais, máquinas de respirar e sistemas de diálise são projetados usando a dinâmica dos fluidos.

Uma casa comum é, sob certo aspecto, um salão de exposições repleto de aplicações da mecânica dos fluidos. Os sistemas de canalização de água fria, gás natural e esgoto para residências individuais e para uma cidade inteira são projetadas primariamente com base na mecânica dos fluidos. O mesmo também acontece com as redes de canalização e dutos dos sistemas de aquecimento e ar-condicionado. Uma geladeira contém tubos por onde flui o refrigerante, um compressor que pressuriza o refrigerante e dois trocadores de calor onde o refrigerante absorve e expele calor. A mecânica dos fluidos desempenha o papel principal no projeto de todos esses componentes. Até mesmo a operação de uma simples torneira é baseada na mecânica dos fluidos.

Podemos também observar numerosas aplicações da mecânica dos fluidos num automóvel. Todos os componentes associados ao transporte de combustível do tanque aos cilindros – tubulação de combustível, bomba de combustível, injetores de combustível ou carburador –, bem como a mistura do ar com o combustível nos cilindros e a descarga dos gases da combustão dos tubos de exaustão são analisados usando-se a mecânica dos fluidos. A mecânica dos fluidos também é usada no projeto do sistema de aquecimento e ar-condicionado, dos sistemas do freio hidráulico, da direção hidráulica, da transmissão automática e do sistema de lubrificação, no projeto do sistema de refrigeração do bloco do motor, incluindo o radiador e a bomba d'água, e até dos pneus. A forma aerodinâmica suave dos modelos de automóveis recentes é o resultado dos esforços para minimizar o arrasto por meio do uso extensivo da análise do escoamento sobre superfícies.

Em escala mais ampla, a mecânica dos fluidos desempenha um papel principal no projeto e análise de aeronaves, embarcações, submarinos, foguetes, motores a jato, turbinas eólicas, dispositivos biomédicos, refrigeração de componentes eletrônicos e transporte de água, óleo cru e gás natural. É também considerada no projeto de edificações, pontes e até mesmo em cartazes para garantir que as estruturas resistam

Escoamentos naturais e clima
© Vol. 16/Photo Disc.

Embarcações
© Vol. 5/Photo Disc.

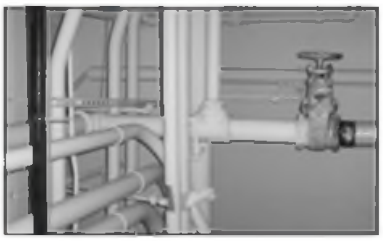
Aeronaves e espaçonaves
© Vol. 1/Photo Disc.

Usinas termelétricas
© Vol. 57/Photo Disc.

Corpo humano
© Vol. 110/Photo Disc.

Automóveis
Foto por John M. Cimbala.

Turbinas eólicas
© Vol. 17/Photo Disc.



Sistemas de tubulação e encanamentos
Foto por John M. Cimbala.

Aplicações industriais
Cortesia de UMDE Engineering, Contracting and Trading. Usada com permissão.

FIGURA 1–7
Algumas áreas de aplicação da mecânica dos fluidos.

à força do vento. Diversos fenômenos naturais como ciclo de chuvas, padrões de clima, elevação da água do chão ao topo das árvores, ventos, ondas dos oceanos e correntes em grandes corpos de água também são governados pelos princípios da mecânica dos fluidos (Figura 1–7).

1–2 ▪ CONDIÇÃO DE NÃO-ESCORREGAMENTO

O escoamento do fluido geralmente é confinado por superfícies sólidas e é importante compreender como a presença de superfícies sólidas afeta o escoamento do fluido. Sabemos que a água de um rio não pode fluir por cima de grandes rochas e passa em torno delas. Isto é, a velocidade da água normal em relação à superfície da rocha deve ser nula e a água que se aproxima da superfície no sentido perpendicular pára completamente na superfície. O que não é tão óbvio é que a água que se aproxima da rocha com qualquer ângulo também pára completamente na superfície da rocha e assim a velocidade tangencial da água na superfície também é nula.

Considere o escoamento de um fluido num cano estacionário ou sobre uma superfície sólida não porosa (isto é, impermeável ao fluido). Todas as observações experimentais indicam que um fluido em movimento pára totalmente na superfície e assume velocidade zero (nula) em relação à superfície. Ou seja, um fluido em contato direto com um sólido "gruda" na superfície devido aos efeitos viscosos e não há escorregamento. Tal fato é conhecido como condição de **não-escorregamento.**

A fotografia da Figura 1–8 obtida de um videoclipe mostra claramente a evolução do gradiente de velocidade como resultado do fluido "grudando" na super-

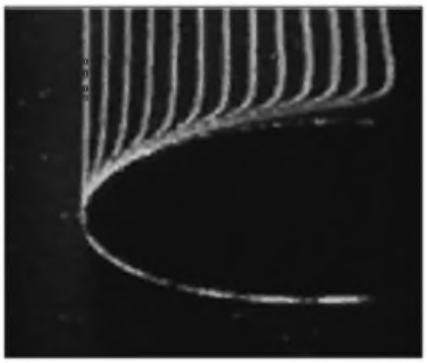


FIGURA 1–8
Desenvolvimento do perfil da velocidade devido à condição de não-escorregamento à medida que o fuido escoa sobre um bordo de ataque arredondado.
"Hunter Rouse: Laminar and Turbulent Flow Film." Copyright IIHR-Hydroscience & Engineering, University of Iowa. Usada com permissão.

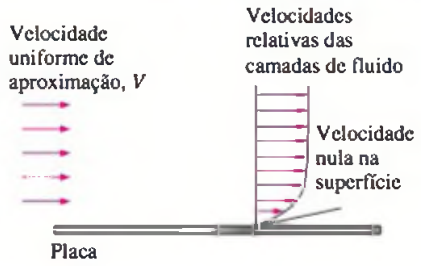


FIGURA 1–9
O fluido movendo-se sobre uma superfície estacionária atinge parada total na superfície devido à condição de não-escorregamento.

fície de um bordo de ataque rombudo de um perfil de asa. A camada que "gruda" sobre a superfície desacelera a camada de fluido adjacente devido às forças viscosas entre as camadas do fluido, que, por sua vez, desacelera a camada seguinte e assim por diante. Portanto, a condição de não-escorregamento é responsável pelo desenvolvimento do perfil da velocidade. A região de escoamento adjacente à parede na qual os efeitos viscosos (e portanto os gradientes de velocidade) são significativos é chamada de **camada limite**. A propriedade do fluido responsável pela condição de não-escorregamento e o desenvolvimento da camada limite é a *viscosidade*, a qual é discutida no Capítulo 2.

A camada de fluido adjacente a uma superfície móvel tem a mesma velocidade que a superfície. Uma das conseqüências da condição de não-escorregamento é que todos os perfis de velocidade devem ter valor nulo, em relação à superfície, nos pontos de contato entre o fluido e a superfície sólida (Figura 1–9). Outra conseqüência da condição de não-escorregamento é o *arrasto da superfície*, que é a força que o fluido exerce sobre a superfície na direção do escoamento.

Quando o fluido é forçado a mover-se sobre uma superfície curva, como a face externa de um cilindro, com velocidade suficientemente alta, a camada-limite não pode mais permanecer presa à superfície e em algum ponto separa-se da superfície – um processo denominado **separação de escoamento** (Figura 1–10). Enfatizamos que a condição de não-escorregamento aplica-se a *qualquer* ponto ao longo da superfície, até mesmo a jusante do ponto de separação. A separação de escoamento é discutida com mais detalhes no Capítulo 10.

Um fenômeno similar ocorre com a temperatura. Quando dois corpos com temperaturas diferentes entram em contato, ocorre transferência de calor até que ambos os corpos tenham a mesma temperatura nos pontos de contato. Portanto, um fluido e uma superfície sólida têm a mesma temperatura nos pontos de contato. Essa propriedade é conhecida como **condição de continuidade da temperatura**.

1–3 • UMA BREVE HISTÓRIA DA MECÂNICA DOS FLUIDOS[1]

Um dos primeiros problemas de engenharia que a humanidade enfrentou, à medida que as cidades foram se desenvolvendo, foi o suprimento de água para uso doméstico e irrigação de plantações. Nosso estilo de vida urbano só pode ser mantido com abundância de água e está claro, através da arqueologia, que cada civilização de sucesso da pré-história investiu na construção e manutenção dos sistemas de água. Os aquedutos romanos, alguns dos quais ainda estão em uso, são os melhores exemplos conhecidos. Entretanto, talvez o exemplo de engenharia mais impressionante do ponto de vista técnico foi construído na cidade helenística de Pergamon, atual Turquia. Lá, entre 283 e 133 AC, eles construíram uma série de tubulações de chumbo e argila pressurizadas (Figura 1–11), com até 45 km de comprimento e que operavam com pressão maior que 1,7 MPa (180 m de altura de carga). Infelizmente, os nomes da maioria desses construtores primitivos perderam-se no tempo. A contribuição reconhecida mais antiga para a teoria da mecânica dos fluidos foi feita

FIGURA 1–11
Trecho da adutora de Pergamon. Cada seção da tubulação de argila tinha de 13 a 18 cm de diâmetro
Cortesia de Gunther Garbrecht. Usada com permissão.

FIGURA 1–10
Separação do escoamento durante o escoamento sobre uma superfície curva.
Fotografia de G. M. Homsy et al, "Multi-Media Fluid Mechanics", Cambridge Univ. Press (2001). ISBN 0-521-78748-3. Reimpresso com permissão.

[1] Esta seção é contribuição do Professor Glenn Brown, da Oklahoma State University.

pelo matemático grego Arquimedes (285–212 a.C.). Ele formulou e aplicou o princípio do empuxo no primeiro teste não destrutivo da história para determinar o teor de ouro da coroa do Rei Hiero I. Os romanos construíram grandes aquedutos e educaram muitos povos conquistados sobre os benefícios da água limpa, porém, de modo geral, tinham uma compreensão geral muito pobre da teoria dos fluidos. (Talvez não devessem ter assassinado Arquimedes quando saquearam Siracusa.)

Durante a Idade Média a aplicação de maquinaria hidráulica expandiu-se vagarosamente mas com persistência. Elegantes bombas a pistão foram desenvolvidas para remover água das minas e moinhos movidos à água e a vento foram aperfeiçoados para moer grãos, forjar metais e para outras tarefas. Pela primeira vez na história humana registrada, trabalhos significativos foram realizados sem a força do músculo de uma pessoa ou animal e essas invenções têm o mérito de possibilitar a posterior Revolução Industrial. Novamente, os criadores da maioria do progresso são desconhecidos, mas os dispositivos propriamente ditos foram bem documentados por diversos escritores técnicos como Georgius Agricola (Figura 1–12).

A Renascença trouxe desenvolvimento contínuo dos sistemas e máquinas de fluido, porém o mais importante foi que o método científico foi aperfeiçoado e adotado em toda a Europa. Simon Stevin (1548–1617), Galileo Galilei (1564–1642), Edme Mariotte (1620–1684) e Evangelista Torricelli (1608–1647) estavam entre os primeiros a aplicar o método científico aos fluidos quando investigaram as distribuições de pressão hidrostática e o vácuo. Esse trabalho foi integrado e refinado pelo brilhante matemático Blaise Pascal (1623–1662). O monge italiano, Benedetto Castelli (1577–1644) foi a primeira pessoa a publicar um enunciado do princípio de continuidade para fluidos. Além de formular suas equações do movimento para sólidos, Sir Isaac Newton (1643–1727) aplicou suas leis para fluidos e explorou a inércia e resistência dos fluidos, jatos livres e viscosidade. Tal esforço foi ampliado pelo suíço Daniel Bernoulli (1700–1782) e seu associado Leonard Euler (1707–1783). Juntos, o trabalho deles definiu as equações de energia e momento. O tratado clássico de Bernoulli de 1738, *Hydrodynamic*, pode ser considerado o primeiro texto sobre mecânica dos fluidos. Por fim, Jean d'Alembert (1717–1789) desenvolveu a idéia de componentes da velocidade e aceleração, uma expressão diferencial para a continuidade e seu "paradoxo" de resistência nula para movimento em regime permanente uniforme.

O desenvolvimento da teoria da mecânica dos fluidos até o fim do século XVIII teve pouco impacto sobre a engenharia, visto que as propriedades e parâmetros dos fluidos eram pouco quantificados e a maior parte das teorias eram abstrações que não podiam ser quantificadas para fins de projeto. A situação mudou com o desenvolvimento da escola de engenharia francesa liderada por Riche de Prony (1755–1839). Prony (ainda conhecido pelo seu freio para medir potência) e seus associados em Paris, na Ecole Polytechnique (escola politécnica) e a Ecole Ponts et Chaussees (escola de pontes e açudes), foram os primeiros a incluir cálculo e teoria científica no currículo de engenharia, que se tornou o modelo para o resto do mundo. (Agora você sabe quem culpar pelo sofrido primeiro ano como calouro.) Antonie Chezy (1718–1798), Louis Navier (1785–1836), Gaspard Coriolis (1792–1843), Henry Darcy (1803–1858) e muitos outros que contribuíram para a engenharia e teoria dos fluidos foram estudantes e/ou professores nessas escolas.

Em meados do século XIX, avanços fundamentais chegavam de várias frentes. O médico Jean Poiseuille (1799–1869) mediu com precisão o escoamento em tubos capilares de fluidos múltiplos, enquanto na Alemanha Gotthilf Hagen (1797–1884) definiu a diferença entre escoamento laminar e turbulento em tubulações. Na Inglaterra, Lord Osborne Reynolds (1842–1912) continuou esse trabalho e desenvolveu o número adimensional que leva seu nome. De modo similar, em paralelo ao trabalho inicial de Navier, George Stokes (1819–1903) completou as equações gerais do movimento dos fluidos com atrito que levam seus nomes. William Froude (1810–1879) desenvolveu quase sozinho os procedimentos e provou o valor de testar com modelos físicos. A competência americana tornou-se igual à dos europeus como demonstrado pelo trabalho pioneiro de James Francis (1815–1892) e Lester Pelton (1829–1908) em turbinas e pela invenção do medidor Venturi por Clemens Herschel (1842–1930).

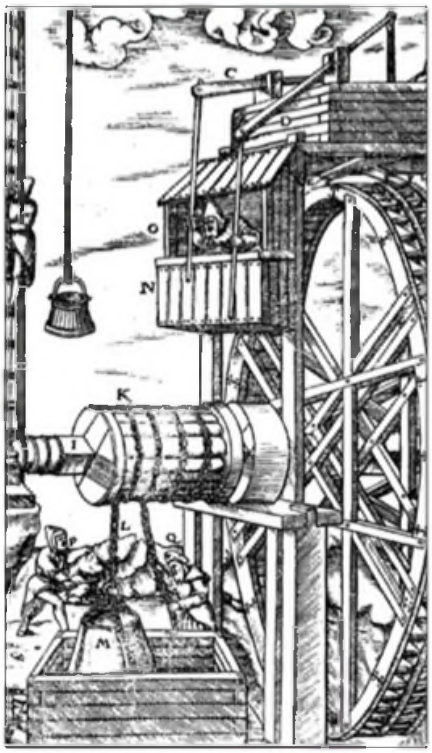


FIGURA 1–12
Guincho de mina acionado por roda hidráulica reversível.
G. Agricola, De Re Metalica, Basel, 1556.

(*a*)

(*b*)

FIGURA 1–13
No início do século XX, Santos Dumont (*a*) e os irmãos Wright (*a*) (entre outros) levantam vôo.

(a) www.santosdumont.14bis.mil.br., Governo Federal do Brasil.
Smithsonian Institution.

(b) National Air and Space Museum/ Smithsonian Institution.

FIGURA 1–14
O Oklahoma Wind Power Center (Centro de Energia Eólica de Oklahoma), próximo de Woodward, consiste em 68 turbinas de 1,5 MW cada uma.

Cortesia de Steve Stadler, Oklahoma Wind Power Initiative. Usada com permissão.

O final do século XIX foi significativo para a ampliação da teoria dos fluidos pelos cientistas e engenheiros irlandeses e ingleses incluindo, além de Reynolds e Stokes, William Thomson, Lord Kelvin (1824–1907), William Strutt, Lord Rayleigh (1842–1919) e Sir Horace Lamb (1849–1934). Esses indivíduos investigaram um grande número de problemas como análise dimensional, escoamento irrotacional, movimento de vórtices, cavitação e ondas. Em sentido mais amplo, o trabalho deles também explorou os elos entre mecânica dos fluidos, termodinâmica e transferência de calor.

O alvorecer do século XX trouxe dois desenvolvimentos monumentais. Primeiro, os autodidatas Santos Dumont, no Brasil, e os irmãos Wright nos EUA, (além de outros experimentos na Alemanha, Rússia e Inglaterra) por meio da aplicação da teoria e experimentação determinada aperfeiçoaram o aeroplano. A invenção foi completa e continha todas as principais características do avião moderno (Figura 1–13*a* e *b*). As equações de Navier–Stokes eram pouco usadas até essa época porque eram difíceis de resolver. Num artigo pioneiro em 1904, o alemão Ludwig Prandtl (1875–1953) demonstrou que os escoamentos dos fluidos podem ser divididos em uma camada próxima das paredes, a **camada limite**, onde os efeitos do atrito são significativos e uma camada externa onde tais efeitos são desprezíveis e as equações simplificadas de Euler e Bernoulli são aplicáveis. Seus alunos, Theodore von Kármán (1881–1963), Paul Blasius (1883–1970), Johann Nikuradse (1894–1979) e outros ampliaram essa teoria com aplicações tanto em hidráulica como em aerodinâmica. (Durante a Segunda Guerra Mundial, ambos os lados beneficiaram-se da teoria, visto que Prandtl permaneceu na Alemanha enquanto seu melhor aluno, o húngaro de nascimento, Theodore von Kármán, trabalhou na América.)

Os meados do século XX podem ser considerados a época de ouro das aplicações da mecânica dos fluidos. As teorias existentes eram adequadas às tarefas requeridas e as propriedades e parâmetros dos fluidos estavam bem definidos. Isso suportou a imensa expansão dos setores de aeronáutica, químico, industrial e recursos hidráulicos, cada um dos quais levou a mecânica dos fluidos para novas direções. A pesquisa e o trabalho em mecânica dos fluidos em fins do século XX foram dominados pelo desenvolvimento do computador digital na América do Norte. A capacidade de resolver problemas grandes e complexos, tais como a modelagem do clima global ou a otimização do projeto de uma pá de turbina, ofereceu um benefício à nossa sociedade que os criadores da mecânica dos fluidos do século XVIII nunca poderiam ter imaginado (Figura 1–14). Os princípios apresentados nas páginas a seguir foram aplicados a escoamentos variando de um instante em escala microscópica a 50 anos de simulação de toda uma bacia hidrográfica. É realmente de nos deixar atônitos.

Até onde irá a mecânica dos fluidos no século XXI? Francamente, mesmo uma extrapolação limitada além do presente seria pura tolice. Entretanto, se a história nos ensina algo, é que os engenheiros vão aplicar o que eles sabem para beneficiar a sociedade, pesquisar o que não sabem e se divertir enormemente no processo.

1–4 • CLASSIFICAÇÃO DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS

Anteriormente, definimos **mecânica dos fluidos** como a ciência que trata do comportamento dos fluidos em repouso ou em movimento e a interação dos fluidos com sólidos ou outros fluidos em suas fronteiras. Há grande variedade de problemas de escoamento de fluidos encontrados na prática e, em geral, é conveniente classificá-los com base em algumas características comuns para estudá-los em grupos. Há muitas maneiras de classificar os problemas de escoamentos de fluidos e a seguir apresentamos algumas categorias gerais.

Regiões de Escoamento Viscoso *versus* Não Viscoso

Quando duas camadas fluidas movem-se uma em relação à outra, desenvolve-se uma força de atrito entre elas e a camada mais lenta tenta reduzir a velocidade da

camada mais rápida. Tal resistência interna ao escoamento é quantificada pela propriedade do fluido chamada de *viscosidade*, que é uma medida da aderência interna do fluido. A viscosidade é causada por forças coesivas entre as moléculas num líquido e por colisões moleculares nos gases. Não existe fluido com viscosidade nula e, assim, todo o escoamento dos fluidos envolve efeitos viscosos de algum grau. Os escoamentos em que os efeitos do atrito são significativos chamam-se **escoamentos viscosos**. Entretanto, em muitos escoamentos de interesse prático, há regiões (tipicamente regiões afastadas de superfícies sólidas) onde as forças viscosas são desprezivelmente pequenas comparadas às forças inerciais e de pressão. Desprezar os termos viscosos em **regiões de escoamento não viscoso** simplifica bastante a análise, sem muita perda de precisão.

O desenvolvimento de regiões de escoamento viscoso ou não viscoso como resultado da inserção de uma placa plana paralela à correnteza de velocidade uniforme de um fluido é mostrado na Figura 1–15. O fluido gruda em ambas as faces da placa em virtude da condição de não-escorregamento, e a fina camada-limite na qual os efeitos viscosos são significativos, próxima à superfície da placa, é a região de escoamento viscoso. A região de escoamento afastada de ambos os lados da placa e não afetada pela presença da placa é a **região de escoamento não viscoso**.

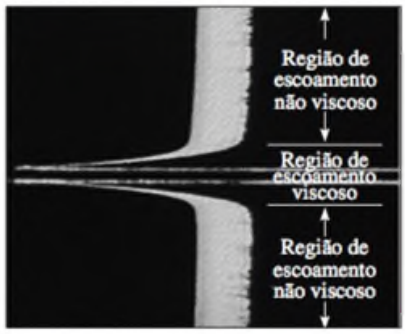


FIGURA 1–15
O escoamento de uma correnteza de fluido originalmente uniforme sobre uma placa plana e as regiões de escoamento viscoso (próximo à placa, de ambos os lados) e escoamento não viscoso (afastado da placa).
Fundamentals of Boundary Layers, National Committee from Fluid Mechanics Films, © Education Development Center.

Escoamento Interno *versus* Externo

O escoamento dos fluidos é classificado como interno ou externo, dependendo do fato de o fluido ser forçado a escoar num canal confinado ou sobre uma superfície. O escoamento sem limitação de um fluido sobre uma superfície, tal como uma placa, um arame ou um cano, é um **escoamento externo**. O escoamento num tubo ou ducto é um **escoamento interno** se o fluido estiver inteiramente limitado por superfícies sólidas. O escoamento de água num cano, por exemplo, é um escoamento interno, e o escoamento de ar sobre uma bola ou sobre um tubo exposto durante uma ventania é um escoamento externo (Figura 1–16). O escoamento de líquidos num ducto é chamado de escoamento de canal aberto se o ducto estiver apenas parcialmente cheio com o líquido e houver uma superfície livre. Os escoamentos de água em rios ou valas de irrigação são exemplos de tais escoamentos.

Os escoamentos internos são dominados pela influência da viscosidade em todo o campo do escoamento. Nos escoamentos externos, os efeitos viscosos estão restritos às camadas-limites próximas das superfícies sólidas e às regiões de esteira a jusante dos corpos.

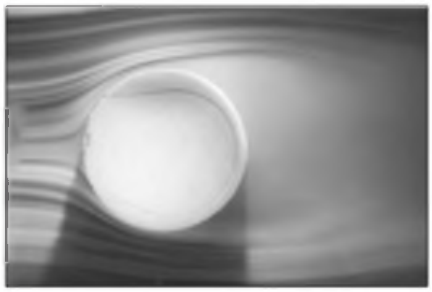


FIGURA 1–16
Escoamento externo sobre uma bola de tênis e a região da esteira turbulenta a jusante da bola.
Cortesia Nasa e Cislunar Aerospace, Inc.

Escoamento Compressível *versus* Incompressível

Um escoamento é classificado como *compressível* ou *incompressível* dependendo do nível de variação da densidade durante o escoamento. A incompressibilidade é uma aproximação, e um escoamento é dito ser **incompressível** se a densidade permanecer aproximadamente constante em todos os lugares. Portanto, o volume de cada porção do fluido permanece inalterado durante o decorrer de seu movimento quando o escoamento (ou o fluido) for incompressível.

As densidades dos líquidos são essencialmente constantes e desse modo o escoamento dos líquidos é tipicamente incompressível. Portanto, os líquidos são usualmente designados como *substâncias incompressíveis*. Por exemplo, uma pressão de 210 atm atuando sobre água líquida causa mudança no valor da densidade da água líquida a 1 atm de somente 1%. Gases, por outro lado, são altamente compressíveis. A mudança de pressão de apenas 0,01 atm, por exemplo, causa uma mudança de 1% na densidade do ar atmosférico.

Ao analisar foguetes, espaçonaves e outros sistemas que envolvem escoamentos de gás em altas velocidades, a velocidade do gás é freqüentemente expressa em termos do **número de Mach**, adimensional, definido pela expressão

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{\text{Velocidade do escoamento}}{\text{Velocidade do som}}$$

Laminar

Transitório

Turbulento

FIGURA 1–17
Escoamentos laminar, transitório e turbulento.
Cortesia de ONERA, fotografia de Werlé.

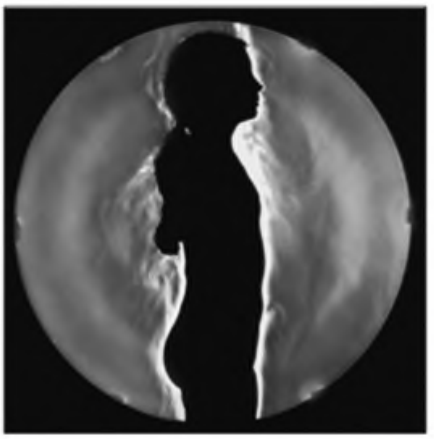


FIGURA 1–18
Nesta imagem Schlieren de uma jovem de maiô, a elevação de ar mais leve e mais quente próxima de seu corpo indica que os seres humanos e animais de sangue quente estão cercados por uma camada térmica ascendente de ar aquecido.
G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Usada com permisão.

onde c é a **velocidade do som**, cujo valor é 346 m/s no ar à temperatura ambiente e ao nível do mar. O escoamento é denominado **sônico** quando Ma = 1, **subsônico** quando Ma < 1, **supersônico** quando Ma > 1, e **hipersônico** quando Ma >> 1.

Os escoamentos dos líquidos são incompressíveis com alto nível de precisão, mas o nível de variação da densidade nos escoamentos de gás e o conseqüente nível de aproximação feito ao modelar os escoamentos de gases como incompressíveis dependem do número Mach. Os escoamentos de gases podem ser considerados, em geral, como aproximadamente incompressíveis se as mudanças de densidade estiverem abaixo de cerca de 5%, que usualmente é o caso quando Ma < 0,3. Portanto, os efeitos da compressibilidade do ar podem ser desprezados para velocidades abaixo de cerca de 100 m/s. Observe que o escoamento de um gás não é necessariamente um escoamento compressível.

Pequenas mudanças na densidade dos líquidos correspondentes a grandes mudanças de pressão podem ainda ter conseqüências consideráveis. O irritante "golpe de aríete" numa tubulação de água, por exemplo, é causado pelas vibrações do cano geradas pela reflexão das ondas de pressão que surgem após o súbito fechamento de válvulas.

Escoamento Laminar *versus* Turbulento

Alguns escoamentos são suaves e ordenados enquanto outros são um tanto caóticos. O movimento altamente ordenado dos fluidos caracterizado por camadas suaves do fluido é denominado **laminar**. A palavra **laminar** origina-se do movimento de partículas adjacentes do fluido agrupadas em "lâminas". O escoamento dos fluidos de alta viscosidade como os óleos com baixas velocidades é tipicamente laminar. O movimento altamente desordenado dos fluidos que ocorre em velocidades altas e é caracterizado por flutuações de velocidade é chamado de **turbulento** (Figura 1–17). O escoamento de fluidos de baixa viscosidade como o ar em altas velocidades é tipicamente turbulento. O regime do escoamento tem grande influência sobre a potência requerida para bombeamento. Um escoamento que se alterna entre laminar e turbulento é chamado de **transitório**. Os experimentos realizados por Osborn Reynolds, nos anos 1880, resultaram na criação do número adimensional denominado **número de Reynolds, Re**, como o parâmetro-chave para a determinação do regime do escoamento em canos (Capítulo 8).

Escoamento Natural (ou Não Forçado) *versus* Forçado

Um escoamento de fluidos é dito ser natural ou forçado, dependendo de como o movimento do fluido foi iniciado. No **escoamento forçado**, o fluido é obrigado a fluir sobre uma superfície ou num tubo com o uso de meios externos como uma bomba ou uma ventoinha. Nos **escoamentos naturais**, qualquer movimento do fluido é devido a meios naturais tal como o efeito de flutuação, que se manifesta como a elevação do fluido mais quente (e, portanto, mais leve) e na descida do fluido mais frio (e portanto mais denso) (Figura 1–18). Nos sistemas de aquecimento de água pela energia solar, por exemplo, o efeito de termossifão é usado comumente para substituir as bombas localizando o reservatório de água suficientemente acima dos coletores solares.

Escoamento em Regime Permanente *versus* em Regime Não Permanente

Os termos *em regime permanente* e *uniforme* são usados freqüentemente na engenharia e assim é importante ter uma compreensão clara de seus significados. O termo **em regime permanente** implica *não haver mudança com o passar do tempo.* O oposto de regime permanente é **em regime não permanente**. O termo **uniforme** implica *não haver mudança com a localização* em uma região específica. Esses significados são consistentes com seu uso rotineiro (distribuição uniforme etc.).

Os termos *em regime não permanente* e *transiente* são usados, com freqüência como intercambiáveis, entretanto não são sinônimos. Em mecânica dos fluidos, em regime não permanente é o termo mais genérico que se aplica a qualquer escoa-

mento que não seja em regime permanente, mas **transiente** é usado tipicamente para escoamentos que estão se desenvolvendo. Quando se dá partida no motor de um foguete, por exemplo, há efeitos transitórios (é criada pressão dentro do motor do foguete, o escoamento é acelerado etc.) até que o motor se acomode e opere regularmente. O termo **periódico** refere-se ao tipo de escoamento em regime não permanente no qual o escoamento oscila em torno de um valor médio em regime permanente.

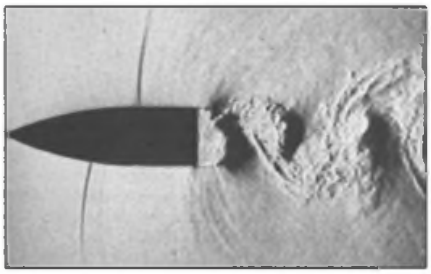
Diversos dispositivos, como turbinas, compressores, caldeiras, condensadores e trocadores de calor operam durante longos períodos de tempo sob as mesmas condições e são classificados como *dispositivos de escoamento em regime permanente*. (Observe que o campo do escoamento nas proximidades das lâminas rotativas de uma turbomáquina naturalmente é em regime não permanente, mas consideramos o campo total do escoamento, em vez dos detalhes em alguns locais, quando classificamos dispositivos.) Durante o período de escoamento em regime permanente, as propriedades do fluido podem mudar de local para local do dispositivo, porém em qualquer ponto fixo permanecem constantes. Portanto, o volume, a massa e o teor total de energia de um dispositivo de escoamento em regime permanente ou parte do escoamento permanecem constantes em uma operação estacionária.

As condições de escoamento em regime permanente podem ser bastante aproximadas por dispositivos destinados à operação contínua, como turbinas, bombas, caldeiras, condensadores e trocadores de calor de usinas de energia ou sistemas de refrigeração. Alguns dispositivos cíclicos como motores de movimento alternado ou compressores não satisfazem às condições de escoamento em regime permanente visto que o escoamento nas entradas e saídas é pulsante e, portanto, não é em regime permanente. Entretanto, as propriedades do fluido variam com o tempo de maneira periódica e o escoamento através desses dispositivos ainda pode ser analisado como um processo de escoamento em regime permanente usando valores médios no tempo para as propriedades.

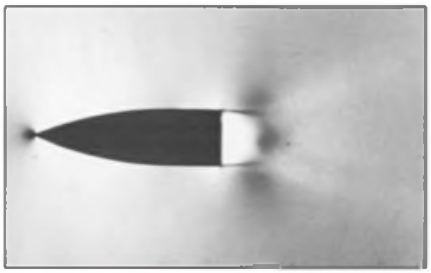
Algumas visualizações fascinantes do escoamento dos fluidos são mostradas no livro *An Album of Fluid Motion* (*álbum de movimentos dos fluidos*) de Milton Van Dyke (1982). Uma bela ilustração de campo de escoamento em regime não permanente é mostrada na Figura 1–19, reproduzida do livro de Van Dyke. A Figura 1–19a é a foto de um filme de alta velocidade, que mostra redemoinhos turbulentos alternados, que vertem na esteira com oscilação periódica a partir da base abrupta do objeto (a partir do bordo de fuga). Os redemoinhos produzem ondas de choque que se propagam de maneira instável na direção da montante alternadamente sobre as superfícies superior e inferior do aerofólio. A Figura 1–19b mostra o *mesmo* campo de escoamento, mas o filme foi exposto durante um tempo maior de modo que a imagem mostra a média temporal sobre 12 ciclos. O campo do escoamento resultante da média temporal parece "em regime permanente" uma vez que os detalhes das oscilações não estacionárias perderam-se durante a longa exposição.

Um dos trabalhos mais importantes do engenheiro é determinar se será suficiente estudar apenas as características do escoamento em regime permanente representado pela média temporal para um dado problema ou se é necessário um estudo mais detalhado das características não permanentes do escoamento. Se o engenheiro estiver interessado apenas nas propriedades gerais do campo do escoamento (como média temporal do coeficiente de arrasto, a velocidade média e os campos de pressão), a descrição via média temporal ilustrada na Figura 1–19b, a média temporal de medidas experimentais, ou um cálculo analítico ou numérico da média temporal do campo do escoamento serão suficientes. Entretanto, se ele estiver interessado nos detalhes do campo de escoamento não permanentes, tais como vibrações induzidas pelo escoamento, flutuações não permanentes da pressão ou ondas sonoras emitidas por turbilhões ou ondas de choque, a descrição via média temporal do escoamento será insuficiente.

A maioria dos exemplos analíticos e computacionais fornecidos neste livro refere-se a escoamentos em regime permanente ou resultantes de médias temporais, apesar de ocasionalmente salientarmos também algumas características relevantes de escoamento em regime não permanente.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 1–19
Rastro oscilante de aerofólio com base abrupta com número Mach 0,6. A foto *(a)* é uma imagem instantânea, enquanto a foto *(b)* é uma imagem de longa exposição (média temporal).

(a) Dyment, A., Flodrops, J. P. & Gryson, P. 1982 in Flow Visualization II, W. Merzkirch, ed., 331–336. Washington: Hemisphere. Usada com permissão de Arthur Dyment.
(b) Dyment, A. & Gryson, P. 1978 in Inst. Mèc. Fluides Lille, No. 78-5. Usada com permissão de Arthur Dyment.

Escoamentos Uni, Bi e Tridimensionais

Um campo de escoamento é melhor caracterizado pela distribuição de velocidade e desse modo o escoamento é dito ser uni, bi ou tridimendional se a velocidade do escoamento varia basicamente em uma, duas ou três dimensões, respectivamente. Um típico escoamento de fluidos envolve geometria tridimensional e a velocidade pode variar em todas as três dimensões, implicando um escoamento tridimensional [$\vec{V}(x, y, z)$ em coordenadas cartesianas ou $\vec{V}(r, \theta, z)$ em coordenadas cilíndricas]. Entretanto, a variação de velocidade em certas direções pode ser pequena em relação à variação em outras direções e pode ser ignorada com erro desprezível. Nesses casos, o escoamento pode ser convenientemente modelado como uni ou bidimensional, o que é mais fácil de analisar.

Considere o escoamento em regime permanente de um fluido através de um cano circular acoplado a um grande reservatório. A velocidade do fluido em qualquer local da superfície do cano é nula devido à condiçao de não-escorregamento, e o escoamento é bidimensional na região de entrada do cano visto que a velocidade muda em ambas as direções r e z. O perfil da velocidade desenvolve-se completamente e permanece sem mudança depois de uma certa distância da entrada (cerca de 10 vezes o diâmetro do cano em escoamento turbulento e menos em escoamento laminar, como na Figura 1–20), e o escoamento nessa região é dito estar *totalmente desenvolvido*. O escoamento totalmente desenvolvido num cano circular é unidimensional, uma vez que a velocidade varia na direção radial r, mas não nas direções angular θ ou axial z, como mostrado na Figura 1–20. Isto é, o pertfil da velocidade é o mesmo em qualquer ponto ao longo do eixo z e é simétrico em torno do eixo do cano.

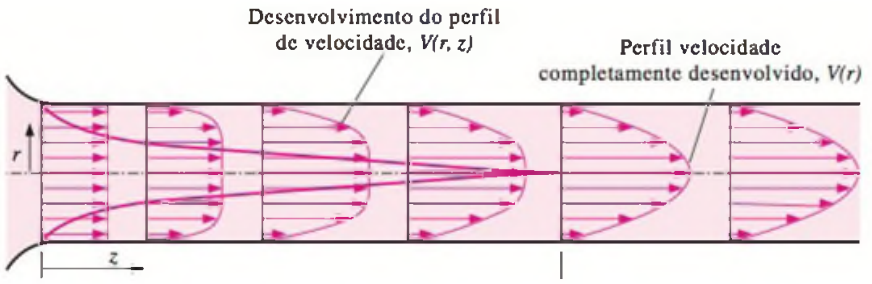


FIGURA 1–20
Desenvolvimento do perfil da velocidade num cano circular. $V = V(r, z)$ e, portanto, o escoamento é bidimensional na região da entrada e torna-se unidimensional a jusante quando o perfil da velocidade desenvolve-se completamente e permanece sem mudança na direção do escoamento, $V = V(r)$.

Observe que a dimensionalidade do escoamento também depende da escolha do sistema de coordenadas e de sua orientação. O escoamento no cano em discussão, por exemplo, é unidimensional em relação às coordenadas cilíndricas, mas bidimensional em coordenadas cartesianas – o que mostra a importância da escolha do sistema de coordenadas mais apropriado. Observe também que, mesmo neste escoamento simples, a velocidade não pode ser uniforme ao longo da seção transversal do cano devido à condição de não-escorregamento. Entretanto, numa entrada bem arredondada, o perfil da velocidade pode ser considerado quase uniforme no cano, visto que a velocidade é aproximadamente constante em todos os raios, exceto muito próximo da parede do cano.

O escoamento pode ser considerado aproximadamente *bidimensional* quando a razão de aspecto for grande e o escoamento não mudar apreciavelmente ao longo da dimensão mais longa. Por exemplo, o escoamento de ar sobre a antena de um automóvel pode ser considerado bidimensional, exceto nas proximidades de suas extremidades, uma vez que o comprimento da antena é muito maior que seu diâmetro e o escoamento de ar que a atinge é razoavelmente uniforme (Figura 1–21).

FIGURA 1–21
O escoamento sobre a antena do automóvel é aproximadamente bidimensional exceto próximo ao topo e à base da antena.

EXEMPLO 1–1 **Escoamento com Simetria Axial ao redor de uma Bala**

Considere uma bala movimentando-se em ar calmo. Determine se a média temporal do escoamento de ar sobre uma bala durante sua trajetória é uni, bi ou tridimensional (Figura 1–22).

SOLUÇÃO Dever ser determinado se o escoamento sobre a bala é uni, bi ou tridimensional.

Hipótese Não há ventos significativos e a bala não gira.

Análise A bala possui um eixo de simetria e é, portanto, um corpo simétrico em relação ao eixo. O escoamento de ar incidente sobre a bala é paralelo ao seu eixo e espera-se que a média temporal do escoamento seja rotacionalmente simétrico em relação ao eixo de simetria da bala – tais escoamentos são ditos axialmente simétricos. A velocidade, neste caso, varia com a distância axial z e com a distância radial r, mas não com o ângulo θ. Portanto, o escoamento médio de ar sobre a bala é **bidimensional.**

Discussão Enquanto a média temporal do escoamento de ar é simétrica em relação ao eixo, o escoamento de ar *instantâneo* não é, como ilustrado pela Figura 1–19.

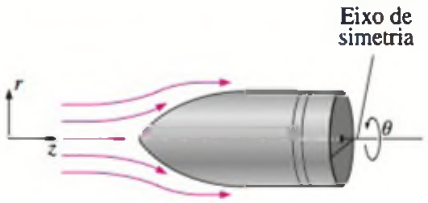


FIGURA 1–22
Escoamento com simetria axial sobre uma bala.

1–5 • SISTEMA E VOLUME DE CONTROLE

Um sistema é definido como uma *quantidade de matéria ou região do espaço escolhida para estudo*. A massa ou região fora do sistema é denominada **vizinhança**. A superfície real ou imaginária que separa o sistema de sua vizinhança é chamada de **fronteira** (Figura 1–23). A fronteira de um sistema pode ser *fixa* ou *móvel*. Observe que a fronteira é a superfície de contato compartilhada tanto pelo sistema como pela vizinhança. Matematicamente falando, a fronteira tem espessura nula e assim não contém qualquer massa nem ocupa volume no espaço.

Os sistemas são considerados *fechados* ou *abertos*, dependendo se uma massa fixa ou um volume no espaço forem escolhidos para estudo. Um **sistema fechado** (também conhecido por **massa de controle**) consiste em uma quantidade fixa de massa, e nenhuma quantidade de massa pode cruzar sua fronteira. Porém, a energia sob a forma de calor ou de trabalho pode cruzar sua fronteira, e o volume de um sistema fechado não precisa ser fixo. Se, como um caso especial, nem a energia puder cruzar a fronteira, o sistema é chamado de **sistema isolado**.

Considere o dispositivo pistão-cilindro mostrado na Figura 1–24. Digamos que queiramos determinar o que acontece quando o gás nele contido é aquecido. Como estamos focalizando nossa atenção no gás, ele é nosso sistema. As superfícies internas do pistão e do cilindro formam a fronteira e como não há massa cruzando sua fronteira, ele é um sistema fechado. Observe que a energia pode cruzar a fronteira e parte da fronteira (a superfície interna do pistão, neste caso) pode se mover. Exceto o gás, todo o resto, incluindo o pistão e o cilindro, formam a vizinhança.

Um **sistema aberto** ou **volume de controle**, como é denominado freqüentemente, é uma região do espaço selecionada apropriadamente. Em geral compreende um dispositivo que inclui escoamento de massa, tal como um compressor, turbina ou bocal. O escoamento através desses dispositivos é mais bem estudado selecionando-se dentro do próprio dispositivo a região a ser usada como volume de controle. Ambas, massa e energia, podem cruzar a fronteira do volume de controle.

Um grande número de problemas de engenharia envolve escoamento de massa que entra e sai do sistema e, portanto, são modelados como *volumes de controle*. Um aquecedor de água, um radiador de automóvel, uma turbina e um compressor, todos envolvem escoamento de massa e devem ser analisados como volumes de controle (sistemas abertos) em vez de massas de controle (sistemas fechados). Em geral, *qualquer região arbitrária no espaço* pode ser selecionada como volume de

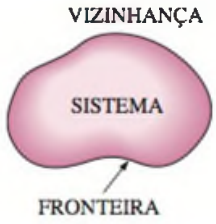


FIGURA 1–23
Sistema, vizinhança e fronteira.

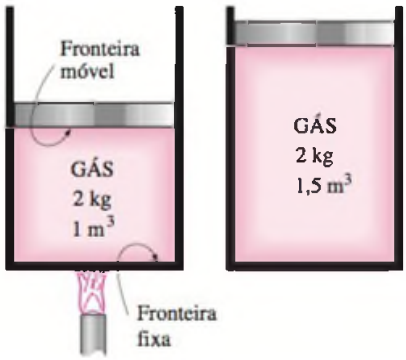
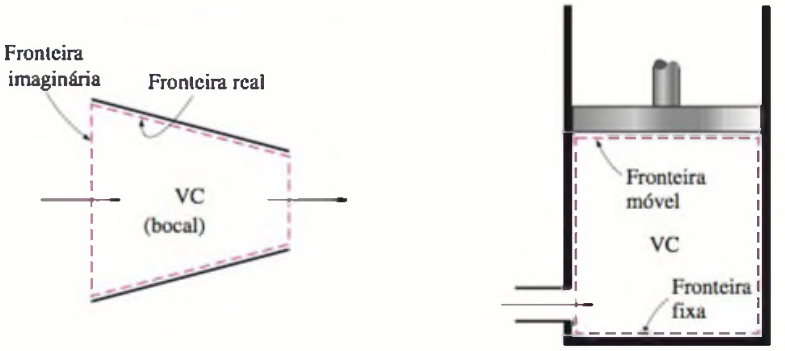


FIGURA 1–24
Sistema fechado com fronteira móvel.

controle. Não há regras definidas para a seleção de volumes de controle, mas a escolha apropriada certamente torna a análise muito mais fácil. Se fôssemos analisar o escoamento de ar através de um *bocal*, por exemplo, uma boa escolha para o volume de controle seria a região do próprio bocal.

Um volume de controle pode ser fixo em tamanho e forma, como no caso do bocal, ou pode incluir uma fronteira móvel, como mostrado na Figura 1–25. A maioria dos volumes de controle, entretanto, têm fronteiras fixas e não incluem quaisquer fronteiras móveis. Um volume de controle também pode envolver interações de calor e trabalho da mesma maneira que um sistema fechado, além da interação de massa.



(*a*) Volume de controle (VC) com fronteiras real e imaginária

(*b*) Volume de controle (VC) com fronteiras fixa e móvel

FIGURA 1–25
O volume de controle pode incluir fronteiras fixa, móvel, real e imaginária.

1–6 • IMPORTÂNCIA DAS DIMENSÕES E UNIDADES

Qualquer quantidade física pode ser caracterizada por **dimensões**. As grandezas designadas para as dimensões são chamadas de **unidades**. Algumas dimensões básicas, tais como a massa m, o comprimento L, o tempo t, e a temperatura T são escolhidas como dimensões **primárias** ou **fundamentais**, enquanto outras tais como velocidade V, energia E e volume V são expressas em termos de dimensões primárias e são chamadas de **dimensões secundárias** ou **derivadas**.

Um certo número de sistemas de unidades foi desenvolvido ao longo dos anos. Apesar dos grandes esforços das comunidades científica e de engenharia para unificar o mundo com um único sistema de unidades, dois conjuntos de unidades ainda estão em uso atualmente, o **sistema inglês**, que também é conhecido como *United States Customary System* (USCS) (sistema usual dos Estados Unidos) e o sistema métrico **SI** (de *Le Système International d' Unités*), que também é conhecido como *Sistema Internacional*. O SI é um sistema simples e lógico com base em uma relação decimal entre as diversas unidades e é usado em trabalhos científicos e de engenharia na maioria das nações industrializadas, inclusive na Inglaterra. O sistema inglês, no entanto, não tem base numérica sistemática aparente e várias unidades desse sistema são relacionadas umas com as outras arbitrariamente (12 polegadas = 1 pé, 1 milha = 5280 pés, 4 quartos = 1 galão etc.) o que o torna confuso e difícil de aprender. Os Estados Unidos são o único país industrializado que ainda não se converteu totalmente ao sistema métrico.

Os esforços sistemáticos para desenvolver um sistema de unidades aceitável universalmente data de 1790 quando a Assembléia Nacional Francesa encarregou a Academia de Ciências Francesa de criar tal sistema de unidades. Uma versão inicial do sistema métrico logo foi desenvolvida na França, mas não teve aceitação universal até 1875 quando o *Tratado de Convenção Métrica* foi preparado e assinado por 17 nações, inclusive os Estados Unidos. Nesse tratado internacional, foram estabelecidos o metro e o grama como as unidades métricas para comprimento e massa, respectivamente, e foi estabelecida a *Conferência Geral de Pesos e Medidas* (CGPM) que deveria reunir-se a cada seis anos. Em 1960, a CGPM criou o SI, baseado em seis quantidades fundamentais e suas unidades foram adotadas em 1954

na Décima Conferência de Pesos e Medidas: *metro* (m) para comprimento, *quilograma* (kg) para massa, *segundo* (s) para tempo, *ampère* (A) para corrente elétrica, *grau Kelvin* (°K) para temperatura e candela (cd) para intensidade luminosa (quantidade de luz). Em 1971, a CGPM adicionou uma sétima quantidade e unidade fundamental: *mole* (mol) para quantidade de matéria.

Baseado no programa de notação introduzido em 1967, o símbolo de grau foi oficialmente removido da unidade de temperatura absoluta e todos os nomes das unidades deveriam ser escritos em minúsculas mesmo que fossem derivados de nomes próprios (Tabela 1–1). Entretanto, a abreviatura da unidade deve ser escrita em maiúscula se a unidade for derivada de um nome próprio. Por exemplo, a unidade de força SI, cujo nome deriva de Sir Isaac Newton (1647–1723), é *newton* (não Newton) e é abreviada por N. Além disso, o nome completo da unidade pode ser pluralizado, mas sua abreviatura não. Por exemplo, o comprimento de um objeto pode ser escrito 5 m ou 5 metros, mas não *5 ms* ou *5 metro*. Finalmente, nas abreviaturas das unidades não deve ser usado ponto, a menos que estejam no final de uma sentença. Por exemplo, a abreviatura apropriada de metro é m (não m.).

O movimento recente de mudança em direção ao sistema métrico nos Estados Unidos parece ter começado em 1968 quando o Congresso, em resposta ao que estava acontecendo no resto do mundo, aprovou um Metric Study Act (ato de estudo métrico). O Congresso continuou a promover uma mudança voluntária para o sistema métrico aprovando o Metric Conversion Act (ato de conversão métrica) em 1975. Um acordo comercial aprovado pelo Congresso em 1988 estabeleceu a data de setembro de 1992 como meta para que todas as agências federais adotassem o sistema métrico. Entretanto, a data-limite foi relaxada posteriormente, sem planos claros para o futuro.

As indústrias altamente envolvidas no comércio internacional (tais como as indústrias automotiva, de refrigerantes e de bebidas alcoólicas) foram rápidas na mudança para o sistema métrico por razões econômicas (adotando um único projeto mundial, poucos tamanhos, menores estoques etc.). Hoje, praticamente todos os automóveis fabricados nos Estados Unidos são métricos. Provavelmente a maioria dos proprietários de automóveis não se dá conta desse fato até que tente usar uma chave de parafusos do sistema inglês num parafuso métrico. A maioria das indústrias, entretanto, resistiu à mudança atrasando o processo de conversão.

Atualmente os Estados Unidos é uma sociedade de sistema duplo e permanecerá desse modo até que a transição para o sistema métrico seja completada. Isso acarreta uma carga adicional para os estudantes de engenharia, uma vez que se espera que mantenham sua compreensão do sistema inglês enquanto aprendem, raciocinam e trabalham em termos do SI. Devido à posição dos engenheiros no período de transição, ambos os sistemas são usados neste texto, com ênfase especial para as unidades SI.

Como salientado, o SI baseia-se numa relação decimal entre as unidades. Os prefixos usados para exprimir os múltiplos das várias unidades estão relacionados na Tabela 1–2. Eles são padrão para todas as unidades e o estudante é encorajado a decorá-las devido ao seu uso extensivo (Figura 1–26).

TABELA 1–1

As sete dimensões fundamentais (ou primárias) e suas unidades no SI

Dimensão	Unidade
Comprimento	metro (m)
Massa	quilograma (kg)
Tempo	segundo (s)
Temperatura	kelvin (K)
Corrente elétrica	ampère (A)
Quantidade de luz	candela (cd)
Quantidade de matéria	mole (mol)

TABELA 1–2

Prefixos padrão das unidades no SI

Múltiplo	Prefixo
10^{12}	tera, T
10^{9}	giga, G
10^{6}	mega, M
10^{3}	quilo, k
10^{2}	hecto, h
10^{1}	deka, da
10^{-1}	deci, d
10^{-2}	centi, c
10^{-3}	milli, m
10^{-6}	micro, μ
10^{-9}	nano, n
10^{-12}	pico, p

Algumas Unidades SI e Inglesas

No SI, as unidades de massa, comprimento e tempo são quiilograma (kg), metro (m) e segundo (s), respectivamente. As respectivas unidades no sistema inglês são libra-massa (lbm), pé (ft) e segundo (s). O símbolo *lb* é a abreviatura de *libra*, a

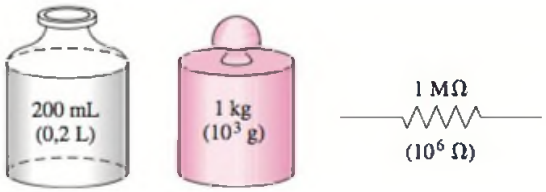


FIGURA 1–26
Os prefixos das unidades SI são usados em todos os ramos da engenharia.

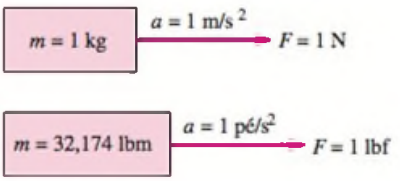


FIGURA 1–27
Definição de unidades de força.

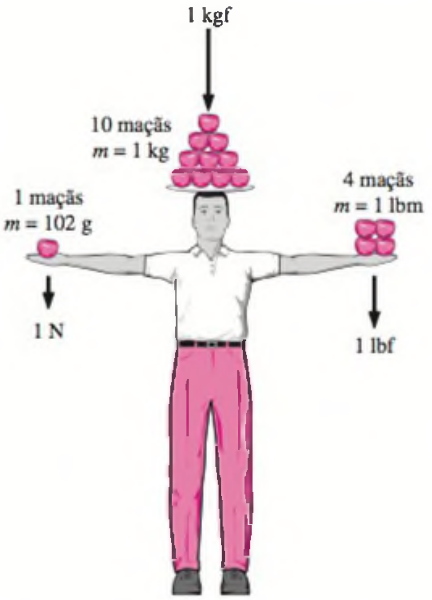


FIGURA 1–28
As intensidades relativas das unidades de força newton (N), quilograma-força (kgf) e libra-força (lbf).

FIGURA 1–29
Um corpo pesando 150 lbf na Terra pesa apenas 25 lbf na Lua.

unidade antiga de peso romana. Os ingleses mantiveram esse símbolo mesmo depois do fim da ocupação romana da Bretanha em 410. As unidades de massa e comprimento nos dois sistemas são relacionadas uma com a outra por

$$1 \text{ lbm} = 0{,}45359 \text{ kg}$$

$$1 \text{ pé} = 0{,}3048 \text{ m}$$

No sistema inglês, a força é considerada usualmente uma das dimensões primárias e é designada por uma unidade não derivada. Tal consideração é uma fonte de confusão e erro que requer o uso de uma constante dimensional (g_c) em muitas fórmulas. Para evitarmos essa inconveniência, consideramos força como dimensão secundária, cuja unidade decorre da segunda lei de Newton, isto é,

$$\text{Força} = (\text{Massa})\,(\text{Aceleração})$$

ou

$$F = ma \qquad (1\text{–}1)$$

No SI, a unidade de força é o newton (N), que é definido como a *força necessária para acelerar uma massa de 1 kg a uma taxa de 1 m/s²*. No sistema inglês, a unidade de força é a **libra-força** (lbf), que é definida como a *força necessária para acelerar uma massa de 32,174 lbm (1 slug) a uma taxa de 1 pé/s²* (Figura 1–27). Isto é,

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

$$1 \text{ lbf} = 32{,}174 \text{ lbm} \cdot \text{pés/s}^2$$

A força de 1 N é aproximadamente igual ao peso de uma pequena maçã (m = 102 g), enquanto uma força de 1 lbf é aproximadamente equivalente ao peso de quatro maçãs médias (m_{total} = 454 g), como mostrado na Figura 1–28. Outra unidade de força em uso comum em muitos países europeus é o *quilograma-força* (kgf), que é o peso da massa de 1 kg ao nível do mar (1 kgf = 9,807 N).

O termo **peso** com freqüência é usado incorretamente para expressar massa, particularmente pelos "vigilantes do peso". Ao contrário de massa, o peso W é uma *força*. É força gravitacional aplicada a um corpo, e sua intensidade é determinada pela segunda lei de Newton.

$$W = mg \quad (\text{N}) \qquad (1\text{–}2)$$

onde m é a massa do corpo e g, a aceleração da gravidade no local (g é 9,807 m/s² ou 32,174 pé/s² ao nível do mar e 45° de latitude). Uma balança comum de banheiro mede a força gravitacional que atua sobre um corpo. O peso de uma unidade de volume de uma substância é chamado de **peso específico** γ e é determinado por $\gamma = \rho g$, onde ρ é a densidade.

A massa de um corpo permanece a mesma independentemente de sua localização no universo. Seu peso, entretanto, se altera com a mudança da aceleração gravitacional. Um corpo pesa menos no topo de um morro uma vez que g decresce com a altitude. Na superfície da lua, um astronauta pesa cerca de um sexto do que ele ou ela pesa normalmente na Terra (Figura 1–29).

Ao nível do mar, uma massa de 1 kg pesa 9,807 N, como ilustrado na Figura 1–30. Uma massa de 1 lbm, entretanto, pesa 1 lbf, o que leva as pessoas a acreditar que libra-massa e libra-força podem ser usados como sinônimos de libra (lb), o que é uma fonte de erro importante no sistema inglês.

Deve ser observado que a *força da gravidade* atuando sobre certa massa resulta da *atração* entre as massas e assim é proporcional ao valor das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Portanto, a aceleração da gravidade g no local depende da *densidade local* da crosta terrestre, da *distância* ao centro da Terra e, com menor influência, das posições da Lua e do Sol. O valor de g varia, conforme o local, desde 9,8295 m/s² a 4500 m abaixo do nível do mar, até 7,3218 m/s² a 100.000 m acima do nível do mar. Entretanto, em altitudes até 30.000 m, a variação de g do valor 9,807 m/s² ao nível do mar é menor do que 1%. Portanto, para a maioria dos propósitos práticos, a aceleração da gravidade pode ser suposta *constante*, com valor 9,81 m/s². É interessante notar que nas posições abaixo do nível do mar, o valor de g aumenta com a distância em relação

ao nível do mar, alcança um máximo em cerca de 4500 m e depois começa a decrescer. (Quanto você imagina que seja o valor de g no centro da Terra?)

A principal causa da confusão entre massa e peso é que a massa, em geral, é medida *indiretamente*, medindo-se a *força da gravidade* que ela exerce. Essa abordagem também assume que as forças exercidas por outros efeitos, como flutuação no ar e movimento do fluido, são desprezíveis. É como medir a distância a uma estrela medindo a mudança da tonalidade de sua cor para vermelho, ou medir a altitude de um aeroplano medindo a pressão barométrica. Essas medições também são ambas indiretas. A maneira *direta* correta de medir a massa é compará-la com um valor de massa conhecido, o que todavia é trabalhoso e mais usado para aferição e medição de metais preciosos.

O trabalho, que é uma forma de energia, pode ser simplesmente definido como o produto da força pela distância. Portanto, tem como unidade o "newton-metro (N · m)", que é chamado de joule (J). Isto é,

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m} \tag{1–3}$$

Uma unidade de energia mais comum no SI é o quilojoule (1 kJ = 10^3 J). No sistema inglês, a unidade de energia é a **Btu** [(British thermal unit) (unidade térmica britânica)], definida como a energia necessária para aumentar a temperatura de 1 lbm de água a 68°F de 1 °F. No sistema métrico, a quantidade de energia necessária para aumentar a temperatura de 1 g de água a 14,5 °C de 1 °C é definida como 1 **caloria** (cal), e 1 cal = 4,1868 J. Os valores de quilojoule e Btu são quase idênticos (1 Btu = 1,0551 kJ).

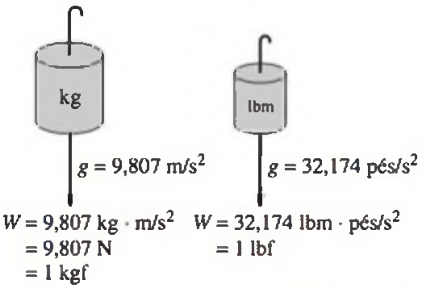


FIGURA 1–30
O peso de uma unidade de massa ao nível do mar.

Homogeneidade Dimensional

Todos nós sabemos desde o curso médio que maçãs e laranjas não podem ser somadas, mas de alguma maneira o fazemos (por erro, naturalmente). Na engenharia, todas as equações devem ser *dimensionalmente homogêneas*. Ou seja, todos os termos da equação devem ter a mesma unidade (Figura 1–31). Se, em algum estágio de uma análise, estivermos numa situação de somar unidades diferentes, isso é uma indicação clara de que cometemos um erro numa etapa anterior. Então, verificar as dimensões serve como uma ferramenta valiosa para detectar erros.

FIGURA 1–31
Para ser dimensionalmente homogêneos, todos os termos de uma equação devem ter a mesma unidade.

© Reproduzido com permissão especial de King Features Syndicate.

EXEMPLO 1–2 Identificação de Erros via Inconsistência de Unidades

Ao resolver um problema, uma pessoa obteve a equação abaixo numa certa etapa:

$$E = 25\ \text{kJ} + 7\ \text{kJ/kg}$$

onde E é a energia total e tem unidades em quilojoules. Determine como corrigir o erro e explique o que pode ter causado o erro.

SOLUÇÃO Durante uma análise foi obtida uma relação com unidades inconsistentes. A correção deve ser encontrada e a causa provável do erro deve ser determinada.

Análise Os dois termos do lado direito não têm as mesmas unidades, e portanto não podem ser somados para obter a energia total. Multiplicar o último termo por massa eliminará os quilogramas do denominador e toda a equação torna-se dimensionalmente homogênea, isto é, cada termo da equação terá a mesma unidade.

Discussão Obviamente, o erro foi causado pelo esquecimento de multiplicar o último termo pela massa numa etapa anterior.

Todos nós sabemos, por experiência, que as unidades podem dar terríveis dores de cabeça se não forem usadas cuidadosamente na solução de um problema. No entanto, com atenção e habilidade, as unidades são usadas em nosso benefício. Elas podem ser usadas para verificar fórmulas, podem até mesmo ser usadas para deduzir fórmulas, como explicado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1–3 Obtenção de Fórmulas pelas Considerações sobre Unidades

Um reservatório está cheio de óleo cuja densidade é $\rho = 850\ \text{kg/m}^3$. Se o volume do reservatório é $V = 2\ \text{m}^3$, determine a quantidade de massa m no reservatório.

SOLUÇÃO O volume do reservatório é dado. A massa de óleo deve ser determinada.

Hipótese Óleo é uma substância incompressível e, portanto, sua densidade é constante.

Análise A Figura 1–32 mostra um esboço do sistema que acabamos de descrever. Suponha que esqueçamos a fórmula que relaciona massa com densidade e volume. No entanto, sabemos que a massa tem quilograma como unidade. Ou seja, quaisquer cálculos que façamos têm que resultar em unidades de quilograma. Salientando tais informações, temos

$$\rho = 850\ \text{kg/m}^3 \quad \text{e} \quad V = 2\ \text{m}^3$$

É óbvio que podemos eliminar m^3 e obter kg pela multiplicação das duas quantidades. Portanto, a fórmula que procuramos deve ser

$$m = \rho V$$

Assim,

$$m = (850\ \text{kg/m}^3)(2\ \text{m}^3) = \mathbf{1700\ kg}$$

Discussão Observe que esta abordagem pode não dar certo para fórmulas mais complicadas.

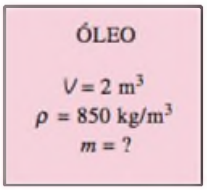


FIGURA 1–32
Esquema para o Exemplo 1–3.

O estudante deve ter em mente que uma fórmula que não seja dimensionalmente homogênea está definitivamente errada, mas uma fórmula dimensionalmente homogênea não está necessariamente correta.

Razões de Conversão de Unidades

Da mesma maneira que todas as dimensões não primárias podem ser formadas por combinações apropriadas de dimensões primárias, *todas as unidades não primárias (**unidades secundárias**) podem ser formadas por combinações de unidades primárias*. As unidades de força, por exemplo, podem ser expressas como

$$\text{N} = \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{e} \quad \text{lbf} = 32{,}174\ \text{lbm}\,\frac{\text{pé}}{\text{s}^2}$$

Também podem ser expressas mais convenientemente como **razões de conversão de unidades**

$$\frac{\text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\text{lbf}}{32{,}174\ \text{lbm} \cdot \text{pés/s}^2} = 1$$

Razões de conversão de unidades são identicamente iguais a 1 e adimensionais. Então, tais razões (ou seus inversos) podem ser inseridas convenientemente em quaisquer cálculos para converter unidades adequadamente. Os estudantes são encorajados a sempre usar as razões de conversão de unidades tais como as apresentadas neste texto ao converterem unidades. Alguns textos inserem nas equações a constante de gravitação arcaica g_c definida como $g_c = 32{,}174\ \text{lbm} \cdot \text{pés/lbf} \cdot \text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m/N} \cdot \text{s}^2 = 1$ a fim de forçar as unidades a se equipararem. Tal prática traz confusão desnecessária e é enfaticamente desencorajada pelos autores deste texto. Recomendamos, ao contrário, que os estudantes usem as razões de conversão de unidades.

EXEMPLO 1–4 **O Peso de uma Libra-Massa**

Mostrar que 1,00 lbm pesa 1,00 lbf na Terra, usando razões de conversão de unidades (Figura 1–33).

SOLUÇÃO A massa de 1,00 lbm está submetida à gravidade padrão da Terra. Determinar seu peso.

Hipótese São assumidas as condições padrão ao nível do mar.

Propriedades A constante de gravidade é $g = 32{,}174$ pés/s^2.

Análise Vamos aplicar a segunda lei de Newton para calcular o peso (força) que corresponde à massa e aceleração conhecidas. O peso de qualquer objeto é igual a sua massa multiplicada pelo valor local da aceleração da gravidade. Assim,

$$W = mg = (1{,}00\ \text{lbm})(32{,}174\ \text{pés/s}^2)\left(\frac{1\ \text{lbf}}{32{,}174\ \text{lbm} \cdot \text{pés/s}^2}\right) = 1{,}00\ \text{lbf}$$

Discussão A massa é a mesma independentemente de sua localização. Entretanto, em algum outro planeta com valor diferente da aceleração da gravidade, o peso de 1 lbm será diferente do valor calculado neste exemplo.

FIGURA 1–33
A massa de 1 lbm pesa 1 lbf na Terra.

Quando se compra uma caixa de cereal para o café da manhã, o texto impresso pode dizer "Peso líquido: uma libra (454 gramas)" (ver Figura 1–34). Tecnicamente, isso significa que o cereal contido na caixa pesa 1,00 lbf na Terra e tem *massa* de 453,6 g (0,4536 kg). Usando a segunda lei de Newton, o peso real na Terra do cereal no sistema métrico é

$$W = mg = (453{,}6\ \text{g})(9{,}81\ \text{m/s}^2)\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}}\right) = 4{,}49\ \text{N}$$

FIGURA 1–34
Idiossincrasia do sistema métrico de unidades.

1–7 ▪ MODELAGEM MATEMÁTICA DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA

Um dispositivo ou processo de engenharia pode ser estudado tanto *experimentalmente* (testando e tomando medidas) como *analiticamente* (por análises ou cálculos). A abordagem experimental tem a vantagem de lidarmos com o próprio sistema físico e a quantidade desejada é determinada por mensuração dentro dos limites do erro experimental. Entretanto, tal abordagem é cara, consome tempo e freqüentemente é impraticável. Além disso, o sistema que estamos estudando pode até não existir. Por exemplo, os sistemas de aquecimento e de tubulações de um edifício geralmente devem ser dimensionados com base nas especificações fornecidas, *antes* que o edifício seja realmente construído. A abordagem analítica (incluindo a abordagem numérica) tem a vantagem de ser rápida e de baixo custo, porém os resultados obtidos estão condicionados à precisão das hipóteses, das aproximações e das idealizações feitas na análise. Nos estudos de engenharia, um bom compromisso é freqüentemente alcançado reduzindo-se as escolhas a algumas poucas, por meio de análise e depois verificando os resultados experimentalmente.

Modelagem na Engenharia

A descrição da maioria dos problemas científicos envolve equações que relacionam as variações de algumas variáveis-chave entre si. Usualmente, quanto menor for o incremento selecionado nas variáveis que mudam, mais geral e precisa será a descrição. No caso-limite de mudanças infinitesimais ou diferenciais das variáveis, obtemos equações diferenciais que fornecem formulações matemáticas precisas para os princípios e leis físicas, por representar as taxas de variação por *derivadas*. Portanto, as equações diferenciais são usadas para investigar uma grande variedade de problemas científicos e de engenharia (Figura 1–35). Entertanto, muitos problemas encontrados na prática podem ser resolvidos sem recorrer às equações diferenciais e às complicações associadas a elas.

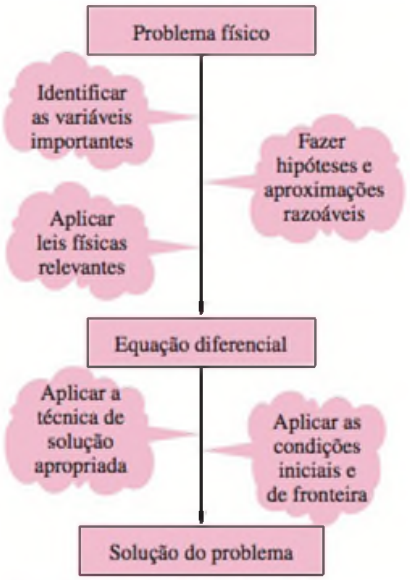


FIGURA 1–35
Modelagem matemática de problemas físicos.

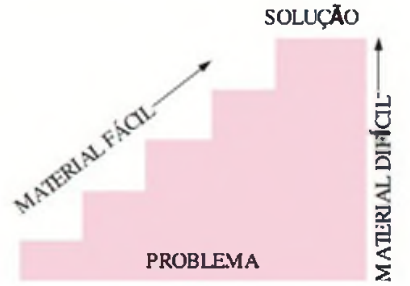


FIGURA 1–36
A abordagem passo a passo pode simplificar enormemente a solução de problemas.

O estudo de fenômenos físicos envolve duas etapas importantes. Na primeira etapa, todas as variáveis que afetam o fenômeno são identificadas, hipóteses e aproximações razoáveis são feitas e a interdependência entre essas variáveis é estudada. As leis e princípios físicos relevantes são invocados e o problema é formulado matematicamente. A equação propriamente dita é muito instrutiva, porque mostra o grau de dependência de algumas variáveis em relação a outras e a importância relativa dos diversos termos. Na segunda etapa, o problema é resolvido usando uma abordagem apropriada e os resultados são interpretados.

Muitos processos que parecem ocorrer na natureza de maneira aleatória e sem qualquer ordem são de fato governados por algumas leis físicas visíveis ou nem tão visíveis. Se as notamos ou não, tais leis estão lá, governando consistente e previsivelmente o que parecem ser eventos costumeiros. A maioria dessas leis é bem definida e bem compreendida pelos cientistas. Isso torna possível predizer o curso de um evento antes que verdadeiramente ocorra ou estudar matematicamente vários aspectos de um evento sem realmente realizar experimentos caros e que consomem tempo. Neste fato reside o poder da análise. Resultados bastante precisos para problemas práticos significativos podem ser obtidos com esforço relativamente pequeno, usando um modelo matemático adequado e realista. A preparação de tais modelos requer o conhecimento adequado do fenômeno natural considerado e das leis relevantes, bem como um julgamento bem fundamentado. Um modelo não realista obviamente dará resultados imprecisos e portanto inaceitáveis.

Um analista trabalhando num problema de engenharia freqüentemente se encontra na posição de fazer uma escolha entre um modelo muito preciso, mas complexo e outro mais simples, porém não tão preciso. A escolha certa depende da situação. A escolha certa geralmente é o modelo mais simples que dê resultados satisfatórios. Além disso, é importante considerar as condições de operação reais ao selecionar o equipamento.

A preparação de modelos muito precisos, porém complexos geralmente não é tão difícil. Tais modelos, no entanto, não são úteis para o analista se forem difíceis e consumirem muito tempo para serem resolvidos. O modelo, no mínimo, deve refletir as características essenciais do problema físico que ele representa. Há muitos problemas relevantes no mundo real que podem ser analisados com um modelo simples. Mas deve-se sempre ter em mente que os resultados obtidos por meio de uma análise são no máximo tão precisos quanto as hipótese feitas para a simplificação do problema. Portanto, a solução obtida não deve ser aplicada a situações em que as hipóteses originais não são válidas.

Uma solução que não é consistente com a natureza do problema observado indica que o modelo matemático usado é muito grosseiro. Em tais casos, um modelo mais realista deve ser preparado, eliminando-se uma ou mais hipóteses questionáveis. Isso resultará num modelo mais complexo que, naturalmente, será mais difícil de resolver. Então, qualquer solução de um problema deve ser interpretada no contexto de sua formulação.

1–8 ▪ TÉCNICA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMA

O primeiro passo para aprender qualquer ciência é compreender seus fundamentos e adquirir um conhecimento apropriado sobre ela. O passo seguinte é dominar os fundamentos testando esse conhecimento. Isso é feito resolvendo-se problemas significativos do mundo real. A solução de tais problemas, especialmente os complicados, requer uma abordagem sistemática. Usando a abordagem passo a passo, o engenheiro transforma a solução de um problema complicado na solução de uma série de problemas simples (Figura 1–36). Ao solucionar um problema, recomendamos que você use os passos seguintes zelosamente, quando forem aplicáveis. Isso o ajudará a evitar as armadilhas comuns associadas à solução de problemas.

Passo 1: Definição do Problema

Com suas próprias palavras, defina resumidamente o problema, as informações-chave dadas e as quantidades a serem determinadas. Isso serve para ter certeza de que o problema e os objetivos foram compreendidos antes de tentar solucioná-lo.

Passo 2: Diagrama Esquemático

Desenhe um esboço realístico do sistema físico envolvido e relacione as informações relevantes na figura. O esboço não precisa ser elaborado, mas deve representar o sistema real e mostrar suas características-chave. Indique quaisquer interações de energia e massa com a vizinhança. Listar as informações dadas no esboço ajuda a ver o problema como um todo. Verifique também se há propriedades que permanecem constantes durante um processo (tal como a temperatura durante um processo isotérmico) e saliente-os no esboço.

Passo 3: Hipóteses e Aproximações

Informe quaisquer hipóteses e aproximações apropriadas feitas para simplificar o problema e tornar possível obter uma solução. Justifique as hipóteses questionáveis. Considere valores razoáveis para as quantidades necessárias cujos valores são desconhecidos. Por exemplo, na ausência de dados específicos para a pressão atmosférica, pode-se considerar o valor de 1 atm. Entretanto, deve-se observar na análise que a pressão atmosférica diminui com o aumento de altitude. Por exemplo, ela cai para 0,83 atm em Denver (altitude de 1610 m) (Figura 1–37).

Passo 4: Leis Físicas

Aplique todas as leis básicas e princípios físicos relevantes (tais como conservação de massa) e reduza-os a sua forma mais simples utilizando as hipóteses feitas. Entretanto, a região em que uma lei física é aplicada deve antes ser claramente identificada. Por exemplo, o aumento da velocidade da água que flui através de um bocal é analisado aplicando-se a conservação de massa entre a entrada e a saída do bocal.

Passo 5: Propriedades

Determine as propriedades desconhecidas em estados conhecidos necessárias para resolver o problema por meio de relações entre propriedades ou tabelas. Relacione as propriedades separadamente e indique a sua fonte, se aplicável.

Passo 6: Cálculos

Substitua as quantidades conhecidas nas relações simplificadas e execute os cálculos para determinar as incógnitas. Preste atenção especial às unidades e ao cancelamento de unidades e lembre-se que uma quantidade dimensional sem unidade não tem sentido. Além disso, não dê a falsa impressão de alta precisão copiando todos os dígitos da tela da calculadora – arredonde com uma quantidade apropriada de algarismos significativos (Seção 1–10).

Passo 7: Raciocínio, Verificação e Discussão

Certifique-se de que os resultados obtidos sejam razoáveis e intuitivos e verifique a validade das hipóteses questionáveis. Repita os cálculos que resultaram em valores não razoáveis. Por exemplo, sob as mesmas condições de teste, o arrasto aerodinâmico sob um automóvel *não* deve aumentar depois de tornar a forma do automóvel mais suave (Figura 1–38).

Mostre, também, o significado dos resultados e discuta suas implicações. Indique as conclusões que podem ser extraídas dos resultados e quaisquer recomendações que possam ser feitas por meio delas. Enfatize as limitações sob as quais os resultados são aplicáveis, e tenha cuidado com quaisquer más interpretações possíveis e com o uso dos resultados em situações em que as hipóteses fundamentais não se apliquem. Por exemplo, se você determinou que o uso de um cano de diâmetro maior numa tubulação proposta traz um custo adicional de $5.000,00 em materiais, mas reduz o custo anual de operação em $3.000,00, indique que a tubulação de diâmetro maior paga a diferença de custo com a economia de material em menos de dois anos. Entretanto, explique também que apenas os custos adicionais do material associados a canos de diâmetro maior foram considerados na análise.

Dado: Temperatura do ar em Denver

Determinar: Densidade do ar

Informação desconhecida: Pressão atmosférica

Hipótese 1: Considere P = 1 atm (Inapropriada. Ignora o efeito da altitude. Causará erro maior do que 15%.)

Hipótese 2: Considere P = 0,83 atm (Apropriada. Ignora apenas efeitos pequenos, tal como acima.)

FIGURA 1–37
As hipóteses feitas ao resolver um problema de engenharia devem ser razoáveis e justificáveis.

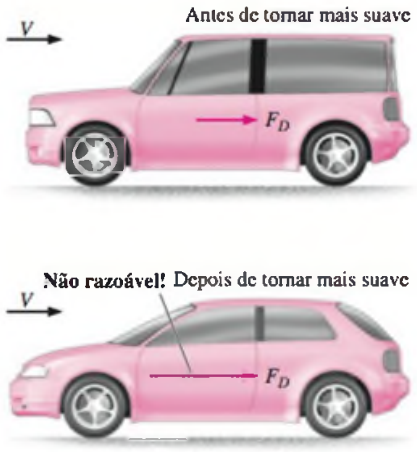


FIGURA 1–38
Os resultados obtidos numa análise de engenharia devem ser verificados em relação à razoabilidade.

Tenha em mente que as soluções apresentadas a seus professores e qualquer análise de engenharia apresentada a outras pessoas é uma forma de comunicação. Conseqüentemente, clareza, organização, completude e aparência visual são da maior importância para máxima eficácia. Além do mais, a clareza serve também como uma grande ferramenta de verificação, visto que é muito fácil detectar erros e inconsistências num trabalho organizado. Negligência e omissão de passos para ganhar tempo no final das contas consomem mais tempo e causam ansiedade desnecessária.

A abordagem aqui descrita é usada nos problemas resolvidos como exemplo sem mencionar explicitamente cada passo. Em alguns problemas, alguns dos passos não se aplicam ou são desnecessários. Por exemplo, freqüentemente não é prático relacionar as propriedades separadamente. Entretanto, não podemos deixar de enfatizar a importância de uma abordagem lógica e ordenada para a solução de problemas. A maioria das dificuldades encontradas ao resolver um problema não é devida à falta de conhecimento, mas sim à falta de organização. Recomendamos fortemente que você siga esses passos na solução de problemas até que desenvolva sua própria abordagem, que funcione melhor para você.

1–9 • PACOTES DE APLICATIVOS PARA ENGENHARIA

O leitor deve estar imaginando por que estamos a ponto de empreender um estudo detalhado dos fundamentos de uma outra ciência da engenharia. Afinal de contas, quase todos os problemas prováveis de encontrarmos na prática podem ser resolvidos por um dos diversos pacotes de sofisticados programas de computador prontamente disponíveis hoje no mercado. Tais pacotes de aplicativos fornecem não apenas os resultados numéricos desejados, mas também saídas de dados sob a forma de gráficos coloridos para apresentações impressionantes. Atualmente é inimaginável praticar a engenharia sem usar algum desses programas. Esse tremendo poder de cálculo disponível com o simples toque de um botão é, ao mesmo tempo, benção e maldição. Certamente tornam os engenheiros capazes de resolver problemas de modo fácil e rápido, mas também abrem a porta para abusos e desinformação. Nas mãos de pessoas sem treinamento adequado, tais pacotes de programas são tão perigosos como armas sofisticadas e poderosas nas mãos de soldados mal treinados.

Pensar que uma pessoa que pode usar os pacotes de programas de engenharia sem treinamento apropriado sobre os fundamentos possa praticar a engenharia é o mesmo que imaginar que uma pessoa que pode usar uma chave de parafusos tenha condições de trabalhar como mecânico de automóveis. Se fosse verdade que os estudantes de engenharia não necessitassem de todos os cursos fundamentais que cursam porque praticamente tudo pode ser feito rápida e facilmente por computadores, então também seria verdadeiro que os empregadores não precisariam de engenheiros bem pagos porque qualquer pessoa que saiba usar um processador de textos também pode aprender a usar estes aplicativos de engenharia. Entretanto, as estatísticas mostram que a necessidade de engenheiros é crescente e não decrescente, apesar da disponibilidade desses potentes pacotes.

Devemos sempre lembrar de que todo o poder de cálculo e os pacotes de programas de engenharia disponíveis hoje são apenas *ferramentas*, e as ferramentas só têm significado nas mãos de mestres. Ter o melhor programa de processamento de texto não faz da pessoa um bom escritor, mas certamente torna o trabalho de um bom escritor mais fácil e torna o escritor mais produtivo (Figura 1–39). As calculadoras portáteis não eliminaram a necessidade de ensinar nossas crianças a somar e subtrair, e os pacotes de programas médicos sofisticados não substituíram o treinamento nas escolas de medicina. Nem os pacotes de programas de engenharia substituirão o ensino tradicional da engenharia. Simplesmente causarão uma mudança de ênfase nos cursos da matemática à física. Isto é, será gasto mais tempo na sala de aula discutindo em maior detalhe os aspectos físicos dos problemas e menos tempo nos procedimentos da mecânica de solução.

Todas essas ferramentas maravilhosas e potentes disponíveis atualmente acarretam uma sobrecarga sobre os engenheiros de hoje. Ainda devem ter uma com-

FIGURA 1–39
Um excelente programa de processamento de texto não faz de uma pessoa um bom escritor, simplesmente torna o bom escritor um escritor mais eficiente.

preensão completa dos fundamentos, desenvolver sensibilidade sobre os fenômenos físicos, serem capazes de "ver" os dados sob uma perspectiva apropriada e fazer julgamentos de engenharia sensatos, como seus predecessores. Entretanto, devem fazê-lo muito melhor e mais rápido, usando modelos mais realistas por causa das ferramentas poderosas disponíveis atualmente. Os engenheiros do passado tinham que contar com cálculos manuais, réguas de cálculo e mais recentemente com calculadoras de mão e computadores. Atualmente, contam com pacotes de programas. O acesso fácil a tal poder e a possibilidade de que um engano simples ou interpretação errônea possam causar grandes danos tornam mais importante do que nunca ter um sólido treinamento nos fundamentos da engenharia. Neste livro, fazemos um esforço extra para enfatizar o desenvolvimento de uma compreensão intuitiva e física dos fenômenos naturais, em vez de dar ênfase aos detalhes matemáticos de procedimentos de solução.

Engineering Equation Solver (EES) (Solucionador de Equações de Engenharia)

O EES é um programa que soluciona numericamente sistemas de equações algébricas lineares e não-lineares e de equações diferenciais. Ele tem uma vasta biblioteca embutida de funções de propriedades termodinâmicas, bem como funções matemáticas, e permite ao usuário fornecer propriedades adicionais dos dados. Ao contrário de alguns aplicativos, o EES não resolve problemas de engenharia, resolve apenas as equações fornecidas pelo usuário. Portanto, o usuário deve compreender o problema e formulá-lo aplicando quaisquer leis e relações físicas relevantes. O EES economiza esforço e tempo consideráveis do usuário simplesmente resolvendo as equações matemáticas resultantes. Isso torna possível a tentativa de solucionar problemas de engenharia significativos, não adequados para cálculos à mão e conduzir estudos paramétricos rápida e convenientemente. O EES é um programa muito poderoso, porém intuitivo, muito fácil de usar, como mostrado no Exemplo 1–5.

EXEMPLO 1–5 Resolução de Sistema de Equações com o EES

A diferença entre dois números é 4 e a soma dos quadrados destes dois números é igual à soma dos números mais 20. Determine os dois números.

SOLUÇÃO São dadas as equações da diferença e da soma dos quadrados dos dois números, que devem ser calculados.

Análise Iniciamos o programa EES dando um clique duplo sobre seu ícone, abrindo um arquivo novo e digitando o seguinte na tela em branco que aparece:

```
x-y=4
x^2+y^2=x+y+20
```

que é a expressão matemática exata do enunciado do problema, onde x e y indicam as incógnitas. A solução deste sistema de duas equações não-lineares com duas incógnitas é obtida dando um único clique sobre o ícone "calculator" (calculadora) da barra de tarefas. Obtém-se

$$x=5 \quad \text{e} \quad y=1$$

Discussão Observe que tudo o que fizemos foi formular o problema, como faríamos numa folha de papel. O EES cuidou de todos os detalhes matemáticos da solução. Observe também que as equações podem ser lineares ou não-lineares e podem ser digitadas em qualquer ordem, com as incógnitas em quaisquer dos dois lados. Programas amigáveis de solução de equações, tais como o EES, permitem que o usuário se concentre na física do problema sem se preocupar com as complexidades matemáticas associadas à solução do sistema de equações resultante.

FLUENT

O FLUENT é um código de dinâmica dos fluidos computacional [computational fluid dynamics (CFD)] largamente usado em aplicações de modelagem de escoamentos. O primeiro passo da análise é o pré-processamento, que envolve a construção de um modelo ou importação do modelo de um pacote CAD, a aplicação de malha baseada em volumes finitos e a entrada de dados. Uma vez preparado o modelo numérico, o FLUENT executa todos os cálculos necessários e produz os resultados desejados. O passo final da análise é o pós-processamento, que envolve organização e interpretação dos dados e imagens. Pacotes destinados a aplicações específicas, como refrigeração de componentes eletrônicos, sistemas de ventilação e mistura, também estão disponíveis. O FLUENT manipula escoamentos subsônicos ou supersônicos, estacionário ou transiente, laminar ou turbulento, Newtoniano ou não newtoniano, unifásico ou multifásico, reações químicas inclusive combustão, escoamento em meio poroso, transferência de calor e vibrações induzidas por escoamentos. A maioria das soluções numéricas apresentadas neste texto foi obtida usando FLUENT, e CFD é discutido em maiores detalhes no Capítulo 15.

1–10 ▪ EXATIDÃO, PRECISÃO E ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Nos cálculos de engenharia, as informações fornecidas não são conhecidas com mais do que certo número de algarismos significativos, geralmente três algarismos. Conseqüentemente, os resultados obtidos não podem ter precisão maior do que o do número de algarismos significativos dos dados. Relatar resultados com mais algarismos significativos implica precisão maior do que existe, e deve ser evitado.

Independentemente do sistema de unidades usado, os engenheiros devem estar cientes de três princípios que governam o uso apropriado dos números: exatidão (acurácia), precisão e algarismos significativos. Para as medidas de engenharia, eles são definidos como se segue:

- **Erro de exatidão** (*inexatidão*) é o valor de uma leitura menos o valor verdadeiro. Em geral, a exatidão de um conjunto de medidas refere-se à proximidade da leitura média em relação ao valor verdadeiro. Exatidão geralmente é associada a erros repetitivos e fixos.
- **Erro de precisão** é o valor de uma leitura menos a média das leituras. Em geral, a precisão de um conjunto de medidas refere-se à fineza da resolução e à capacidade de repetição do instrumento de medida. Geralmente, a precisão é associada a erros não repetitivos e aleatórios.
- **Algarismos significativos** são os dígitos relevantes e expressivos.

Uma medida ou cálculo podem ser muito precisos sem serem muito exatos, e vice-versa. Por exemplo, suponha que o valor real da velocidade do vento seja 25,00 m/s. Dois anemômetros A e B fazem cinco leituras, cada um, da velocidade do vento:

Anemômetro A: 25,50, 25,69, 25,52, 25,58 e 25,61 m/s. Média de todas as leituras = 25,58 m/s.

Anemômetro B: 26,3, 24,5, 23,9, 26,8 e 23,6 m/s. Média de todas as leituras = 25,02 m/s.

Claramente, o anemômetro A é mais preciso, visto que nenhuma das leituras difere por mais de 0,11 m/s da média. Entretanto, a média 25,58 m/s é 0,58 m/s maior do que a velocidade verdadeira do vento, indicando **erro de desvio** significativo, também chamado de **erro constante** ou **erro sistemático**. Por outro lado, o anemômetro B não é muito preciso, visto que suas leituras variam bastante em torno da média; mas sua média total está muito mais próxima do valor verdadeiro. Conseqüentemente, o anemômetro B é mais exato do que o anemômetro A, pelo menos para este conjunto de leituras, ainda que seja menos preciso. A diferença entre

exatidão e precisão pode ser ilustrada eficazmente por uma analogia com o disparo de um revólver num alvo, como mostrado na Figura 1-40. O atirador A é muito preciso, mas não muito exato, enquanto o atirador B tem melhor exatidão total, mas menos precisão.

Muitos engenheiros não prestam a devida atenção ao número de algarismos significativos em seus cálculos. O algarismo menos significativo num número indica a precisão da medida ou cálculo. Por exemplo, um resultado escrito como 1,23 (três algarismos significativos) indica que o resultado é preciso até o algarismo da segunda casa decimal; isto é, o número está entre 1,22 e 1,24. Expressar o número com mais dígitos seria incorreto. O número de algarismos significativos é mais facilmente avaliado quando o número é escrito em notação exponencial; a quantidade de algarismos significativos pode então ser facilmente contada, inclusive os zeros. Alguns exemplos são mostrados na Tabela 1–3.

Ao executar cálculos ou manipulações de diversos parâmetros, o resultado final é geralmente apenas tão preciso quanto o parâmetro menos preciso do problema. Por exemplo, suponha que A e B sejam multiplicados para obter C. Se $A = 2{,}3601$ (cinco algarismos significativos), e $B = 0{,}34$ (dois algarismos significativos), então $C = 0{,}80$ (apenas dois algarismos são significativos no resultado final). Observe que a maioria dos estudantes é tentada a escrever $C = 0{,}802434$, com seis algarismos significativos, uma vez que este é o resultado exibido na calculadora depois de multiplicar os dois números.

Vamos analisar este exemplo simples cuidadosamente. Suponha que o valor exato de B é 0,33501, que é lido pelo instrumento como 0,34. Suponha também que A é exatamente 2,3601, como medido por um instrumento mais exato e preciso. Neste caso, $C = A \times B = 0{,}79066$, com cinco algarismos significativos. Note que nossa primeira resposta, $C = 0{,}80$ difere por um algarismo na segunda casa decimal. Da mesma maneira, se B for 0,34499, e o instrumento o ler como 0,34, o produto de A por B seria 0,81421 com cinco significativos. Nossa resposta original de 0,80 novamente difere por um na segunda casa decimal. O ponto principal aqui é que 0,80 (com dois algarismos significativos) é o melhor que se pode esperar deste produto, uma vez que um dos valores tinha apenas dois algarismos significativos. Outra maneira de ver o fato é dizer que após os dois primeiros algarismos da resposta, os algarismos restantes são inexpressivos ou sem significado. Por exemplo, se alguém reporta que a calculadora exibe 2,3601 vezes 0,34 igual a 0,802434, os últimos quatro algarismos **não têm significado**. Como mostrado, o resultado final deve ficar entre 0,79 e 0,81— quaisquer algarismos, além dos dois algarismos significativos não são apenas sem significado, mas também *enganosos*, porque indicam ao leitor maior precisão do que realmente existe.

Como outro exemplo, considere um recipiente de 3,75 l cheio de gasolina, cuja densidade é 0,845 kg/l, e determine sua massa. Provavelmente a primeira idéia que vem à sua mente é multiplicar o volume pela densidade para obter 3,16875 kg de massa, o que implica falsamente que a massa assim determinada tem precisão de seis algarismos significativos. Porém, na verdade a massa não pode ter precisão maior do que três algarismos significativos porque tanto o volume como a densidade têm precisão de apenas três algarismos significativos. Portanto, o resultado deve ser arredondado para três algarismos significativos e o valor da massa deve ser registrado como 3,17 kg em vez do valor que a calculadora mostra (Figura 1–41). O resultado 3,16875 kg seria correto somente se o volume e a massa fossem dados como 3,75000 l e 0,845000 kg/l, respectivamente. O valor 3,75 l implica que estamos razoavelmente confiantes de que o volume seja preciso dentro $\pm 0{,}01$ l e não possa ser nem 3,74 ou 3,76 l. Entretanto, o volume pode ser 3,746, 3,750, 3,753 etc., uma vez que todos são arredondados para 3,75 l.

Você também deve estar consciente de que algumas vezes preferimos introduzir pequenos erros a fim de evitar o incômodo de pesquisar dados mais exatos. Por exemplo, ao lidarmos com água líquida, freqüentemente usamos o valor 1000 kg/m^3 para densidade, que é o valor da densidade da água pura a 0°C. O uso de tal valor a 75°C resultará num erro de 2,5% uma vez que a densidade nessa temperatura é 975 kg/m^3. Os minerais e impurezas na água introduzem um erro adicional. Sendo

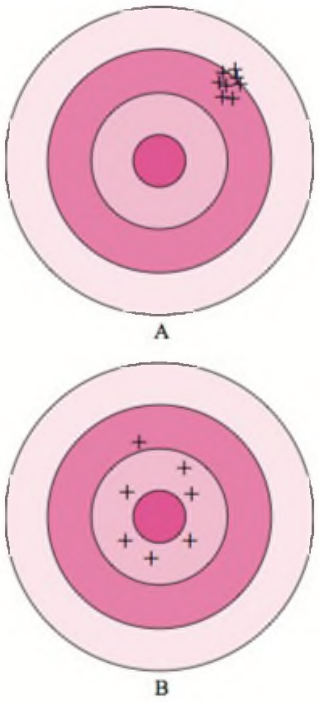


FIGURA 1–40
Ilustração de exatidão *versus* precisão. O atirador A é mais preciso, porém menos exato, enquanto o atirador B é mais exato, porém menos preciso.

TABELA 1–3

Algarismos significativos

Número	Notação Exponencial	Número de Algarismos Significativos
12,3	$1{,}23 \times 10^{1}$	3
123.000	$1{,}23 \times 10^{5}$	3
0,00123	$1{,}23 \times 10^{-3}$	3
40.300	$4{,}03 \times 10^{4}$	3
40.300.	$4{,}0300 \times 10^{4}$	5
0,005600	$5{,}600 \times 10^{-3}$	4
0,0056	$5{,}6 \times 10^{-3}$	2
0,006	$6, \times 10^{-3}$	1

Dados: Volume: $V = 3{,}75$ L
Densidade $\rho = 0{,}845$ kg/L

(3 algarismos significativos)

Também: $3{,}75 \times 0{,}845 = 3{,}16875$ kg

Determine:
Massa: $m = \rho V = 3{,}16875$ kg

Arredondando para 3 algarismos significativos: $m = 3{,}17$ kg

FIGURA 1–41
O resultado com mais algarismos significativos do que os dados indica falsamente mais precisão.

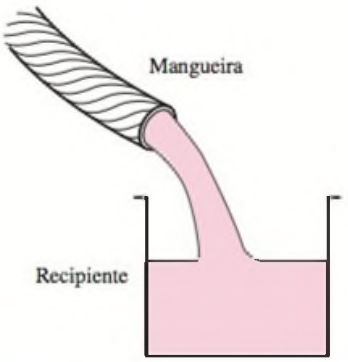


FIGURA 1–42
Diagrama do Exemplo 1–6 para medição da vazão de volume.

esse o caso, não tenha escrúpulos em arredondar os resultados finais com um número razoável de algarismos significativos. Além disso, ter um pequeno grau de incerteza nos resultados da análise de engenharia usualmente é a regra, não a exceção.

Ao escrever resultados intermediários num cálculo, é recomendável manter alguns dígitos "extras" para evitar erros de arredondamento, contudo, o resultado final deve ser escrito com o número de algarismos significativos em consideração. O leitor também deve ter em mente que um certo número de algarismos significativos de precisão no resultado não implica necessariamente o mesmo número de dígitos de exatidão geral. Erro de desvio em uma das leituras pode, por exemplo, reduzir significativamente a exatidão geral do resultado, talvez até tornando sem sentido o último algarismo significativo e reduzindo de um a quantidade total de algarismos confiáveis. Valores determinados experimentalmente estão sujeitos a erros de medição e tais erros são refletidos nos resultados obtidos. Por exemplo, se a densidade de uma substância tiver incerteza de 2%, então a massa determinada usando esse valor de densidade também terá incerteza de 2%.

Finalmente, quando a quantidade de algarismos significativos for desconhecida, o padrão aceito na engenharia é de três algarismos significativos. Portanto, se o comprimento de um cano for dado como 40 m, assumiremos que o valor seja 40,0 m a fim de justificar o uso de três algarismos significativos nos resultados finais.

EXEMPLO 1–6 Algarismos Significativos e Vazão de Volume

Jennifer está realizando uma experiência que usa água fria de uma mangueira de regar jardim. Para estimar a vazão do volume de água através da mangueira, cronometra o tempo gasto para encher um recipiente (Figura 1–42). O volume de água coletado é $V = 1{,}1$ gal durante o período de tempo $\Delta t = 45{,}62$ s, medido com cronômetro. Calcule a vazão de volume através da mangueira em unidades de metros cúbicos por minuto.

SOLUÇÃO A vazão de volume deve ser determinada por meio de medições de volume e do intervalo de tempo decorrido.

Hipóteses **1** Jennifer registrou suas medições adequadamente, de modo que a medição de volume é precisa até dois algarismos significativos, enquanto o período de tempo é preciso até quatro algarismos significativos. **2** Não há perda de água devido a derrame para fora do recipiente.

Análise Vazão de volume $\dot{V}$ é o volume deslocado por unidade de tempo e é expressa por

Vazão de volume:
$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Substituindo-se pelos valores medidos, a vazão de volume é

$$\dot{V} = \frac{1{,}1 \text{ gal}}{45{,}62 \text{ s}} \left(\frac{3{,}785 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ gal}} \right) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) = 5{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$$

Discussão O resultado final é fornecido com dois algarismos significativos uma vez que não podemos ter confiança em precisão maior do que esta. Se este resultado fosse de um passo intermediário em cálculos subseqüentes, seriam considerados alguns algarismos extras para evitar o acúmulo de erro de arredondamento. Em tais casos, a vazão de volume seria escrita $\dot{V} = 5{,}4759 \times 10^{-3}$ m³/min. Não podemos dizer nada sobre a exatidão do nosso resultado com base nas informações dadas, visto que não dispomos de informações sobre erros sistemáticos nas medições tanto de volume como de tempo.

Tenha em mente também que boa precisão não garante boa exatidão. Por exemplo, se as pilhas do cronômetro estiverem fracas, sua exatidão poderá ser bem baixa, apesar do mostrador ainda exibir precisão de quatro algorismos significativos.

Na prática comum, precisão é freqüentemente associada com resolução, que é uma medida do detalhe da medição que o instrumento exibe. Por exemplo, dizemos que um voltímetro digital de cinco algarismos no mostrador é mais preciso que um voltímetro digital com mostrador de apenas três algarismos. Entretanto, a quantidade de algarismos exibidos não tem nada a ver com a exatidão geral da medida. Um instrumento pode ser muito preciso sem ser muito exato quando há erros de desvio significativos. Da mesma maneira, um instrumento que exibe poucos algarismos pode ser ser mais exato do que outro que exiba muitos algarismos (Figura 1–43).

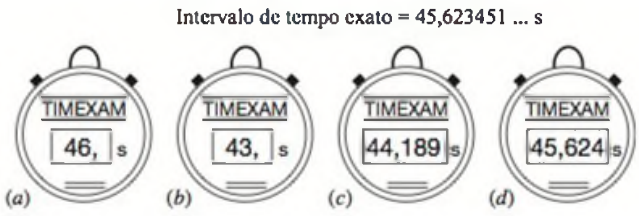


FIGURA 1–43
Um instrumento com muitos algarismos de resolução (cronômetro *c*) pode ser menos exato que um instrumento com poucos algarismos de resolução (cronômetro *a*). O que você tem a dizer sobre os cronômetros *b* e *d*?

RESUMO

Neste capítulo são introduzidos e discutidos alguns conceitos básicos da mecânica dos fluidos. Uma substância na fase líquida ou gasosa é considerada um fluido. A mecânica dos fluidos é a ciência que trata do comportamento dos fluidos em repouso ou em movimento e da interação de fluidos com sólidos ou outros fluidos nas fronteiras.

O escoamento de um fluido sem limitações sobre uma superfície é um *escoamento externo*, e o escoamento em uma tubulação ou duto é um *escoamento interno* se o fluido estiver completamente limitado por superfícies sólidas. O escoamento de um fluido é classificado como *compressível* ou *incompressível*, dependendo da variação da densidade do fluido durante o escoamento. As densidades dos líquidos são essencialmente constantes, e assim o escoamento dos líquidos é tipicamente incompressível. O termo *em regime permanente* (ou *estacionário*) implica *não haver nenhuma mudança com o decorrer do tempo*. O oposto de em regime permanente é *em regime não permanente*, ou transiente. O termo *uniforme* implica *não haver nenhuma mudança com a posição* dentro de uma região especificada. Um escoamento é denominado *unidimensional* quando a velocidade muda em uma única dimensão. Um fluido em contato direto com uma superfície sólida "gruda" à superfície e não há nenhum escorregamento. Tal fato é conhecido como *condição de não-escorregamento*, a qual leva à formação de *camadas-limite* ao longo de superfícies sólidas.

Um sistema com massa fixa é chamado de *sistema fechado*, e um sistema que envolva transferência de massa através de suas fronteiras é chamado de *sistema aberto* ou *volume de controle*. Um grande número de problemas de engenharia envolve fluxo de massa que entra e sai do sistema e é, portanto, modelado como *volume de controle*.

Nos cálculos de engenharia, é importante prestar atenção especial às unidades das quantidades para evitar erros causados por unidades inconsistentes e seguir uma abordagem sistemática. Também é importante reconhecer que as informações fornecidas não são conhecidas além de determinado número de algarismos significativos e que os resultados obtidos não têm maior exatidão com mais algarismos significativos. As informações dadas sobre dimensões e unidades, técnicas de resolução de problemas e exatidão, precisão e dígitos significativos serão usadas ao longo de todo o livro.

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. American Society for Testing and Materials. *Standards for Metric Practice.* ASTM E 380-79, jan. 1980.
2. C. T. Crowe, J. A. Roberson, e D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics,* 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
3. R. W. Fox e A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics,* 5. ed. Nova Iorque: Wiley, 1999.
4. G. M. Homsy, H. Aref, K. S. Breuer, S. Hochgreb, J. R. Koseff, B. R. Munson, K. G. Powell, C. R. Robertson, e S. T. Thoroddsen. *Multi-Media Fluid Mechanics* (CD). Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
5. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion.* Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ O Que Explosões Nucleares e Pingos de Chuva Têm em Comum

Autor Convidado: Lorenz Sigurdson, Vortex Fluid Dynamics Lab, Universidade de Alberta

(*a*) (*b*)

FIGURA 1–44
Comparação da estrutura de vórtice criada por: (*a*) uma gota da água após o impacto com uma poça de água (foto invertida, de Peck e Sigurdson, 1994); e (*b*) teste nuclear acima do solo, em Nevada, em 1957 (Departamento de Energia, EUA). A gota de 2,6 milímetros foi tingida com traçador fluorescente e iluminada por um raio estroboscópico 50 ms depois de cair 35 milímetros e chocar-se com a poça imaculada. A gota era aproximadamente esférica no instante do impacto com a poça de água. A interrupção de um raio laser pela gota em queda foi usado para ativar o cronômetro que controlou o tempo do raio estroboscópico após o impacto da gota. Os detalhes do cuidadoso procedimento experimental para criar a fotografia da gota são descritos por Peck e Sigurdson (1994) e Peck et al (1995). Os traçadores adicionados ao escoamento no caso da bomba foram principalmente calor e poeira. O calor é proveniente da "bola de fogo" original que para esse teste em particular (o evento "Priscilla" da operação Plumbob) era suficientemente grande para atingir o solo de onde a bomba estava suspensa inicialmente. Portanto, a condição geométrica inicial do traçador era uma esfera que interceptava o solo.

(a) De Peck, B. e Sigurdson, L. W., Phys. Fluids, 6(2)(Part 1), 564, 1994. Usada com permissão do autor.

(b) Departamento de Energia dos EUA. Foto de Lorenz Sigurdson.

Por que as duas imagens da Figura 1–44 parecem semelhantes? A Figura 1–44*b* mostra um teste nuclear acima do solo executado pelo Departamento de Energia dos EUA em 1957. A explosão atômica criou uma "bola de fogo" da ordem de 100 m de diâmetro. A expansão é tão rápida que ocorre uma característica de escoamento compressível: uma onda de choque esférica em expansão. A imagem mostrada no Figura 1–44*a* é um evento diário inofensivo: uma imagem *invertida* de uma gota de água tingida com corante depois que caiu numa poça de água, vista debaixo da superfície da poça. Ela poderia ter caído de sua colher numa xícara de café, ou ser um respingo secundário depois que um pingo de chuva bate sobre a superfície de um lago. Por que há similaridade tão forte entre estes dois eventos completamente diferentes? A aplicação de princípios fundamentais de mecânica dos fluidos aprendidos neste livro vai ajudá-lo a compreender muito da resposta, embora fosse possível ir muito mais fundo.

A água tem *densidade* maior que o ar (Capítulo 2), portanto a gota sofreu *flutuação* negativa (Capítulo 3) quando caía através do ar, antes do impacto. A "bola de fogo" de gás quente é menos densa que o ar frio que a circundava, assim tem flutuação positiva e sobe. A *onda de choque* (Capítulo 12) refletindo do solo também contribui com uma força positiva para cima sobre a "bola de fogo". A estrutura principal no topo de cada imagem é denominada *anel de vórtice*. Esse anel é um minitornado de *vorticidade* concentrada (Capítulo 4) com as extremidades do tornado formando um círculo para fechar sobre si próprio. As leis da *cinemática* (Capítulo 4) nos dizem que o anel de vórtice levará o fluido na direção do topo. Em ambos os casos isto é esperado devido às forças aplicadas e devido à lei de conservação do momento aplicada por meio de uma *análise de volume de controle* (Capítulo 5). Pode-se também analisar este problema pela *análise diferencial* (Capítulos 9 e 10) ou pela *dinâmica dos fluidos computacional* (Capítulo 15). Mas, por que o formato do material traçador parece tão similar? Esse fato ocorre se houver *similaridade geométrica e cinemática* aproximada (Capítulo 7), e se a técnica de *visualização do escoamento* (Capítulo 4) for similar. Os traçadores passivos de calor e poeira para a bomba e o corante fluorescente para a gota foram introduzidos de maneira semelhante, como observado no texto abaixo da figura.

Conhecimento adicional de cinemática e dinâmica de vórtices ajuda a explicar a similaridade da estrutura do vórtice nas imagens com maiores detalhes, como discutido por Sigurdson (1997), e Peck e Sigurdson (1994). Observe os lóbulos pendurados abaixo do anel principal do vórtice, as estrias na coluna e o anel na base de cada estrutura. Há também similaridade topológica dessa estrutura com outras estruturas de vórtices que ocorrem em turbulência. A comparação da gota com a bomba deu-nos uma melhor compreensão de como as estruturas turbulentas são criadas e evoluem. Que outros segredos da mecânica dos fluidos foram deixados para serem revelados ao explicar a similaridade entre esses dois escoamentos?

Referências

Peck, B., e Sigurdson, L.W. "The Three-Dimensional Vortex Structure of an Impacting Water Drop," *Phys. Fluids*, 6(2) (Part 1), p. 564, 1994.

Peck, B., Sigurdson, L.W., Faulkner, B., e Buttar, I. "An Apparatus to Study Drop-Formed Vortex Rings", *Meas. Sci. Tech.*, 6, p. 1538, 1995.

Sigurdson, L.W. "Flow Visualization in Turbulent Large-Scale Structure Research", Capítulo 6 in *Atlas of Visualization*, Vol. III, Flow Visualization Society of Japan, eds., CRC Press, p. 99–113, 1997.

PROBLEMAS*

Introdução, Classificação e Sistema

1–1C Defina escoamentos interno, externo e de canal aberto.

1–2C Defina escoamento e fluido incompressíveis. O escoamento de um fluido compressível deve ser obrigatoriamente tratado como compressível?

1–3C O que é a condição de não-escorregamento? Qual a sua causa?

1–4C O que é escoamento forçado? Como se diferencia do escoamento natural? O escoamento causado pelos ventos é forçado ou natural?

1–5C O que é uma camada-limite? O que causa o desenvolvimento de uma camada-limite?

1–6C Qual é a diferença entre as abordagens clássica e estatística?

1–7C O que é um processo de escoamento em regime permanente?

1–8C Defina tensão, tensão normal, tensão de cisalhamento e pressão.

1–9C O que são sistema, vizinhança e fronteira?

1–10C Quando um sistema é fechado e quando é um volume de controle?

Massa, Força e Unidades

1–11C Qual é a diferença entre libra-massa e libra-força?

1–12C Qual é a diferença entre kg-massa e kg-força?

1–13C Qual é a força líquida que atua sobre um automóvel trafegando com velocidade constante de 70 km/h (*a*) numa estrada plana e (*b*) numa estrada morro acima?

1–14 Um tanque plástico de 3 kg que tem volume de 0,2 m^3 está cheio com água líquida. Considerando que a densidade da água seja de 1000 kg/m^3, determine o peso do sistema combinado.

1–15 Determine a massa e o peso do ar contido num compartimento cujas dimensões são 6 m × 6 m × 8 m. Considere que a densidade do ar é de 1,16 kg/m^3. *Respostas:* 334,1 kg, 3277 N

1–16 Na latitude de 45°, a aceleração da gravidade em função da altitude z acima do nível do mar é dada por $g = a - bz$, onde $a = 9{,}807\ m/s^2$ e $b = 3{,}32 \times 10^{-6}\ s^{-2}$. Determine a altitude acima do nível do mar onde o peso de um objeto decresce 1%. *Resposta:* 29,539 m

1–17 A aceleração de aeronaves de alta velocidade algumas vezes é expressa em múltiplos de *g* (múltiplos da aceleração da gravidade padrão). Determine a força líquida para cima, em N, que um homem de 90 kg sofrerá numa aeronava cuja aceleração é de 6 *g*.

1–18 Uma rocha de 5 kg é lançada para cima com uma força de 150 N num lugar onde a aceleração da gravidade é de 9,79 m/s^2. Determine a aceleração da rocha em m/s^2.

1–19 Resolva o Problema 1–18 usando o programa EES (ou outro). Imprima toda a solução, inclusive os resultados numéricos nas unidades apropriadas.

1–20 O valor da aceleração da gravidade *g* decresce com a altitude de 9,807 m/s^2 ao nível do mar para 9,767 m/s^2 a uma altitude de 13.000 m, onde passam grandes aeronaves de passageiros. Determine a porcentagem de redução do peso da aeronave trafegando a 13.000 m de altitude em relação ao seu peso ao nível do mar.

Modelagem e Resolução de Problemas de Engenharia

1–21C Qual é a diferença entre precisão e exatidão? Uma medida pode ser muito precisa, mas inexata? Explique.

1–22C Qual é a diferença entre as abordagens analítica e experimental nos problemas de engenharia? Discuta as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

1–23C Qual é a importância da modelagem na engenharia? Como são preparados os modelos matemáticos para processos de engenharia?

1–24C Ao modelar um processo de engenharia, como é feita a escolha certa entre um modelo simples, mas não refinado, e um modelo complexo, porém exato? O modelo complexo é necessariamente uma escolha melhor, uma vez que é mais exato?

1–25C Como as equações diferenciais surgiram no estudo de problemas físicos?

1–26C Qual é o valor dos pacotes de progamas de computador para (*a*) educação na engenharia e (*b*) prática da engenharia?

1–27 Determine uma raiz real positiva desta equação usando o EES:

$$2x^3 - 10x^{0.5} - 3x = -3$$

1–28 Resolva este sistema de duas equações com duas incógnitas usando o EES:

$$x^3 - y^2 = 7{,}75$$
$$3xy + y = 3{,}5$$

1–29 Resolva este sistema de três equações com três incógnitas usando o EES:

$$2x - y + z = 5$$
$$3x^2 + 2y = z + 2$$
$$xy + 2z = 8$$

1–30 Resolva este sistema de três equações com três incógnitas usando o EES:

$$x^2y - z = 1$$
$$x - 3y^{0.5} + xz = -2$$
$$x + y - z = 2$$

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

Problemas de Revisão

1–31 O peso dos corpos pode mudar ligeiramente de um local para outro, como resultado da variação da aceleração da gravidade g com a altitude. Considerando essa variação e usando a relação do Problema 1-16, determine o peso de uma pessoa de 80 kg ao nível do mar ($z = 0$), em Denver ($z = 1610$ m) e no topo do Monte Everest ($z = 8848$ m).

1–32 Um homem vai a um açougue tradicional comprar um filé para o jantar. Ele encontra uma peça de 12 oz (1 lbm = 16 oz) por $3,15. Vai então ao supermercado vizinho e acha uma peça de 320 g de qualidade idêntica por $2,80. Qual peça é uma melhor compra?

1–33 A força de reação desenvolvida por um motor a jato para impulsionar um aeroplano para a frente é chamada de empuxo e o empuxo desenvolvido pelo motor de um Boeing 777 é de cerca de 85.000 lbf. Expresse esse empuxo em N e kgf.

Problema de Projeto e Dissertação

1–34 Escreva uma dissertação sobre os vários dispositivos de medição de massa e volume usados pelo homem ao longo dos tempos. Além disso, explique o desenvolvimento das unidades de massa e volume modernas.

CAPÍTULO

2

PROPRIEDADES DOS FLUIDOS

Neste capítulo, discutimos as propriedades encontradas na análise do escoamento de fluidos. Abordamos primeiro as propriedades *intensivas* e *extensivas* e definimos *densidade* e *gravidade específica*. Continuamos com uma discussão sobre as propriedades *pressão de vapor*, *energia* e suas várias formas, *calor específico* dos gases ideais e das substâncias incompressíveis e *coeficiente de compressibilidade*. Discutimos então a propriedade *viscosidade*, que desempenha um papel dominante na maioria dos aspectos do escoamento dos fluidos. Finalmente apresentamos a propriedade tensão superficial e determinamos a *ascensão capilar* a partir de condições de equilíbrio estático. A propriedade *pressão* é discutida no Capítulo 3 juntamente com a estática dos fluidos.

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura deste capítulo você deve ser capaz de:

- Ter um conhecimento prático das propriedades básicas dos fluidos e compreender a aproximação de meio contínuo
- Ter um conhecimento prático sobre a viscosidade e as conseqüências dos efeitos do atrito que ela causa no escoamento dos fluidos
- Calcular a ascensão e a depressão capilar devido ao efeito da tensão superficial

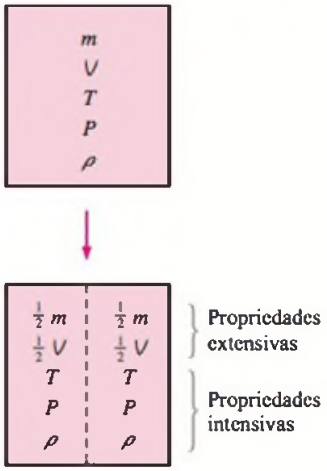


FIGURA 2–1
Critérios para diferenciar propriedades intensivas e extensivas.

2–1 • INTRODUÇÃO

Qualquer característica de um sistema é denominada propriedade. Algumas propriedades familiares são pressão P, temperatura T, volume V e massa m. A lista pode ser ampliada para incluir propriedades menos familiares, tais como viscosidade, condutividade térmica, módulo de elasticidade, coeficiente de expansão térmica, resistividade elétrica e mesmo velocidade e altitude.

As propriedades são consideradas *intensivas* ou *extensivas*. As **propriedades intensivas** são as independentes da massa de um sistema, tais como temperatura, pressão e densidade. As **propriedades extensivas** são aquelas cujos valores dependem do tamanho — ou extensão — do sistema. Massa total, volume total V e momento total são alguns exemplos de propriedades extensivas. Um modo fácil de determinar se uma propriedade é intensiva ou extensiva é dividir o sistema em duas partes iguais com uma partição imaginária, como mostrado na Figura 2–1. Cada parte terá o mesmo valor das propriedades intensivas que o sistema original, mas apenas a metade do valor das propriedades extensivas.

Geralmente, são usadas letras maiúsculas para indicar propriedades extensivas (sendo a massa m a principal exceção), e letras minúsculas são usadas para propriedades intensivas (sendo a pressão P e a temperatura T as exceções óbvias).

Propriedades extensivas por unidade de massa são chamadas de **propriedades específicas**. Alguns exemplos de propriedades específicas são volume específico ($v = V/m$) e energia total específica ($e = E/m$).

O estado de um sistema é descrito por suas propriedades, mas sabemos por experiência que não há necessidade de especificar todas as propriedades para determinar um estado. Uma vez especificada uma quantidade suficiente de propriedades, o restante delas assume certos valores. Ou seja, especificar certo número de propriedades é suficiente para identificar o estado. A quantidade de propriedades necessária para identificar o estado de um sistema é estabelecida pelo **postulado de estado**: *o estado de um sistema compressível simples é completamente definido por duas propriedades intensivas independentes.*

Duas propriedades são independentes se uma delas puder variar enquanto a outra for mantida constante. Nem todas as propriedades são independentes e algumas são definidas em função de outras, como explicado na Seção 2–2.

Meio Contínuo

A matéria é constituída de átomos, que são amplamente espaçados na fase gasosa. Entretanto, é conveniente desconsiderar a natureza atômica de uma substância e vê-la como uma matéria contínua homogênea sem buracos, isto é, um *meio contínuo*. A idealização do meio contínuo permite-nos tratar as propriedades como funções de pontos e considerar que as propriedades variam continuamente no espaço sem saltos de descontinuidade. Tal hipótese é válida desde que o tamanho do sistema considerado seja grande em relação ao espaço entre as moléculas. Esse é o caso em praticamente todos os problemas, exceto alguns casos específicos. A idealização do meio contínuo está implícita em muitas afirmações que fazemos, tal como "a densidade da água num copo é a mesma em qualquer ponto".

Para ter uma percepção das distâncias envolvidas a nível molecular, considere um recipiente cheio com oxigênio sob condições atmosféricas. O diâmetro da molécula de oxigênio é de cerca de 3×10^{-10} m e sua massa é $5{,}3 \times 10^{-26}$ kg. Atém disso, o *percurso livre médio* do oxigênio sob pressão de 1 atm e a 20°C é $6{,}3 \times 10^{-8}$ m. Isto é, uma molécula de oxigênio percorre, em média, uma distância de $6{,}3 \times 10^{-8}$ m (cerca de 200 vezes seu diâmetro) antes de colidir com outra molécula.

Além do mais, há cerca de $2{,}5 \times 10^{16}$ moléculas de oxigênio no volume minúsculo de 1 mm^3 sob pressão de 1 atm e 20°C (Figura 2–2). O modelo contínuo é aplicável desde que o comprimento característico do sistema (tal como seu diâmetro) seja muito maior do que o percurso livre médio das moléculas. Em alto vácuo ou em altitudes muito elevadas, o percurso livre médio torna-se muito grande

(por exemplo, é cerca de 0,1 m para o ar atmosférico numa altitude de 100 km). Em tais casos deve ser usada a **teoria do escoamento de gases rarefeitos** e ser considerado o impacto de moléculas individuais. Neste livro, limitamos nossas considerações a substâncias que podem ser modeladas como um meio contínuo.

2–2 • DENSIDADE E GRAVIDADE ESPECÍFICA

Densidade é definida como *massa por unidade de volume* (Figura 2–3). Isto é,

$$\textit{Densidade:} \qquad \rho = \frac{m}{V} \quad (\text{kg/m}^3) \qquad (2\text{–}1)$$

O inverso da densidade é o **volume específico** v, que é definido como *volume por unidade de massa*. Isto é, $v = V/m = 1/\rho$. Para um elemento infinitesimal de volume, de massa δm e volume δV, a densidade é expressa por $\rho = \delta m/\delta V$.

A densidade de uma substância depende, em geral, da temperatura e da pressão. A densidade da maioria dos gases é proporcional à pressão e inversamente proporcional à temperatura. Líquidos e sólidos, por outro lado, são substâncias essencialmente incompressíveis e a variação de sua densidade com a pressão usualmente é desprezível. A 20°C, por exemplo, a densidade da água muda de 998 kg/m^3 a 1 atm para 1003 kg/m^3 a 100 atm, uma mudança de apenas 0,5%. A densidade de líquidos e sólidos depende mais da temperatura do que da pressão. A 1 atm, por exemplo, a densidade da água muda de 998 kg/m^3 a 20°C para 975 kg/m^3 a 75°C, uma mudança de 2,3%, que ainda pode ser desprezada em muitas análises de engenharia.

Algumas vezes, a densidade de uma substância é dada em relação à densidade de uma substância muito conhecida. É então chamada de **gravidade específica** ou **densidade relativa** e é definida como a *razão entre a densidade de uma substância e a densidade de alguma substância padrão a uma temperatura especificada* (usualmente água a 4°C, para a qual $\rho_{H_2O} = 1000$ kg/m^3). Isto é,

$$\textit{Gravidade específica:} \qquad \text{GE} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \qquad (2\text{–}2)$$

Observe que a gravidade específica de uma substância é uma quantidade adimensional. Entretanto, em unidades SI, o valor numérico da gravidade específica de uma substância é exatamente igual à sua densidade em g/cm^3 ou kg/L (ou 0,001 vezes a densidade em kg/m^3) visto que a densidade da água a 4°C é 1 g/cm^3 = 1 kg/L = 1000 kg/m^3. A gravidade específica do mercúrio a 0°C, por exemplo, é 13,6. Portanto, sua densidade a 0°C é 13,6 g/cm^3 = 13,6 kg/L = 13.600 kg/m^3. As gravidades específicas de algumas substâncias a 0°C são dadas na Tabela 2–1. Observe que substâncias com gravidade específica menor do que 1 são mais leves do que a água e, portanto, flutuam na água.

O peso de uma unidade de volume de uma substância é chamado de peso específico e é expresso como

$$\textit{Peso específico:} \qquad \gamma_s = \rho g \quad (\text{N/m}^3) \qquad (2\text{–}3)$$

onde g é aceleração da gravidade.

Lembre-se, do Capítulo 1, que as densidades dos líquidos são essencialmente constantes e, portanto, podem ser consideradas substâncias incompressíveis na maioria dos processos, sem sacrificar muito a precisão.

Densidade dos Gases Ideais ou Perfeitos

As tabelas oferecem informações exatas e precisas sobre as propriedades, mas certas vezes é conveniente ter algumas relações simples entre as propriedades, que sejam suficientemente gerais e precisas. Qualquer equação que relacione pressão, temperatura e densidade (ou volume específico) de uma substância é chamada de

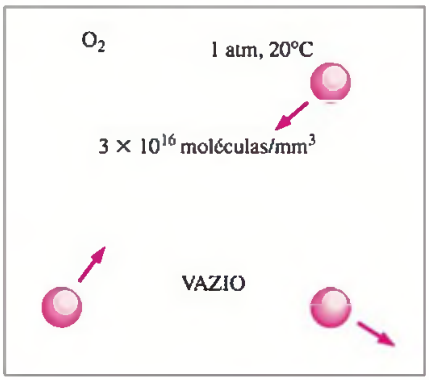


FIGURA 2–2
Apesar das enormes lacunas entre moléculas, uma substância pode ser considerada um meio contínuo devido ao grande número de moléculas existentes mesmo num volume extremamente pequeno.

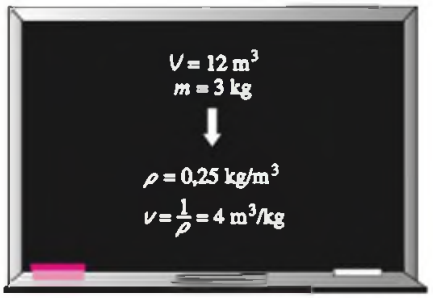


FIGURA 2–3
Densidade é massa por unidade de volume, volume específico é volume por unidade de massa.

TABELA 2–1
Gravidades específicas de algumas substâncias a 0°C

Substância	GE
Água	1,0
Sangue	1,05
Água do mar	1,025
Gasolina	0,7
Álcool Etílico	0,79
Mercúrio	13,6
Madeira	0,3–0,9
Ouro	19,2
Ossos	1,7–2,0
Gelo	0,92
Ar (a 1 atm)	0,0013

equação de estado. A equação de estado mais simples e melhor conhecida para substâncias na fase gasosa é a equação de estado dos gases ideais ou perfeitos expressa como

$$Pv = RT \quad \text{ou} \quad P = \rho RT \tag{2–4}$$

onde P é a pressão absoluta, v é o volume específico, T é a temperatura termodinâmica (absoluta), ρ é a densidade e R é a constante do gás. A constante do gás R é diferente para cada gás e é determinada pela expressão $R = R_u/M$, onde R_u é a **constante universal dos gases**, cujo valor é R_u = 8,314 kJ/kmol · K = 1,986 Btu/lbmol · R, e M é a massa molar (também chamada de *peso molecular*) do gás. Os valores de R e M para diversas substâncias são dados na Tabela A–1.

A escala de temperatura termodinâmica no SI é a **escala Kelvin** e a unidade de temperatura nessa escala é o **kelvin**, designado pela letra K. No sistema inglês, a escala é **Rankine** e a unidade de temperatura nessa escala é o **rankine**, R. As várias escalas de temperatura estão relacionadas umas com as outras pelas expressões

$$T(\text{K}) = T(^\circ\text{C}) + 273{,}15 \tag{2–5}$$

$$T(\text{R}) = T(^\circ\text{F}) + 459{,}67 \tag{2–6}$$

É prática comum arredondar as constantes 273,15 e 459,67 para 273 e 460, respectivamente.

A Equação 2–4 é chamada de **equação de estado dos gases ideais**, ou simplesmente **relação dos gases ideais** e o gás que obedece esta relação é chamado **gás ideal** (ou perfeito). Para um gás ideal de volume V, massa m e quantidade de moles $N = m/M$, a equação de estado do gás ideal também pode ser escrita como $PV = mRT$ ou $PV = NR_uT$. Para uma massa fixa m, escrevendo a relação do gás ideal duas vezes e simplificando, são relacionadas entre si as propriedades de um gás ideal em dois estados diferentes, pela expressão $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2$.

Um gás ideal é uma substância hipotética que obedece à relação $Pv = RT$. Foi observado experimentalmente que a relação do gás ideal aproxima muito bem o comportamento P-v-T dos gases reais em densidades baixas. Sob pressões baixas e temperaturas altas, a densidade do gás diminui e o gás comporta-se como um gás ideal. No âmbito do interesse prático, muitos gases familiares tais como ar, nitrogênio, oxigênio, hidrogênio, hélio, argônio, neônio e criptônio e mesmo gases mais pesados como o dióxido de carbono podem ser tratados como gases ideais com erro desprezível (geralmente menos de 1%). Gases densos como o vapor de água de usinas de energia elétrica a vapor e o vapor do refrigerante dos refrigeradores não devem, entretanto, ser tratados como gases ideais uma vez que se encontram usualmente num estado próximo à saturação.

EXEMPLO 2–1 **Densidade, Gravidade Específica e Massa de Ar numa Sala**

Determine a densidade, a gravidade específica e a massa de ar numa sala cujas dimensões são 4 m × 5 m × 6 m, a 100 kPa e 25°C (Figura 2–4).

SOLUÇÃO Devem ser determinadas densidade, gravidade específica e massa de ar na sala.

Hipótese Sob as condições especificadas, o ar pode ser considerado um gás ideal.

Propriedades A constante de gás do ar é R = 0,287 kPa · m³/kg · K.

Análise A densidade do ar é determinada pela relação de gás ideal $P = \rho RT$ como

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{100 \text{ kPa}}{(0{,}287 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(25 + 273) \text{ K}} = \mathbf{1{,}17 \text{ kg/m}^3}$$

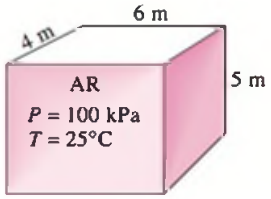


FIGURA 2–4
Esquema do Exemplo 2–1.

Então, a gravidade específica do ar torna-se

$$SG = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{1{,}17 \text{ kg/m}^3}{1000 \text{ kg/m}^3} = \mathbf{0{,}00117}$$

Finalmente, o volume e a massa de ar na sala são

$$V = (4 \text{ m})(5 \text{ m})(6 \text{ m}) = 120 \text{ m}^3$$
$$m = \rho V = (1{,}17 \text{ kg/m}^3)(120 \text{ m}^3) = \mathbf{140 \text{ kg}}$$

Discussão Observe que convertemos a temperatura em °C para a unidade K antes de usá-la na relação do gás ideal.

2–3 • PRESSÃO DE VAPOR E CAVITAÇÃO

Está bem estabelecido que temperatura e pressão são propriedades dependentes para substâncias puras durante os processos de mudança de fase e há uma correspondência biunívoca entre temperaturas e pressões. Sob dada pressão, a temperatura em que uma substância pura muda de fase é chamada de **temperatura de saturação** T_{sat}. De maneira semelhante, numa dada temperatura, a pressão sob a qual uma substância pura muda de fase é denominada **pressão de saturação** P_{sat}. Sob uma pressão absoluta de 1 atmosfera (1 atm ou 101,325 kPa), por exemplo, a temperatura de saturação da água é 100°C. Reciprocamente, a uma temperatura de 100°C, a pressão de saturação da água é 1 atm.

A **pressão de vapor** P_v de uma substância pura é definida como *a pressão exercida por seu vapor em equilíbrio de fase com seu líquido numa dada temperatura*. P_v é uma propriedade da substância pura e é idêntica à pressão de saturação P_{sat} do líquido ($P_v = P_{sat}$). Devemos ter cuidado para não confundir pressão de vapor com *pressão parcial*. A **pressão parcial** é definida como *a pressão de um gás ou vapor numa mistura com outros gases*. Por exemplo, ar atmosférico é uma mistura de ar seco e vapor de água, e a pressão atmosférica é a soma da pressão parcial do ar seco e da pressão parcial do vapor de água. A pressão parcial do vapor de água constitui uma pequena fração da pressão atmosférica (geralmente abaixo de 3%) visto que o ar contém mais nitrogênio e oxigênio. A pressão parcial de um vapor deve ser menor ou igual à pressão de vapor se não houver líquido presente. Entretanto, quando ambos, vapor e líquido, estão presentes e o sistema está em equilíbrio, a pressão parcial do vapor deve ser igual à pressão de vapor e o sistema é dito *saturado*. A taxa de evaporação de corpos de água abertos, tais como lagos, é controlada pela diferença entre a pressão de vapor e a pressão parcial. Por exemplo, a pressão de vapor da água a 20°C é 2,34 kPa. Portanto, um balde de água a 20°C deixado em um compartimento com ar seco sob 1 atm continuará a evaporar até que uma de duas coisas aconteça: a água evapora completamente (não há água suficiente para estabelecer o equilíbrio de fase no compartimento), ou ocorre evaporação até que a pressão parcial do vapor de água no compartimento aumente para 2,34 kPa, ponto em que é estabelecido o equilíbrio de fase.

Para processos de mudança de fase entre as fases de líquido e vapor de uma substância pura, a pressão de saturação e a pressão de vapor são equivalentes, visto que o vapor é puro. Note que o valor da pressão seria o mesmo, medido tanto na fase de vapor como de líquido (desde que seja medida num ponto próximo à interface líquido-vapor para evitar efeitos hidrostáticos). A pressão de vapor aumenta com a temperatura. Assim, uma substância a temperaturas mais altas ferve a pressões mais altas. Por exemplo, a água ferve a 134°C numa panela de pressão operando com pressão absoluta de 3 atm, mas ferve a 93°C numa panela comum a uma altitude de 2000 m, onde a pressão atmosférica é 0,8 atm. As pressões de saturação (ou de vapor), para diversas substâncias, são fornecidas no Apêndice. Uma minitabela para água é dada na Tabela 2–2 para referência rápida.

TABELA 2–2

Pressão de saturação (ou de vapor) da água a várias temperaturas

Temperatura T, °C	Pressão de Saturação P_{sat}, kPa
−10	0,260
−5	0,403
0	0,611
5	0,872
10	1,23
15	1,71
20	2,34
25	3,17
30	4,25
40	7,38
50	12,35
100	101,3 (1 atm)
150	475,8
200	1554
250	3973
300	8581

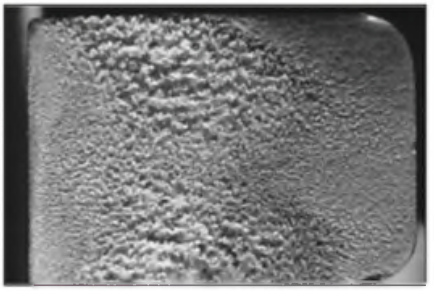


FIGURA 2–5
Avaria por cavitação numa amostra de alumínio de 16 mm por 23 mm testada com velocidade de 60 m/s durante 2,5 h. A amostra foi posicionada na região de colapso das cavidades a jusante de um gerador de cavitação, projetado especificamente para produzir alto potencial de danos.
Fotografia por David Stinebring, ARL/Pennsylvania State University. Usada com permissão.

A razão de nosso interesse na pressão de vapor é a possibilidade da pressão do líquido nos sistemas de escoamento cair abaixo da pressão de vapor em alguns locais, resultando em vaporização não planejada. Por exemplo, água a 10°C transforma-se em vapor e forma bolhas em locais (tais como regiões das extremidades das hélices ou lados da sucção de bombas) onde a pressão cai abaixo de 1,23 kPa. As bolhas de vapor (chamadas de **bolhas de cavitação** visto que formam "cavidades" no líquido) quebram-se à medida que são afastadas das regiões de baixa pressão, criando ondas de choque altamente destrutivas e com pressões extremamente altas. Esse fenômeno é uma causa comum para a queda de desempenho e mesmo erosão das pás de hélices, sendo chamado de *cavitação*, e é uma consideração relevante no projeto de turbinas hidráulicas e bombas (Figura 2–5).

A cavitação deve ser evitada nos sistemas de escoamento (ou pelo menos minimizada) visto que reduz o desempenho, gera vibrações e ruídos irritantes e causa avarias no equipamento. Os picos da pressão que resultam da grande quantidade de bolhas que se desfazem próximo de uma superfície contínua durante um período de tempo longo causam erosão, corrosão na superfície, falha por fatiga e destruição eventual dos componentes ou da maquinaria. A presença de cavitação num sistema de escoamento é percebida pelo seu som sibilante característico.

EXEMPLO 2–2 **Pressão Mínima para Evitar Cavitação**

Num sistema de distribuição de água, a temperatura observada é de cerca de 30°C. Determine a pressão mínima permitida no sistema para evitar cavitação.

SOLUÇÃO Determinar a pressão mínima para evitar cavitação no sistema de distribuição de água.
Propriedades A pressão de vapor da água a 30°C é 4,25 kPa.
Análise Para evitar a cavitação, a pressão em qualquer ponto do escoamento não deve cair abaixo da pressão de vapor (ou de saturação) numa temperatura dada. Ou seja,

$$P_{mín} = P_{sat@30°C} = 4{,}25\ \text{kPa}$$

Portanto, a pressão em qualquer ponto do escoamento deve ser mantida acima de 4,25 kPa.
Discussão Observe que a pressão de vapor aumenta com o aumento da temperatura e assim o risco de cavitação é maior com temperaturas mais altas do fluido.

2–4 ▪ ENERGIA E CALORES ESPECÍFICOS

A energia existe sob formas numerosas tais como térmica, mecânica, cinética, potencial, elétrica, magnética, química e nuclear, e a soma de todas elas constitui a **energia total** de um sistema E (ou e, numa base de massa unitária). As formas de energia relacionadas à estrutura molecular do sistema e o grau de atividade molecular são denominadas *energia microscópica*. A soma de todas as formas de energia microscópica é denominada energia **interna do sistema** e é representada por U (ou u, numa base de massa unitária).

A energia *macroscópica* de um sistema está relacionada ao movimento e à influência de alguns efeitos externos tais como gravidade, magnetismo, eletricidade e tensão superficial. A energia que um sistema possui como resultado de seu movimento em relação a algum sistema de referência é denominada **energia cinética**. Quando todos os componentes do sistema movem-se com a mesma velocidade, a energia cinética por unidade de massa é expressa pela equação $ec = V^2/2$, onde V é a velocidade do sistema em relação a algum sistema de referência fixo. A energia que um sistema possui como resultado de sua altitude num campo gravitacional é chamada de **energia potencial** e é expressa, numa base de massa unitária, como $ep = gz$, onde g é a aceleração da gravidade e z é a elevação do centro de gravidade do sistema em relação a algum plano de referência selecionado arbitrariamente.

Na vida cotidiana, freqüentemente referimo-nos às formas sensitiva e latente de energia interna como falamos da quantidade de calor dos corpos. Na engenharia, no entanto, tais formas de energia são referidas usualmente como **energia térmica** para evitar qualquer confusão com *transferência de calor*.

A unidade internacional de energia é o *joule* (J) ou *kilojoule* (1 kJ = 1000 J). No sistema inglês, a unidade de energia é a *british thermal unit* (Btu), que é definida como a energia necessária para elevar a temperatura de 1 lbm de água a 68° F de 1° F. As grandezas do kJ e da Btu são quase idênticas (1 Btu = 1,0551 kJ). Outra unidade de energia bastante conhecida é a *caloria* (1 cal = 4,1868 J), definida como a energia requerida para elevar a temperatura de 1 g de água a 14,5° C de 1° C.

Na análise de sistemas que envolvem escoamento de fluidos, freqüentemente encontramos a combinação de propriedades u e Pv. Por conveniência, esta combinação é chamada de **entalpia** h. Isto é,

Entalpia:
$$h = u + Pv = u + \frac{P}{\rho} \tag{2-7}$$

onde P/ρ é a *energia do escoamento*, também chamada de *trabalho do escoamento*, que é a energia por unidade de massa necessária para mover o fluido e manter o escoamento. Na análise dos fluidos em escoamento, é conveniente tratar a energia do escoamento como parte da energia do fluido e representar a energia microscópica da corrente do fluido pela entalpia h (Figura 2–6). Observe que a entalpia é uma grandeza por unidade de massa e desse modo é uma propriedade *específica*.

Na ausência de efeitos como magnético, elétrico e tensão superficial, o sistema é denominado sistema compressível simples. A energia total de um sistema compressível simples consiste em três partes: energias interna, cinética e potencial. Numa base de massa unitária, é expressa por $e = u + ec + ep$. O fluido entrando ou saindo de um volume de controle possui uma forma de energia adicional – a *energia do escoamento* P/ρ. Então, a energia total de um **fluido em movimento** numa base de massa unitária torna-se

$$e_{\text{movimento}} = P/\rho + e = h + ec + ep = h + \frac{V^2}{2} + gz \qquad \text{(kJ/kg)} \tag{2-8}$$

onde $h = P/\rho + u$ é a entalpia, V é a velocidade, e z é a elevação do sistema em relação a algum ponto de referência externo.

Usando a entalpia em vez da energia interna para representar a energia do escoamento em movimento, não precisamos preocupar-nos com o trabalho do escoamento. A energia associada ao empuxo sobre o fluido é automaticamente considerada pela entalpia. De fato, essa é a razão principal para definir a propriedade entalpia.

As variações infinitesimal e finita da energia interna e da entalpia de um *gás ideal* são expressas em termos dos calores específicos como

$$du = c_v\, dT \qquad \text{e} \qquad dh = c_p\, dT \tag{2-9}$$

onde c_v e c_p são os calores específicos e volume constante e a pressão constante do gás ideal. Usando valores de calor específico à temperatura média, as variações finitas na energia interna e entalpia são expressas aproximadamente por

$$\Delta u = c_{v,\text{médio}}\, \Delta T \qquad \text{e} \qquad \Delta h = c_{p,\text{médio}}\, \Delta T \tag{2-10}$$

Para substâncias incompressíveis, calores específicos a volume constante e pressão constante são idênticos. Portanto, $c_p \cong c_v \cong c$ para líquidos e a variação da energia interna dos líquidos é expressa como $\Delta u = c_{\text{médio}}\, \Delta T$.

Observando que ρ = constante para substâncias incompressíveis, a diferenciação da entalpia $h = u + P/\rho$ dá $dh = du + dP/\rho$. Integrando, a variação de entalpia torna-se

$$\Delta h = \Delta u + \Delta P/\rho \cong c_{\text{médio}}\, \Delta T + \Delta P/\rho \tag{2-11}$$

Portanto, $\Delta h = \Delta u \cong c_{\text{médio}}\, \Delta T$ para processos a pressão constante e $\Delta h = \Delta P/\rho$ para processos líquidos a temperatura constante.

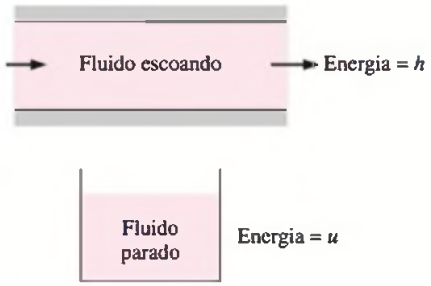


FIGURA 2–6
A *energia interna u* representa a energia microscópica de um fluido em repouso por unidade de massa, enquanto a entalpia h representa a energia microscópica de um fluido em movimento por unidade de massa.

2–5 • COEFICIENTE DE COMPRESSIBILIDADE

Sabemos por experiência que o volume (ou a densidade) de um fluido muda com a variação de sua temperatura ou pressão. Os fluidos, geralmente, expandem-se quando são aquecidos ou despressurizados e contraem-se quando resfriados ou pressurizados. Porém, a quantidade de variação de volume é diferente para fluidos diferentes e precisamos definir propriedades que relacionem as variações de volume às variações de pressão e temperatura. Duas de tais propriedades são o módulo de elasticidade κ e o coeficiente de expansão volumétrica β.

É uma observação habitual que um fluido contrai-se quando é aplicada pressão maior sobre ele e expande-se quando a pressão aplicada é reduzida (Figura 2–7). Isto é, os fluidos agem como sólidos elásticos com relação à pressão. Portanto, de maneira análoga ao módulo de elasticidade de Young para os sólidos, é apropriado definir um **coeficiente de compressibilidade** κ (também chamado de **módulo de** compressibilidade principal ou **módulo de elasticidade principal**) para fluidos pela expressão

$$\kappa = -v\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \quad \text{(Pa)} \tag{2–12}$$

Ele também pode ser expresso aproximadamente em termos de variações finitas como

$$\kappa \cong -\frac{\Delta P}{\Delta v/v} \cong \frac{\Delta P}{\Delta \rho/\rho} \quad (T = \text{constante}) \tag{2–13}$$

Observando que $\Delta v/v$ ou $\Delta\rho/\rho$ é adimensional, κ deve ter unidade de pressão (Pa ou psi). Além disso, o coeficiente de compressibilidade representa a variação de pressão correspondente a uma variação relativa do volume ou da densidade do fluido enquanto a temperatura permanece constante. Conclui-se, pois, que o coeficiente de compressibilidade de uma substância verdadeiramente incompressível (v = constante) é infinito.

Um valor grande de κ indica que é preciso uma grande mudança de pressão para causar uma pequena variação relativa no volume e, portanto, o fluido com κ grande é essencialmente incompressível. Isto é típico dos líquidos e explica por que os fluidos são considerados incompressíveis. Por exemplo, a pressão da água sob condições atmosféricas normais deve ser aumentada para 210 atm para comprimi-la 1%, correspondendo a um valor de κ = 21.000 atm para o coeficiente de compressibilidade.

Pequenas variações na densidade dos líquidos podem ainda causar fenômenos interessantes nos sistemas de tubulação tal como o *martelo hidráulico* (ou golpe de aríete) – caracterizado pelo som semelhante ao produzido quando o tubo é "martelado". O fenômeno ocorre quando o líquido numa rede de condutos encontra uma restrição súbita no escoamento (como o fechamento de uma válvula) e é comprimido localmente. As ondas acústicas produzidas golpeiam as superfícies curvas e válvulas da tubulação à medida que se propagam e refletem ao longo da tubulação, fazendo com que a tubulação vibre e produza o som familiar.

Note que o volume e a pressão são inversamente proporcionais (o volume decresce à medida que a pressão aumenta e assim $\partial P/\partial v$ é uma grandeza negativa) e o sinal negativo na definição (Equação 2–12) assegura que κ seja uma quantidade positiva. Além disso, diferenciando $\rho = 1/v$ obtém-se $d\rho = -dv/v^2$, que rearranjada fornece

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} \tag{2–14}$$

Ou seja, as variações relativas do volume específico e da densidade de um fluido são iguais em módulo, mas de sinais opostos.

Para um gás ideal, $P = \rho RT$ e $(\partial P/\partial\rho)_T = RT = P/\rho$, e assim

$$\kappa_{\text{gás ideal}} = P \quad \text{(Pa)} \tag{2–15}$$

Portanto, o coeficiente de compressibilidade de um gás ideal é igual à sua pressão absoluta, e o coeficiente de compressibilidade do gás aumenta com o aumento de

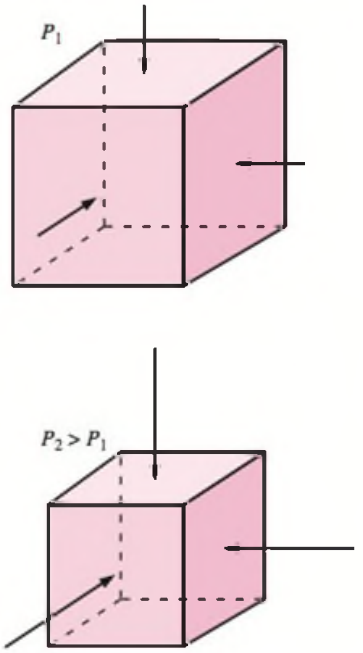


FIGURA 2–7
Os fluidos, como os sólidos, comprimem-se quando a pressão aplicada aumenta de P_1 para P_2.

pressão. Substituindo $\kappa = P$ na definição do coeficiente de compressibilidade e rearranjando, obtém-se

$$\textit{Gás ideal:} \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{P} \qquad (T = \text{constante}) \tag{2-16}$$

Portanto, o aumento porcentual da densidade de um gás ideal durante uma compressão isotérmica é igual ao aumento percentual da pressão.

Para o ar sob pressão de 1 atm, $\kappa = P = 1$ atm e um decréscimo de 1% no volume ($\Delta V/V = -0{,}01$) corresponde a um aumento de $\Delta P = 0{,}01$ atm na pressão. Mas para o ar a 1000 atm, $\kappa = 1000$ atm e um decréscimo de 1% no volume corresponde a um aumento de pressão $\Delta P = 10$ atm. Portanto, uma pequena variação relativa no volume do gás causa uma grande variação de pressão sob pressões muito grandes.

O inverso do coeficiente de compressibilidade é chamado de **compressibilidade isotérmica** e é expresso como

$$\alpha = \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \qquad (1/\text{Pa}) \tag{2-17}$$

A compressibilidade isotérmica de um fluido representa a mudança fracionária de volume ou densidade correspondente a uma variação unitária na pressão.

Coeficiente de Expansão Volumétrica

A densidade de um fluido, em geral, depende mais intensamente da temperatura do que da pressão, e a variação da densidade com a temperatura é responsável por inúmeros fenômenos naturais tais como ventos, correntes nos oceanos, fumaça nas chaminés, a operação dos balões de ar quente, transferência de calor por convecção natural e até mesmo a subida de ar quente, daí a frase "o calor sobe" (Figura 2–8). Para quantificarmos esses efeitos, precisamos de uma propriedade que represente a *variação da densidade de um fluido com a temperatura sob pressão constante.*

A propriedade que fornece essa informação é o **coeficiente de expansão de volume** (ou expansividade do volume) β, definida como (Figura 2–9)

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \qquad (1/\text{K}) \tag{2-18}$$

É também aproximadamente expresso em termos de variações finitas por

$$\beta \approx \frac{\Delta v/v}{\Delta T} = -\frac{\Delta\rho/\rho}{\Delta T} \qquad (\text{à constante } P) \tag{2-19}$$

Um valor grande de β para o fluido significa uma variação grande da densidade com a temperatura, e o produto $\beta\,\Delta T$ representa a fração de variação do volume de um fluido que corresponde a uma variação de temperatura de ΔT sob pressão constante.

Pode ser mostrado facilmente que o coeficiente de expansão de volume de um gás ideal ($P = \rho RT$) à temperatura T é equivalente ao inverso da temperatura:

$$\beta_{\text{gás ideal}} = \frac{1}{T} \qquad (1/\text{K}) \tag{2-20}$$

onde T é a temperatura *absoluta*.

No estudo das correntes de convecção naturais, a condição do corpo do fluido principal que cerca as regiões finitas quentes ou frias é indicada pelo subscrito "infinito" para servir como lembrete de que este é o valor a uma distância em que a presença da região quente ou fria não é sentida. Em tais casos, o coeficiente de expansão do volume é expresso aproximadamente como

$$\beta \approx -\frac{(\rho_\infty - \rho)/\rho}{T_\infty - T} \qquad \text{ou} \qquad \rho_\infty - \rho = \rho\beta(T - T_\infty) \tag{2-21}$$

onde ρ_∞ é a densidade e T_∞ é a tempertura do fluido em repouso longe do bolsão confinado do fluido quente ou frio.

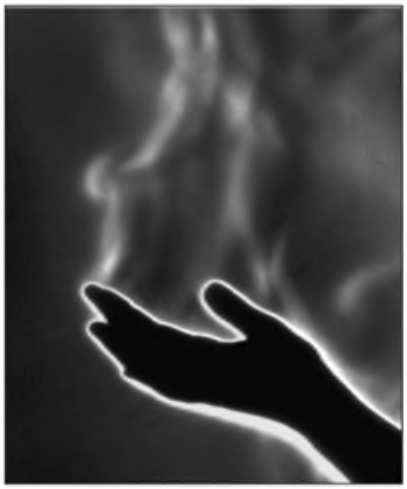
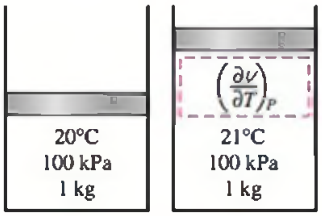
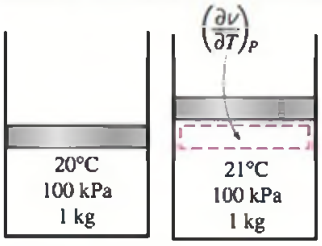


FIGURA 2–8
Convecção natural sobre a mão de uma mulher.
G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Usada com permissão.



(*a*) Uma substância com um β grande



(*b*) Uma substância com um β pequeno

FIGURA 2–9
O coeficiente de expansão do volume é uma grandeza que mede a variação de volume de uma substância com a temperatura sob pressão constante.

Veremos no Capítulo 3 que as correntes de convecção naturais têm início com a *força de flutuação*, que é proporcional à *diferença de densidade*, a qual é proporcional à *diferença de temperatura* sob pressão constante. Portanto, quanto maior for a diferença de temperatura entre o bolsão quente ou frio do fluido e o corpo principal do fluido circundante, tanto *maior* será a força de flutuação e assim as correntes de convecção naturais serão *mais fortes*.

Os efeitos combinados das mudanças de pressão e temperatura na mudança de volume do fluido são determinados considerando que o volume específico seja função de T e P. Diferenciando $v = v(T, P)$ e usando as definições dos coeficientes de compressão e expansão α e β obtém-se

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP = (\beta\, dT - \alpha\, dP)v \qquad \textbf{(2–22)}$$

Então a variação relativa de volume (ou densidade) devido a mudanças na pressão e temperatura pode ser expressa aproximadamente por

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta \rho}{\rho} \cong \beta\, \Delta T - \alpha\, \Delta P \qquad \textbf{(2–23)}$$

EXEMPLO 2–3 Variação da Densidade com Temperatura e Pressão

Considere a água inicialmente a 20°C e 1 atm. Determine a densidade final da água (*a*) se for aquecida para 50°C sob pressão constante de 1 atm e (*b*) se for comprimida com pressão de 100 atm a uma temperatura constante de 20°C. Suponha que a compressibilidade isotérmica da água seja $\alpha = 4{,}80 \times 10^{-5}\ \text{atm}^{-1}$.

SOLUÇÃO Considera-se a água a temperatura e pressão dadas. Devem ser determinadas suas densidades depois de aquecida e comprimida.

Hipóteses **1** O coeficiente de expansão de volume e a compressibilidade isotérmica da água são constantes numa dada faixa de temperatura. **2** É feita uma análise aproximada substituindo variações diferenciais nas quantidades por variações finitas.

Propriedades A densidade da água a 20°C e pressão de 1 atm é $\rho_1 = 998{,}0\ \text{kg/m}^3$. O coeficiente de expansão de volume à temperatura média de $(20 + 50)/2 = 35°\text{C}$ é $\beta = 0{,}337 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$. A compressibilidade isotérmica da água é dada como $\alpha = 4{,}80 \times 10^{-5}\ \text{atm}^{-1}$.

Análise Quando as quantidades diferenciais forem substituídas por diferenças e as propriedades α e β forem supostas constantes, a variação de densidade em termos de variações de pressão e temperatura é expressa aproximadamente por (Equação 2–23)

$$\Delta\rho = \alpha\rho\, \Delta P - \beta\rho\, \Delta T$$

(*a*) A variação de densidade em virtude da variação de temperatura de 20°C para 50°C a pressão constante é

$$\Delta\rho = -\beta\rho\, \Delta T = -(0{,}337 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1})(998\ \text{kg/m}^3)(50 - 20)\ \text{K}$$
$$= -10{,}0\ \text{kg/m}^3$$

Observando que $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, a densidade da água a 50°C e 1 atm é

$$\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho = 998{,}0 + (-10{,}0) = \mathbf{988{,}0\ kg/m^3}$$

que é quase idêntico ao valor 988,1 kg/m³ a 50°C listado na Tabela A–3. Tal constatação deve-se à variação quase linear de β com a temperatura, como mostrado na Figura 2–10.

(*b*) A variação de densidade em virtude da variação de pressão de 1 atm para 100 atm a pressão constante é

$$\Delta\rho = \alpha\rho\, \Delta P = (4{,}80 \times 10^{-5}\ \text{atm}^{-1})(998\ \text{kg/m}^3)(100 - 1)\ \text{atm} = 4{,}7\ \text{kg/m}^3$$

Então a densidade da água a 100 atm e 20°C torna-se

$$\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho = 998{,}0 + 4{,}7 = \mathbf{1002{,}7\ kg/m^3}$$

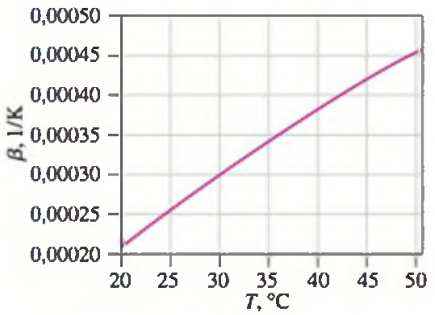


FIGURA 2–10
Variação do coeficiente de expansão de volume da água β com a temperatura na faixa de 20°C a 50°C.
Os dados foram gerados e plotados com o programa EES.

Discussão Note que a densidade da água decresce quando é aquecida e aumenta quando é comprimida, como esperado. O problema pode ser resolvido com maior precisão quando estiverem disponíveis formulários funcionais de propriedades.

2–6 • VISCOSIDADE

Quando dois corpos sólidos em contato se movimentam um em relação ao outro, desenvolve-se uma força de atrito na superfície de contato, em direção oposta ao movimento. Para movermos uma mesa sobre um piso, por exemplo, temos que aplicar uma força sobre a mesa, na direção horizontal de intensidade tal que supere a força de atrito. A intensidade da força requerida para movimentar a mesa depende do *coeficiente de atrito* entre a mesa e o piso.

A situação é semelhante quando um fluido se move em relação a um sólido ou quando dois fluidos se movem um em relação ao outro. Movemo-nos com relativa facilidade no ar, mas não tanto na água. O movimento em óleo é ainda mais difícil, como observamos pelo movimento de descida de uma bola de gude lançada num tubo cheio de óleo. Parece haver uma propriedade que representa a resistência interna do líquido ao movimento ou à "fluidez", e essa propriedade é a **viscosidade**. A força que um fluido em movimento exerce sobre um corpo na direção do escoamento é chamada de **força de arrasto**, e sua intensidade depende, em parte, da viscosidade (Figura 2–11).

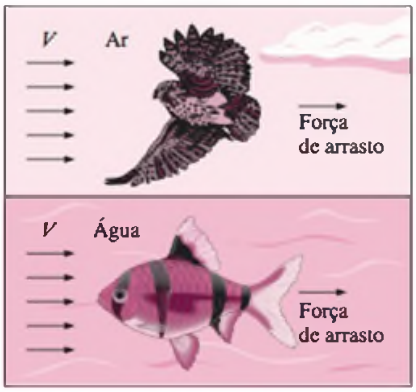


FIGURA 2–11
Um fluido, movendo-se em relação a um corpo, exerce uma força de arrasto sobre o corpo devido, em parte, ao atrito causado pela viscosidade.

Para obter uma relação para a viscosidade, considere uma camada fluida entre duas placas paralelas muito grandes (ou de maneira equivalente, duas placas paralelas imersas em um corpo líquido grande) separadas por uma distância ℓ (Figura 2–12). Aplica-se então uma força F constante na placa superior, paralela a ela enquanto a placa inferior é mantida fixa. Após os transientes iniciais, observa-se que a placa superior se move continuamente sob a influência desta força, com velocidade constante V. O fluido em contato com a parte superior da placa prende-se à superfície da placa e move-se com ela a mesma velocidade; a tensão de cisalhamento τ que age sobre esta camada fluida é

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{2-24}$$

onde A é a área de contato entre a placa e o fluido. Observe que a camada fluida deforma-se continuamente sob a influência da tensão de cisalhamento.

O fluido em contato com a placa inferior assume a velocidade daquela placa, que é nula (por causa da condição de não-escorregamento). Em um escoamento laminar estacionário, a velocidade do fluido entre as placas varia linearmente entre 0 e V, e assim o *perfil da velocidade* e o *gradiente da velocidade* são

$$u(y) = \frac{y}{\ell} V \quad \text{e} \quad \frac{du}{dy} = \frac{V}{\ell} \tag{2-25}$$

onde y é a distância vertical da placa inferior.

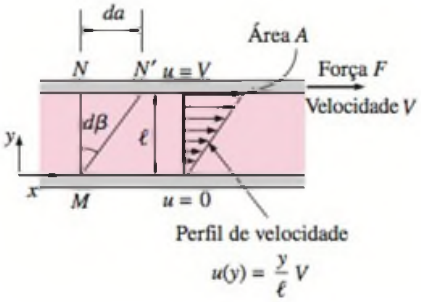


FIGURA 2–12
Comportamento de um fluido com escoamento laminar entre duas placas paralelas quando a placa superior move-se com velocidade constante.

Durante um intervalo de tempo infinitesimal dt, os lados das partículas do fluido ao longo de uma reta vertical MN giram de um ângulo infinitesimal $d\beta$ enquanto a placa superior move-se de uma distância infinitesimal $da = V\,dt$. O deslocamento angular ou deformação (ou tensão de cisalhamento) é expresso como

$$d\beta \approx \operatorname{tg} d\beta = \frac{da}{\ell} = \frac{V\,dt}{\ell} = \frac{du}{dy}\,dt \tag{2-26}$$

Rearranjando, a taxa de deformação sob a influência da tensão de cisalhamento τ torna-se

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{du}{dy} \tag{2-27}$$

Concluímos então que a taxa de deformação de um elemento do fluido é equivalente ao gradiente da velocidade du/dy. Além disso, verifica-se experimentalmente

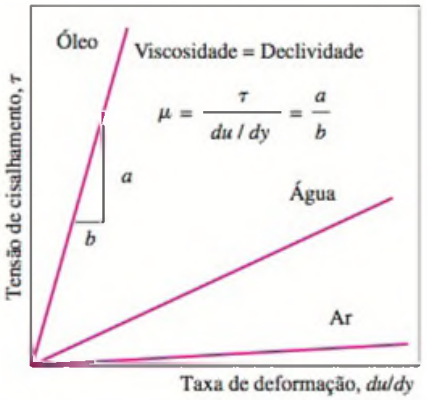


FIGURA 2–13
A taxa de deformação (gradiente de velocidade) de um fluido newtoniano é proporcional à tensão de cisalhamento e a constante de proporcionalidade é a viscosidade.

que, para a maioria dos fluidos, a taxa de deformação (e portanto, o gradiente da velocidade) é diretamente proporcional à tensão de cisalhamento τ,

$$\tau \propto \frac{d\beta}{dt} \quad \text{ou} \quad \tau \propto \frac{du}{dy} \tag{2–28}$$

Os fluidos para os quais a taxa de deformação é proporcional à tensão de cisalhamento são chamados de **fluidos newtonianos**, em homenagem a Sir Isaac Newton, que os definiu primeiro em 1687. A maioria dos fluidos comuns tais como água, ar, gasolina e óleos são fluidos newtonianos. Sangue e plásticos líquidos são exemplos de fluidos não newtonianos.

No escoamento cisalhante unidimensional de fluidos newtonianos, a tensão de cisalhamento é expressa pela relação linear

$$\textit{Tensão de cisalhamento:} \quad \tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (\text{N/m}^2) \tag{2–29}$$

onde a constante de proporcionalidade μ é denominada **coeficiente de viscosidade** ou **viscosidade dinâmica** (ou **absoluta**) do fluido, cuja unidade é kg/m · s, ou de maneira equivalente, N · s/m^2 (ou Pa · s, onde Pa é a unidade de pressão pascal). Uma unidade de viscosidade comum é o **poise**, que é equivalente a 0,1 Pa · s (ou o *centipoise*, que é um centésimo de um poise). A viscosidade da água a 20°C é igual a 1 centipoise e, portanto, a unidade centipoise serve como uma referência útil. O gráfico da tensão de cisalhamento contra a taxa de deformação (gradiente de velocidade) de um fluido newtoniano é uma reta cuja declividade é a viscosidade do fluido, como mostrado na Figura 2–13. Note que a viscosidade é independente da taxa de deformação.

A **força de cisalhamento** que atua sobre uma camada de fluido newtoniano (ou, pela terceira lei de Newton, a força que atua sobre a placa) é

$$\textit{Força de cisalhamento:} \quad F = \tau A = \mu A \frac{du}{dy} \quad (\text{N}) \tag{2–30}$$

onde, novamente, A é a area de contato entre a placa e o fluido. Então, a força F necessária para mover a placa superior da Figura 2–12 com velocidade constante V, enquanto a placa inferior permanece estacionária é

$$F = \mu A \frac{V}{\ell} \quad (\text{N}) \tag{2–31}$$

Essa relação é usada alternativamente para calcular μ quando a força F é medida. Portanto, o arranjo experimental que acabamos de descrever é também usado para medir a viscosidade dos fluidos. Note que sob condições idênticas, a força F será bem diferente para fluidos diferentes.

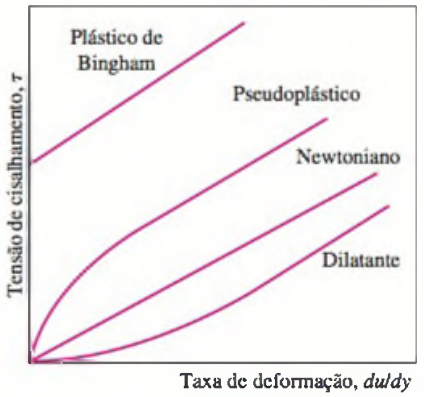


FIGURA 2–14
Variação da tensão de cisalhamento com a taxa de deformação dos fluidos newtonianos e não newtonianos (a declividade da curva num ponto é a viscosidade aparente do fluido naquele ponto).

Para fluidos não newtonianos, a relação entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação é não-linear, como mostrado na Figura 2–14. A inclinação da curva no gráfico de τ *versus* du/dy é denominada *viscosidade aparente* do fluido. Fluidos para os quais a viscosidade aparente aumenta com a taxa de deformação (como soluções de amido ou areia em suspensão) são chamados de *fluidos dilatantes* ou *de aumento de cisalhamento;* e os que exibem comportamento oposto (o fluido tornando-se menos viscoso à medida que o cisalhamento aumenta, tais como certas tintas, soluções de polímeros e fluidos com partículas em suspensão) são denominados *fluidos pseudoplásticos* ou *de redução de cisalhamento*. Alguns materiais, como pastas de dente, resistem a baixas tensão de cisalhamento e, assim, comportam-se inicialmente como sólidos, mas deformam continuamente quando a tensão de cisalhamento excede um limite de carga, passando então a comportar-se como fluidos. Tais materiais são denominados plásticos de Bingham, em homenagem a E. C. Bingham, que fez trabalhos pioneiros sobre viscosidade dos fluidos no U.S. National Bureau of Standards no início do século XX.

Na mecânica dos fluidos e na transferência de calor, a razão entre viscosidade dinâmica e densidade aparece freqüentemente. Por conveniência, essa razão

é denominada **viscosidade cinemática** ν e é expressa como $\nu = \mu/\rho$. Duas unidades comuns da viscosidade cinemática são m^2/s e **stoke** (1 stoke = 1 cm^2/s = 0,0001 m^2/s).

Em geral, a viscosidade de um fluido depende da temperatura e da pressão, embora a dependência da pressão seja bastante fraca. Para *líquidos*, tanto a viscosidade dinâmica como a cinemática são praticamente independentes da pressão e qualquer variação pequena de pressão é normalmente desprezada, exceto nos casos de pressões extremamente altas. Para *gases*, este também é o caso para a viscosidade dinâmica (para pressões baixas e moderadas), mas não para a viscosidade cinemática, uma vez que a densidade de um gás é proporcional à sua pressão (Figura 2–15).

A viscosidade do fluido é uma medida de sua "resistência à deformação". A viscosidade resulta da força de atrito interno que se desenvolve entre as diferentes camadas dos fluidos, à medida que são forçadas a mover-se uma em relação às outras. A viscosidade é causada pelas forças coesivas entre as moléculas nos líquidos e pelas colisões moleculares nos gases, e varia extremamente com a temperatura. A viscosidade dos líquidos decresce com a temperatura, ao passo que a dos gases aumenta com a temperatura (Figura 2–16). Isso ocorre porque nos líquidos as moléculas possuem mais energia a temperaturas mais altas e nesse caso podem opor-se mais intensamente às forças intermoleculares coesivas. O resultado é que as moléculas energizadas do líquido movem-se mais livremente.

Num gás, por outro lado, as forças intermoleculares são desprezíveis e as moléculas em temperaturas altas movem-se aleatoriamente a velocidades mais altas. Isso resulta em mais colisões moleculares por unidade de volume e por unidade de tempo e, portanto, em maior resistência ao escoamento. A viscosidade de um fluido está diretamente relacionada à potência de bombeamento necessário para transportar o fluido num tubo ou mover um corpo através de um fluido (tal como um carro no ar ou um submarino no mar).

A teoria cinética dos gases prevê que a viscosidade dos gases seja proporcional à raiz quadrada da temperatura. Isto é, $\mu_{gás} \propto \sqrt{T}$. A previsão é confirmada por observações práticas, mas os desvios para gases diferentes precisam ser levados em conta incorporando alguns fatores de correção. A viscosidade dos *gases* é expressa em função da temperatura pela correlação de Sutherland (do The U.S. Standard Atmosphere) como

Gases:
$$\mu = \frac{aT^{1/2}}{1 + b/T} \qquad \textbf{(2–32)}$$

onde T é a temperatura absoluta e a e b são constantes determinadas experimentalmente. Note que medir as viscosidades em duas temperaturas diferentes é suficiente para determinar as constantes. Para o ar, os valores das constantes são $a = 1{,}458 \times 10^{-6}$ kg/(m · s · $K^{1/2}$) e $b = 110{,}4$ K sob condições atmosféricas. A viscosidade dos gases é independente da pressão sob pressões baixas a moderadas (de alguns poucos por centos de 1 atm a vários atm). Mas a viscosidade aumenta sob altas pressões devido ao aumento da densidade.

Para *líquidos*, a viscosidade é aproximada pela expressão

Líquidos:
$$\mu = a10^{b/(T-c)} \qquad \textbf{(2–33)}$$

onde novamente T é a temperatura absoluta e a, b e c são constantes determinadas experimentalmente. Para a água, usando os valores $a = 2{,}414 \times 10^{-5}$ N · s/m^2, $b = 247{,}8$ K, e $c = 140$ K resulta um erro menor do que 2,5% na viscosidade na faixa de temperatura de 0°C a 370°C (Touloukian et al., 1975).

Considere uma camada de fluido de espessura ℓ numa pequena folga entre dois cilindros concêntricos, como a camada fina de óleo num mancal de virabrequim. A folga entre os cilindros pode ser modelada como duas chapas planas paralelas separadas por um fluido. Observando que torque é T = FR (força vezes braço de momento, que é o raio R do cilindro interno neste caso), a velocidade tangencial é $V = \omega R$ (velocidade angular vezes o raio), e tomando a superfície molhada do

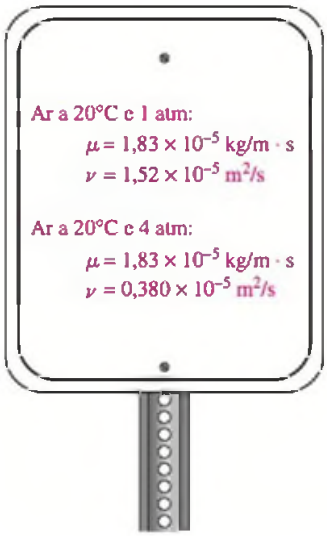


FIGURA 2–15
Em geral, a viscosidade dinâmica não depende da pressão, mas a viscosidade cinemática depende.

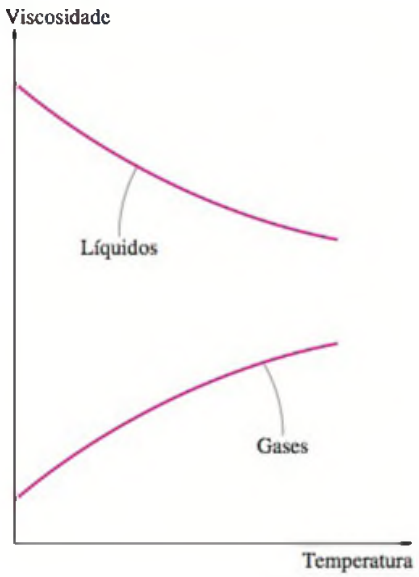


FIGURA 2–16
A viscosidade dos líquidos decresce e a dos gases aumenta com a temperatura.

TABELA 2–3

Viscosidades dinâmicas de alguns fluidos a 1 atm e 20°C (a menos que mencionado o contrário)

Fluido	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s
Glicerina:	
−20°C	134,0
0°C	10,5
20°C	1,52
40°C	0,31
Óleo de motor:	
SAE 10W	0,10
SAE 10W30	0,17
SAE 30	0,29
SAE 50	0,86
Mercúrio	0,0015
Álcool etílico	0,0012
Água:	
0°C	0,0018
20°C	0,0010
100°C (líquido)	0,00028
100°C (vapor)	0,000012
Sangue, 37°C	0,00040
Gasolina	0,00029
Amônia	0,00015
Ar	0,000018
Hidrogênio, 0°C	0,0000088

FIGURA 2–17
Variação de viscosidades dinâmicas (absolutas) de fluidos comuns com a temperatura sob 1 atm (1 N · s/m² = 1 kg/m · s = 0,020886 lbf · s/pé²).
F. M. White, Fluid Mechanics 4e. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies, Inc. Usada com permissão.

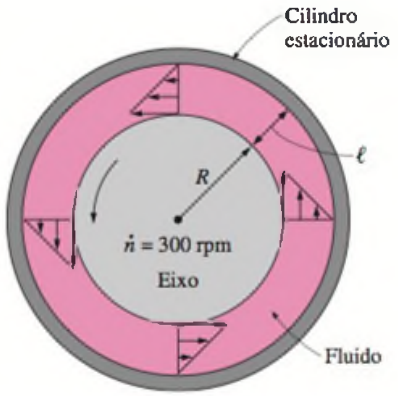


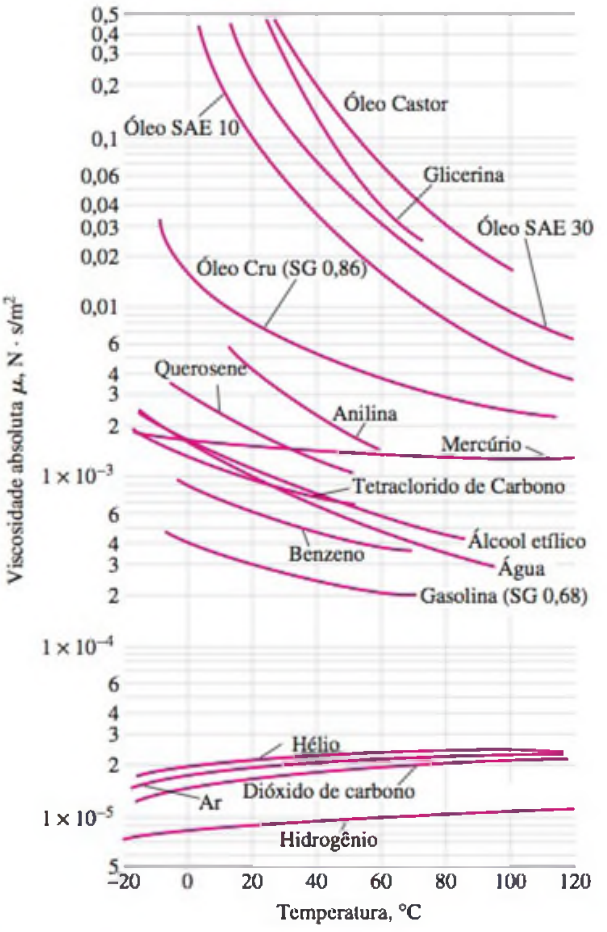
FIGURA 2–18
Esquema do Exemplo 2–4.

cilindro interno como $A = 2\pi RL$ (desprezando a tensão de cisalhamento que atua nas duas extremidades do cilindro interno), o torque é expresso por

$$T = FR = \mu \frac{2\pi R^3 \omega L}{\ell} = \mu \frac{4\pi^2 R^3 \dot{n} L}{\ell} \qquad (2\text{–}34)$$

onde L é o comprimento do cilindro e $\dot{n}$ é o número de rotações por unidade de tempo, que é geralmente expresso em rpm (rotações por minuto). Observe que a distância angular percorrida durante uma rotação é 2π rad, e assim a relação entre a velocidade angular em rad/min e a rpm é $\omega = 2\pi\,\dot{n}$. A Equação 2–34 pode ser usada para calcular a viscosidade de um fluido medindo o torque a uma velocidade angular especificada. Portanto, dois cilindros concêntricos podem ser usados como um *viscosímetro*, um dispositivo que mede viscosidade.

As viscosidades de alguns fluidos à temperatura ambiente estão listadas na Tabela 2–3. A Figura 2–17 mostra o gráfico dos valores listados. Observe que as viscosidades de fluidos diferentes diferem de várias ordens de grandeza. Note também que é mais difícil mover um objeto num fluido de maior viscosidade, tal como um óleo de motor, do que num fluido de viscosidade menor tal como a água. Os líquidos, em geral, são muito mais viscosos do que os gases.



EXEMPLO 2–4 **Determinação da Viscosidade de um Fluido**

A viscosidade de um fluido deve ser medida por um viscossímetro construído com dois cilindros concêntricos de 40 cm de comprimento (Figura 2–18). O diâmetro externo do cilindro interior é de 12 cm e a folga entre os dois cilindros é de 0,15 cm. O cilindro interno é girado a 300 rpm e o torque medido foi de 1,8 N · m. Determine a viscosidade do fluido.

SOLUÇÃO O torque e a rpm de um viscossímetro de cilindro duplo são dados. A viscosidade do fluido deve ser determinada.

Hipóteses **1** O cilindro interno está completamente imerso em óleo. **2** Os efeitos viscosos nas duas extremidades do cilindro interno são desprezíveis.

Análise O perfil de velocidade é linear somente quando os efeitos da curvatura são desprezíveis e o perfil pode ser aproximado como linear neste caso visto que $\ell/R \ll 1$. Resolvendo a Equação 2–34 para a viscosidade e substituindo os valores dados, a viscosidade do fluido é determinada como

$$\mu = \frac{T\ell}{4\pi^2 R^3 \dot{n} L} = \frac{(1{,}8\ \text{N} \cdot \text{m})(0{,}0015\ \text{m})}{4\pi^2(0{,}06\ \text{m})^3(300/60\ 1/\text{s})(0{,}4\ \text{m})} = \mathbf{0{,}158\ N \cdot s/m^2}$$

Discussão A viscosidade é uma função que depende fortemente da temperatura, e um valor de viscosidade sem a temperatura correspondente é de pouca valia. Portanto, a temperatura do fluido também deve ser medida durante o experimento e registrada com estes cálculos.

(*a*)

(*b*)

FIGURA 2–19
Algumas conseqüências da tensão superficial.
(a) © Pegasus/Visuals Unlimited.
(b) © Dennis Drenner/Visuals Unlimited.

2–7 • TENSÃO SUPERFICIAL E EFEITO CAPILAR

Observa-se freqüentemente que uma gota de sangue forma um montículo sobre um vidro plano; uma gota do mercúrio forma uma esfera quase-perfeita e pode ser rolada como uma bola de aço sobre uma superfície lisa; gotas da água da chuva ou de orvalho pingam dos ramos ou das folhas das árvores; um combustível líquido injetado em um motor forma uma névoa de gotas esféricas; o gotejamento da água de uma torneira cai como gotas esféricas; uma bolha do sabão lançada ao ar toma forma esférica; e a água forma gotículas de gelo sobre as pétalas das flores (Figura 2–19).

Nessas e em outras observações práticas, as gotas líquidas comportam-se como pequenos balões esféricos cheios com o líquido, e a superfície do líquido age como uma membrana elástica esticada sob tensão. A força de tração que causa tal tensão atua no sentido paralelo à superfície e é devida às forças atrativas entre as moléculas do líquido. A intensidade de tal força por unidade de comprimento é denominada *tensão superficial* σ_s e geralmente é expressa na unidade N/m (ou lbf/pé em unidades inglesas). Tal efeito é também denominado *energia superficial* e é expresso na unidade equivalente $\text{N} \cdot \text{m/m}^2$ ou J/m^2. Nesse caso, σ_s representa o trabalho de estiramento que é preciso realizar para aumentar a área da superfície do líquido uma unidade.

Para visualizarmos como a tensão superficial surge, mostramos na Figura 2–20 uma vista microscópica considerando duas moléculas líquidas, uma na superfície e outra dentro do corpo líquido. As forças atrativas aplicadas na molécula que está no interior do líquido pelas moléculas circundantes equilibram-se devido à simetria. Mas as forças atrativas que atuam sobre a molécula da superfície não são simétricas e as forças atrativas aplicadas pelas moléculas de gás acima da superfície geralmente são muito pequenas. Portanto, há uma força atrativa resultante atuando sobre a molécula da superfície do líquido que tende a puxar as moléculas da superfície para o interior da massa líquida. Essa força é equilibrada pelas forças repulsivas das moléculas abaixo da superfície que estão sendo comprimidas. O efeito da compressão resultante causa a redução da área de superfície do líquido. Essa é a razão para as gotículas do líquido adquirirem a forma esférica, que tem a área de superfície mínima para um dado volume.

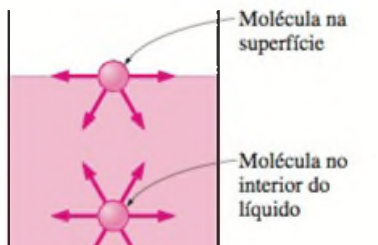


FIGURA 2–20
Forças atrativas atuando sobre a molécula do líquido na superfície e no interior do corpo líquido.

Você também deve ter observado, com divertimento, que alguns insetos pousam ou podem até caminhar sobre a água (Figura 2–19*b*) e que agulhas de aço pequenas flutuam sobre a água. Tais fenômenos são possíveis por causa da tensão superficial que equilibra o peso desses objetos.

Para melhor compreender o efeito da tensão superficial, considere uma lâmina líquida (como a lâmina de uma bolha de sabão) suspensa numa armação de arame em forma de U com um lado móvel (Figura 2–21). Normalmente, a lâmina líquida tende a puxar o arame móvel para dentro a fim de minimizar sua área de superfície. É necessário aplicar uma força F no sentido oposto para equilibrar o efeito de

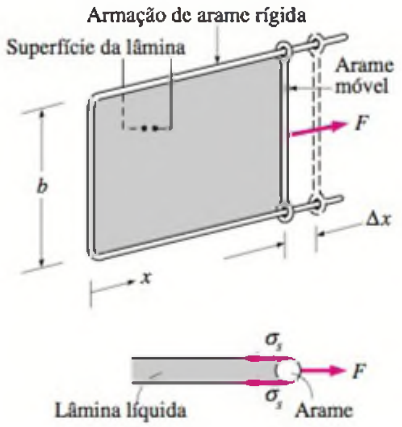


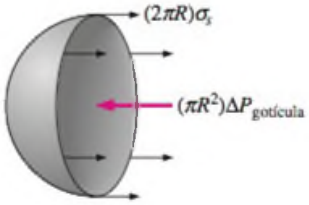
FIGURA 2–21
Estiramento da lâmina líquida com arame em forma de U e as forças que atuam sobre o arame móvel de comprimento *b*.

TABELA 2–4

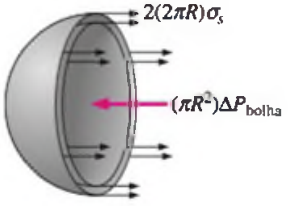
Tensão superficial de alguns fluidos no ar a 1 atm e 20°C (a menos que mencionado o contrário)

Fluido	Tensão Superficial σ_s, N/m*
Água:	
0°C	0,076
20°C	0,073
100°C	0,059
300°C	0,014
Glicerina	0,063
Óleo SAE 30	0,035
Mercúrio	0,440
Álcool etílico	0,023
Sangue, 37°C	0,058
Gasolina	0,022
Amônia	0,021
Solução de sabão	0,025
Querosene	0,028

* Multiplique por 0,06852 para converter para lbf/pé.



(*a*) Meia gotícula



(*b*) Meia bolha

FIGURA 2–22
Diagrama de corpo livre de meia gotícula e meia bolha.

tração. A lâmina fina do dispositivo tem duas superfícies (superior e inferior) expostas ao ar e, assim, o comprimento ao longo da direção em que a tração atua neste caso é $2b$. Então, a força de equilíbrio no arame móvel é $F = 2b\sigma_s$, e portanto a tensão superficial é expressa por

$$\sigma_s = \frac{F}{2b} \tag{2–35}$$

Observe que, para $b = 0{,}5$ m, a força F medida (em N) é simplesmente a tensão superficial em N/m. Um dispositivo desse tipo, com precisão suficiente, pode ser usado para medir a tensão superficial de vários fluidos.

No arame em forma de U, a força F permanece constante enquanto o arame móvel é puxado para estirar a lâmina e aumentar sua área de superfície. Quando o arame móvel é puxado de uma distância Δx, a área da superfície aumenta $\Delta A = 2b\,\Delta x$, e o trabalho realizado W durante o processo de estiramento é

$$W = \text{Força} \times \text{Distância} = F\,\Delta x = 2b\sigma_s\,\Delta x = \sigma_s\,\Delta A$$

visto que a força permanece constante neste caso. O resultado também pode ser interpretado como *a energia superficial da lâmina é aumentada de uma quantidade* $\sigma_s\,\Delta A$ *durante o processo de estiramento*, que é consistente com a interpretação alternativa de σ_s como energia superficial. Isso é similar a um elástico ter mais energia potencial (elástica) depois que está mais esticado. No caso da lâmina líquida, o trabalho é usado para mover as moléculas do líquido da parte interna para a superfície contra as forças de atração de outras moléculas. Portanto, a tensão superficial também pode ser definida como *o trabalho realizado por unidade de aumento da área da superfície do líquido*.

A tensão superficial varia extremamente de substância para substância, e com a temperatura para uma dada substância, como mostrado na Tabela 2-4. A 20°C, por exemplo, a tensão superficial é 0,073 N/m para a água e 0,440 N/m para o mercúrio imersos em ar atmosférico. Gotas do mercúrio formam esferas que podem ser roladas como uma bola sólida sobre uma superfície, sem molhar a superfície. Em geral, a tensão superficial de um líquido decresce com a temperatura e torna-se nula no ponto crítico (e assim, não há interface distinta entre líquido e vapor em temperaturas acima do ponto crítico). O efeito da pressão na tensão superficial usualmente é desprezível.

A tensão superficial de uma substância muda consideravelmente com *impurezas*. Portanto, certos produtos químicos, chamados de *tensoativos* são adicionados ao líquido para diminuir sua tensão superficial. Por exemplo, sabões e detergentes baixam a tensão superficial da água e permitem que ela penetre em pequenas aberturas entre as fibras para lavagem mais eficiente. Porém, isso também significa que dispositivos cuja operação depende da tensão superficial (tais como tubulações de aquecimento) também podem ser destruídos pela presença de imperezas devido à mão-de-obra deficiente.

Falamos de tensão superficial de líquidos somente em interfaces líquido-líquido ou líquido-gás. Portanto, é importante especificar o líquido ou gás adjacente para especificar a tensão superficial. Além disso, a tensão superficial determina o tamanho das gotículas que se formam. A gotícula que cresce pela adição de mais massa se romperá quando a tensão superficial não puder mais mantê-la unida. É como um balão que estoura ao ser inflado, quando a pressão interna aumenta acima da resistência do material do balão.

Uma interface curva indica diferença de pressão (ou "salto de pressão") ao longo da seção da interface, sendo a pressão no lado côncavo maior. O excesso de pressão ΔP acima da pressão atmosférica no interior de uma gotícula ou bolha, por exemplo, é determinado considerando o diagrama de corpo livre de meia gotícula ou bolha (Figura 2–22). Observando que a tensão superficial atua ao longo da circunferência e que a pressão atua sobre a área, o equilíbrio da força horizontal da gotícula e da bolha dá

$$\textit{Gotícula:}\quad (2\pi R)\sigma_s = (\pi R^2)\Delta P_{\text{gotícula}} \rightarrow \Delta P_{\text{gotícula}} = P_i - P_o = \frac{2\sigma_s}{R} \tag{2–36}$$

Bolha: $$2(2\pi R)\sigma_s = (\pi R^2)\Delta P_{\text{bolha}} \rightarrow \Delta P_{\text{bolha}} = P_i - P_e = \frac{4\sigma_s}{R} \quad (2\text{–}37)$$

onde P_i e P_e são as pressões interna e externa, respectivamente, da gotícula ou da bolha. Quando a gotícula ou a bolha estão na atmosfera, P_e é simplesmente a pressão atmosférica. O fator 2 da força de equilíbrio da bolha é devido à bolha consistir em uma película com duas superfícies (interna e externa) e, portanto, duas circunferências na seção transversal.

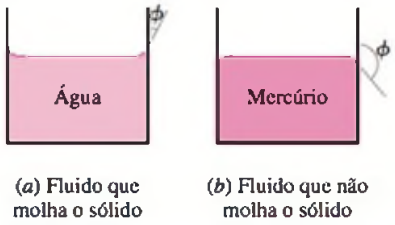
O excesso de pressão na gotícula (ou bolha) também é determinado considerando o aumento infinitesimal do raio da gotícula devido à adição de uma quantidade infinitesimal de massa e interpretando a tensão superficial como o aumento da energia superficial por unidade de área. Então, o aumento da energia superficial da gotícula durante o processo de expansão infinitesimal torna-se

$$\delta W_{\text{superfície}} = \sigma_s\, dA = \sigma_s\, d(4\pi R^2) = 8\pi R\sigma_s\, dR$$

O trabalho de expansão realizado durante o processo infinitesimal é determinado multiplicando-se a força pela distância, obtendo-se

$$\delta W_{\text{expansão}} = \text{Força} \times \text{Distância} = F\, dR = (\Delta P A)\, dR = 4\pi R^2\, \Delta P\, dR$$

Resolvendo as duas expressões acima, obtemos $\Delta P_{\text{gotícula}} = 2\sigma_s/R$, que é a mesma relação obtida antes e dada pela Equação 2–36. Observe que o excesso de pressão na gotícula ou na bolha é inversamente proporcional ao raio.



(*a*) Fluido que molha o sólido (*b*) Fluido que não molha o sólido

FIGURA 2–23
Ângulo de contato de fluidos que molham e não molham o sólido.

Efeito Capilar

Outra conseqüência interessante da tensão superficial é o **efeito capilar**, que é a ascensão ou depressão de um líquido num tubo de pequeno diâmetro imerso no líquido. Tais tubos finos ou canais de escoamento confinado são chamados de **capilares**. A subida de querosene num pavio de algodão inserido no reservatório de uma lamparina de querosene é devido a este efeito. O efeito capilar também é parcialmente responsável pela subida da água à copa de árvores altas. A superfície livre curva de um líquido num tubo capilar é chamada de **menisco**.

Observa-se comumente que a água num recipiente de vidro curva-se levemente para cima nas bordas onde encosta na superfície de vidro; mas, para o mercúrio, ocorre o oposto: curva-se para baixo nas bordas (Figura 2–23). Este efeito é expresso usualmente dizendo-se que a água *molha* o vidro (aderindo a ele), enquanto o mercúrio não. A força do efeito capilar é quantificada pelo **ângulo de contato** ϕ, definido como *o ângulo que a tangente à superfície do líquido faz com a superfície sólida no ponto do contato*. A força da tensão superficial atua ao longo da reta tangente no sentido da superfície sólida. Diz-se que o líquido molha a superfície quando $\phi < 90°$ e não molha a superfície quando $\phi > 90°$. No ar atmosférico, o ângulo de contato da água (e a maioria de outros líquidos orgânicos) com o vidro é quase nulo, $f \approx 0°$ (Figura 2–24). Portanto, a força da tensão superficial atua para cima sobre a água num tubo de vidro ao longo da circunferência, tendendo a puxar a água para cima. Em conseqüência, a água sobe no tubo até que o peso do líquido no tubo, acima do nível do líquido no reservatório, equilibre a força da tensão superfícial. O ângulo de contato é de 130° para mercúrio-vidro e de 26° para querosene-vidro no ar. Note que o ângulo de contato, em geral, é distinto em ambientes diferentes (tais como outro gás ou líquido em vez de ar).

O fenômeno do efeito capilar é explicado microscopicamente considerando-se *forças coesivas* (forças entre moléculas semelhantes, como água e água) e forças adesivas (forças entre moléculas diferentes, como água e vidro). As moléculas líquidas na interface sólido-líquido são submetidas tanto a forças coesivas por outras moléculas líquidas como a forças adesivas pelas moléculas do sólido. As grandezas relativas dessas forças determinam se um líquido molha ou não uma superfície sólida. Obviamente, as moléculas de água são atraídas com mais força pelas moléculas de vidro do que pelas outras moléculas de água e assim a água tende a subir pela superfície de vidro. O oposto ocorre com o mercúrio, que impede a ascensão da superfície do líquido próxima da parede de vidro (Figura 2–25).

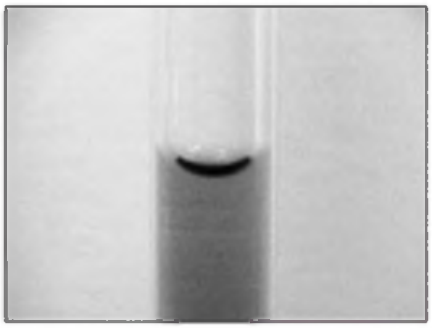


FIGURA 2–24
Menisco de água colorida num tubo de vidro de 4 mm de diâmetro interno. Observe que a borda do menisco encontra a parede do tubo capilar com um ângulo de contato muito pequeno.
Foto de Gabrielle Trembley, Pennsylvania State University. Usada com permissão.

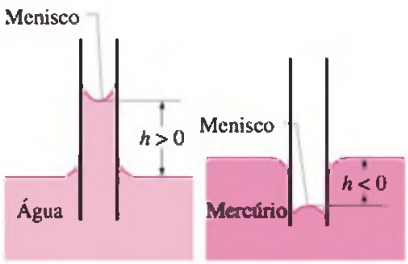


FIGURA 2–25
Ascensão capilar da água e depressão capilar do mercúrio num tubo de vidro de diâmetro pequeno.

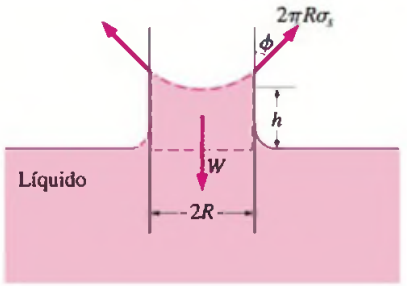


FIGURA 2–26
Forças que atuam sobre uma coluna líquida que subiu num tubo devido ao efeito capilar.

O valor da ascensão capilar num tubo circular é determinado pelo equilíbrio de forças da coluna líquida cilíndrica de altura h no tubo (Figura 2–26). A parte inferior da coluna líquida está no mesmo nível que a superfície livre do reservatório e, assim, a pressão nesse local deve ser a pressão atmosférica, o que equilibra a pressão atmosférica que atua sobre a superfície superior e, desse modo, esses dois efeitos cancelam-se mutuamente. O peso da coluna líquida é aproximadamente

$$W = mg = \rho Vg = \rho g(\pi R^2 h)$$

Igualando o componente vertical da força de tensão superficial ao peso resulta

$$W = F_{\text{superfície}} \rightarrow \rho g(\pi R^2 h) = 2\pi R\sigma_s \cos\phi$$

O valor de h fornece a ascensão capilar

$$\textit{Ascensão capilar:} \qquad h = \frac{2\sigma_s}{\rho g R}\cos\phi \qquad (R = \text{constante}) \tag{2–38}$$

Essa equação também é válida para líquidos que não molham (tal como o mercúrio no vidro) e dá a depressão capilar. Nesse caso, $\phi > 90°$ e assim $\cos\phi < 0$, que resulta em h negativo. Portanto, o valor negativo da ascensão capilar corresponde a uma depressão capilar (Figura 2–25).

Observe que a ascensão capilar é inversamente proporcional ao raio do tubo. Quanto mais fino for o tubo, maior será a ascensão (ou depressão) do líquido no tubo. Na prática, o efeito capilar é geralmente desprezível em tubos cujo diâmetro é maior do que 1 cm. Quando as medidas de pressão forem feitas usando-se manômetros e barômetros, é importante usar tubos suficientemente grandes para minimizar o efeito capilar. A ascensão capilar também é inversamente proporcional à densidade do líquido, como esperado. Portanto, líquidos mais leves apresentam ascensão capilar maior. Finalmente, deve-se ter em mente que a Equação 2-38 é deduzida para tubos de diâmetro constante e não deve ser usada para tubos de seção transversal variável.

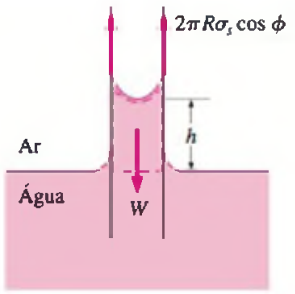


FIGURA 2–27
Esquema do Exemplo 2–5.

EXEMPLO 2–5 **Ascensão Capilar da Água num Tubo**

Um tubo de vidro de 0,6 mm de diâmetro é mergulhado num copo com água a 20°C. Determine a ascensão capilar da água no tubo (Figura 2-27).

SOLUÇÃO A ascensão da água num tubo delgado, resultante do efeito capilar, deve ser determinada.

Hipóteses 1 Não há impurezas na água nem contaminação nas superfícies do tubo de vidro. **2** O experimento é realizado em ambiente de ar atmosférico.

Propriedades A tensão superficial da água a 20°C é 0,073 N/m (Tabela 2-4). O ângulo de contato da água com o vidro é 0° (do texto anterior). Consideramos que a densidade da água líquida seja 1000 kg/m³.

Análise A ascensão capilar é determinada diretamente pela Equação 2–38 substituindo os valores dados, obtendo-se

$$h = \frac{2\sigma_s}{\rho g R}\cos\phi = \frac{2(0{,}073\ \text{N/m})}{(1000\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}3\times 10^{-3}\ \text{m})}(\cos 0°)\left(\frac{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right)$$
$$= 0{,}050\ \text{m} = \mathbf{5{,}0\ cm}$$

Portanto, a água sobe no tubo 5 cm acima do nível do líquido no copo.

Discussão Note que se o diâmetro do tubo fosse 1 cm, a ascensão capilar seria 0,3 mm, que dificilmente seria percebida a olho nu. Na verdade, a ascensão capilar num tubo de diâmetro maior ocorre apenas na borda. O centro não sobe nada. Portanto, o efeito capilar pode ser ignorado para tubos de diâmetro maior.

RESUMO

Neste capítulo foram discutidas várias propriedades comumente usadas na mecânica dos fluidos. As propriedades que dependem da massa de um sistema são chamadas de *propriedades extensivas* e as outras, *propriedades intensivas*. *Densidade* é massa por unidade de volume, e *volume específico* é volume por unidade de massa. A *gravidade específica* é

definida como a razão da densidade de uma substância para a densidade da água a 4°C,

$$GE = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$$

A equação de estado dos gases ideais é expressa como

$$P = \rho RT$$

onde P é a pressão absoluta, T é a temperatura termodinâmica, ρ é a densidade e R é a constante do gás.

Numa dada temperatura, a pressão sob a qual uma substância pura muda de fase é denominada *pressão de saturação*. Para processos de mudança de fase entre as fases de líquido para vapor de uma substância pura, a pressão de saturação é chamada comumente de *pressão de vapor* P_v. Bolhas de vapor que se formam nas regiões de pressão baixa de um líquido (fenômeno denominado *cavitação*) quebram-se à medida que se afastam das regiões de pressão baixa, gerando ondas de pressão altamente destrutivas e pressões extremamente altas.

A energia existe sob numerosas formas, e sua soma constitui a *energia total* E (ou e, por unidade de massa) de um sistema. A soma de todas as formas microscópicas de energia é chamada de *energia interna* U de um sistema. A energia que um sistema possui em conseqüência de seu movimento em relação a algum sistema de referência é chamada de *energia cinética* expressa por unidade de massa como $ec = V^2/2$, e a energia que um sistema possui em conseqüência de sua altitude num campo gravitacional é chamada de *energia potencial* expressa por unidade de massa como $ep = gz$.

Os efeitos da compressibilidade sobre um fluido são representados pelo **coeficiente de compressibilidade** κ (também chamado de **módulo de elasticidade em grande massa**) definido como

$$\kappa = -v\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \cong -\frac{\Delta P}{\Delta v/v}$$

A propriedade que representa a variação da densidade de um fluido com a temperatura sob pressão constante é o **coeficiente de expansão de volume** (ou expansividade de volume) β, definido como

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \cong -\frac{\Delta \rho/\rho}{\Delta T}$$

A *viscosidade* do fluido é a medida de sua resistência à deformação. A força tangencial por unidade de area é chamada *tensão de cisalhamento* e é expressa, para escoamento de cisalhamento simples entre placas (escoamento unidimensional), como

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade ou *viscosidade dinâmica* (ou *absoluta*) do fluido, u é o componente da velocidade na direção do escoamento, e y é a direção normal à direção do escoamento. Os fluidos que obedecem a essa relação linear são chamados de *fluidos newtonianos*. A razão da viscosidade dinâmica para a densidade é denominada *viscosidade cinemática* ν.

O efeito de tração sobre as moléculas do líquido numa interface causado pelas forças atrativas das moléculas por unidade de comprimento é chamado *tensão superficial* σ_s. O excesso de pressão ΔP no interior de uma gotícula esférica ou de uma bolha é dado por

$$\Delta P_{\text{gotícula}} = P_i - P_e = \frac{2\sigma_s}{R} \quad \text{e} \quad \Delta P_{\text{bolha}} = P_i - P_e = \frac{4\sigma_s}{R}$$

onde P_i e P_e são as pressões interna e externa da gotícula ou bolha. A ascensão ou ascensão de um líquido num tubo de diâmetro pequeno imerso num líquido é denominada *efeito capilar*. A depressão ou depressão capilar é dada por

$$h = \frac{2\sigma_s}{\rho g R}\cos\phi$$

onde ϕ é o *ângulo de contato*. A ascensão capilar é inversamente proporcional ao raio do tubo e é desprezível para tubos cujo diâmetro seja maior do que cerca de 1 cm.

Densidade e viscosidade são duas das mais fundamentais propriedades dos fluidos e são usadas extensivamente nos capítulos seguintes. No Capítulo 3 é considerado o efeito da densidade sobre a variação de pressão num fluido e são determinadas as forças hidrostáticas que atuam sobre superfícies. No Capítulo 8, é calculada a queda de pressão causada pelos efeitos viscosos durante o escoamento e usada na determinação dos requisitos de potência de bombeamento. A viscosidade também é usada como propriedade-chave na formulação e solução das equações de movimento do fluido nos Capítulos 9 e 10.

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

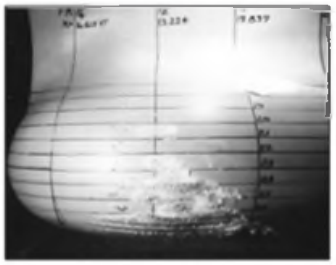
1. E. C. Bingham. "An Investigation of the Laws of Plastic Flow," *U.S. Bureau of Standards Bulletin*, 13, p. 309–353, 1916.
2. Y. A. Cengel e M. A. Boles. *Termodinâmica*, 5. ed., Nova Iorque: McGraw-Hill, Interamericana do Brasil, 2006.
3. C. T. Crowe, J. A. Roberson e D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*, 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
4. R. W. Fox e A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: Wiley, 1999.
5. D. C. Giancoli. *Physics*, 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.
6. M. C. Potter e D. C. Wiggert. *Mechanics of Fluids*, 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
7. Y. S. Touloukian, S. C. Saxena e P. Hestermans. *Thermophysical Properties of Matter, The TPRC Data Series*, v. 11, *Viscosity*. Nova Iorque: Plenum, 1975.
8. L. Trefethen. "Surface Tension in Fluid Mechanics." In *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1972.
9. *The U.S. Standard Atmosphere*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1976.
10. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: Parabolic Press, 1982.
11. F. M. White. *Mecânica dos Fluidos*, 4. ed.: McGraw-Hill Interamericana do Brasil, 2002.
12. C. L. Yaws, X. Lin e L. Bu. "Calculate Viscosities for 355 Compounds. An Equation Can Be Used to Calculate Liquid Viscosity as a Function of Temperatura," *Chemical Engineering*, 101, n. 4, p. 1110–1128, abr. 1994.
13. C. L. Yaws. *Handbook of Viscosity*. 3 v. Houston, TX: Gulf Publishing, 1994.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Cavitação

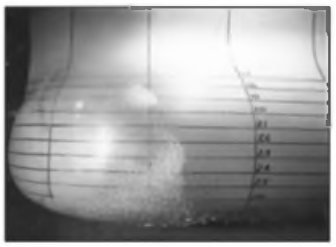
Autores Convidados: G. C. Lauchle e M. L. Billet,
Penn State University

Cavitação é a ruptura da interface de um líquido ou de um fluido-sólido, causada pela redução da pressão estática local produzida pela ação dinâmica do fluido no interior e/ou fronteiras de um sistema líquido. A ruptura é a formação de uma bolha visível. Os líquidos, tal como a água, contêm muitos vazios microscópicos que agem como *núcleos de cavitação*. Ocorre a cavitação quando tais núcleos crescem para um tamanho visível significativo. Apesar da fervura também ser a formação de vazios no líquido, geralmente distinguimos o fenômeno da cavitação porque é causado por um aumento de temperatura, em vez de redução de pressão. A cavitação pode ser usada de maneira benéfica, como em limpeza ultra-sônica, gravação com água-forte, e cortadores. Porém, com mais freqüência, a cavitação deve ser evitada nas aplicações de escoamento de fluido porque deteriora o desempenho hidrodinâmico, causa ruídos extremamente altos e níveis altos de vibração e danifica (erode) as superfícies que atinge. Quando as bolhas de cavitação entram em regiões de alta pressão e quebram-se, as ondas de choque submersas algumas vezes criam lampejos. Tal fenômeno é chamado de *sonoluminescência*.

A cavitação de corpo é ilustrada na Figura 2–28. O corpo é um modelo da superfície da região bulbosa submersa do casco de um navio. Seu formato é dessa maneira porque contém um sistema de *navegação* e *localização* sonoro (sonar) que tem formato esférico. Essa parte do casco do navio é chamada de *domo do sonar*. À medida que a velocidade do navio aumenta, alguns desses domos começam a cavitar e o ruído criado pela cavitação torna o sistema de sonar inútil. Os arquitetos e engenheiros navais e especialistas em mecânica dos fluidos tentam projetar tais domos de modo que não criem cavitação. Testes com modelos em escala permitem que o engenheiro veja em primeira mão se um determinado projeto oferece desempenho de cavitação melhorado. Porque tais testes são realizados em tanques de provas, as condições da água de teste deve ter núcleos suficientes para modelar as condições em que o protótipo opera. Isso assegura que o efeito da tensão do líquido (distribuição de núcleos) seja minimizado. As variáveis importantes são o nível do teor de gás (distribuição dos núcleos) da água, a temperatura e a pressão hidrostática onde o corpo opera. A cavitação aparece primeiro — tanto quando a velocidade V é aumentada como quando a profundidade de submersão h é diminuída — no ponto de pressão mínima $C_{p_{mín}}$ do corpo. Assim, um bom projeto hidrodinâmico requer $2(P_\infty - P_v)/\rho V^2 > C_{p_{mín}}$, onde ρ é densidade, $P_\infty = \rho g h$ é a referência à pressão estática, C_p é o coeficiente de pressão (Capítulo 7), e P_v é a pressão de vapor da água.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 2–28
(*a*) Ocorre *cavitação vaporosa* na água que tem muito pouco gás arrastado, tal como a encontrada em locais muito profundos de uma massa de água. Bolhas de cavitação são formadas quando a velocidade do corpo – neste caso a região bulbosa curva da superfície do domo do sonar do navio – aumenta até o ponto em que a pressão estática local cai abaixo da pressão de vapor da água. As bolhas de cavitação são essencialmente cheias com vapor de água. Esse tipo de cavitação é muito violento e barulhento. (*b*) Por outro lado, em água rasa, muito mais gás é arrastado pela água, formando núcleos de cavitação. Por causa da proximidade do domo com a atmosfera na superfície livre, as bolhas de cavitação aparecem em velocidade mais baixa. Elas estão predominantemente cheias com os gases arrastados pela água, assim esse fenômeno é conhecido como *cavitação gasosa*.

Reimpresso com permissão de G. C. Lauchle e M. L. Billet, Penn State University.

Referências

Lauchle, G. C., Billet, M. L. e Deutsch, S. "High-Reynolds Number Liquid Flow Measurements", no *Lecture Notes in Engineering*, v. 46, *Frontiers in Experimental Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, editado por M. Gad-el-Hak, Cap. 3, p. 95–158, 1989.

Ross, D. *Mechanics of Underwater Noise*, Peninsula Publ., Los Altos, CA, 1987.

Barber, B. P., Hiller, R. A., Löfstedt, R., Putterman, S. J. e Weninger, K. R. "Defining the Unknowns of Sonoluminescence", *Physics Reports*, v. 281, p. 65–143, 1997.

PROBLEMAS*

Densidade e Gravidade Específica

2–1C Qual é a diferença entre propriedades intensivas e extensivas?

2–2C O que é gravidade específica? Como está relacionada à densidade?

2–3C Sob que condições a hipótese de gás ideal é aplicável aos gases reais?

2–4C Qual é a diferença entre R e R_u? Como os dois estão relacionados?

2–5 Um balão esférico com diâmetro de 6 m está cheio de gás hélio a 20°C e 200 kPa. Determine o número de moles e a massa do hélio no balão. *Respostas:* 9,28 kmol, 37,2 kg

2–6 Reconsidere o Problema 2-5. Usando o programa EES (ou outro), investigue o efeito do diâmetro do balão na massa de hélio contida no balão para pressões de (*a*) 100 kPa e (*b*) 200 kPa. Faça o diâmetro variar de 5 m para 15 m. Trace o gráfico da massa de hélio versus o diâmetro para ambos os casos.

2–7 A pressão no pneu de um automóvel depende da temperatura do ar no pneu. Quando a temperatura do ar é de 25°C, o calibrador indica 210 kPa. Se o volume do pneu é de 0,025 m^3, determine o aumento de pressão no pneu quando a temperatura do ar no pneu aumenta para 50°C. Determine também a quantidade de ar que deve ser drenada para restaurar a pressão ao seu valor original nesta temperatura. Considere que a pressão atmosférica seja 100 kPa.

FIGURA P2–7

2–8 A densidade do ar atmosférico varia com a altitude, diminuindo com o aumento da altitude. (*a*) Usando os dados da tabela, obtenha a relação da variação da densidade com a altitude e calcule a densidade na altitude de 7000 m. (*b*) Calcule a massa da atmosfera usando a correlação que você obteve. Suponha que a Terra seja uma esfera perfeita com raio de 6377 km e considere que a espessura da atmosfera seja 25 km.

z, km	ρ, kg/m^3
6377	1,225
6378	1,112
6379	1,007
6380	0,9093
6381	0,8194
6382	0,7364
6383	0,6601
6385	0,5258
6387	0,4135
6392	0,1948
6397	0,08891
6402	0,04008

Pressão de Vapor e Cavitação

2–9C O que é pressão de vapor? Como está relacionada à pressão de saturação?

2–10C A água ferve em temperaturas mais altas sob pressões maiores? Explique.

2–11C Se a pressão de uma substância for aumentada durante o processo de fervura, a temperatura também aumenta ou permanece constante? Por quê?

2–12C O que é cavitação? O que a causa?

2–13 Num sistema de tubulações, a temperatura da água permanence abaixo de 40°C. Determine a pressão mínima permissível no sistema para evitar cavitação.

2–14 A análise de uma hélice que opera em água a 20°C mostra que a pressão nas extremidades da hélice cai para 2 kPa em velocidades altas. Determine se há perigo de cavitação para a hélice.

2–15 Uma bomba é usada para transportar água para um reservatório mais alto. Se a temperatura da água for de 25°C, determine a pressão mais baixa que pode ocorrer na bomba sem cavitação.

Energia e Calores Específicos

2–16C Qual é a diferença entre as formas de energia macroscópica e microscópica?

2–17C O que é energia total? Identifique as diferentes formas de energia que constituem a energia total.

2–18C Relacione as formas de energia que contribuem para a energia interna de um sistema.

2–19C Como estão relacionados uns com os outros calor, energia interna e energia térmica?

2–20C O que é energia de escoamento? Fluidos em repouso possuem qualquer energia de escoamento?

2–21C Como se comparam as energias de um fluido em movimento e de um fluido em repouso? Cite os nomes de formas específicas de energia associadas com cada caso.

2–22C Explique como as mudanças da energia interna de gases ideais e substâncias incompressíveis podem ser determinadas usando-se calores específicos médios.

2–23C Explique como as mudanças da entalpia de gases ideais e substâncias incompressíveis podem ser determinadas usando-se calores específicos médios.

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

Coeficiente de Compressibilidade

2–24C O que representa o coeficiente de compressibilidade de um fluido? Como se diferencia de compressibilidade isotérmica?

2–25C O que representa o coeficiente de expansão de volume de um fluido? Como se diferencia do coeficiente de compressibilidade?

2–26C O coeficiente de compressibilidade de um fluido pode ser negativo? E o coeficiente de expansão de volume?

2–27 Observa-se que a densidade de um gás ideal decresce 10% quando comprimido isotermicamente de 10 atm para 11 atm. Determine a porcentagem de decréscimo da densidade do gás se for comprimido isotermicamente de 100 atm para 101 atm.

2–28 Usando a definição de coeficiente de expansão de volume e a expressão $\beta_{\text{gás ideal}} = 1/T$, mostre que a porcentagem de aumento do volume específico de um gás ideal durante expansão isobárica é igual à porcentagem de aumento da temperatura absoluta.

2–29 Água sob pressão de 1 atm é comprimida isotermicamente para a pressão de 800 atm. Determine o aumento da densidade da água. Suponha que a compressibilidade isotérmica da água seja $4{,}80 \times 10^{-5}$ atm^{-1}.

2–30 Água a 15°C e pressão de 1 atm é aquecida para 100°C sob pressão constante. Usando dados de coeficiente de expansão de volume, determine a mudança na densidade da água.

Resposta: $-38{,}7$ kg/m^3

2–31 Refrigerante saturado-134a líquido a 10°C é esfriado para 0°C a pressão constante. Usando dados de coeficiente de expansão de volume, determine a mudança na densidade do refrigerante.

2–32 Um reservatório de água está completamente cheio com água líquida a 20°C. O material do reservatório é tal que pode resistir à tensão causada por uma expansão de volume de 2%. Determine o aumento máximo permissível na temperatura sem comprometer a segurança.

2–33 Repita o Prob. 2–32 para uma expansão de volume de 1% para água.

2–34 A densidade da água do mar em uma superfície livre onde a pressão é de 98 kPa é aproximadamente 1030 kg/m^3. Considerando que o módulo de elasticidade da água em grande massa seja $2{,}34 \times 10^9$ N/m^2 e expressando a variação da pressão com a profundidade z como $dP = \rho g\, dz$, determine a densidade e a pressão a uma profundidade de 2500 m. Despreze o efeito da temperatura.

Viscosidade

2–35C O que é viscosidade? O que a causa nos líquidos e gases? Os líquidos ou os gases têm viscosidade dinâmica maior?

2–36C O que é um fluido newtoniano? A água é um fluido newtoniano?

2–37C Considere duas bolas de gude lançadas em dois recipientes idênticos, um cheio de água e o outro de óleo. Qual das bolas atingirá o fundo do recipiente primeiro? Por quê?

2–38C Como a viscosidade dinâmica de (*a*) líquidos e (*b*) gases varia com a temperatura?

2–39C Como a viscosidade cinemática de (*a*) líquidos e (*b*) gases varia com a temperatura?

2–40 Um bloco com dimensões de 50 cm × 30 cm × 20 cm pesando 150 N deve ser deslocado com velocidade constante de 0,8 m/s num plano inclinado com coeficiente de atrito 0,27. (*a*) Determine a força F que precisa ser aplicada na direção horizontal. (*b*) Se uma película de óleo de 0,4 mm de espessura com viscosidade dinâmica de 0,012 Pa · s for aplicada entre o bloco e o plano inclinado, determine o porcentual de redução na força requerido.

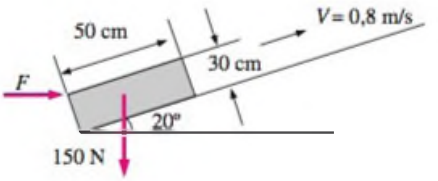


FIGURA P2–40

2–41 Considere o escoamento de um fluido com viscosidade μ através de um tubo circular. O perfil de velocidade no tubo é expresso por $u(r) = u_{\text{máx}}(1 - r^n/R^n)$, onde $u_{\text{máx}}$ é a velocidade máxima do escoamento, a qual ocorre no eixo central; r é a distância radial do eixo central e $u(r)$ é a velocidade do escoamento em qualquer posição r. Desenvolva uma relação para a força de arrasto exercida sobre a parede do tubo no sentido do escoamento por unidade de comprimento do tubo.

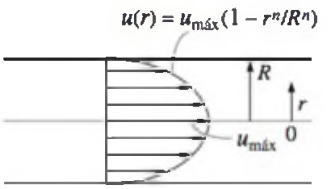


FIGURA P2–41

2–42 Uma chapa plana fina de dimensões 20 cm × 20 cm é puxada horizontalmente com velocidade de 1 m/s sobre uma camada de óleo de 3,6 mm de espessura entre duas chapas planas, uma estacionária e a outra movendo-se com velocidade constante de 0,3 m/s, como mostrado na Figura P2–42. A viscosidade dinâmica do óleo é 0,027 Pa · s. Considerando que a velocidade de cada camada de óleo varie linearmente, (*a*) trace o perfil da velocidade e determine o ponto em que a velocidade do óleo seja nula e (*b*) determine a força que precisa ser aplicada sobre a chapa para manter o movimento.

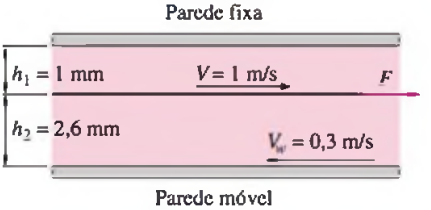


FIGURA P2–42

2–43 Um corpo com forma de tronco de cone está girando com velocidade angular constante de 200 rad/s num recipiente cheio de óleo SAE 10W a 20°C ($\mu = 0{,}1$ Pa · s), como mostrado na Figura P2–43. Se a espessura da película de óleo em todos os

lados for de 1,2 mm, determine a potência necessária para manter o movimento. Determine também a redução da potência de entrada necessária quando a temperatura do óleo aumenta para 80°C (μ = 0,0078 Pa · s).

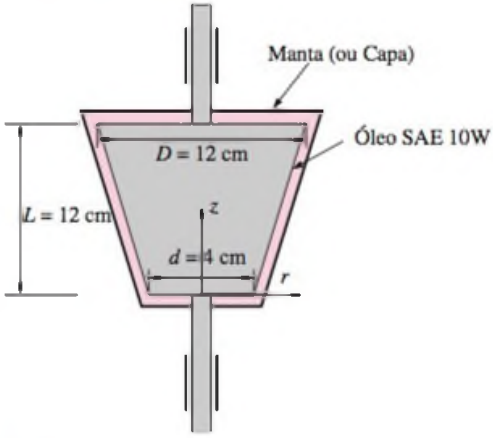


FIGURA P2–43

2–44 O sistema de embreagem mostrado na Figura P2–44 é usado para transmitir torque através de uma película de óleo de 3 mm de espessura com μ = 0,38 N · s/m² entre dois discos idênticos de 30 cm de diâmetro. Quando o eixo de acionamento gira com velocidade de 1450 rpm, o eixo acionado gira a 1398 rpm. Supondo um perfil de velocidade linear para a película de óleo, determine o torque transmitido.

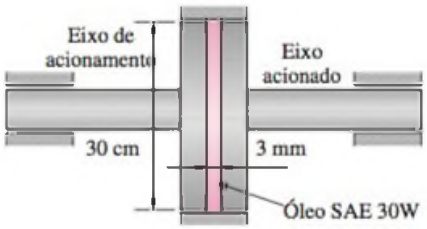


FIGURA P2–44

2–45 Reconsidere o Problema 2–44. Investigue o efeito da espessura da película de óleo sobre o torque transmitido, usando o programa EES (ou outro similar). Suponha que a espessura da película de óleo varie de 0,1 mm a 10 mm. Trace o gráfico dos resultados e explique suas conclusões.

2–46 A viscosidade de alguns fluidos muda quando um campo elétrico é aplicado sobre eles. Tal fenômeno é conhecido como efeito reológico (ER) e os fluidos que apresentam tal comportamento são denominados fluidos ER. O modelo plástico Bingham para tensão de cisalhamento, expresso pela equação $\tau = \tau_y + \mu(du/dy)$, é muito usado para descrever o comportamento dos fluidos ER devido à sua simplicidade. Uma das aplicações mais promissoras dos fluidos ER é a embreagem ER. A embreagem ER multidiscos típica consiste em vários discos de aço espaçados igualmente de raio interno R_1 e raio externo R_2, N deles acoplados ao eixo de entrada. A folga h entre discos paralelos é preenchida com fluido viscoso. (*a*) Determine a equação do torque gerado pela embreagem quando o eixo de saída está estacionário e (*b*) calcule o torque para uma embreagem ER com N = 11 para R_1 = 50 mm, R_2 = 200 mm e $\dot{n}$ = 2400 rpm se o fluido for SAE 10 com μ = 0,1 Pa · s, τ_y = 2,5 kPa e h = 1,2 mm.

Resposta: (*b*) 2060 N · m

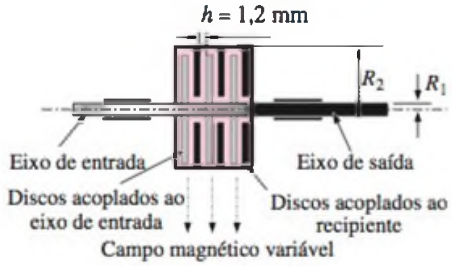


FIGURA P2–46

2–47 A viscosidade de alguns fluidos denominados fluidos magnetoreológicos (MR), muda quando é aplicado um campo magnético. Tais fluidos contêm micropartículas magnetizáveis em suspensão num líquido transportador apropriado e são adequados para usar em embreagens hidráulicas controláveis. Veja a Figura P2–46. Os fluidos MR possuem viscosidades muito maiores do que os fluidos ER, e, freqüentemente, exibem redutor de tensão no qual a viscosidade do fluido diminui à medida que a força de cisalhamento aumenta. Tal comportamento é também conhecido como comportamento pseudoplástico e é representado com sucesso pelo modelo característico de Herschel–Bulkley expresso pela equação $\tau = \tau_y + K(du/dy)^m$. Nessa expressão, τ é a tensão de cisalhamento aplicada, τ_y é a tensão *de escoamento*, K é o índice de consistência e m é o índice de potência. Para um fluido Herschel–Bulkley com τ_y = 900 Pa, K = 58 Pa · s^m e m = 0,82, (*a*) determine uma relação para o torque transmitido por uma embreagem MR com N discos acoplados ao eixo de entrada quando o eixo gira com velocidade angular ω enquanto o eixo de saída permanece estacionário e (*b*) calcule o torque transmitido por uma embreagem desse tipo com N = 11 discos para R_1 = 50 mm, R_2 = 200 mm, $\dot{n}$ = 2400 rpm e h = 1,2 mm.

2–48 A viscosidade de um fluido deve ser medida com um viscossímetro constituído de dois cilindros concêntricos de 75 cm de comprimento. O diâmetro externo do cilindro interno é de 15 cm, e a folga entre os dois cilindros é 0,12 cm. O cilindro interno gira a 200 rpm e o torque medido é 0,8 N · m. Determine a viscosidade do fluido.

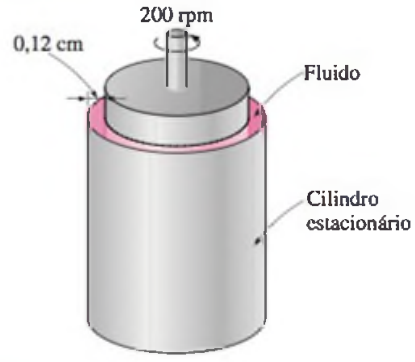


FIGURA P2–48

2–49 Em regiões longe da entrada, o escoamento do fluido através de um tubo circular é unidimensional e o perfil de velocidade para escoamento laminar é dado pela equação $u(r) = u_{máx}(1 - r^2/R^2)$, onde R é o raio do tubo, r é a distância radial do centro do tubo, e $u_{máx}$ é a velocidade máxima do escoamento, que ocorre no centro. Obtenha (*a*) a equação da força de arrasto aplicada pelo fluido numa seção do tubo de comprimento L e (*b*) o valor da força de arrasto para escoamento de água a 20°C com R = 0,08 m, L = 15 m, $u_{máx}$ = 3 m/s, e μ = 0,0010 kg/m · s.

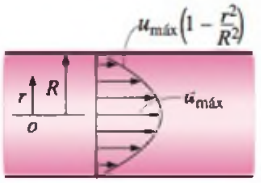


FIGURA P2–49

2–50 Repita o Prob. 2–49 para $u_{máx} = 5$ m/s.
Resposta: (b) 0,942 N

Tensão Superficial e Efeito Capilar

2–51C O que é tensão superficial? O que a causa? Por que a tensão superficial também é chamada de energia superficial?

2–52C Considere uma bolha de sabão. A pressão no interior da bolha é maior ou menor do que a pressão externa?

2–53C O que é efeito capilar? O que o causa? Como é afetado pelo ângulo de contato?

2–54C Um tubo de diâmetro pequeno é mergulhado num líquido cujo ângulo de contato é 110°. O nível do líquido no tubo sobe ou desce? Explique.

2–55C A ascensão capilar é maior em tubos de diâmetro pequeno ou grande?

2–56 Um tubo de 1,9 mm de diâmetro é mergulhado num líquido desconhecido cuja densidade é 960 kg/m³. Observa-se que o líquido sobe 5 mm formando um ângulo de contato de 15°. Determine a tensão superficial do líquido.

2–57 Determine a pressão manométrica no interior de uma bolha de sabão de diâmetro (*a*) 0,2 cm e (*b*) 5 cm a 20°C.

2–58 Nutrientes dissolvidos em água são levados para as partes superiores das plantas através de tubos pequenos devido em parte ao efeito capilar. Determine a altura que a solução subirá numa árvore num tubo de 0,005 mm diâmetro como resultado do efeito capilar. Trate a solução como água a 20°C com ângulo de contato de 15°. *Resposta: 5,75 m*

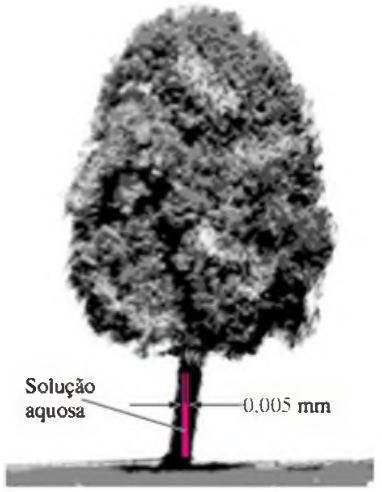


FIGURA P2–58

2–59 A tensão superficial de um líquido deve ser medida usando-se uma película líquida suspensa numa armação de arame em forma de U com um lado móvel de 8 cm de comprimento. Se a força necessária para mover o arame for de 0,012 N, determine a tensão superficial desse líquido no ar.

2–60 Ao contrário do que se possa esperar, uma esfera de aço sólida pode flutuar na água devido ao efeito da tensão superficial. Determine o diâmetro máximo de uma esfera de aço que flutuaria em água a 20°C. Qual seria sua resposta para uma esfera de alumínio? Suponha que as densidades das esferas de aço e de alumínio sejam, respectivamente, 7800 kg/m³ e 2700 kg/m³.

Problemas de Revisão

2–61 A pressão absoluta de um pneu de automóvel é medida como 290 kPa antes de uma viagem e de 310 kPa depois da viagem. Supondo que o volume permanece constante em 0,022 m³, determine a porcentagem de aumento da temperatura absoluta do ar no pneu.

2–62 Um reservatório de 20 m³ contém nitrogênio a 25°C e 800 kPa. Permite-se que parte do nitrogênio escape até que a pressão no reservatório caia para 600 kPa. Se a temperatura nesse momento for 20°C, determine a quantidade de nitrogênio que escapou. *Resposta: 42,9 kg*

2–63 A composição de um líquido com partículas sólidas em suspensão geralmente é caracterizada pela fração de partículas sólidas tanto por peso ou massa $C_{s,\,massa} = m_s/m_m$ como por volume, $C_{s,\,vol} = V_s/V_m$, onde m é massa e V é volume. Os índices s e m indicam sólido e mistura, respectivamente. Deduza uma expressão para a gravidade específica de uma suspensão em água em função de $C_{s,\,massa}$ e $C_{s,\,vol}$.

2–64 As gravidades específicas dos sólidos e fluidos portadores de uma pasta são usualmente conhecidas, mas a gravidade específica da pasta depende da concentração das partículas sólidas. Demonstre que a gravidade específica de uma pasta baseada em água é expressa em termos da gravidade específica do sólido GE_s e da concentração de massa das partículas sólidas em suspensão $C_{s,\,massa}$ pela expressão

$$GE_m = \frac{1}{1 + C_{s,\,massa}(1/GE_s - 1)}$$

2–65 Um reservatório fechado está parcialmente cheio com água a 60°C. Se o ar acima da água for completamente removido, determine a pressão absoluta no espaço esvaziado. Assuma que a temperatura permaneça constante.

2–66 A variação da viscosidade dinâmica da água em função da temperatura absoluta é dada como

T, K	μ, Pa · s
273,15	$1{,}787 \times 10^{-3}$
278,15	$1{,}519 \times 10^{-3}$
283,15	$1{,}307 \times 10^{-3}$
293,15	$1{,}002 \times 10^{-3}$
303,15	$7{,}975 \times 10^{-4}$
313,15	$6{,}529 \times 10^{-4}$
333,15	$4{,}665 \times 10^{-4}$
353,15	$3{,}547 \times 10^{-4}$
373,15	$2{,}828 \times 10^{-4}$

Usando os dados tabulados, deduza uma expressão para a viscosidade com o formato $\mu = \mu(T) = A + BT + CT^2 + DT^3 + ET^4$. Usando a expressão deduzida prognostique a viscosidade dinâmica da água a 50°C na qual o valor registrado é $5{,}468 \times 10^{-4}$ Pa · s. Compare seu resultado com os da equação de Andrade, dada sob a forma $\mu = D \cdot e^{B/T}$, onde D e B são constantes cujos valores devem ser calculados usando-se os dados de viscosidade fornecidos.

2–67 Considere o escoamento laminar de um fluido newtoniano de viscosidade μ entre duas placas paralelas. O escoamento é unidimensional e o perfil de velocidade é expresso como $u(y) = 4u_{máx}\,[y/h - (y/h)^2]$, onde y é a coordenada vertical da superfície do fundo, h é a distância entre as duas placas e $u_{máx}$ é a velocidade máxima do escoamento que ocorre no plano do meio. Desenvolva uma expressão para a força de arrasto exercida em ambas as placas pelo fluido na direção do escoamento por unidade de área das placas.

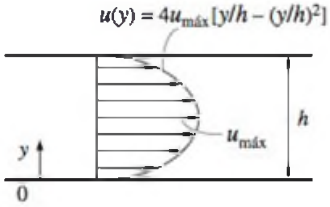


FIGURA P2–67

2–68 Alguns fluidos não newtonianos comportam-se como um plástico Bingham para o qual o esforço de cisalhamento é expresso como $\tau = \tau_y + \mu(du/dr)$. No caso de escoamento laminar de plástico Bingham num tubo horizontal de raio R, o perfil de velocidade é definido pela expressão $u(r) = (\Delta P/4\mu L)(r^2 - R^2) + (\tau_y/\mu)(r - R)$, onde $\Delta P/L$ é a queda de pressão constante ao longo do tubo por unidade de comprimento, μ é a viscosidade dinâmica, r é a distância radial do eixo central e τ_y é a tensão de escoamento do plástico Bingham. Determine (*a*) a tensão de cisalhamento numa parede do tubo e (*b*) a força de arrasto que atua na seção do tubo de comprimento L.

2–69 Em alguns sistemas de amortecimento, um disco circular imerso em óleo é usado como amortecedor, como mostrado na Figura P2–69. Demonstre que o torque de amortecimento é proporcional à velocidade angular de acordo com a fórmula $T_{\text{amortecimento}} = C\omega$, onde $C = 0{,}5\pi\mu(1/a + 1/b)R^4$. Suponha perfis de velocidade lineares de ambos os lados do disco e despreze os efeitos das bordas.

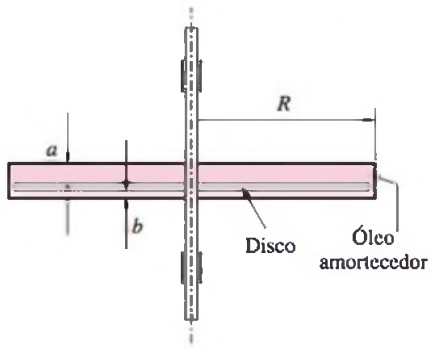


FIGURA P2–69

2–70 Deduza uma expressão para a ascensão capilar de um líquido entre duas placas paralelas grandes, distantes entre si t, mergulhadas verticalmente no líquido. Considere que o ângulo do contato seja ϕ.

2–71 Considere um mancal de 30 cm de comprimento lubrificado com óleo cuja viscosidade é 0,1 kg/m · s a 20°C no início da operação e 0,008 kg/m · s na temperatura operacional constante prevista de 80°C. O diâmetro do eixo é de 8 cm, e a folga média entre o eixo e o casquilho é de 0,08 cm. Determine o torque necessário para vencer o atrito inicialmente e durante a operação quando o eixo gira a 500 rpm.

Problemas de Projeto e Dissertação

2–72 Projete um experimento para medir a viscosidade de líquidos usando um funil vertical com um reservatório cilíndrico de altura h e uma seção de escoamento estreita de diâmetro D e comprimento L. Fazendo hipóteses apropriadas, deduza uma expressão para viscosidade em função de quantidades facilmente mensuráveis tais como densidade e vazão volumétrica.

2–73 Escreva uma dissertação sobre ascensão de fluido para o topo das árvores através de capilaridade e outros efeitos.

2–74 Escreva uma dissertação sobre óleos usados em motores de automóveis nas diferentes estações do ano e suas viscosidades.

CAPÍTULO

3

PRESSÃO E ESTÁTICA DOS FLUIDOS

OBJETIVOS

Ao terminar de ler este capítulo você deve ser capaz de:

- Determinar a variação da pressão em um fluido em repouso
- Calcular as forças exercidas por um fluido em repouso em superfícies submersas planas ou curvas
- Analisar o movimento de corpo rígido dos fluidos em contêineres durante a aceleração linear ou a rotação

Este capítulo trata das forças aplicadas pelos fluidos em repouso ou em movimento de corpo rígido. A propriedade do fluido responsável por essas forças é a *pressão*, que é uma força normal exercida por um fluido por unidade de área. Iniciamos este capítulo com uma discussão detalhada sobre a pressão, incluindo as *pressões absoluta* e *manométrica*, a pressão em um *ponto*, a *variação da pressão com a profundidade* em um campo gravitacional, o *manômetro*, o *barômetro* e os dispositivos de medição da pressão. A seguir temos uma discussão sobre as *forças hidrostáticas* aplicadas aos corpos submersos com superfícies planas ou curvas. Em seguida, consideramos a *força de flutuação* aplicada pelos fluidos aos corpos submersos ou flutuantes e discutimos a *estabilidade* desses corpos. Finalmente, aplicamos a segunda lei de movimento de Newton a um corpo de fluido em movimento que se comporte como um corpo rígido, e analisamos a variação da pressão em fluidos que passam por aceleração linear e aos que estão em contêineres giratórios. Este capítulo utiliza extensivamente os balanços de força para corpos em equilíbrio estático, e será útil que os tópicos relevantes da estática sejam revisados antes.

3–1 • PRESSÃO

A **pressão** é definida como *uma força normal exercida por um fluido por unidade de área*. Só falamos de pressão quando lidamos com um gás ou um líquido. O equivalente da pressão nos sólidos é a *tensão normal*. Como a pressão é definida como a força por unidade de área, ela tem unidade de newtons por metro quadrado (N/m^2), que é denominada **pascal** (Pa). Ou seja:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

A unidade de pressão pascal é muito pequena para quantificar as pressões encontradas na prática. Assim, normalmente são usados seus múltiplos quilopascal ($1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa}$) e megapascal ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$). Outras três unidades de pressão muito usadas na prática, particularmente na Europa, são *bar, atmosfera padrão* e *kilograma-força por centímetro quadrado*:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 0{,}1 \text{ MPa} = 100 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ atm} = 101{,}325 \text{ Pa} = 101{,}325 \text{ kPa} = 1{,}01325 \text{ bars}$$

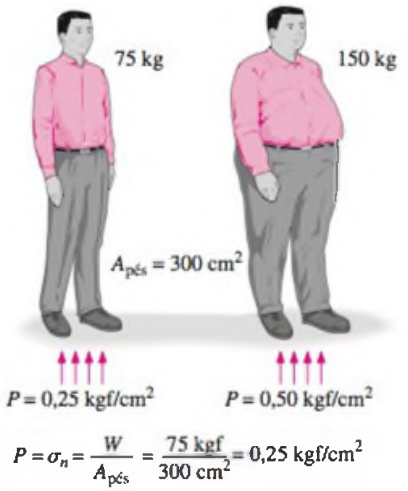
$$1 \text{kgf/cm}^2 = 9{,}807 \text{ N/cm}^2 = 9{,}807 \times 10^4 \text{ N/m}^2 = 9{,}807 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$= 0{,}9807 \text{ bar}$$

$$= 0{,}9679 \text{ atm}$$

Observe que as unidades de pressão bar, atm e kgf/cm^2 são quase equivalentes entre si. No sistema inglês, a unidade de pressão é *libra-força por polegada quadrada* (lbf/pol^2 ou psi) e 1 atm = 14,696 psi. As unidades de pressão kgf/cm^2 e lbf/pol^2 também são indicadas por kg/cm^2 e lb/pol^2, respectivamente, e normalmente são usadas em calibradores de pneus. É possível mostrar que $1 \text{ kgf/cm}^2 = 14{,}223$ psi.

A pressão também é usada para sólidos como sinônimo de *tensão normal*, que é a força que age perpendicularmente à superfície por unidade de área. Por exemplo, uma pessoa que pesa 75 quilos com uma área total da sola dos pés ou "das pegadas" dos pés de 300 cm^2 exerce uma pressão de $75 \text{ kgf}/300 \text{ cm}^2 = 0{,}25 \text{ kgf/cm}^2$ sobre o solo (Figura 3–1). Se a pessoa fica sobre um único pé, a pressão dobra. Se a pessoa ganha peso excessivo, ela pode sentir desconforto nos pés por conta da maior pressão sobre eles (o tamanho do pé não muda com o ganho de peso). Isso também explica o motivo pelo qual uma pessoa pode caminhar sobre neve fresca sem afundar se usar sapatos de neve grandes, e como uma pessoa consegue cortar alguma coisa com pouco esforço usando uma faca afiada.



$$P = \sigma_n = \frac{W}{A_{pés}} = \frac{75 \text{ kgf}}{300 \text{ cm}^2} = 0{,}25 \text{ kgf/cm}^2$$

FIGURA 3–1
A tensão normal (ou "pressão") sobre os pés de uma pessoa gorda é muito maior do que sobre os pés de uma pessoa magra.

A pressão real em determinada posição é chamada de **pressão absoluta**, e é medida com relação ao vácuo absoluto (ou seja, a pressão absoluta zero). A maioria dos dispositivos de medição da pressão, porém, é calibrada para ler o zero na atmosfera (Figura 3–2) e, assim, ela indica a diferença entre a pressão absoluta e a pressão atmosférica local. Essa diferença é chamada de **pressão manométrica**. As pressões abaixo da pressão atmosférica são chamadas de **pressões de vácuo** e são medidas pelos medidores de vácuo que indicam a diferença entre a pressão atmosférica e a pressão absoluta. As pressões absoluta, manométrica e de vácuo são todas quantidades positivas e estão relacionadas entre si por:

$$P_{man} = P_{abs} - P_{atm} \quad \text{(3–1)}$$

$$P_{vác} = P_{atm} - P_{abs} \quad \text{(3–2)}$$

Isso é ilustrado na Figura 3–3.

Assim como outros medidores de pressão, o medidor utilizado para medir a pressão do ar de um pneu de automóvel lê a pressão manométrica. Assim, a leitura comum de 32 psi (2,25 kgf/cm^2) indica uma pressão de 32 psi acima da pressão atmosférica. Em um local onde a pressão atmosférica seja de 14,3 psi, por exemplo, a pressão absoluta do pneu será de 32 + 14,3 = 46,3 psi.

Nas relações e tabelas termodinâmicas, quase sempre é utilizada a pressão absoluta. Em todo este livro, a pressão P indicará a *pressão absoluta*, a menos que seja especificado o contrário. Quase sempre as letras "a" (de pressão absoluta) e "g" (de pressão manométrica) são adicionadas às unidades de pressão (como psia e psig) para esclarecer seu sentido.

FIGURA 3–2
Alguns medidores de pressão básicos.
Dresser Instruments, Dresser, Inc. Utilização permitida.

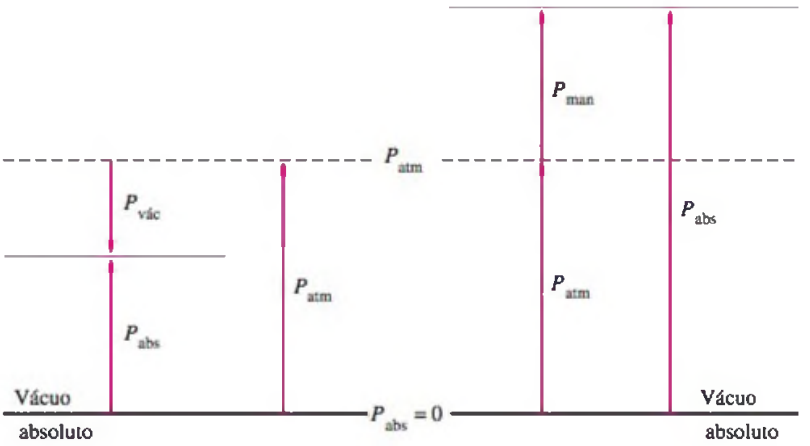


FIGURA 3–3
Pressões absoluta, manométrica e de vácuo.

EXEMPLO 3–1 **A Pressão Absoluta de uma Câmara de Vácuo**

Um medidor de vácuo conectado a uma câmara exibe a leitura de 5,8 psi em um local onde a pressão atmosférica é de 14,5 psi. Determine a pressão absoluta na câmara.

SOLUÇÃO A pressão manométrica de uma câmara de vácuo é dada. A pressão absoluta da câmara deve ser determinada.

Análise A pressão absoluta é determinada facilmente pela Equação 3–2 como:

$$P_{abs} = P_{atm} - P_{vác} = 14{,}5 - 5{,}8 = \mathbf{8{,}7\ psi}$$

Discussão Observe que o valor local da pressão atmosférica é usado ao determinarmos a pressão absoluta.

Pressão em um Ponto

A pressão é a *força de compressão* por unidade de área, e ela dá a impressão de ser um vetor. Entretanto, a pressão em qualquer ponto de um fluido é igual em todas as direções. Ou seja, ela tem intensidade, mas não uma direção específica e, por isso, ela é uma quantidade escalar. Isso pode ser demonstrado considerando um elemento fluido em forma de uma pequena cunha unitário de comprimento (na página) em equilíbrio, como mostra a Figura 3–4. As pressões médias nas três superfícies são P_1, P_2 e P_3 e a força que age sobre uma superfície é o produto da pressão média pela área da superfície. Da segunda lei de Newton sabemos que um balanço de força nas direções x e z resulta em:

$$\sum F_x = ma_x = 0: \qquad P_1\,\Delta z - P_3 l \operatorname{sen}\theta = 0 \tag{3–3a}$$

$$\sum F_z = ma_z = 0: \qquad P_2\,\Delta x - P_3 l \cos\theta - \frac{1}{2}\rho g\,\Delta x\,\Delta z = 0 \tag{3–3b}$$

onde ρ é a densidade e $W = mg = \rho g\,\Delta x\,\Delta z/2$ é o peso do elemento fluido. Observando que a cunha é um triângulo retângulo, temos $\Delta x = l \cos\theta$ e $\Delta z = l \operatorname{sen}\theta$. Substituindo essas relações geométricas e dividindo a Equação 3–3a por Δz e a Equação 3–3b por Δx temos:

$$P_1 - P_3 = 0 \tag{3–4a}$$

$$P_2 - P_3 - \frac{1}{2}\rho g\,\Delta z = 0 \tag{3–4b}$$

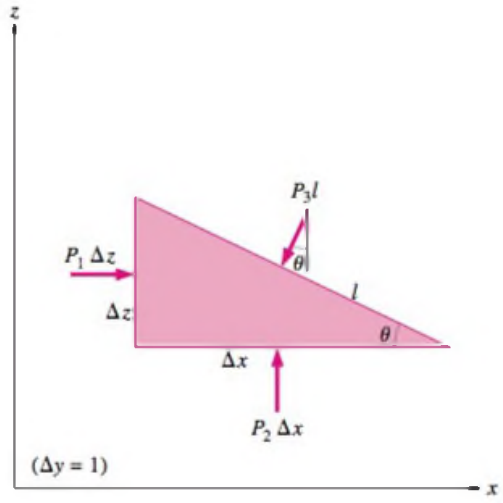


FIGURA 3–4
As forças que agem sobre um elemento fluido em forma de cunha em equilíbrio.

O último termo da Equação 3–4b desaparece quando $\Delta z \to 0$ e a cunha torna-se infinitesimal e, portanto, o elemento fluido encolhe até um ponto. Em seguida, combinando os resultados dessas duas relações temos:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P \tag{3–5}$$

independente do ângulo θ. Podemos repetir a análise para um elemento do plano xz e obter um resultado semelhante. Assim, concluímos que *a pressão em um ponto de um fluido tem a mesma intensidade em todas as direções.* Na ausência de forças de cisalhamento é possível mostrar que esse resultado se aplica tanto aos fluidos em movimento quanto aos fluidos em repouso.

Variação da Pressão com a Profundidade

Não deve ser surpresa para você o fato de que a pressão em um fluido em repouso não varia na direção horizontal. Isso pode ser facilmente mostrado considerando uma fina camada horizontal de fluido e fazendo um balanço de forças em qualquer direção horizontal. Entretanto, esse não é o caso na direção vertical na presença de um campo de gravidade. A pressão de um fluido aumenta com a profundidade, porque mais fluido se apóia nas camadas inferiores, e o efeito desse "peso extra" em uma camada mais profunda é equilibrado por um aumento na pressão (Figura 3–5).

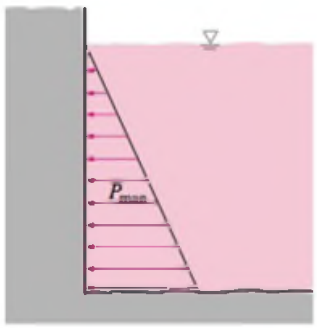


FIGURA 3–5
A pressão de um fluido em repouso aumenta com a profundidade (como resultado do aumento de peso).

Para obter uma relação para a variação da pressão com a profundidade, considere um elemento fluido retangular de altura Δz, largura Δx e profundidade unitária (para dentro da página) em equilíbrio, como mostra a Figura 3–6. Considerando que a densidade do fluido ρ seja constante, um balanço de forças na direção vertical z resulta em:

$$\sum F_z = ma_z = 0: \qquad P_2\,\Delta x - P_1\,\Delta x - \rho g\,\Delta x\,\Delta z = 0 \tag{3–6}$$

onde $W = mg = \rho g\,\Delta x\,\Delta z$ é o peso do elemento fluido. Dividindo por Δx e reorganizando temos:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho g\,\Delta z = \gamma_s\,\Delta z \tag{3–7}$$

onde $\gamma_s = \rho g$ é o *peso específico* do fluido. Assim, concluímos que a diferença de pressão entre dois pontos em um fluido de densidade constante é proporcional à distância vertical Δz entre os pontos e à densidade ρ do fluido. Em outras palavras, a pressão em um fluido aumenta linearmente com a profundidade. É isso o que um mergulhador experimenta ao mergulhar mais fundo em um lago. Para um determinado fluido, a distância vertical Δz às vezes é usada como uma medida de pressão e é chamada de *carga de pressão*.

Concluímos também pela Equação 3–7 que para distâncias de pequenas a moderadas, a variação da pressão com a altura é desprezível para os gases, por

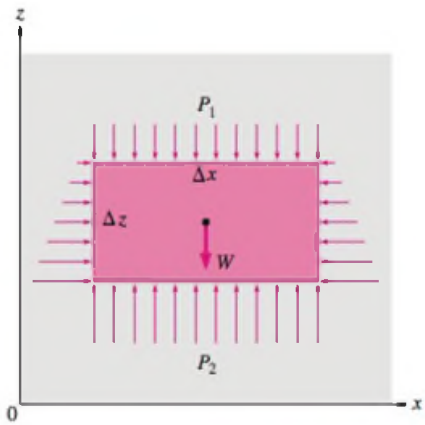


FIGURA 3–6
Diagrama de corpo livre de um elemento fluido retangular em equilíbrio.

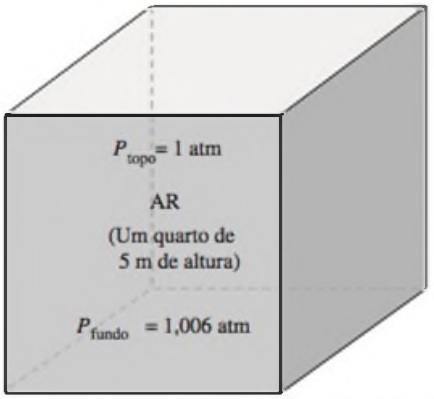


FIGURA 3–7
Em uma sala cheia com um gás, a variação da pressão com a altura é desprezível.

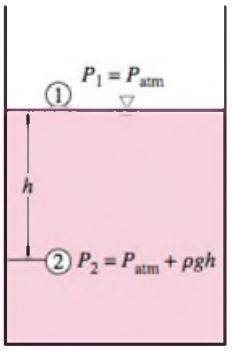


FIGURA 3–8
A pressão em um líquido em repouso aumenta linearmente com a distância da superfície livre.

causa de sua baixa densidade. A pressão em um tanque contendo um gás, por exemplo, pode ser considerada uniforme, uma vez que o peso do gás é muito baixo para fazer uma diferença apreciável. Da mesma forma, a pressão em uma sala cheia de ar pode ser considerada constante (Figura 3–7).

Se considerarmos o ponto 1 na superfície livre de um líquido aberto para a atmosfera (Figura 3–8), no qual a pressão é a pressão atmosférica P_{atm}, então a pressão a uma profundidade h da superfície livre torna-se:

$$P = P_{atm} + \rho gh \qquad \text{ou} \qquad P_{man} = \rho gh \tag{3–8}$$

Os líquidos são substâncias essencialmente incompressíveis e, portanto, a variação da densidade com a profundidade é desprezível. Isso também acontece com os gases quando a variação de altura não for muito grande. Entretanto, a variação da densidade dos líquidos ou dos gases com a temperatura pode ser significativa e precisa ser levada em conta quando a exatidão desejada for alta. Da mesma forma, a profundidades maiores, como aquelas encontradas nos oceanos, a variação na densidade de um líquido pode ser significativa, por causa da compressão exercida pelo enorme peso do líquido que está acima.

A aceleração gravitacional g varia de 9,807 m/s^2 no nível do mar até 9,764 m/s^2 a uma altitude de 14.000 m, na qual viajam os grandes aviões de passageiros. Essa mudança é de apenas 0,4% neste caso extremo. Assim, é possível considerar que g é constante com erro desprezível.

Para os fluidos cuja densidade varia significativamente com a altitude, a relação para a variação da pressão com a altitude pode ser obtida dividindo-se a Equação 3–6 por $\Delta x\, \Delta z$ e tomando o limite quando $\Delta z \to 0$. Isso resulta em:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{3–9}$$

O sinal negativo se deve a termos escolhido a direção z positiva como ascendente, de modo que dP é negativo quando dz é positivo, uma vez que a pressão diminui na direção ascendente. Quando a variação da densidade com a altitude é conhecida, a diferença de pressão entre os pontos 1 e 2 pode ser determinada pela integração como:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -\int_1^2 \rho g\, dz \tag{3–10}$$

Para o caso de densidade e aceleração gravitacional constantes, essa relação se reduz à Equação 3–7, como era esperado.

A pressão em um fluido em repouso não depende da forma ou seção transversal do contêiner. Ela varia com a distância vertical, mas permanece constante em outras direções. Assim, a pressão é igual em todos os pontos de um plano horizontal para determinado fluido. O matemático holandês Simon Stevin (1548-1620) publicou em 1586 o princípio ilustrado na Figura 3–9. Observe que as pressões nos pontos *A, B, C, D, E, F* e *G* são iguais, uma vez que estão a mesma profundidade, e interconectadas pelo mesmo fluido estático. Entretanto, as pressões nos pontos *H* e *I* não são iguais, já que estes dois pontos não podem estar interconectados pelo mesmo fluido (ou seja, não podemos desenhar uma curva do ponto *I* até o ponto *H*, permanecendo sempre no mesmo fluido), embora eles estejam a mesma profundidade. (Você saberia dizer em qual ponto a pressão é mais alta?) Da mesma forma, a força de pressão exercida pelo fluido é sempre normal à superfície nos pontos especificados.

Uma conseqüência da pressão de um fluido permanecer constante na direção horizontal é que *a pressão aplicada a um fluido confinado aumenta a pressão em todo o fluido na mesma medida*. Essa é a **Lei de Pascal**, cujo nome é uma homenagem a Blaise Pascal (1623-1662). Pascal sabia também que a força aplicada por um fluido é proporcional à área da superfície. Ele percebeu que dois cilindros hidráulicos com áreas diferentes poderiam estar conectados, e que o maior poderia exercer uma força proporcionalmente maior do que aquela aplicada ao menor. A "máquina de Pascal" tem sido a fonte de muitas invenções parte do nosso dia-a-dia,

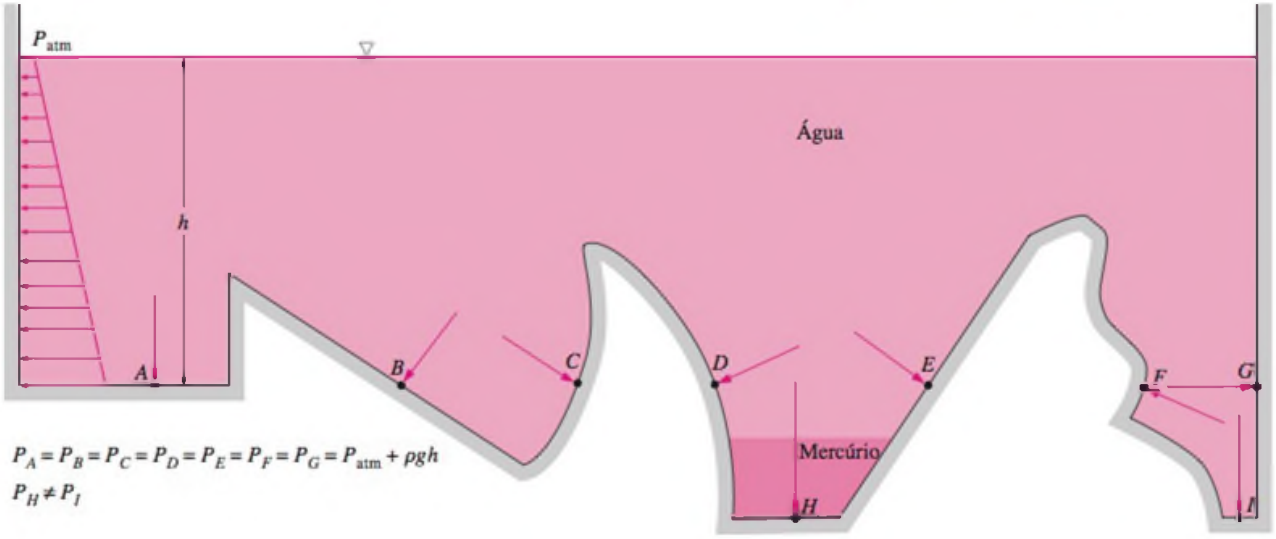


FIGURA 3–9
A pressão é a mesma em todos os pontos de um plano horizontal em um dado fluido, independentemente da geometria, desde que os pontos estejam interconectados pelo mesmo fluido.

como os freios e os elevadores hidráulicos. É isso que nos permite elevar um automóvel facilmente com um braço, como mostra a Figura 3–10. Observando que $P_1 = P_2$, já que ambos os pistões estão no mesmo nível (o efeito das pequenas diferenças de altura é desprezível, particularmente a altas pressões), a relação entre a força de saída e a força de entrada é determinada por:

$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \qquad \textbf{(3–11)}$$

A relação entre as áreas A_2/A_1 é chamada de *ganho mecânico ideal* do elevador hidráulico. Usando um macaco hidráulico com uma relação entre as áreas do pistão de $A_2/A_1 = 10$, por exemplo, uma pessoa pode elevar um automóvel de 1.000 kg aplicando uma força de apenas 100 kgf (= 908 N).

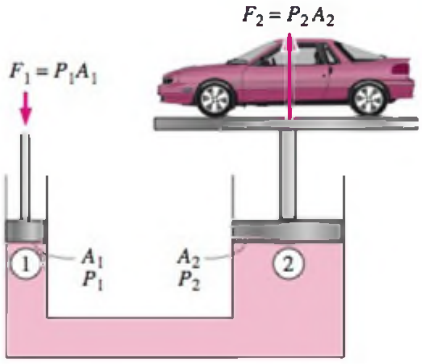


FIGURA 3–10
Elevando um peso grande com uma força pequena pela aplicação da lei de Pascal.

3–2 ▪ O MANÔMETRO

Observamos na Equação 3–7 que uma variação de elevação Δz em um fluido em repouso corresponde a $\Delta P/\rho g$, o que sugere que uma coluna de fluido pode ser usada para medir diferenças de pressão. Um dispositivo que se baseia nesse princípio é chamado de **manômetro**, normalmente usado para medir diferenças de pressão pequenas e moderadas. Um manômetro consiste principalmente em um tubo em forma de U, de vidro ou plástico, contendo um ou mais fluidos como mercúrio, água, álcool ou óleo. Quando se prevê diferenças de pressão elevadas, fluidos pesados como o mercúrio são usados, o que mantém o tamanho do manômetro em um nível gerenciável.

Considere o manômetro mostrado na Figura 3–11 que é usado para medir a pressão no tanque. Como os efeitos gravitacionais dos gases são desprezíveis, a pressão em qualquer parte do tanque e na posição 1 tem o mesmo valor. Além disso, como a pressão em um fluido não varia na direção horizontal dentro do fluido, a pressão no ponto 2 é igual à pressão no ponto 1, $P_2 = P_1$.

A coluna de fluido diferencial de altura h está em equilíbrio estático e aberta para a atmosfera. Dessa forma, a pressão no ponto 2 é determinada diretamente da Equação 3–8 como:

$$P_2 = P_{atm} + \rho gh \qquad \textbf{(3–12)}$$

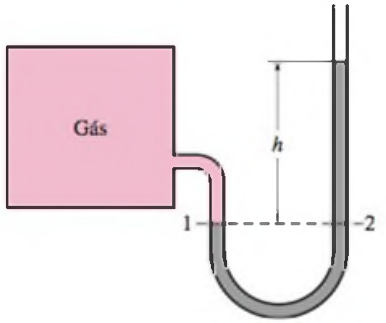


FIGURA 3–11
O manômetro básico.

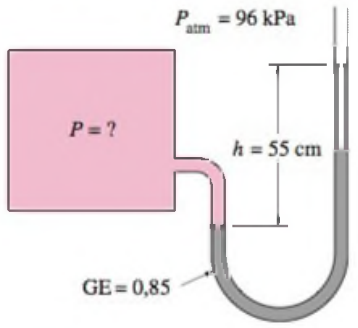


FIGURA 3–12
Esquema do Exemplo 3–2.

onde ρ é a densidade do fluido no tubo. Observe que a seção transversal do tubo não tem efeito sobre a altura diferencial h e, assim, não tem efeito sobre a pressão exercida pelo fluido. Entretanto, o diâmetro do tubo deve ser suficientemente grande (mais do que alguns milímetros) para garantir que o efeito da tensão superficial e, portanto, da elevação por capilaridade seja desprezível.

EXEMPLO 3–2 Medição da Pressão com um Manômetro

Um manômetro é usado para medir a pressão em um tanque. O fluido usado tem uma gravidade específica de 0,85 e a altura da coluna do manômetro é de 55 cm, como mostra a Figura 3–12. Se a pressão atmosférica local for de 96 kPa, determine a pressão absoluta dentro do tanque.

SOLUÇÃO A leitura de um manômetro acoplado a um tanque e a pressão atmosférica são dadas. A pressão absoluta no tanque deve ser determinada.
Hipóteses O fluido do tanque é um gás cuja densidade é muito menor do que a densidade do fluido manométrico.
Propriedades É dado que a gravidade específica do fluido manométrico é 0,85. Consideramos a densidade padrão da água como 1.000 kg/m^3.
Análise A densidade do fluido é obtida multiplicando a sua gravidade específica pela densidade da água, que é considerada 1.000 kg/m^3:

$$\rho = \text{GE}\,(\rho_{H_2O}) = (0{,}85)(1000\ \text{kg/m}^3) = 850\ \text{kg/m}^3$$

Assim, da Equação 3–12,

$$\begin{aligned} P &= P_{atm} + \rho g h \\ &= 96\ \text{kPa} + (850\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}55\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{kPa}}{1000\ \text{N/m}^2}\right) \\ &= \mathbf{100{,}6\ kPa} \end{aligned}$$

Discussão Observe que a pressão manométrica no tanque é de 4,6 kPa.

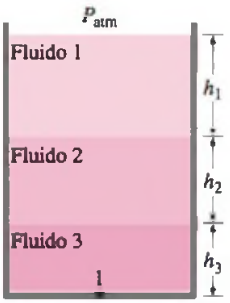


FIGURA 3–13
Em camadas empilhadas de fluidos, a variação da pressão em uma camada de fluido com densidade ρ e altura h é ρgh.

Muitos problemas de engenharia e alguns manômetros envolvem a sobreposição de vários fluidos imiscíveis de diferentes densidades. Tais sistemas podem ser facilmente analisados se lembrarmos de que (1) a variação da pressão em uma coluna de fluido de altura h é $\Delta P = \rho gh$, (2) em determinado fluido, a pressão aumenta para baixo e diminui para cima (ou seja, $P_{fundo} > P_{topo}$) e (3) dois pontos a uma mesma altura em um fluido contínuo em repouso estão a mesma pressão.

O último princípio, que é um resultado da *Lei de Pascal*, permite "pularmos" nos manômetros de uma coluna de fluido para a próxima, sem nos preocuparmos com a variação de pressão, desde que não pulemos sobre um fluido diferente, e desde que o fluido esteja em repouso. Assim, a pressão em qualquer ponto pode ser determinada iniciando com um ponto de pressão conhecida e adicionando ou subtraindo os termos ρgh à medida que avançamos na direção do ponto de interesse. Por exemplo, a pressão na parte inferior do tanque da Figura 3–13 pode ser determinada iniciando-se na superfície livre, onde a pressão é P_{atm}, movendo para baixo até atingir o ponto 1 na parte inferior e igualando o resultado a P_1. Isso resulta em:

$$P_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 = P_1$$

No caso especial de todos os fluidos possuírem a mesma densidade, essa relação fica reduzida à Equação 3–12, como era esperado.

Os manômetros são particularmente adequados para medir a queda de pressão entre dois pontos especificados de uma seção de escoamento horizontal, devido à presença de um dispositivo como uma válvula, um trocador de calor, ou qualquer resistência ao escoamento. Isso é feito conectando os dois lados do manômetro a

esses dois pontos, como mostra a Figura 3–14. O fluido de trabalho pode ser um gás ou um líquido cuja densidade é ρ_1. A densidade do fluido manométrico é ρ_2, e a altura diferencial do fluido é h.

Uma relação para a diferença de pressão $P_1 - P_2$ pode ser obtida iniciando-se no ponto 1 com P_1, movendo-se ao longo do tubo adicionando ou subtraindo os termos pgh até atingir o ponto 2, e igualando o resultado a P_2:

$$P_1 + \rho_1 g(a + h) - \rho_2 gh - \rho_1 ga = P_2 \qquad \textbf{(3–13)}$$

Observe que passamos do ponto A horizontalmente para o ponto B e ignoramos a parte inferior, uma vez que a pressão em ambos os pontos é igual. Simplificando:

$$P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1)gh \qquad \textbf{(3–14)}$$

Note que a distância a não tem efeito sobre o resultado, mas deve ser incluída na análise. Além disso, quando o fluido que escoa no tubo é um gás, então $\rho_1 \ll \rho_2$ e a relação da Equação 3–14 pode ser simplificada para $P_1 - P_2 \cong \rho_2 gh$.

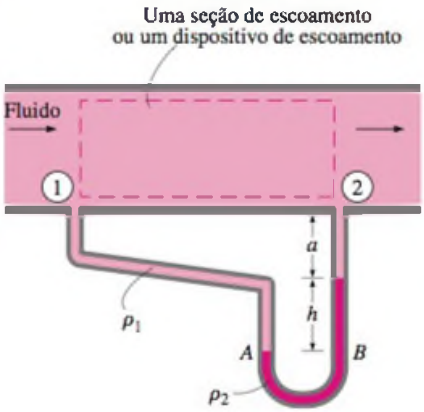


FIGURA 3–14
Medição da queda de pressão em uma seção de escoamento ou em um dispositivo de escoamento por um manômetro diferencial.

EXEMPLO 3–3 Medição da Pressão com um Manômetro de Vários Fluidos

A água de um tanque é pressurizada a ar, e a pressão é medida por um manômetro de vários fluidos, como mostra a Fig. 3–15. O tanque está localizado em uma montanha a uma altitude de 1.400 m, onde a pressão atmosférica é de 85,6 kPa. Determine a pressão do ar no tanque se h_1 = 0,1 m, h_2 = 0,2 m e h_3 = 0,35 m. Considere as densidades da água, do óleo e do mercúrio como 1.000 kg/m³, 850 kg/m³ e 13.600 kg/m³, respectivamente.

SOLUÇÃO A pressão de um tanque de água pressurizado é medida por um manômetro de vários fluidos. A pressão do ar no tanque deve ser determinada.

Hipótese A pressão do ar no tanque é uniforme (ou seja, sua variação com a elevação é desprezível devido à sua baixa densidade) e, portanto, podemos determinar a pressão na interface entre o ar e a água.

Propriedades As densidades da água, do óleo e do mercúrio são dadas por 1.000 kg/m³, 850 kg/m³ e 13.600 kg/m³, respectivamente.

Análise Iniciando-se com a pressão no ponto 1 na interface entre ar e água, movendo-se ao longo do tubo adicionando ou subtraindo os termos ρgh até atingirmos o ponto 2, e igualando o resultado a P_{atm}, uma vez que o tubo está aberto para a atmosfera, temos:

$$P_1 + \rho_{água} g h_1 + \rho_{óleo} g h_2 - \rho_{mercúrio} g h_3 = P_{atm}$$

Isolando P_1 e substituindo os valores:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{atm} - \rho_{água} g h_1 - \rho_{óleo} h_2 + \rho_{mercúrio} g h_3 \\ &= P_{atm} + g(\rho_{mercúrio} h_3 - \rho_{água} h_1 - \rho_{óleo} h_2) \\ &= 85{,}6\ \text{kPa} + (9{,}81\ \text{m/s}^2)[(13.600\ \text{kg/m}^3)(0{,}35\ \text{m}) - (1000\ \text{kg/m}^3)(0{,}1\ \text{m}) \\ &\quad - (850\ \text{kg/m}^3)(0{,}2\ \text{m})]\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{kPa}}{1000\ \text{N/m}^2}\right) \\ &= \mathbf{130\ kPa} \end{aligned}$$

Discussão Observe que pulando horizontalmente de um tubo para o outro e levando em conta que a pressão permanece igual para o mesmo fluido, a análise fica muito mais simples. Observe também que o mercúrio é um fluido tóxico e que os manômetros e termômetros de mercúrio estão sendo substituídos por outros com fluidos mais seguros, por conta do risco da exposição ao vapor de mercúrio em caso de acidente.

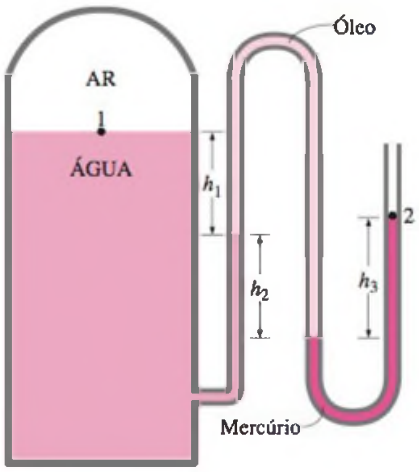


FIGURA 3–15
Esquema do Exemplo 3–3. O desenho não está em escala.

EXEMPLO 3–4 Análise de um Manômetro de Vários Fluidos com o EES

Reconsidere o manômetro de vários fluidos discutido no Exemplo 3–3. Determine a pressão do ar no tanque usando o EES. Determine também qual seria a altura diferencial h_3 do fluido para a mesma pressão de ar se o mercúrio da última coluna fosse substituído por água do mar com densidade de 1.030 kg/m^3.

SOLUÇÃO A pressão em um tanque de água é medida por um manômetro de vários fluidos. A pressão do ar no tanque e a altura diferencial h_3 do fluido se o mercúrio for substituído por água do mar devem ser determinadas usando o EES.

Análise Iniciamos o programa EES clicando duas vezes em seu ícone, abrimos um arquivo novo e digitamos o seguinte na tela em branco que aparece (expressamos a pressão atmosférica em Pa para manter a consistência da unidade).

```
g=9,81
Patm=85600
h1=0,1;  h2=0,2;  h3=0,35
rw=1000;  roil=850;  rm=13600
P1+rw*g*h1+roil*g*h2−rm*g*h3=Patm
```

Aqui P1 é a única incógnita. Ela é determinada pelo EES como

$$P_1 = 129647 \text{ Pa} \cong \mathbf{130 \text{ kPa}}$$

que é idêntica ao resultado obtido no Exemplo 3–3. A altura da coluna de fluido h_3 quando o mercúrio é substituído por água do mar é determinada facilmente substituindo-se "h_3 = 0,35" por "P_1 = 129,647" e "rm = 13,600" por "rm = 1,030" e clicando no símbolo de calculadora. Isso resulta em

$$h_3 = \mathbf{4{,}62 \text{ m}}$$

Discussão Observe que usamos a tela como um bloco de papel e escrevemos as informações relevantes juntamente com as relações aplicáveis de forma organizada. O EES fez o restante. As equações podem ser escritas em linhas separadas ou na mesma linha, separando-as com ponto-e-vírgulas, e linhas em branco ou de comentário podem ser inseridas para dar maior clareza. O EES ajuda a fazer as perguntas "e se", e a executar os estudos paramétricos.

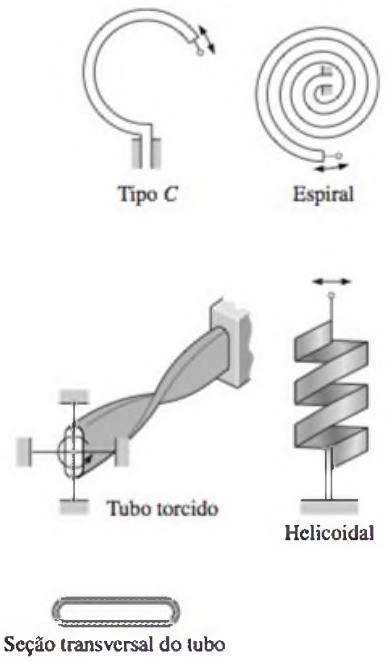


FIGURA 3–16
Diversos tipos de tubos de Bourdon usados para medir a pressão.

Outros Dispositivos de Medição da Pressão

Outro tipo de dispositivo mecânico de medição de pressão muito usado é o **tubo de Bourdon**, assim denominado em homenagem ao engenheiro e inventor francês Eugene Bourdon (1808-1884). O dispositivo consiste em um tubo de metal oco dobrado como um gancho, cuja extremidade é fechada e conectada a uma agulha indicadora (Figura 3–16). Quando está aberto para a atmosfera o tubo não se deforma e, nesse estado, a agulha do mostrador está calibrada para a leitura zero (pressão manométrica). Quando o fluido dentro do tubo está pressurizado, o tubo se estica e movimenta a agulha proporcionalmente à pressão aplicada.

A eletrônica está em todos os aspectos da vida, incluindo os dispositivos medidores de pressão. Os sensores de pressão modernos, chamados de **transdutores de pressão**, utilizam diversas técnicas para converter o efeito de pressão em um efeito elétrico, como uma variação de voltagem, resistência ou capacitância. Os transdutores de pressão são menores e mais rápidos, e podem ser mais sensíveis, confiáveis e exatos do que seus equivalentes mecânicos. Eles podem medir pressões de menos de um milionésimo de 1 atm até vários milhares de atm.

Uma ampla variedade de transdutores de pressão está disponível para a medição das pressões manométrica, absoluta e diferencial em uma ampla variedade de aplicações. Os *transdutores de pressão manométricos* utilizam a pressão atmos-

férica como referência, por meio de uma abertura para a atmosfera na parte traseira do diafragma sensor de pressão. Eles acusam uma saída de sinal zero à pressão atmosférica, independentemente da altitude. Os *transdutores de pressão absolutos* são calibrados para ter uma saída de sinal zero no vácuo absoluto. Os *transdutores de pressão diferenciais* medem diretamente a diferença de pressão entre dois locais, em vez de usar dois transdutores de pressão e tomar a diferença entre eles.

Os **transdutores de pressão extensométricos** (***strain-gages***) funcionam através de um diafragma que se curva entre duas câmaras abertas para as entradas de pressão. À medida que o diafragma se estende em resposta a uma mudança na diferença de pressão através dele, o extensômetro se estica e um circuito de ponte Wheatstone amplifica a saída. Um transdutor capacitivo funciona de modo similar mas, à medida que o diagrama se estende, a variação de capacitância é medida em vez da variação de resistência.

Os **transdutores piezelétricos**, também chamados de transdutores de pressão de estado sólido, funcionam de acordo com o princípio de que um potencial elétrico é gerado em uma substância cristalina quando ela é submetida a pressão mecânica. Esse fenômeno, descoberto pelos irmãos Pierre e Jacques Curie em 1880, é chamado de efeito piezelétrico. Os transdutores de pressão piezelétricos têm uma resposta em freqüência muito mais rápida do que aquela das unidades de diafragma, e são muito adequados para as aplicações de alta pressão, mas em geral não são tão sensíveis quanto os transdutores do tipo diafragma.

3–3 ▪ O BARÔMETRO E A PRESSÃO ATMOSFÉRICA

A pressão atmosférica é medida por um dispositivo chamado de **barômetro**. Dessa forma, a pressão atmosférica é chamada com freqüência de *pressão barométrica*.

O italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) foi o primeiro a provar, de forma conclusiva, que a pressão atmosférica pode ser medida pela inversão de um tubo cheio de mercúrio em um recipiente de mercúrio aberto para a atmosfera, como mostra a Figura 3–17. A pressão no ponto B é igual à pressão atmosférica, e a pressão em C pode ser considerada zero, uma vez que só existe vapor de mercúrio acima do ponto C e a pressão é muito baixa com relação a P_{atm}, podendo assim ser desprezada com uma excelente aproximação. Um equilíbrio de forças na direção vertical resulta em:

$$P_{atm} = \rho g h \qquad (3\text{–}15)$$

onde ρ é a densidade do mercúrio, g é a aceleração da gravidade local e h é a altura da coluna de mercúrio acima da superfície livre. Observe que o comprimento e a seção transversal do tubo não têm efeito sobre a altura da coluna de fluido de um barômetro (Figura 3–18).

Uma unidade de pressão utilizada com freqüência é a *atmosfera padrão*, que é definida como a pressão produzida por uma coluna de mercúrio com 760 mm de altura a 0°C (ρ_{Hg} = 13.595 kg/m^3) sob aceleração da gravidade padrão (g = 9,807 m/s^2). Se fosse usada água em vez de mercúrio para medir a pressão atmosférica padrão, seria necessária uma coluna de água com cerca de 10,3 m. Às vezes a pressão é expressa (particularmente na previsão do tempo) em termos de altura da coluna de mercúrio. A pressão atmosférica padrão, por exemplo, é de 760 mmHg (29,92 inHg) a 0°C. A unidade mmHg também é chamada de **torr** em homenagem a Torricelli. Assim, 1 atm = 760 torr e 1 torr = 133,3 Pa.

A pressão atmosférica padrão P_{atm} que no nível do mar é de 101,325 kPa muda para 89,88, 79,50, 54,05, 26,5 e 5,53 kPa a altitudes de 1.000, 2.000, 5.000, 10.000 e 20.000 metros, respectivamente. A pressão atmosférica padrão em Denver (altitude = 1.610 m), por exemplo, é de 83,4 kPa.

Lembre-se de que a pressão atmosférica em uma localidade é simplesmente o peso do ar acima daquela localidade por unidade de área de superfície. Assim, ela não apenas muda com a altitude, como também com as condições meteorológicas.

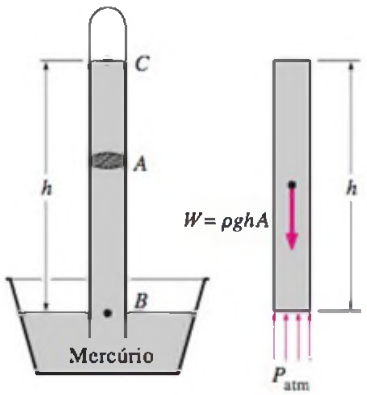


FIGURA 3–17
O barômetro básico.

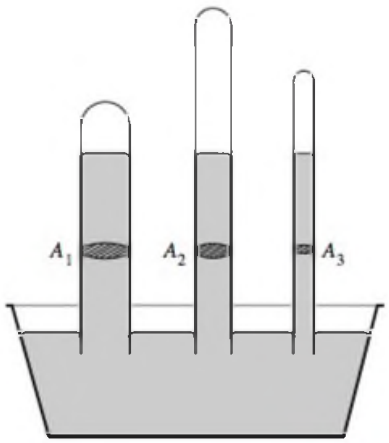


FIGURA 3–18
O comprimento ou seção transversal do tubo não tem efeito sobre a altura da coluna de fluido de um barômetro, desde que o diâmetro do tubo seja suficientemente grande para evitar os efeitos da tensão superficial (capilaridade).

FIGURA 3–19
A altitudes elevadas, um motor de automóvel gera menos potência e uma pessoa recebe menos oxigênio por conta da menor densidade do ar.

O declínio da pressão atmosférica com a altitude tem ramificações de longo alcance na vida diária. Por exemplo, leva mais tempo cozinhar a altitudes elevadas, uma vez que a água ferve a uma temperatura mais baixa a pressões atmosféricas mais baixas. O sangramento do nariz é uma experiência comum nas altitudes elevadas, já que a diferença entre a pressão sangüínea e a pressão atmosférica é maior neste caso, e as delicadas paredes das veias do nariz raramente conseguem suportar essa tensão extra.

Para uma dada temperatura, a densidade do ar é mais baixa a altas altitudes e, assim, um determinado volume contém menos ar e menos oxigênio. Dessa forma, não é surpresa que nos cansemos com mais facilidade e tenhamos problemas respiratórios a grandes altitudes. Para compensar esse efeito, as pessoas que moram em altitudes maiores desenvolvem pulmões mais eficientes. Da mesma forma, um motor de automóvel de 2,0 L funcionará como um motor de 1,7 L a uma altitude de 1.500 m (a menos que ele seja um motor turbo), por causa da queda de 15% na pressão e, portanto, da queda de 15% na densidade do ar (Figura 3–19). Um ventilador ou compressor deslocará 15% menos ar nessa altitude para a mesma taxa de deslocamento volumétrico. Portanto, os ventiladores que operam em altitudes elevadas precisam ser maiores para garantir a taxa de escoamento de massa especificada. A pressão mais baixa e, portanto, a menor densidade também afetam a sustentação e o arrasto: os aviões precisam de uma pista mais longa em altitudes maiores para desenvolver a elevação necessária, e viajam a altitudes de cruzeiro muito altas para reduzir o arrasto e, portanto, melhorar a eficiência de combustível.

EXEMPLO 3–5 Medição da Pressão Atmosférica com um Barômetro

Determine a pressão atmosférica em uma localidade na qual a leitura barométrica é 740 mm Hg e a aceleração gravitacional é $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. Considere que a temperatura do mercúrio seja de 10°C, na qual sua densidade é de $13.570\ \text{kg/m}^3$.

SOLUÇÃO A leitura barométrica em altura de coluna de mercúrio de uma localidade é dada. A pressão atmosférica deve ser determinada.
Hipóteses A temperatura do mercúrio é tomada como 10°C.
Propriedades A densidade do mercúrio é $13.570\ \text{kg/m}^3$.
Análise Da Equação 3–15, a pressão atmosférica é determinada por:

$$\begin{aligned} P_{\text{atm}} &= \rho g h \\ &= (13.570\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}74\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{kPa}}{1000\ \text{N/m}^2}\right) \\ &= \mathbf{98{,}5\ kPa} \end{aligned}$$

Discussão Observe que a densidade varia com a temperatura e, portanto, esse efeito deve ser considerado nos cálculos.

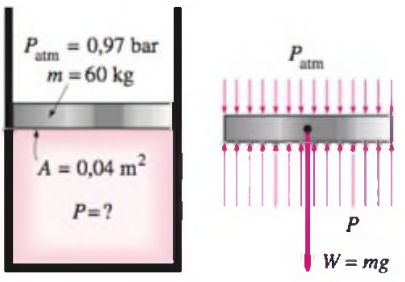


FIGURA 3–20
Esquema do Exemplo 3-6 e o diagrama do corpo livre do pistão.

EXEMPLO 3–6 Efeito do Peso do Pistão sobre a Pressão em um Cilindro

O pistão de um dispositivo vertical pistão-cilindro contendo um gás tem densidade igual a 60 kg e área da seção transversal de 0,04 m², como mostra a Figura 3–20. A pressão atmosférica local é de 0,97 bar, e a aceleração gravitacional é de 9,81 m/s². (*a*) Determine a pressão dentro do cilindro. (*b*) Se calor for transferido para o gás e seu volume dobrar, você espera que a pressão dentro do cilindro mude?

SOLUÇÃO Um gás está contido em um cilindro vertical com um pistão pesado. A pressão dentro do cilindro e o efeito da variação de volume sobre a pressão devem ser determinados.

Hipóteses O atrito entre o pistão e o cilindro é desprezível.

Análise (*a*) A pressão do gás no dispositivo de pistão e cilindro depende da pressão atmosférica e do peso do pistão. O diagrama de corpo livre do pistão, mostrado na Figura 3–20, e o equilíbrio das forças verticais resultam em:

$$PA = P_{atm}A + W$$

Isolando P e substituindo:

$$\begin{aligned} P &= P_{atm} + \frac{mg}{A} \\ &= 0{,}97 \text{ bar} + \frac{(60 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)}{0{,}04 \text{ m}^2}\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ bar}}{10^5 \text{ N/m}^2}\right) \\ &= \mathbf{1{,}12 \text{ bars}} \end{aligned}$$

(*b*) A variação do volume não terá nenhum efeito sobre o diagrama de corpo livre desenhado na parte (*a*) e, portanto, a pressão dentro do cilindro permanecerá a mesma.

Discussão Se o gás se comporta como um gás ideal, a temperatura absoluta dobra quando o volume é dobrado a pressão constante.

EXEMPLO 3–7 Pressão Hidrostática em uma Poça Solar com Densidade Variável

Poças solares são pequenos lagos artificiais com alguns metros de profundidade usados para armazenar energia solar. A elevação da água aquecida (e, portanto, menos densa) para a superfície é evitada pela colocação de sal no fundo do lago. Em uma poça solar com gradiente de sal típico, a densidade da água aumenta na região de gradiente, como mostra a Figura 3–21, podendo ser expressa como:

$$\rho = \rho_0\sqrt{1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\frac{z}{H}\right)}$$

onde ρ_0 é a densidade da água na superfície, z é a distância vertical medida de cima para baixo a partir do topo da região de gradiente, e H é a espessura da região de gradiente. Para H = 4 m, ρ_0 = 1.040 kg/m^3 e uma espessura de 0,8 m para a região superficial, calcule a pressão manométrica no fundo da região de gradiente.

SOLUÇÃO A variação da densidade da água salgada na região de gradiente de uma poça solar com profundidade é dada. A pressão manométrica no fundo da região de gradiente deve ser determinada.

Hipóteses A densidade na zona superficial da poça é constante.

Propriedades A densidade da água salgada na superfície é dada por 1.040 kg/m^3.

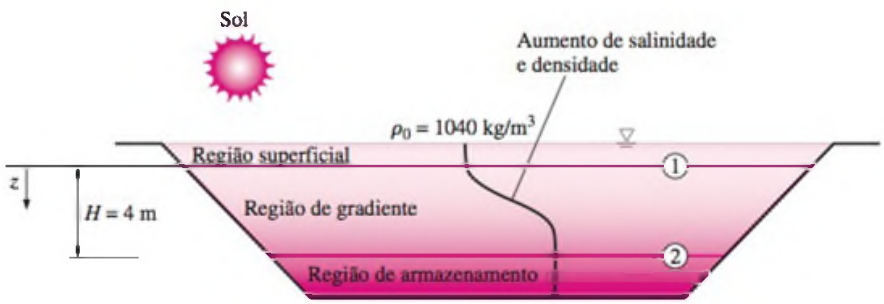


FIGURA 3–21
Esquema do Exemplo 3–7.

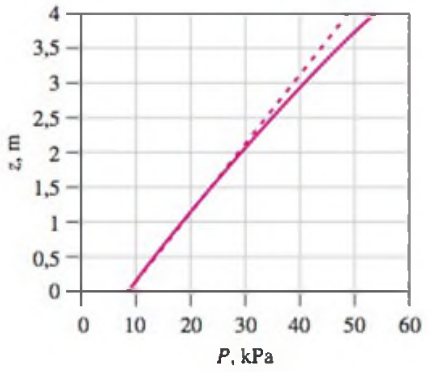


FIGURA 3–22
A variação da pressão manométrica com a profundidade na zona de gradiente da poça solar.

Análise Chamamos as partes superior e inferior da região de gradiente de 1 e 2, respectivamente. Notando que a densidade da região superficial é constante, a pressão manométrica no fundo da região superficial (que é o topo da região de gradiente) é:

$$P_1 = \rho g h_1 = (1040\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}8\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 8{,}16\ \text{kPa}$$

já que 1 kN/m^2 = 1 kPa. A variação diferencial de pressão hidrostática em uma distância vertical dz é dada por:

$$dP = \rho g\, dz$$

A integração entre o topo da região de gradiente (o ponto 1 no qual $z = 0$) e qualquer local z da região de gradiente (sem subíndice) resulta em:

$$P - P_1 = \int_0^z \rho g\, dz \quad \rightarrow \quad P = P_1 + \int_0^z \rho_0 \sqrt{1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\frac{z}{H}\right)}\, g\, dz$$

Realizando a integração, temos que a variação da pressão manométrica na região de gradiente é:

$$P = P_1 + \rho_0 g \frac{4H}{\pi}\,\text{senh}^{-1}\left(\text{tg}\frac{\pi}{4}\frac{z}{H}\right)$$

Dessa forma, a pressão no fundo da região de gradiente ($z = H = 4$ m) torna-se:

$$P_2 = 8{,}16\ \text{kPa} + (1040\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)\frac{4(4\ \text{m})}{\pi}\,\text{senh}^{-1}\left(\text{tg}\frac{\pi}{4}\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{54{,}0\ kPa\ (gage)}$$

Discussão A variação da pressão manométrica com a profundidade na região de gradiente é representada na Figura 3–22. A linha tracejada indica a pressão hidrostática para o caso da densidade constante a 1.040 kg/m^3 e é dada como referência. Observe que a variação de pressão com a profundidade não é linear quando a densidade varia com a profundidade.

3–4 ▪ INTRODUÇÃO À ESTÁTICA DOS FLUIDOS

A **estática dos fluidos** trata dos problemas associados aos fluidos em repouso. O fluido pode ser gasoso ou líquido. A estática dos fluidos em geral é chamada de *hidrostática* quando o fluido é um líquido e é chamada de *aerostática* quando o fluido é um gás. Na estática dos fluidos não existe movimento relativo entre as camadas adjacentes de fluido e, portanto, não há tensões de cisalhamento (tangenciais) no fluido tentando deformá-lo. A única tensão com a qual tratamos na estática dos fluidos é a *tensão normal*, que é a pressão, e a variação da pressão só é devida ao peso do fluido. Assim, o tópico da estática dos fluidos tem significado apenas nos campos gravitacionais, e as relações de força desenvolvidas naturalmente envolvem a aceleração da gravidade g. A força exercida sobre uma superfície por um fluido em repouso é normal à superfície no ponto de contato, uma vez que não há movimento relativo entre o fluido e a superfície sólida e, portanto, nenhuma força de cisalhamento possa agir paralelamente à superfície.

A estática dos fluidos é usada para determinar as forças que agem sobre corpos flutuantes ou submersos, e as forças desenvolvidas por dispositivos como prensas hidráulicas e macacos de automóveis. O projeto de muitos sistemas de engenharia, como represas e tanques de armazenamento de líquidos, exige a determinação das forças que agem sobre as superfícies usando a estática dos fluidos. A descrição completa da força hidrostática resultante que age sobre uma superfície submersa exige a determinação da intensidade, do sentido e da linha de ação da força. Nas Seções 3–5 e 3–6 consideramos as forças que agem sobre as superfícies planas e curvas de corpos submersos devido à pressão.

3–5 ▪ FORÇAS HIDROSTÁTICAS SOBRE SUPERFÍCIES PLANAS SUBMERSAS

Uma placa exposta a um líquido, como um distribuidor em uma represa, a parede de um tanque de armazenamento de líquido e o casco de um navio em repouso, estão sujeitos à pressão dos fluidos distribuída sobre sua superfície (Figura 3–23). Em uma superfície *plana*, as forças hidrostáticas formam um sistema de forças paralelas, e com freqüência precisamos determinar a *intensidade* da força e seu *ponto de aplicação*, que é chamado de **centro de pressão**. Na maioria dos casos, o outro lado da placa está aberto para a atmosfera (como o lado seco de uma comporta) e, portanto, a pressão atmosférica age em ambos os lados da placa, produzindo uma resultante nula. Nesses casos, é conveniente subtrair a pressão atmosférica e trabalhar apenas com a pressão manométrica (Figura 3–24). Por exemplo, $P_{man} = \rho gh$ na parte inferior do lago.

Considere a superfície superior de uma placa plana de forma arbitrária completamente submersa em um líquido, como mostra a Figura 3–25, juntamente com a visão superior. O plano dessa superfície (normal à página) cruza a superfície livre horizontal com um ângulo θ, e consideramos a reta de intersecção o eixo x. A pressão absoluta acima do líquido é P_0, que é a pressão atmosférica local P_{atm} se o líquido está aberto para a atmosfera (mas P_0 pode ser diferente de P_{atm} se o espaço acima do líquido for evacuado ou pressurizado). Assim, a pressão absoluta em qualquer ponto da placa é:

$$P = P_0 + \rho gh = P_0 + \rho gy \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(3–16)}$$

onde h é a distância vertical entre o ponto e a superfície livre e y é a distância entre o ponto e o eixo x (do ponto O na Figura 3–25). A força hidrostática F_R resultante que age sobre a superfície é determinada pela integração da força $P\,dA$ que age em uma área diferencial dA em toda a área da superfície:

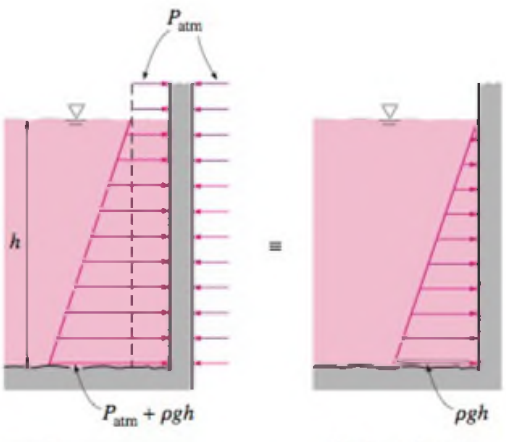
$$F_R = \int_A P\,dA = \int_A (P_0 + \rho gy \operatorname{sen} \theta)\,dA = P_0 A + \rho g \operatorname{sen} \theta \int_A y\,dA \qquad \textbf{(3–17)}$$

Mas o *primeiro momento da área* $\int_A y\,dA$ está relacionado à coordenada y do centróide (ou centro) da superfície por:

$$y_C = \frac{1}{A}\int_A y\,dA \qquad \textbf{(3–18)}$$

Substituindo:

$$F_R = (P_0 + \rho g y_C \operatorname{sen} \theta)A = (P_0 + \rho g h_C)A = P_C A = P_{méd} A \qquad \textbf{(3–19)}$$



(*a*) P_{atm} considerada (*b*) P_{atm} subtraída

FIGURA 3–23
Represa Hoover.
Cortesia do Departamento Americano do Interior, Escritório de Recuperação – Região do Baixo Colorado.

FIGURA 3–24
Para simplificar, ao analisar as forças hidrostáticas em superfícies submersas, a pressão atmosférica pode ser subtraída quando age em ambos os lados da estrutura.

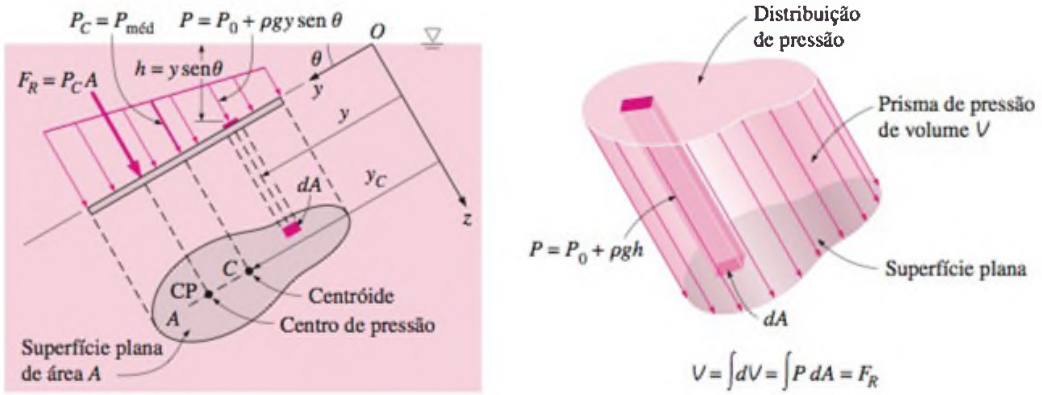


FIGURA 3–25
A força hidrostática em uma superfície plana inclinada completamente submersa em um líquido.

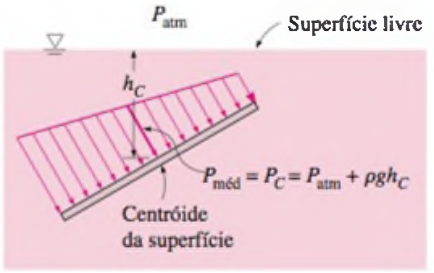


FIGURA 3–26
A pressão no centróide de uma superfície é equivalente à pressão *média* sobre a superfície.

onde $P_C = P_0 + \rho g h_C$ é a pressão no centróide da superfície, que é equivalente à pressão *média* na superfície, e $h_C = y_C \operatorname{sen}\theta$ é a *distância vertical* entre o centróide e a superfície livre do líquido (Figura 3–26). Assim, concluímos que:

> A magnitude da força resultante que age sobre uma superfície plana de uma placa completamente submersa em um fluido homogêneo (densidade constante) é igual ao produto da pressão P_C no centróide da superfície e da área A da superfície (Figura 3–27).

A pressão P_0 em geral é a pressão atmosférica, que pode ser ignorada na maioria dos casos, uma vez que ela age em ambos os lados da placa. Quando esse não é o caso, uma forma prática de calcular a contribuição de P_0 para a força resultante é simplesmente somar uma profundidade equivalente $h_{equiv} = P_0/\rho g$ a h_C, ou seja, supor a presença de uma camada de líquido adicional com espessura h_{equiv} no alto do líquido com o vácuo absoluto acima.

A seguir, precisamos determinar a linha de ação da força resultante F_R. Dois sistemas de forças paralelas são equivalentes se tiverem a mesma intensidade e o mesmo momento com relação a um ponto. A linha de ação da força hidrostática resultante, em geral, não passa através do centróide da superfície — ela fica abaixo, onde a pressão é mais alta. O ponto de intersecção entre a linha de ação da força resultante e a superfície é o **centro de pressão**. O local vertical da linha de ação é determinado igualando o momento da força resultante e o momento da força de pressão distribuída com relação ao eixo x. Isso resulta em:

$$y_P F_R = \int_A yP\, dA = \int_A y(P_0 + \rho g y \operatorname{sen}\theta)\, dA = P_0 \int_A y\, dA + \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y^2\, dA$$

ou

$$y_P F_R = P_0 y_C A + \rho g \operatorname{sen}\theta\, I_{xx,O} \qquad (3\text{–}20)$$

onde y_P é a distância do centro de pressão ao eixo x (ponto O na Figura 3–27) e $I_{xx,O} = \int_A y^2\, dA$ é o *segundo momento de área* (também chamado de *momento de inércia de área*) com relação ao eixo x. Os segundos momentos de área estão amplamente disponíveis para formas comuns nos livros de engenharia, mas em geral eles são dados com relação aos eixos que passam através do centróide da área. Felizmente, os segundos momentos de área com relação a eixos paralelos estão relacionados entre si pelo *teorema do eixo paralelo*, que neste caso é expresso como:

$$I_{xx,O} = I_{xx,C} + y_C^2 A \qquad (3\text{–}21)$$

onde $I_{xx,\,C}$ é o segundo momento de área com relação ao eixo x que passa através do centróide da área e y_C (a coordenada y do centróide) é a distância entre os dois eixos paralelos. Substituindo a relação F_R da Equação 3–19 e a relação $I_{xx,\,O}$ da Equação 3–21 na Equação 3–20 e isolando y_P temos:

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,\,C}}{[y_C + P_0/(\rho g \operatorname{sen}\theta)]A} \tag{3–22a}$$

Para $P_0 = 0$, que em geral é o caso quando a pressão atmosférica é ignorada, isso pode ser simplificado para:

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,\,C}}{y_C A} \tag{3–22b}$$

Sabendo y_P, a distância vertical do centro de pressão à superfície livre é determinada por $h_P = y_P \operatorname{sen}\theta$.

Os valores $I_{xx,\,C}$ para algumas áreas comuns são dados na Figura 3–28. Para essas e outras áreas que possuem simetria com relação ao eixo y, o centro da pressão está no eixo y diretamente abaixo do centróide. A localização do centro de pressão em tais casos é simplesmente o ponto sobre a superfície do plano de simetria vertical a uma distância h_P da superfície livre.

A pressão age normal à superfície, e as forças hidrostáticas que agem sobre uma placa plana de qualquer forma compõem um volume cuja base é a área da placa e cuja altura é a pressão que varia linearmente, como mostra a Figura 3–29. Esse **prisma de pressão** virtual tem uma interpretação física interessante: seu *volume* é igual à *intensidade* da força hidrostática resultante que age sobre a placa uma vez que $V = \int P\,dA$, e a linha de ação dessa força passa através do *centróide* desse prisma homogêneo. A projeção do centróide sobre a placa é o *centro de pressão*. Assim, com o conceito do prisma da pressão, o problema de descrever a força hidrostática resultante em uma superfície plana fica reduzido a encontrar o volume e as duas coordenadas do centróide desse prisma de pressão.

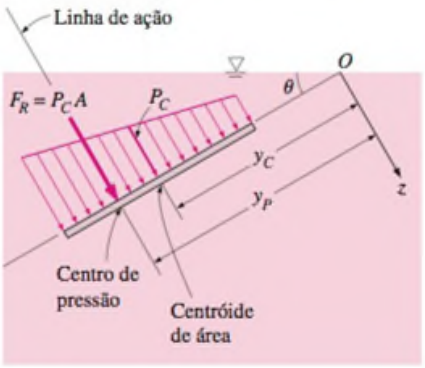
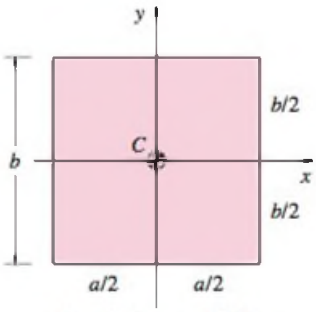
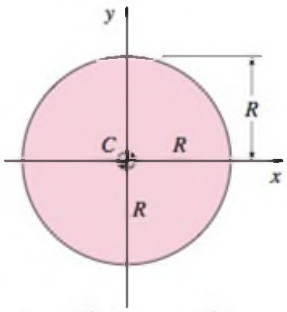


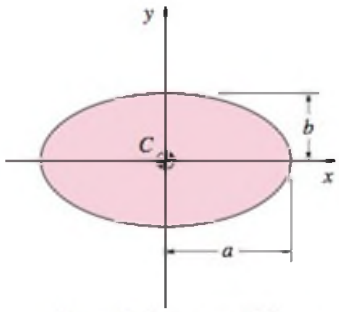
FIGURA 3–27
A força resultante que age sobre uma superfície plana é igual ao produto entre a pressão no centróide da superfície e a área da superfície, e sua linha de ação passa através do centro da pressão.



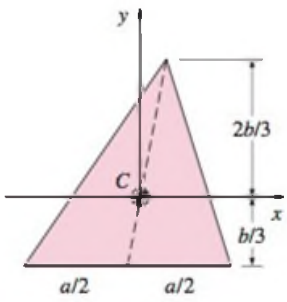
$A = ab,\ I_{xx,\,C} = ab^3/12$
(*a*) Retângulo



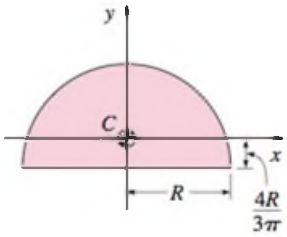
$A = \pi R^2,\ I_{xx,\,C} = \pi R^4/4$
(*b*) Círculo



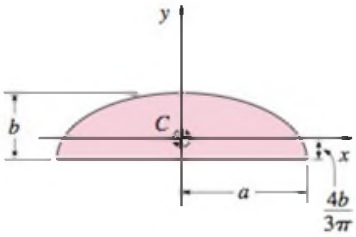
$A = \pi ab,\ I_{xx,\,C} = \pi ab^3/4$
(*c*) Elipse



$A = ab/2,\ I_{xx,\,C} = ab^3/36$
(*d*) Triângulo



$A = \pi R^2/2,\ I_{xx,\,C} = 0{,}109757R^4$
(*e*) Semicírculo



$A = \pi ab/2,\ I_{xx,\,C} = 0{,}109757ab^3$
(*f*) Semi-elipse

FIGURA 3–28
O centróide e os momentos centróides de inércia de algumas formas geométricas comuns.

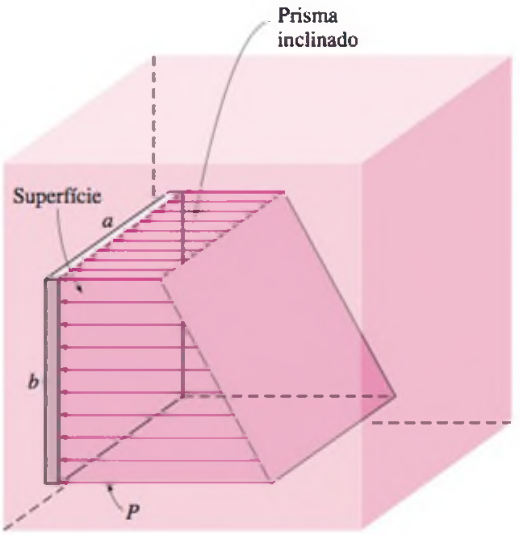


FIGURA 3–29
As forças hidrostáticas que agem sobre uma superfície plana formam um volume cuja base (a face esquerda) é a superfície e cuja altura é a pressão.

Caso Especial: Placa Retangular Submersa

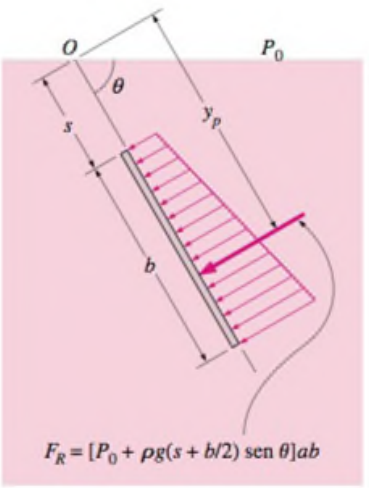
Considere uma placa plana retangular completamente submersa com altura b e largura a inclinada de um ângulo θ com relação à horizontal e cuja aresta superior é horizontal e está a uma distância s da superfície livre ao longo do plano da placa, como mostra a Figura 3–30*a*. A força hidrostática resultante na superfície superior é igual à pressão média, que é a pressão no ponto médio da superfície vezes a área de superfície A. Ou seja:

Placa retangular inclinada: $$F_R = P_C A = [P_0 + \rho g(s + b/2) \operatorname{sen} \theta]ab \qquad (3\text{–}23)$$

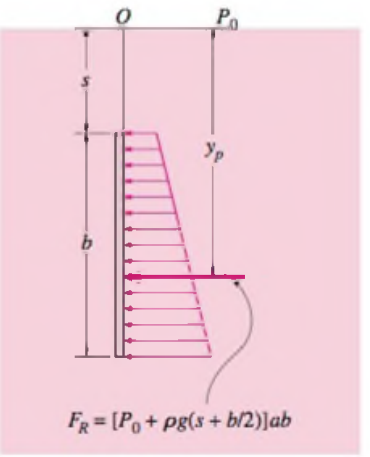
A força age a uma distância vertical de $h_P = y_P \operatorname{sen} \theta$ da superfície livre diretamente abaixo do centróide da placa onde, pela Equação 3–22a:

$$y_P = s + \frac{b}{2} + \frac{ab^3/12}{[s + b/2 + P_0/(\rho g \operatorname{sen} \theta)]ab}$$

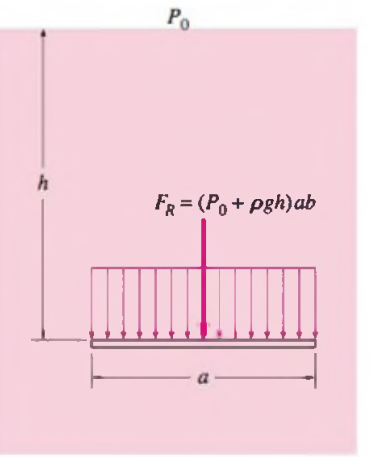
$$= s + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12[s + b/2 + P_0/(\rho g \operatorname{sen} \theta)]} \qquad (3\text{–}24)$$



(*a*) Placa inclinada



(*b*) Placa vertical



(*c*) Placa horizontal

FIGURA 3–30
Força hidrostática que age sobre a superfície superior de uma placa retangular submersa nos casos inclinado, vertical e horizontal.

Quando o lado superior da placa está na superfície livre e, portanto, $s = 0$, a Equação 3–23 é reduzida a:

Placa retangular inclinada ($s = 0$): $$F_R = [P_0 + \rho g(b \operatorname{sen} \theta)/2]ab \quad \textbf{(3–25)}$$

Para uma placa *vertical* completamente submersa ($\theta = 90°$) cuja aresta superior é horizontal, a força hidrostática pode ser obtida fazendo sen $\theta = 1$ (Figura 3–30*b*):

Placa retangular vertical: $$F_R = [P_0 + \rho g(s + b/2)]ab \quad \textbf{(3–26)}$$

Placa retangular vertical ($s = 0$): $$F_R = (P_0 + \rho gb/2)ab \quad \textbf{(3–27)}$$

Quando o efeito de P_0 é ignorado, uma vez que ele age em ambos os lados da placa, a força hidrostática em uma superfície retangular de altura b cuja aresta superior é horizontal e está na superfície livre é $F_R = \rho gab^2/2$ agindo a uma distância $2b/3$ da superfície livre diretamente abaixo do centróide da placa.

A distribuição da pressão em uma superfície *horizontal* é uniforme e sua intensidade é $P = P_0 + \rho gh$, onde h é a distância entre a superfície e a superfície livre. Assim, a força hidrostática que age sobre uma superfície retangular horizontal é:

Placa retangular horizontal: $$F_R = (P_0 + \rho gh)ab \quad \textbf{(3–28)}$$

e age no ponto médio da placa (Figura 3–30*c*).

EXEMPLO 3–8 Força Hidrostática Agindo na Porta de um Carro Submerso

Um carro pesado sofre um acidente e mergulha em um lago e assenta no fundo do lago sobre as rodas (Figura 3–31). A porta tem 1,2 m de altura e 1 m de largura, e a parte superior da porta está 8 m abaixo da superfície livre da água. Determine a força hidrostática sobre a porta e o local do centro da pressão e discuta se o motorista consegue abrir a porta.

SOLUÇÃO Um carro está submerso na água. A força hidrostática sobre a porta deve ser determinada, e a probabilidade de que o motorista abra a porta deve ser avaliada.

Hipóteses **1** A superfície inferior do lago é horizontal. **2** A cabine de passageiros está bem vedada de modo que nenhuma água vaza para dentro. **3** A porta pode ser aproximada por uma placa retangular vertical. **4** A pressão na cabine de passageiros permanece com o valor atmosférico, uma vez que não há vazamento de água para dentro e, portanto, nenhuma compressão do ar interno. Assim, a pressão atmosférica se cancela nos cálculos, uma vez que ela age em ambos os lados da porta. **5** O peso do carro é maior do que a força de flutuação que age sobre ele.

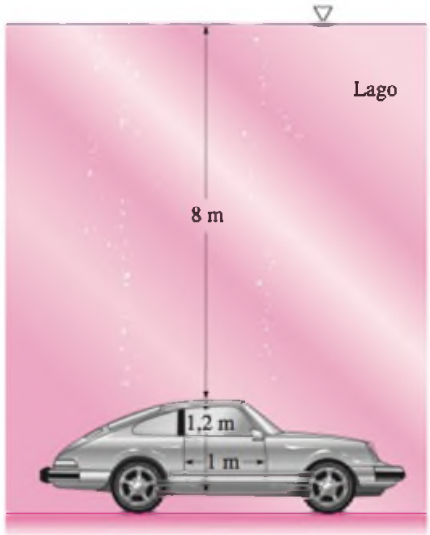


FIGURA 3–31
Esquema do Exemplo 3–8.

Propriedades Tomamos a densidade da água como 1.000 kg/m^3 em todo o lago.
Análise A pressão média sobre a porta é o valor da pressão no centróide (ponto médio) da porta e é determinada por:

$$P_{méd} = P_C = \rho g h_C = \rho g(s + b/2)$$
$$= (1000\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(8 + 1{,}2/2\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$
$$= \mathbf{84{,}4\ kN/m^2}$$

Então, a força hidrostática resultante sobre a porta torna-se:

$$F_R = P_{méd} A = (84{,}4\ \text{kN/m}^2)(1\ \text{m} \times 1{,}2\ \text{m}) = \mathbf{101{,}3\ kN}$$

O centro da pressão está diretamente abaixo do ponto médio da porta e sua distância da superfície do lago é determinada pela Equação 3–24 fazendo $P_0 = 0$, por:

$$y_P = s + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12(s + b/2)} = 8 + \frac{1{,}2}{2} + \frac{1{,}2^2}{12(8 + 1{,}2/2)} = \mathbf{8{,}61\ m}$$

Discussão Uma pessoa forte pode levantar 100 kg, cujo peso é 981 N ou cerca de 1 kN. Da mesma forma, a pessoa pode aplicar a força em um ponto mais distante das dobradiças (1 m além) para obter o efeito máximo e gerar um momento de 1 kN · m. A força hidrostática resultante age sob o ponto médio da porta e, portanto, a uma distância de 0,5 m das dobradiças. Isso gera um momento de 50,6 kN · m, que é cerca de 50 vezes o momento que o motorista poderia gerar. Assim, é impossível para o motorista abrir a porta do carro. A melhor opção para o motorista é deixar que alguma água entre (abrindo um pouco a janela, por exemplo) e manter sua cabeça próxima ao teto. O motorista deve ser capaz de abrir a porta logo depois que o carro se encher com água, uma vez que nesse ponto as pressões em ambos os lados da porta são quase iguais e abrir a porta dentro da água é quase tão fácil quanto abri-la no ar.

3–6 • FORÇAS HIDROSTÁTICAS SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS SUBMERSAS

Para uma superfície curva submersa, a determinação da força hidrostática resultante é mais complicada, uma vez que em geral ela exige a integração das forças de pressão que mudam de direção ao longo da superfície curva. O conceito do prisma de pressão neste caso não ajuda muito por conta das formas complicadas envolvidas.

A forma mais fácil de determinar a força hidrostática resultante F_R que age sobre uma superfície curva bidimensional é determinar os componentes horizontal e vertical F_H e F_V separadamente. Isso é feito considerando o diagrama de corpo livre do bloco líquido englobado pela superfície curva e pelas duas superfícies planas (uma horizontal e outra vertical) passando por duas extremidades da superfície curva, como mostrado na Figura 3–32. Observe que a superfície vertical do bloco líquido considerado é simplesmente a projeção da superfície curva em um *plano vertical*, e a superfície horizontal é a projeção da superfície curva em um *plano horizontal*. Assim, a força resultante que age sobre a superfície sólida curva é igual e oposta à força que age sobre a superfície líquida curva (pela terceira lei de Newton).

A força que age sobre a superfície do plano imaginário horizontal ou vertical e sua linha de ação pode ser determinada como foi discutido na Seção 3–5. O peso do bloco de líquido confinado de volume V é apenas $W = \rho g V$, e ele age para baixo através do centróide desse volume. Observando que o bloco de fluido está em equilíbrio estático, os balanços de força nas direções horizontal e vertical resultam em:

Componente da força horizontal na superfície curva: $$F_H = F_x \qquad (3\text{–}29)$$

Comonente da força vertical na superfície curva: $$F_V = F_y + W \qquad (3\text{–}30)$$

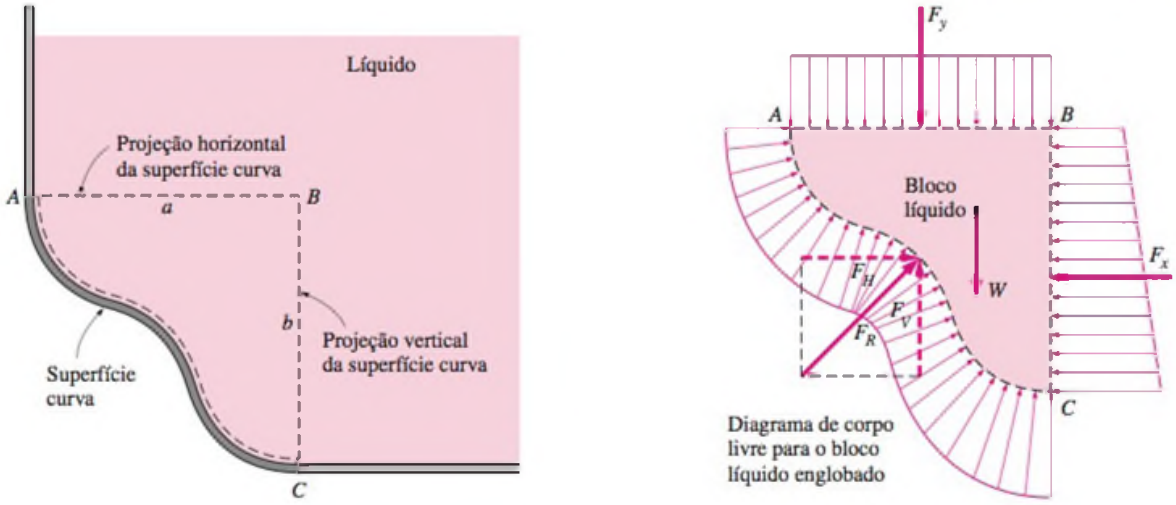


FIGURA 3–32
Determinação da força hidrostática que age sobre uma superfície curva submersa.

onde a soma de $F_y + W$ é uma adição vetorial (soma as intensidade se ambas agem na mesma direção e as subtrai se elas agem em direções opostas). Assim, concluímos que:

1. A componente horizontal da força hidrostática que age sobre uma superfície curva é igual (em intensidade e na linha de ação) à força hidrostática que age sobre a projeção vertical da superfície curva.
2. A componente vertical da força hidrostática que age sobre uma superfície curva é igual à força hidrostática que age sobre a projeção horizontal da superfície curva, mais (ou menos, se ela agir na direção oposta) o peso do bloco de fluido.

A intensidade da força hidrostática resultante que age sobre a superfície curva é $F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$, e a tangente do ângulo que ela forma com a horizontal é tg $\alpha = F_V/F_H$. O local exato da linha de ação da força resultante (por exemplo, sua distância de uma das extremidades da superfície curva) pode ser determinado tomando um momento com relação a um ponto apropriado. Essas discussões são válidas para todas as superfícies curvas, independentemente de estarem acima ou abaixo do líquido. Observe que no caso de uma *superfície curva acima de um líquido*, o peso do líquido é *subtraído* do componente vertical da força hidrostática, uma vez que eles agem em direções opostas (Figura 3–33).

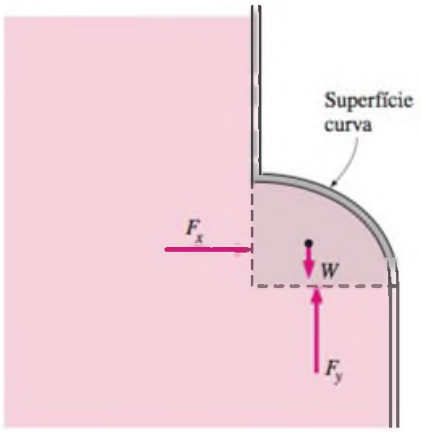


FIGURA 3–33
Quando uma superfície curva está acima do líquido, o peso do líquido e a componente vertical da força hidrostática agem em direções opostas.

Quando a superfície curva é um *arco circular* (círculo completo ou qualquer parte dele), a força hidrostática resultante que age sobre a superfície sempre passa através do centro do círculo. Isso acontece porque as forças de pressão são normais à superfície, e todas as retas normais à superfície de um círculo passam através do centro do círculo. Assim, as forças de pressão formam um sistema de forças concorrentes no centro, as quais podem ser reduzidas a uma única força equivalente naquele ponto (Figura 3–34).

Finalmente, as forças que agem em um plano ou superfície curva submersos em um **fluido em várias camadas** com densidades diferentes podem ser determinadas considerando partes diferentes das superfícies em fluidos diferentes como superfícies diferentes, encontrando a força de cada parte e, em seguida, somando-as usando a adição vetorial. Para uma superfície plana, isso pode ser expresso como (Figura 3–35):

Superfície plana de um fluido em várias camadas: $$F_R = \sum F_{R,i} = \sum P_{C,i} A_i \quad (3\text{–}31)$$

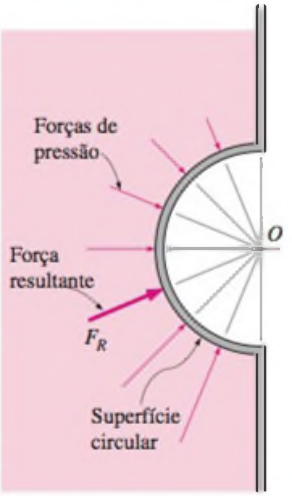


FIGURA 3–34
A força hidrostática que age sobre uma superfície circular sempre passa através do centro do círculo, uma vez que as forças de pressão são normais à superfície e passam através do centro.

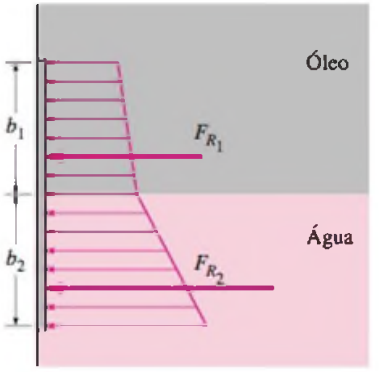


FIGURA 3–35
A força hidrostática em uma superfície submersa em um fluido em várias camadas pode ser determinada considerando-se as partes da superfície nos diferentes fluidos como superfícies diferentes.

onde $P_{C,i} = P_0 + \rho_i g h_{C,i}$ é a pressão no centróide da parte da superfície do fluido *i* e A_i é a área da placa naquele fluido. A linha de ação dessa força equivalente pode ser determinada usando o requisito de que o momento da força equivalente com relação a qualquer ponto é igual à soma dos momentos das forças individuais com relação ao mesmo ponto.

EXEMPLO 3–9 Uma Comporta Cilíndrica Controlada por Gravidade

Um cilindro longo e sólido de raio de 0,8 m com dobradiças no ponto A é usado como uma comporta automática, como mostra a Figura 3–36. Quando o nível da água atinge 5 m, a comporta se abre girando na dobradiça no ponto A. Determine (*a*) a força hidrostática que age sobre o cilindro e sua linha de ação quando a comporta se abre e (*b*) o peso do cilindro por unidade de comprimento do cilindro.

SOLUÇÃO A altura de um reservatório de água é controlada por uma comporta cilíndrica com dobradiças que a prendem ao reservatório. A força hidrostática sobre o cilindro e o peso do cilindro por unidade de comprimento devem ser determinados.

Hipóteses 1 O atrito na dobradiça é desprezível. **2** A pressão atmosférica age em ambos os lados da comporta e, portanto, cancela-se.

Propriedades Consideramos a densidade da água como 1.000 kg/m^3 em todo o reservatório.

Análise (*a*) Consideramos o diagrama de corpo livre do bloco líquido englobado pela superfície circular do cilindro e suas projeções vertical e horizontal. As forças hidrostáticas que agem sobre as superfícies planas vertical e horizontal, bem como o peso do bloco de líquido, devem ser determinadas por:

Força horizontal sobre a superfície vertical:

$$F_H = F_x = P_{méd} A = \rho g h_C A = \rho g (s + R/2) A$$

$$= (1.000\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(4{,}2 + 0{,}8/2\ \text{m})(0{,}8\ \text{m} \times 1\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{kN}}{1.000\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{36{,}1\ kN}$$

Força vertical sobre a superfície horizontal (para cima):

$$F_y = P_{méd} A = \rho g h_C A = \rho g h_{fundo} A$$

$$= (1.000\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(5\ \text{m})(0{,}8\ \text{m} \times 1\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{kN}}{1.000\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= 39{,}2\ \text{kN}$$

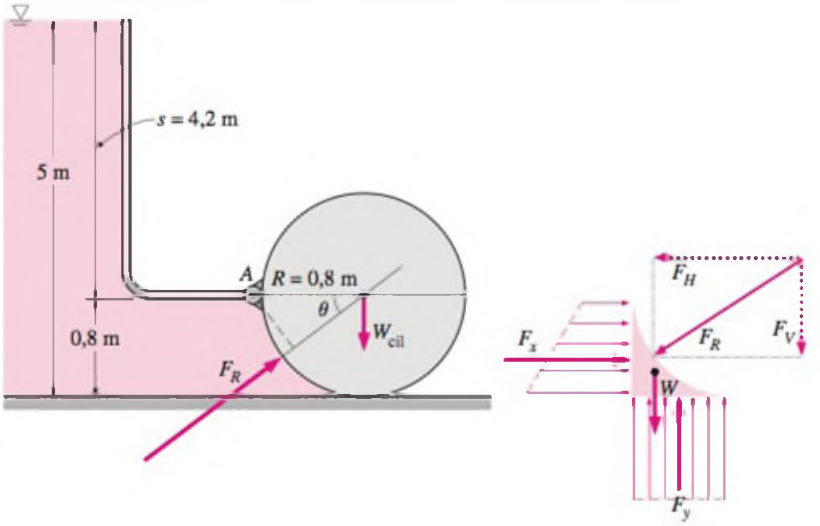


FIGURA 3–36
Esquema do Exemplo 3–9 e o diagrama do corpo livre do fluido abaixo do cilindro.

Peso do bloco de fluido por unidade de comprimento (para baixo):

$$W = mg = \rho g V = \rho g(R^2 - \pi R^2/4)(1\text{ m})$$
$$= (1000\text{ kg/m}^3)(9{,}81\text{ m/s}^2)(0{,}8\text{ m})^2(1 - \pi/4)(1\text{ m})\left(\frac{1\text{ kN}}{1.000\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$
$$= 1{,}3\text{ kN}$$

Assim, a força vertical resultante para cima é:

$$F_V = F_y - W = 39{,}2 - 1{,}3 = 37{,}9\text{ kN}$$

Dessa forma, a intensidade e a direção da força hidrostática que age sobre a superfície cilíndrica torna-se:

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{36{,}1^2 + 37{,}9^2} = \mathbf{52{,}3\text{ kN}}$$
$$\text{tg}\,\theta = F_V/F_H = 37{,}9/36{,}1 = 1{,}05 \rightarrow \theta = 46{,}4°$$

Portanto, a intensidade da força hidrostática que age sobre o cilindro é de 52,3 kN por unidade de comprimento do cilindro, e sua linha de ação passa através do centro do cilindro fazendo um ângulo de 46,4° com a horizontal.

(*b*) Quando o nível da água atingir 5 m de altura, a comporta estará para se abrir e, portanto, a força de reação na parte inferior do cilindro é zero. Assim, as forças além da dobradiça agindo sobre o cilindro são seu peso, agindo no centro, e a força hidrostática exercida pela água. Tomando um momento com relação ao ponto A no local da dobradiça e igualando-o a zero temos:

$$F_R R \text{ sen}\,\theta - W_{\text{cil}}\, R = 0 \rightarrow W_{\text{cil}} = F_R \text{ sen}\,\theta = (52{,}3\text{ kN})\text{ sen}\,46{,}4° = \mathbf{37{,}9\text{ kN}}$$

Discussão O peso do cilindro por unidade de comprimento é determinado como 37,9 kN. É possível mostrar que isso corresponde a uma massa de 3,863 kg por unidade de comprimento e a uma densidade de 1,921 kg/m^3 para o material do cilindro.

3–7 • FLUTUAÇÃO E ESTABILIDADE

É comum a experiência de que um objeto parece mais leve, de peso menor, em um líquido do que no ar. Isso pode ser facilmente mostrado pesando na água um objeto de peso elevado com uma balança de mola à prova de água. Da mesma forma, os objetos feitos de madeira ou de outros materiais leves flutuam na água. Essas e outras observações sugerem que um fluido exerce uma força para cima sobre um corpo imerso nele. Essa força que tende a levantar o corpo é chamada de **força de flutuação** e é indicada por F_B.

A força de flutuação é causada pelo aumento da pressão em um fluido com a profundidade. Considere, por exemplo, uma placa plana com espessura h submersa em um líquido de densidade ρ_f paralela à superfície livre, como mostra a Figura 3–37. A área da superfície superior (e também da inferior) da placa é A, e sua distância da superfície livre é s. As pressões das superfícies superior e inferior da placa são $\rho_f gs$ e $\rho_f g(s + h)$, respectivamente. Assim, a força hidrostática $F_{\text{sup}} = \rho_f gsA$ age para baixo na superfície superior, e a força maior $F_{\text{inf}} = \rho_f g(s + h)A$ age para cima na superfície inferior da placa. A diferença entre essas duas forças é uma força resultante para cima, que é a *força de flutuação*:

$$F_B = F_{\text{inf}} - F_{\text{sup}} = \rho_f g(s + h)A - \rho_f gsA = \rho_f ghA = \rho_f gV \qquad \textbf{(3–32)}$$

onde $V = hA$ é o volume da placa. Mas a relação $\rho_f gV$ é simplesmente o peso do líquido cujo volume é igual ao volume da placa. Assim, concluímos que a *força de flutuação que age sobre a placa é igual ao peso do líquido deslocado pela placa.* Observe que a força de flutuação não depende da distância entre o corpo e a superfície livre. Ela também não depende da densidade do corpo sólido.

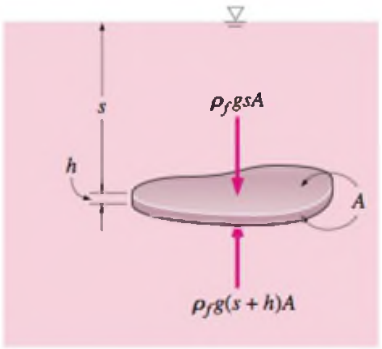


FIGURA 3–37
Uma placa plana com espessura uniforme h submersa em um líquido paralela à superfície livre.

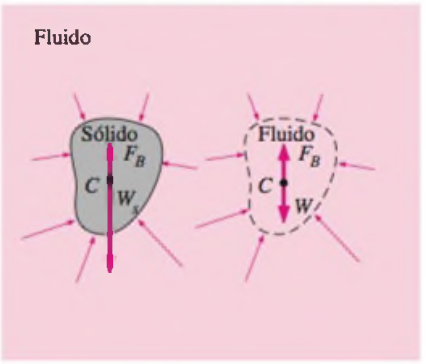


FIGURA 3–38
As forças de flutuação que agem sobre um corpo sólido submerso em um fluido e em um corpo fluido de mesma forma a mesma profundidade são idênticas. A força de flutuação F_B age para cima no centróide C do volume deslocado e é igual em intensidade ao peso W do fluido deslocado, mas na direção oposta. Para um sólido com densidade uniforme, seu peso W_s também age no centróide, mas sua intensidade não é necessariamente igual àquela do fluido que ele desloca. (Aqui $W_s > W$ e, portanto, $W_s > F_B$; esse corpo sólido afundaria.)

A relação da Equação 3–32 foi deduzida para uma geometria simples, mas ela é válida para qualquer corpo independentemente da sua forma. Isso pode ser mostrado matematicamente por um balanço de forças, ou simplesmente por este argumento: considere um corpo sólido de forma arbitrária submerso em um fluido em repouso e compare-o a um corpo de fluido de mesma forma, indicado por linhas tracejadas a mesma distância da superfície livre (Figura 3–38). As forças de flutuação que agem sobre esses dois corpos são iguais, uma vez que as distribuições das pressões, que dependem apenas da profundidade, são iguais nas fronteiras de ambas. O corpo de fluido imaginário está em equilíbrio estático e, portanto, a força resultante e o momento resultante que agem sobre ele são nulos. Assim, a força de flutuação para cima deve ser igual ao peso do corpo de fluido imaginário cujo volume é igual ao volume do corpo sólido. Além disso, o peso e a força de flutuação devem ter a mesma linha de ação para ter um momento nulo. Isso é conhecido como **princípio de Arquimedes**, cujo nome é uma homenagem ao matemático grego Arquimedes (287–212 a.C.) e é expresso como:

> A força de flutuação sobre um corpo imerso em um fluido é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo, e age para cima no centróide do volume deslocado.

Para corpos *flutuantes*, o peso de todo o corpo deve ser igual à força de flutuação, que é o peso do fluido cujo volume é igual ao volume da parte submersa do corpo flutuante. Ou seja:

$$F_B = W \rightarrow \rho_f g V_{sub} = \rho_{méd.\ corpo}\, g V_{total} \rightarrow \frac{V_{sub}}{V_{total}} = \frac{\rho_{méd.\ corpo}}{\rho_f} \qquad (3\text{–}33)$$

Assim, a fração de volume submersa de um corpo flutuante é igual à razão entre a densidade média do corpo e a densidade do fluido. Observe que quando a razão de densidade é igual ou maior do que um, o corpo flutuante torna-se completamente submerso.

Essas discussões levam à conclusão de que um corpo imerso em um fluido (1) permanece em repouso em qualquer ponto do fluido quando sua densidade é igual à densidade do fluido, (2) vai até o fundo quando sua densidade é maior do que a densidade do fluido e (3) sobe à superfície do fluido e flutua quando a densidade do corpo é menor do que a densidade do fluido (Figura 3–39).

A força de flutuação é proporcional à densidade do fluido e, portanto, podemos pensar que a força de flutuação exercida pelos gases como o ar é desprezível. Esse certamente é o caso geral, mas existem exceções significativas. Por exemplo, o volume de uma pessoa é de cerca de 0,1 m^3, e tomando a densidade do ar como 1,2 kg/m^3, a força de flutuação exercida pelo ar sobre a pessoa é:

$$F_B = \rho_f g V = (1{,}2\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}1\ \text{m}^3) \cong 1{,}2\ \text{N}$$

O peso de uma pessoa de 80 kg é 80 × 9,81 = 788 N. Assim, ignorando a flutuação neste caso temos um erro no peso de apenas 0,15%, que é desprezível. Mas os efeitos da flutuação nos gases dominam alguns fenômenos naturais importantes,

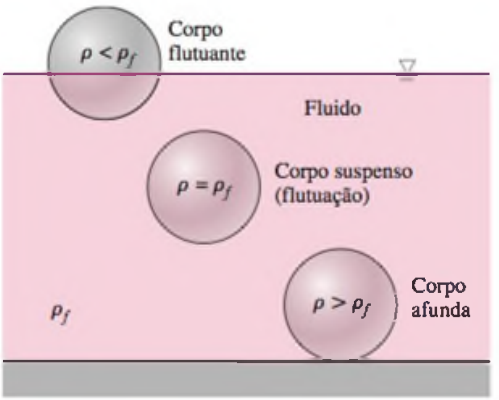


FIGURA 3–39
Um corpo sólido solto em um fluido afundará, flutuará ou permanecerá em repouso em algum ponto do fluido, dependendo de sua densidade com relação à densidade do fluido.

como a elevação do ar quente em um ambiente mais frio e, portanto, o início das correntes de convecção naturais, a elevação dos balões de ar quente ou de hélio, e os movimentos do ar na atmosfera. Um balão de hélio, por exemplo, sobe como resultado do efeito da flutuação até atingir uma altitude na qual a densidade do ar (que diminui com a altitude) seja igual à densidade do hélio no balão — considerando que o balão não estoure e ignorando o peso do material do balão.

O princípio de Arquimedes também é usado na geologia moderna, considerando que os continentes flutuam em um mar de magma.

EXEMPLO 3–10 Medição da Gravidade Específica por um Hidrômetro

Se você tivesse um aquário de água do mar, provavelmente usaria um tubo de vidro cilíndrico pequeno com algum peso de chumbo no fundo para medir a salinidade da água, simplesmente observando a profundidade até a qual o tubo afunda. Tal dispositivo que flutua em uma posição vertical e é usado para medir a gravidade específica de um líquido é chamado de *hidrômetro* (Figura 3–40). A parte superior do hidrômetro se estende acima da superfície do líquido e as suas divisões permitem ler diretamente a gravidade específica. O hidrômetro é calibrado para que na água pura dê a leitura exata de 1,0 na interface entre o ar e a água. (*a*) Obtenha uma relação para a gravidade específica de um líquido como função da distância Δz da marca correspondente à água pura e (*b*) determine a massa do chumbo que deve ser despejado em um hidrômetro com 1 cm de diâmetro e 20 cm de comprimento para que ele flutue até a metade (marca de 10 cm) em água pura.

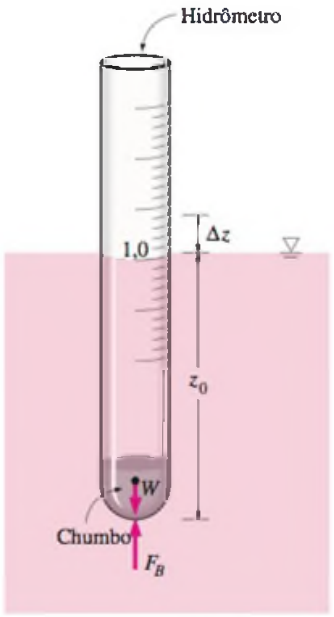


FIGURA 3–40
Esquema do Exemplo 3–10.

SOLUÇÃO A gravidade específica de um líquido deve ser medida por um hidrômetro. Uma relação entre a gravidade específica e a distância vertical do nível de referência deve ser obtida, e a quantidade de chumbo que precisa ser adicionada ao tubo de determinado hidrômetro deve ser determinada.

Hipóteses **1** O peso do tubo de vidro é desprezível com relação ao peso do chumbo adicionado. **2** A curvatura da parte inferior do tubo é desprezada.

Propriedades Tomamos a densidade da água como 1.000 kg/m^3.

Análise (*a*) Observando que o hidrômetro está em equilíbrio estático, a força de flutuação F_B exercida pelo líquido sempre deve ser igual ao peso W do hidrômetro. Em água pura, considere que a distância vertical entre a parte inferior do hidrômetro e a superfície livre da água seja z_0. Fazendo $F_B = W$ neste caso temos:

$$W_{\text{hidro}} = F_{B,w} = \rho_w g V_{\text{sub}} = \rho_w g A z_0 \qquad (1)$$

onde A é a seção transversal do tubo e ρ_w é a densidade da água pura.

Em um fluido mais leve do que a água ($\rho_f < \rho_w$), o hidrômetro afundará mais e o nível do líquido estará a uma distância Δz acima de z_0. Novamente fazendo $F_B = W$ temos:

$$W_{\text{hidro}} = F_{B,f} = \rho_f g V_{\text{sub}} = \rho_f g A(z_0 + \Delta z) \qquad (2)$$

Essa relação também vale para os fluidos mais pesados do que a água tomando Δz abaixo de z_0 como uma quantidade negativa. Igualando as Equações (1) e (2) entre si, uma vez que o peso do hidrômetro é constante, e reorganizando temos:

$$\rho_w g A z_0 = \rho_f g A(z_0 + \Delta z) \quad \rightarrow \quad \text{GE}_f = \frac{\rho_f}{\rho_w} = \frac{z_0}{z_0 + \Delta z}$$

que é a relação entre a gravidade específica do fluido e Δz. Observe que z_0 é constante para um hidrômetro dado e Δz é negativo para fluidos mais pesados do que a água pura.

(*b*) Desprezando o peso do tubo de vidro, a quantidade de chumbo que precisa ser adicionada ao tubo é determinada pelo requisito de que o peso do chumbo seja igual à força de flutuação. Quando o hidrômetro está flutuando com metade submersa na água, a força de flutuação que age sobre ele é:

$$F_B = \rho_w g V_{\text{sub}}$$

Igualando F_B ao peso do chumbo temos:

$$W = mg = \rho_w g V_{sub}$$

Igualando m e substituindo, a massa do chumbo é determinada por:

$$m = \rho_w V_{sub} = \rho_w(\pi R^2 h_{sub}) = (1.000\ \text{kg/m}^3)[\pi(0{,}005\ \text{m})^2(0{,}1\ \text{m})] = \mathbf{0{,}00785\ kg}$$

Discussão Observe que se o hidrômetro precisasse afundar apenas 5 cm na água, a massa necessária de chumbo seria metade dessa quantidade. Da mesma forma, a hipótese de que o peso do tubo de vidro é desprezível precisa ser verificada, uma vez que a massa do chumbo é de apenas 7,85 g.

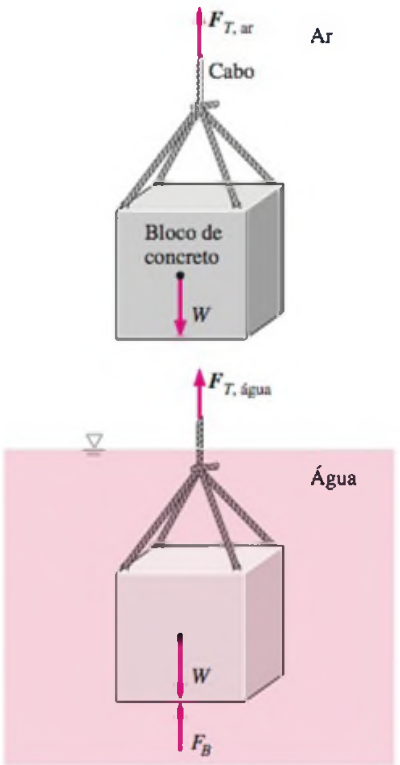


FIGURA 3–41
Esquema do Exemplo 3–11.

EXEMPLO 3–11 Perda de Peso de um Objeto na Água do Mar

Um guincho é usado para abaixar pesos no mar (densidade = 1.025 kg/m³) para um projeto de construção submarina (Figura 3–41). Determine a tensão no cabo do guincho devida a um bloco de concreto retangular de 0,4 m × 0,4 m × 3 m (densidade = 2.300 kg/m³) quando ele é (*a*) suspenso no ar e (*b*) completamente imerso na água.

SOLUÇÃO Um bloco de concreto é abaixado no mar. A tensão do cabo deve ser determinada antes e depois do bloco estar na água.
Hipóteses **1** A flutuação do ar é desprezível. **2** O peso dos cabos é desprezível.
Propriedades As densidades são dadas como 1.025 kg/m³ para a água do mar e 2.300 kg/m³ para o concreto.
Análise (*a*) Considere o diagrama de corpo livre do bloco de concreto. As forças que agem sobre o bloco de concreto no ar são seu peso e a ação de tração para cima (tensão) exercida pelo cabo. Essas duas forças devem se equilibrar e, portanto, a tensão no cabo deve se igualar ao peso do bloco:

$$V = (0{,}4\ \text{m})(0{,}4\ \text{m})(3\ \text{m}) = 0{,}48\ \text{m}^3$$

$$F_{T,\text{ar}} = W = \rho_{\text{concreto}} g V$$

$$= (2300\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}48\ \text{m}^3)\left(\frac{1\ \text{kN}}{1.000\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = \mathbf{10{,}8\ kN}$$

(*b*) Quando o bloco é imerso na água, existe a força adicional da flutuação agindo para cima. O balanço de forças neste caso resulta em:

$$F_B = \rho_f g V = (1.025\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}48\ \text{m}^3)\left(\frac{1\ \text{kN}}{1.000\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = \mathbf{4{,}8\ kN}$$

$$F_{T,\text{água}} = W - F_B = 10{,}8 - 4{,}8 = \mathbf{6{,}0\ kN}$$

Discussão Observe que o peso do bloco de concreto e, portanto, a tensão no cabo diminui em (10,8 − 6,0)/10,8 = 55% na água.

Estabilidade de Corpos Imersos e Flutuantes

Uma aplicação importante do conceito de flutuação é a avaliação da estabilidade dos corpos imersos e flutuantes sem nenhum acessório externo. Esse tópico é de grande importância para o projeto de navios e submarinos (Figura 3–42). Aqui fornecemos algumas discussões qualitativas gerais sobre a estabilidade vertical e rotacional.

Utilizamos a analogia da "bola no chão" para explicar os conceitos fundamentais da estabilidade e instabilidade. A Figura 3–43 mostra três bolas em repouso sobre o piso. O caso (*a*) é **estável**, já que qualquer pequena turbulência (alguém

movimenta a bola para a direita ou esquerda) gera uma força de restauração (devido à gravidade) que a retorna à posição inicial. O caso (*b*) é **neutramente estável** porque se alguém movimentar a bola para a direita ou esquerda, ela permanecerá em sua nova localização. Ela não tem a tendência de voltar à posição original, nem de continuar, se movimentando para o outro lado. O caso (*c*) é uma situação na qual a bola pode estar em repouso, mas qualquer perturbação, mesmo uma infinitesimal, faz com que a bola role para baixo — ela não retorna à posição original, mas sim *diverge* dela. Essa situação é **instável**. E quanto ao caso no qual a bola está em um piso *inclinado*? Não é apropriado discutir aqui a estabilidade desse caso, uma vez que a bola não está em estado de equilíbrio. Em outras palavras, ela não pode estar em repouso e rolaria abaixo mesmo sem nenhuma perturbação.

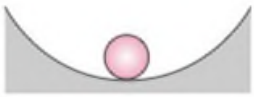
Para um corpo imerso ou flutuante em equilíbrio estático, o peso e a força de flutuação que agem sobre o corpo se equilibram, e tais corpos são inerentemente estáveis na *direção vertical*. Se um corpo neutralmente flutuante e imerso for elevado ou abaixado até uma profundidade diferente, o corpo permanecerá em equilíbrio naquele local. Se um corpo flutuante for elevado ou abaixado de alguma forma por uma força vertical, o corpo retornará à sua posição original assim que o efeito externo for removido. Assim, um corpo flutuante possui estabilidade vertical, enquanto um corpo neutralmente flutuante e imerso é neutralmente estável, uma vez que ele não retorna à posição original após um movimento.

A *estabilidade rotacional* de um *corpo imerso* depende dos locais relativos do *centro de gravidade G* do corpo e do *centro de flutuação B*, que é o centróide do volume deslocado. Um corpo imerso é *estável* se o corpo tiver o fundo pesado e, portanto, se o ponto *G* estiver diretamente abaixo do ponto *B* (Figura 3–44). Uma perturbação rotacional do corpo em tais casos produz um *momento de restauração* para retornar o corpo à posição estável original. Assim, um projeto estável de um submarino pede que os motores e as cabines da tripulação estejam localizados na metade inferior para transferir ao máximo o peso para o fundo. Os balões de ar quente ou hélio (que podem ser vistos como imersos no ar) também são estáveis, uma vez que a gaiola que carrega a carga está na parte inferior. Um corpo imerso cujo centro de gravidade *G* está diretamente acima do ponto *B* é *instável* e qualquer perturbação fará com que esse corpo vire de cabeça para baixo. Um corpo no qual *G* e *B* coincidem é *neutralmente estável*. Este é o caso dos corpos cuja densidade é sempre constante. Para tais corpos, não há tendência de virar ou se endireitar.

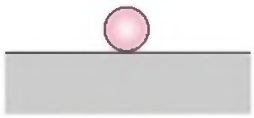
E o caso no qual o centro da gravidade não está verticalmente alinhado com o centro de flutuação (Figura 3–45)? Na verdade, não é apropriado discutir aqui a estabilidade desse caso, uma vez que o corpo não está em estado de equilíbrio. Em outras palavras, ele não pode estar em repouso e rolaria na direção de seu estado estável mesmo sem nenhuma perturbação. O momento de restauração no caso mostrado na Figura 3–45 tem direção anti-horária e faz com que o corpo rode no sentido anti-horário para alinhar ao ponto *G* verticalmente com o ponto *B*. Observe que pode haver alguma oscilação, mas no final o corpo assenta em seu estado de equilíbrio estável [caso (*a*) da Figura 3–44]. A estabilidade do corpo da Figura 3–45 é análoga àquela da bola em um piso inclinado. Você pode prever o que aconteceria se o peso do corpo da Figura 3–45 estivesse no lado oposto do corpo?

Os critérios da estabilidade rotacional são semelhantes para os *corpos flutuantes*. Novamente, se o corpo flutuante tiver o fundo pesado e, portanto, o centro de gravidade *G* estiver diretamente abaixo do centro de flutuação *B*, o corpo sempre

FIGURA 3–42
Para corpos flutuantes como navios, a estabilidade é uma consideração importante para a segurança.
© Corbis/vol. 96.



(*a*) Estável



(*b*) Neutralmente estável

(*c*) Instável

FIGURA 3–43
A estabilidade é facilmente entendida pela análise de uma bola no chão.

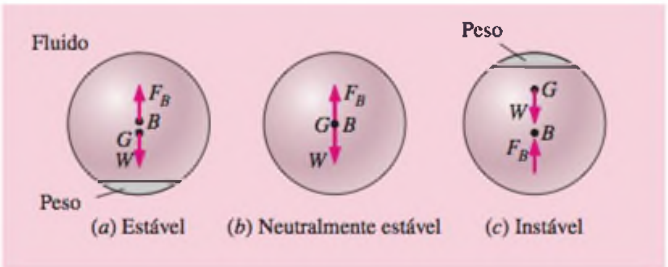


FIGURA 3–44
Um corpo flutuante neutralmente imerso é (*a*) estável se o centro de gravidade *G* estiver diretamente abaixo do centro de flutuação *B* do corpo, (*b*) neutralmente estável se *G* e *B* coincidirem e (*c*) instável se *G* estiver diretamente acima de *B*.

FIGURA 3–45
Quando o centro de gravidade G de um corpo neutralmente flutuante imerso não está verticalmente alinhado com o centro de flutuação B do corpo, ele não está em estado de equilíbrio e gira até seu estado estável, mesmo sem nenhuma perturbação.

será estável. Mas, ao contrário dos corpos submersos, um corpo flutuante ainda pode ser estável quando G está diretamente acima de B (Figura 3–46). Isso acontece porque o centróide do volume deslocado muda para o lado até um ponto B' durante uma perturbação rotacional, enquanto o centro de gravidade G do corpo permanece inalterado. Se o ponto B' estiver suficientemente longe, essas duas forças criam um momento de restauração e retornam o corpo à posição original. Uma medida da estabilidade dos corpos flutuantes é a **altura metacêntrica** GM, que é a distância entre o centro de gravidade G e o metacentro M — o ponto de intersecção entre as linhas de ação da força de flutuação através do corpo antes e após a rotação. O metacentro pode ser considerado um ponto fixo para a maioria das formas de casco de navio para ângulos de rolagem pequenos de até cerca de 20°. Um corpo flutuante é estável se o ponto M estiver acima do ponto G e, portanto, GM for positivo e instável se o ponto M estiver abaixo do ponto G e, portanto, GM for negativo. Nesse último caso, o peso e a força de flutuação que agem no corpo inclinado geram um momento de inversão em vez de um momento de restauração, fazendo com que o corpo vire. O comprimento da altura metacêntrica GM acima de G é uma medida da estabilidade: quanto maior ele for, mais estável será o corpo flutuante.

Como já foi discutido, um barco pode inclinar até um ângulo máximo sem emborcar, mas além desse ângulo ele vira (e afunda). Fazemos uma analogia final entre a estabilidade dos objetos flutuantes e a estabilidade de uma bola rolando pelo chão. Imagine a bola em um uma vala entre duas colinas (Figura 3–47). A bola retorna à sua posição de equilíbrio estável depois de perturbada — até um limite. Se a amplitude da perturbação for muito grande, a bola rola para o lado oposto da colina e não retorna à sua posição de equilíbrio. Essa situação é descrita como estável até algum nível-limite da perturbação, mas além dele é instável.

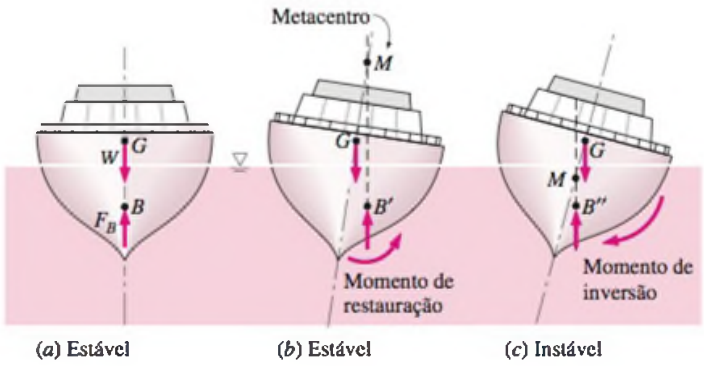


FIGURA 3–46
Um corpo flutuante é *estável* se o corpo tiver o fundo pesado e, portanto, o centro de gravidade G estiver abaixo do centróide B do corpo, ou se o metacentro M estiver acima do ponto G. Entretanto, o corpo é instável se o ponto M estiver abaixo do ponto G.

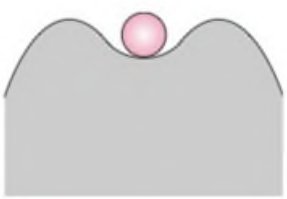


FIGURA 3–47
Uma bola em uma vala entre duas colinas é estável para pequenas perturbações, mas instável para grandes perturbações.

3–8 • FLUIDOS EM MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO

Na Seção 3–1 mostramos que a pressão em determinado ponto tem a mesma intensitude em todas as direções e, portanto, ela é uma função *escalar*. Nesta seção obtemos as relações da variação da pressão dos fluidos que se movem como um corpo sólido com ou sem aceleração na ausência de tensões de cisalhamento (ou seja, nenhum movimento relativo entre as camadas do fluido).

Muitos fluidos como o leite e a gasolina são transportados em caminhões-tanque. Em um caminhão-tanque em aceleração, o fluido corre até a parte traseira e ocorre alguma turbulência inicial. Mas em seguida uma nova superfície livre (em geral não horizontal) é formada, cada partícula do fluido assume a mesma aceleração e todo o fluido se move como um corpo rígido. Nenhuma tensão de cisalhamento se desenvolve dentro do corpo do fluido, uma vez que não há deformação e, portanto, nenhuma mudança de forma. O movimento de corpo rígido de um fluido também ocorre quando o fluido está contido em um tanque que gira sobre um eixo.

Considere um elemento fluido retangular diferencial com comprimentos laterais dx, dy e dz nas direções x, y e z, respectivamente, com o eixo z para cima na direção vertical (Figura 3–48). Observando que o elemento fluido diferencial se

comporta como um *corpo rígido, a segunda lei do movimento de Newton* para esse elemento pode ser expressa como:

$$\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} \tag{3–34}$$

onde $\delta m = \rho\, dV = \rho\, dx\, dy\, dz$ é a massa do elemento fluido, $\vec{a}$ é a aceleração e $\delta\vec{F}$ é a força resultante que age sobre o elemento.

As forças que agem sobre o elemento fluido consistem em *forças de volume*, como a gravidade, que agem em todo o corpo do elemento e são proporcionais ao volume do corpo (e também as forças elétrica e magnética, que não serão consideradas neste livro), e as *forças de superfície*, como as forças de pressão que agem sobre a superfície do elemento e são proporcionais à área da superfície (as tensões de cisalhamento também são forças de superfície, mas não se aplicam neste caso, uma vez que as posições relativas dos elementos fluidos permanecem inalteradas). As forças de superfície aparecem quando o elemento fluido é isolado de sua vizinhança para análise, e o efeito do corpo destacado é substituído por uma força naquele local. Observe que a pressão representa a força compressiva aplicada ao elemento fluido pelo fluido vizinho e sempre é direcionada para a superfície.

Considerando a pressão no centro do elemento como P, as pressões nas superfícies superior e inferior do elemento podem ser expressas como $P + (\partial P/\partial z)\, dz/2$ e $P - (\partial P/\partial z)\, dz/2$, respectivamente. Observando que a força de pressão que age sobre uma superfície é igual à pressão média multiplicada pela área da superfície, a força de superfície resultante que age sobre o elemento na direção z é a diferença entre as forças de pressão que agem sobre as faces inferior e superior:

$$\delta F_{S,z} = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy = -\frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dy\, dz \tag{3–35}$$

Da mesma forma, as forças de superfície líquidas nas direções x e y são:

$$\delta F_{S,x} = -\frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz \quad \text{e} \quad \delta F_{S,y} = -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy\, dz \tag{3–36}$$

Assim, a força de superfície (que simplesmente é a força de pressão) que age sobre todo o elemento pode ser expressa na forma vetorial como:

$$\begin{aligned}\delta\vec{F}_S &= \delta F_{S,x}\vec{i} + \delta F_{S,y}\vec{j} + \delta F_{S,z}\vec{k} \\ &= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) dx\, dy\, dz = -\vec{\nabla}P\, dx\, dy\, dz\end{aligned} \tag{3–37}$$

onde $\vec{i}$, $\vec{j}$, e $\vec{k}$ são os vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente, e:

$$\vec{\nabla}P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} \tag{3–38}$$

é o *gradiente de pressão*. Observe que $\vec{\nabla}$ ou "grad" é um operador vetorial usado para expressar os gradientes de uma função escalar de forma compacta na forma vetorial. Além disso, o *gradiente* de uma função escalar é expresso em determinada *direção* e, portanto, é uma quantidade *vetorial*.

A única força de volume que age sobre o elemento fluido é o peso do elemento, que age na direção z negativa, e é expressa como $\delta F_{B,z} = -g\delta m = -\rho g\, dx\, dy\, dz$ ou na forma vetorial como:

$$\delta\vec{F}_{B,z} = -g\delta m\vec{k} = -\rho g\, dx\, dy\, dz\vec{k} \tag{3–39}$$

Assim, a força total que age sobre o elemento torna-se:

$$\delta\vec{F} = \delta\vec{F}_S + \delta\vec{F}_B = -(\vec{\nabla}P + \rho g\vec{k})\, dx\, dy\, dz \tag{3–40}$$

Substituindo na segunda lei do movimento de Newton $\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} = \rho\, dx\, dy\, dz \cdot \vec{a}$ e cancelando $dx\, dy\, dz$, a **equação geral do movimento** para um fluido que se comporta como um corpo rígido (sem tensões de cisalhamento) é dada por:

Movimento de corpo rígido dos fluidos: $$\vec{\nabla}P + \rho g\vec{k} = -\rho\vec{a} \tag{3–41}$$

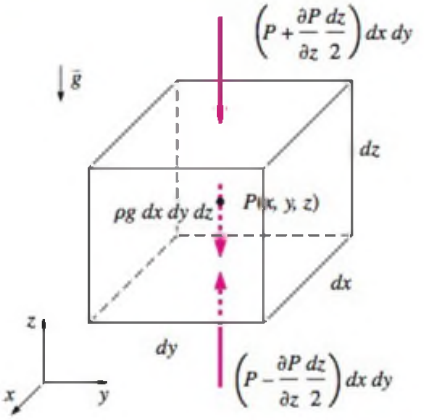


FIGURA 3–48
As forças de superfície e de volume agindo sobre um elemento fluido diferencial na direção vertical.

Decompondo os vetores em seus componentes, essa relação pode ser expressa de forma mais explícita como:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} + \rho g\vec{k} = -\rho(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \qquad (3\text{–}42)$$

ou, na forma escalar nas três direções ortogonais, como:

$$\textit{Fluidos em aceleração:} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y, \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z) \qquad (3\text{–}43)$$

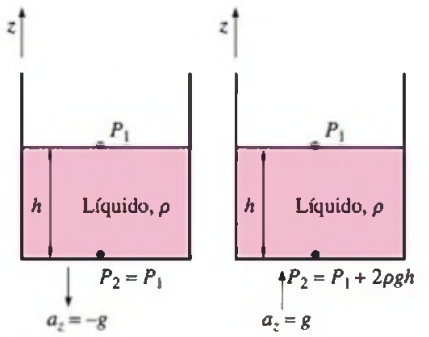
onde a_x, a_y e a_z são acelerações nas direções x, y e z, respectivamente.

Caso Especial 1: Fluidos em Repouso

Para fluidos em repouso ou movimentando-se em uma trajetória reta a velocidade constante, todas as componentes da aceleração são zero e as relações das Equações 3–43 se reduzem a:

$$\textit{Fluidos em repouso:} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad (3\text{–}44)$$

que confirma que, nos fluidos em repouso, a pressão permanece constante em qualquer direção horizontal (P não depende de x e y) e só varia na direção vertical como resultado da gravidade [e, portanto, $P = P(z)$]. Essas relações se aplicam tanto aos fluidos compressíveis quanto aos incompressíveis.



(*a*) Queda livre de um líquido

(*b*) Aceleração para cima de um líquido com $a_z = +g$

FIGURA 3–49
O efeito da aceleração sobre a pressão de um líquido durante a queda livre e a aceleração para cima.

Caso Especial 2: Queda Livre de um Corpo Fluido

Um corpo em queda livre é acelerado pela influência da gravidade. Quando a resistência do ar é desprezível, a aceleração do corpo é igual à aceleração gravitacional e a aceleração em qualquer direção horizontal é nula. Assim, $a_x = a_y = 0$ e $a_z = -g$. Portanto, as equações do movimento para os fluidos em aceleração (Equações 3–43) se reduzem a:

$$\textit{Fluidos em queda livre:} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad P = \text{constante} \qquad (3\text{–}45)$$

Assim, em um sistema de referência que se move com o fluido, ele se comporta como se estivesse em um ambiente com gravidade zero. Da mesma forma, a pressão manométrica de uma gota de líquido em queda livre é zero em toda a gota. (Na verdade, a pressão manométrica está ligeiramente acima de zero devido à tensão superficial, que mantém a gota intacta.)

Quando a direção do movimento é invertida e o fluido é forçado a acelerar verticalmente com $a_z = +g$ colocando o contêiner do fluido em um elevador ou veículo espacial impulsionado para cima por um motor de foguete, o gradiente de pressão na direção z é $\partial P/\partial z = -2\rho g$. Assim, a diferença de pressão através de uma camada de fluido agora dobra com relação ao caso do fluido fixo (Figura 3–49).

Aceleração em uma Trajetória Reta

Considere um contêiner parcialmente preenchido com um líquido. O contêiner está se movendo em uma trajetória reta com aceleração constante. Tomamos a projeção da trajetória do movimento no plano horizontal como o eixo x e a projeção no plano vertical como o eixo z, como mostra a Figura 3–50. As componentes x e z da aceleração são a_x e a_z. Não há movimento na direção y e, portanto, a aceleração naquela direção é zero, $a_y = 0$. Assim, as equações do movimento para fluidos em aceleração (Equações 3–43) se reduzem a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z) \qquad (3\text{–}46)$$

Portanto, a pressão não depende de y e a diferencial total de $P = P(x, z)$, que é $(\partial P/\partial x)\,dx + (\partial P/\partial z)\,dz$, torna-se:

$$dP = -\rho a_x\,dx - \rho(g + a_z)\,dz \tag{3–47}$$

Para ρ = constante, a diferença de pressão entre dois pontos 1 e 2 do fluido é determinada pela integração como:

$$P_2 - P_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1) \tag{3–48}$$

Tomando o ponto 1 como a origem ($x = 0$, $z = 0$), onde a pressão é P_0, e o ponto 2 como qualquer ponto do fluido (sem subscrito), a distribuição da pressão pode ser expressa como:

Variação da pressão: $$P = P_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z)z \tag{3–49}$$

A elevação (ou queda) vertical da superfície livre no ponto 2 com relação ao ponto 1 pode ser determinada pela escolha de 1 e 2 sobre a superfície livre (de modo que $P_1 = P_2$) e resolvendo a Equação 3–48 (Figura 3–51):

Elevação vertical da superfície: $$\Delta z_s = z_{s2} - z_{s1} = -\frac{a_x}{g + a_z}(x_2 - x_1) \tag{3–50}$$

onde z_S é a coordenada z da superfície livre do líquido. A equação para superfícies com pressão constante, chamadas de **isóbaras**, é obtida da Equação 3–47 definindo $dP = 0$ e substituindo z por $z_{\text{isóbara}}$, que é a coordenada z (a distância vertical) da superfície como função de x. Isso resulta em:

Superfícies com pressão constante: $$\frac{dz_{\text{isóbara}}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = \text{constante} \tag{3–51}$$

Assim, concluímos que as regiões isóbaras (incluindo a superfície livre) de um fluido incompressível com aceleração constante em um movimento linear são superfícies paralelas cuja inclinação no plano xz é:

Inclinação das isóbaras: $$\text{Inclinação} = \frac{dz_{\text{isóbara}}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = -\text{tg}\,\theta \tag{3–52}$$

Obviamente, a superfície livre de tal fluido é uma superfície *plana*, e é inclinada a menos que $a_x = 0$ (a aceleração é exercida apenas na direção vertical). Da mesma forma, a conservação da massa juntamente com a hipótese da incompressibilidade (ρ = *constante*) exige que o volume do fluido permaneça constante antes e durante a aceleração. Portanto, a elevação do nível de fluido em um lado deve ser contrabalançada por uma queda do nível de fluido do outro lado.

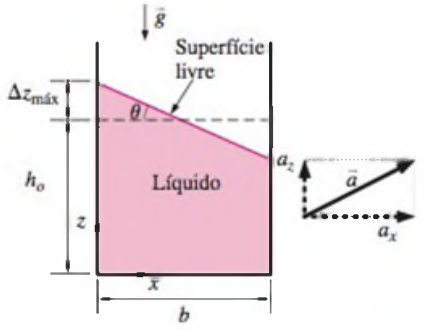


FIGURA 3–50
Movimento de corpo rígido de um líquido em um tanque com aceleração constante.

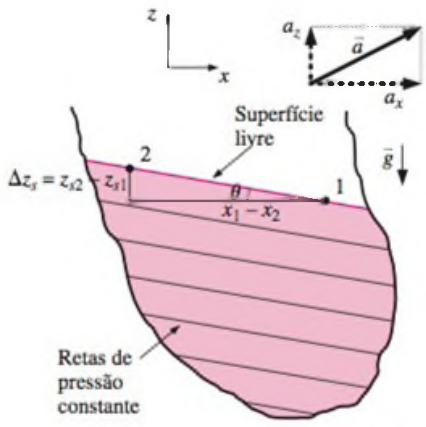


FIGURA 3–51
As retas de pressão constante (que são as projeções das superfícies de pressão constante sobre o plano xz) de um líquido em aceleração linear e a elevação vertical.

EXEMPLO 3–12 Transbordamento de um Tanque de Água durante a Aceleração

Um aquário com 80 cm de altura com seção transversal de 2 m × 0,6 m que inicialmente está parcialmente cheio com água deve ser transportado na carroceria de um caminhão (Figura 3–52). O caminhão acelera de 0 a 90 km/h em 10 s. Para que a água não derrame durante a aceleração, determine o peso inicial que a água do tanque pode ter. Você recomendaria que o tanque fosse alinhado com o lado maior ou menor paralelamente à direção do movimento?

SOLUÇÃO Um aquário deve ser transportado em um caminhão. A altura de água permitida para evitar derramamento durante a aceleração e a orientação adequada deve ser determinada.

Hipóteses **1** A estrada é horizontal durante a aceleração para que esta não tenha nenhum componente vertical ($a_z = 0$). **2** Os efeitos de turbulência, frenagem, obstáculos na pista e subida de ladeiras são supostos como secundários e não são considerados. **3** A aceleração permanece constante.

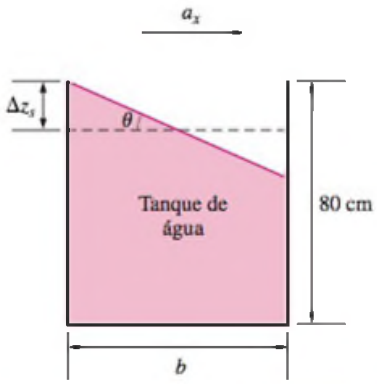


FIGURA 3–52
Esquema do Exemplo 3–12.

Análise Tomamos o eixo x como a direção do movimento, o eixo z como a direção vertical ascendente e a origem como o canto esquerdo inferior do tanque. Observando que o caminhão acelera de 0 a 90 km/h em 10 s, a aceleração do caminhão é:

$$a_x = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{(90 - 0)\ \text{km/h}}{10\ \text{s}}\left(\frac{1\ \text{m/s}}{3{,}6\ \text{km/h}}\right) = 2{,}5\ \text{m/s}^2$$

A tangente do ângulo que a superfície livre faz com a horizontal é:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{a_x}{g + a_z} = \frac{2{,}5}{9{,}81 + 0} = 0{,}255 \qquad \text{(e, portanto, } \theta = 14{,}3°\text{)}$$

A elevação máxima vertical da superfície livre ocorre na parte de trás do tanque e o plano médio vertical não experimenta elevação ou queda durante a aceleração, uma vez que ele é um plano de simetria. Assim, a elevação vertical na parte de trás do tanque com relação ao plano médio para as duas orientações possíveis torna-se:

Caso 1: o lado longo é paralelo à direção do movimento:

$$\Delta z_{s1} = (b_1/2)\,\text{tg}\,\theta = [(2\ \text{m})/2] \times 0{,}255 = 0{,}255\ \text{m} = \mathbf{25{,}5\ cm}$$

Caso 2: o lado curto é paralelo à direção do movimento:

$$\Delta z_{s2} = (b_2/2)\,\text{tg}\,\theta = [(0{,}6\ \text{m})/2] \times 0{,}255 = 0{,}076\ \text{m} = \mathbf{7{,}6\ cm}$$

Assim, considerando que tombar não seja um problema, sem dúvida o tanque deve ser orientado para que seu lado menor fique paralelo à direção do movimento. Nesse caso, esvaziar o tanque para que o nível de sua superfície livre caia apenas 7,6 cm será adequado para evitar derramamento durante a aceleração.

Discussão Observe que a orientação do tanque é importante para controlar a elevação vertical. Além disso, a análise é válida para qualquer fluido com densidade constante, não apenas a água, uma vez que para a solução não usamos informações sobre as características da água.

Rotação em um Contêiner Cilíndrico

Sabemos por experiência que, quando um copo cheio de água é rotado com relação a seu eixo, o fluido é forçado para fora como resultado da chamada força centrífuga e a superfície livre do líquido torna-se côncava. Isso é conhecido como *movimento de vórtice forçado*.

Considere um contêiner cilíndrico vertical parcialmente preenchido com um líquido. O contêiner gira com relação a seu eixo a uma velocidade angular constante ω, como mostra a Figura 3–53. Após transientes iniciais, o líquido se moverá como um corpo rígido juntamente com o contêiner. Não há deformação e, portanto, não pode haver tensão de cisalhamento e toda partícula fluida do contêiner se moverá com a mesma velocidade angular.

Esse problema pode ser melhor analisado em coordenadas cilíndricas (r, θ, z), com z tomado ao longo da linha central do contêiner direcionada do fundo inferior para a superfície livre, uma vez que a forma do contêiner é cilíndrica, e as partículas de fluido têm um movimento circular. A aceleração centrípeta de uma partícula de fluido girando a velocidade angular constante ω a uma distância r do eixo de rotação é $r\omega^2$ e é direcionada radialmente para o eixo de rotação (direção r negativa). Ou seja, $a_r = -r\omega^2$. Existe simetria com relação ao eixo z, que é o eixo de rotação e, portanto, não há dependência em θ. Assim, $P = P(r, z)$ e $a_\theta = 0$. Da mesma forma, $a_z = 0$ uma vez que não há movimento na direção z.

Então, as equações do movimento para fluidos em rotação (Equações 3–43) se reduzem a:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r\omega^2, \qquad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \qquad \textbf{(3–53)}$$

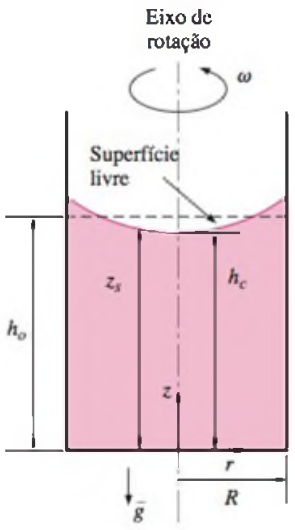


FIGURA 3–53
Movimento de corpo rígido de um líquido em um contêiner cilíndrico vertical em rotação.

Dessa forma, a diferencial total de $P = P(r, z)$, que é $dP = (\partial P/\partial r)dr + (\partial P/\partial z)dz$, torna-se:

$$dP = \rho r\omega^2\, dr - \rho g\, dz \tag{3–54}$$

A equação para superfícies a pressão constante é obtida pela definição de $dP = 0$ e substituição de z por $z_{\text{isóbara}}$, que é o valor z (a distância vertical) da superfície como função de r. Isso resulta em:

$$\frac{dz_{\text{isóbara}}}{dr} = \frac{r\omega^2}{g} \tag{3–55}$$

Integrando, a equação para as superfícies de pressão constante é determinada como:

Superfícies com pressão constante:
$$z_{\text{isóbara}} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C_1 \tag{3–56}$$

que é a equação de uma *parábola*. Assim, concluímos que as superfícies de pressão constante, incluindo a superfície livre, são *parabolóides da revolução* (Figura 3–54).

O valor da constante de integração C_1 é diferente para parabolóides diferentes de pressão constante (ou seja, para regiões isobáricas diferentes). Para a superfície livre, fazendo $r = 0$ na Equação 3–56, temos $z_{\text{isóbara}}(0) = C_1 = h_c$, onde h_c é a distância entre a superfície livre e o fundo do contêiner ao longo do eixo de rotação (Figura 3–53). Assim, a equação da superfície livre torna-se:

$$z_s = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c \tag{3–57}$$

onde z_s é a distância entre a superfície livre e o fundo do contêiner no raio r. A hipótese básica dessa análise é que há líquido suficiente no contêiner para que toda a superfície inferior permaneça coberta com o líquido.

O volume de um elemento de casca cilíndrico de raio r, altura z_s e espessura dr é $dV = 2\pi r z_s\, dr$. Assim, o volume do parabolóide formado pela superfície livre é:

$$V = \int_{r=0}^{R} 2\pi z_s r\, dr = 2\pi \int_{r=0}^{R} \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c\right) r\, dr = \pi R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c\right) \tag{3–58}$$

Como a massa é conservada e a densidade é constante, esse volume deve ser igual ao volume original do fluido do contêiner que é:

$$V = \pi R^2 h_0 \tag{3–59}$$

onde h_0 é a altura original do fluido no contêiner sem nenhuma rotação. Igualando esses dois volumes, a altura do fluido ao longo da linha central do contêiner cilíndrico torna-se:

$$h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \tag{3–60}$$

Assim, a equação da superfície livre torna-se:

Superfície livre:
$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2) \tag{3–61}$$

A altura máxima vertical ocorre na borda quando $r = R$ e a *diferença de altura máxima* entre a borda e o centro da superfície livre é determinada pelo cálculo de z_s em $r = R$ e também em $r = 0$ e tomando sua diferença:

Diferença máxima de altura:
$$\Delta z_{s,\,\text{máx}} = z_s(R) - z_s(0) = \frac{\omega^2}{2g} R^2 \tag{3–62}$$

Quando ρ = constante, a diferença de pressão entre dois pontos 1 e 2 do fluido é determinada pela integração de $dP = \rho r\omega^2\, dr - \rho g\, dz$. Isso resulta em:

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1) \tag{3–63}$$

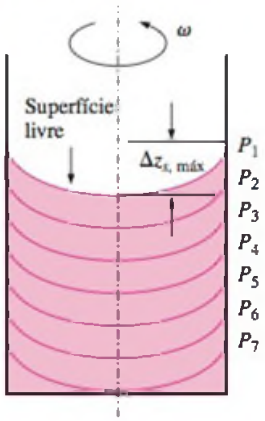


FIGURA 3–54
Superfícies de pressão constante em um líquido girando.

Tomando o ponto 1 como a origem ($r = 0$, $z = 0$), onde a pressão é P_0 e o ponto 2 como qualquer ponto do fluido (sem subscrito), a distribuição da pressão pode ser expressa como:

Variação da pressão:
$$P = P_0 + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \rho g z \qquad (3\text{–}64)$$

Observe que em um raio fixo, a pressão varia hidrostaticamente na direção vertical, como em um fluido em repouso. Para uma distância vertical fixa z, a pressão varia com o quadrado da distância radial r, aumentando a partir da linha central na direção da borda exterior. Em qualquer plano horizontal, a diferença de pressão entre o centro e a borda do contêiner de raio R é $\Delta P = \rho\omega^2 R^2/2$.

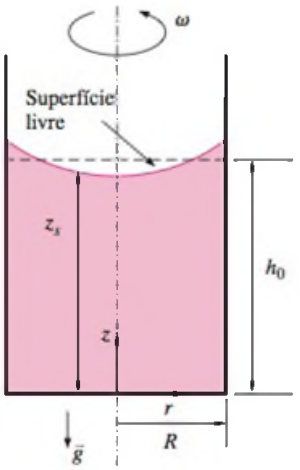


FIGURA 3–55
Esquema do Exemplo 3–13.

EXEMPLO 3–13 Elevação de um Líquido Durante a Rotação

Um contêiner cilíndrico vertical com 20 cm de diâmetro e 60 cm de altura, mostrado na Figura 3–55, está parcialmente cheio com líquido até a altura de 50 cm cuja densidade é 850 kg/m³. Agora o cilindro é girado com velocidade constante. Determine a velocidade de rotação na qual o líquido começará a vazar da borda do contêiner.

SOLUÇÃO Um contêiner cilíndrico vertical parcialmente preenchido com um líquido é posto a girar. A velocidade angular na qual o líquido começará a vazar deve ser determinada.

Hipóteses **1** O aumento da velocidade de rotação é muito lento de modo que o líquido do contêiner sempre se comporta como um corpo rígido. **2** A superfície inferior do contêiner permanece coberta com líquido durante a rotação (sem regiões secas).

Análise Tomando o centro do fundo do cilindro vertical girando como a origem ($r = 0$, $z = 0$), a equação da superfície livre do líquido é dada por:

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

Assim, a altura vertical do líquido na borda do contêiner, onde $r = R$, torna-se:

$$z_s(R) = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

onde $h_0 = 0{,}5$ m é a altura original do líquido antes da rotação. Imediatamente antes do líquido começar a vazar, a altura do líquido na borda do contêiner é igual à altura do contêiner e, portanto, $z_s(R) = 0{,}6$ m. Isolando ω na última equação e substituindo, determinamos a velocidade máxima do contêiner como:

$$\omega = \sqrt{\frac{4g[z_s(R) - h_0]}{R^2}} = \sqrt{\frac{4(9{,}81\ \text{m/s}^2)[(0{,}6 - 0{,}5)\ \text{m}]}{(0{,}1\ \text{m})^2}} = \mathbf{19{,}8\ rad/s}$$

Observando que uma revolução completa corresponde a 2π rad, a velocidade de rotação do contêiner também pode ser expressa em termos de revoluções por minuto (rpm) como:

$$\dot{n} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{19{,}8\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/rev}}\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}\right) = \mathbf{189\ rpm}$$

Assim, a velocidade de rotação desse contêiner deve se limitar a 189 rpm para evitar qualquer vazamento do líquido como resultado do efeito centrífugo.

Discussão Observe que a análise é válida para qualquer líquido, uma vez que o resultado não depende da densidade ou de qualquer outra propriedade do fluido. Também deveríamos verificar se nossa hipótese de nenhuma região seca é válida. A altura do líquido no centro é:

$$z_s(0) = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} = 0{,}4\ \text{m}$$

Como $z_s(0)$ é positivo, nossa hipótese é validada.

RESUMO

A força normal exercida por um fluido por unidade de área é chamada de *pressão*, e sua unidade é o *pascal*, 1 Pa ≡ 1 N/m^2. A pressão relativa ao vácuo absoluto é chamada de *pressão absoluta*, e a diferença entre a pressão absoluta e a pressão atmosférica local é chamada de *pressão manométrica*. As pressões abaixo da pressão atmosférica são chamadas de *pressões de vácuo*. As relações entre as pressões absoluta, relativa e de vácuo é:

$$P_{man} = P_{abs} - P_{atm}$$
$$P_{vác} = P_{atm} - P_{abs}$$

A pressão em um ponto de um fluido tem a mesma intensidade em todas as direções. A variação da pressão com a elevação em um fluido em repouso é dada por:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

onde a direção z é tomada para cima. Quando a densidade do fluido é constante, a diferença de pressão através de uma camada de fluido de espessura Δz é:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho g\, \Delta z$$

As pressões absoluta e manométrica de um líquido aberto para a atmosfera a uma profundidade h da superfície livre são:

$$P = P_{atm} + \rho g h \qquad \text{e} \qquad P_{man} = \rho g h$$

A pressão de um fluido em repouso é constante na direção horizontal. A *lei de Pascal* estabelece que a pressão aplicada a um fluido confinado aumenta a pressão em todos os pontos na mesma quantidade. A pressão atmosférica é medida por um *barômetro* e é dada por:

$$P_{atm} = \rho g h$$

onde h é a altura da coluna de líquido.

A *estática dos fluidos* trata dos problemas associados aos fluidos em repouso e é chamada de *hidrostática* quando o fluido é um líquido. A intensidade da força resultante que age sobre uma superfície plana de uma placa completamente submersa em um fluido homogêneo é igual ao produto da pressão P_C no centróide da superfície pela área A da superfície e é expressa por:

$$F_R = (P_0 + \rho g h_C)A = P_C A = P_{méd} A$$

onde $h_C = y_C$ sen θ é a *distância vertical* entre o centróide e a superfície livre do líquido. A pressão P_0 em geral é a pressão atmosférica, que pode ser ignorada na maioria dos casos, uma vez que ela age em ambos os lados da placa. O ponto de intersecção entre a linha de ação da força resultante e a superfície é o *centro de pressão*. A localização vertical da linha de ação da força resultante é dada por:

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,C}}{[y_C + P_0/(\rho g \text{ sen } \theta)]A}$$

onde $I_{xx,C}$ é o segundo momento da área com relação ao eixo x que passa pelo centróide da área.

Um fluido exerce uma força para cima sobre um corpo imerso nele. Essa força é chamada de *força de flutuação* e é expressa por:

$$F_B = \rho_f g V$$

onde V é o volume do corpo. Isso é conhecido como *princípio de Arquimedes* e é expresso como: a força de flutuação sobre um corpo imerso em um fluido é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo, e age para cima no centróide do volume deslocado. Com densidade constante, a força de flutuação não depende da distância entre o corpo e a superfície livre. Para corpos *flutuantes*, a fração de volume submersa de um corpo é igual à relação entre a densidade média do corpo e a densidade do fluido.

A *equação geral do movimento* para um fluido que se comporta como um corpo rígido é:

$$\vec{\nabla} P + \rho g \vec{k} = -\rho \vec{a}$$

Quando a gravidade está alinhada na direção $-z$, ela é expressa na forma escalar como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

onde a_x, a_y e a_z são as acelerações nas direções x, y e z, respectivamente. Durante um *movimento linearmente acelerado* no plano xz, a distribuição da pressão é expressa por:

$$P = P_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z)z$$

As superfícies de pressão constante (incluindo a superfície livre) de um líquido com aceleração constante no movimento linear são superfícies paralelas cuja inclinação em um plano xz é:

$$\text{Inclinação} = \frac{dz_{isóbara}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = -\text{tg } \theta$$

Durante o movimento de corpo rígido de um líquido em um *cilindro girando*, as superfícies de pressão constante são *parabolóides de revolução*. A equação da superfície livre é:

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

onde z_s é a distância entre a superfície livre e o fundo do contêiner no raio r e h_0 é a altura original do fluido no contêiner sem nenhuma rotação. A variação de pressão no líquido é expressa como:

$$P = P_0 + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \rho g z$$

onde P_0 é a pressão na origem ($r = 0$, $z = 0$).

A pressão é uma propriedade fundamental e é difícil imaginar um problema de escoamento de fluido significativo que não envolva a pressão. Assim, você verá essa propriedade em todos os capítulos restantes deste livro. Entretanto, a consideração das forças hidrostáticas que agem sobre as superfícies planas e curvas é limitada principalmente a este capítulo.

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. F. P. Beer, E. R. Johnston, Jr., E. R. Eisenberg e G. H. Staab. *Vector Mechanics for Engineers, Statics*, 7. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2004.
2. C. T. Crowe, J. A. Roberson e D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*, 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
3. R. W. Fox e A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: Wiley, 1999.
4. D. C. Giancoli. *Physics*, 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.
5. M. C. Potter e D. C. Wiggert. *Mechanics of Fluids*, 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
6. F. M. White. *Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2003.

PROBLEMAS*

Pressão, Manômetro e Barômetro

3–1C Qual é a diferença entre pressão manométrica e pressão absoluta?

3–2C Explique por que algumas pessoas têm sangramento do nariz e outras sentem falta de ar em grandes altitudes.

3–3C Alguém diz que a pressão absoluta de um líquido de densidade constante dobra quando a profundidade dobra. Você concorda? Explique.

3–4C Um pequeno cubo de aço está suspenso na água por uma corda. Se os comprimentos das laterais do cubo forem muito pequenos, como você compararia as intensidades das pressões na parte superior, inferior e nas superfícies laterais do cubo?

3–5C Enuncie a lei de Pascal e dê um exemplo do mundo real para ela.

3–6C Considere dois ventiladores idênticos, um no nível do mar e o outro no alto de uma montanha, trabalhando a velocidades idênticas. Como você compararia (*a*) as vazões volumétricas e (*b*) as vazões mássicas desses dois ventiladores?

3–7 A leitura de um medidor de vácuo conectado a uma câmara é de 24 kPa em um local onde a pressão atmosférica é de 92 kPa. Determine a pressão absoluta na câmara.

3–8 A água de um tanque é pressurizada a ar, e a pressão é medida por um manômetro de vários fluidos, como mostra a Figura P3–8. Determine a pressão manométrica do ar no tanque se $h_1 = 0{,}2$ m, $h_2 = 0{,}3$ m e $h_3 = 0{,}46$ m. Tome as densidades da água, do óleo e do mercúrio como 1.000 kg/m^3, 850 kg/m^3 e 13.600 kg/m^3, respectivamente.

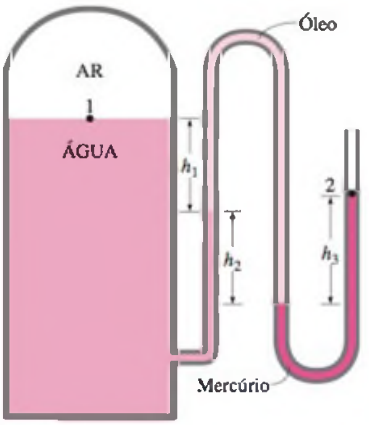


FIGURA P3–8

3–9 Determine a pressão atmosférica em um local onde a leitura barométrica é de 750 mmHg. Tome a densidade do mercúrio como 13.600 kg/m^3.

3–10 A leitura da pressão manométrica de um líquido a uma profundidade de 3 m é 28 kPa. Determine a pressão manométrica do mesmo líquido a uma profundidade de 12 m.

3–11 A leitura da pressão absoluta da água a uma profundidade de 5 m é 145 kPa. Determine (*a*) a pressão atmosférica local e (*b*) a pressão absoluta a uma profundidade de 5 m em um líquido cuja gravidade específica é de 0,85 no mesmo local.

3–12 Considere uma mulher que pese 70 kg e que tenha uma área total de pegadas de 400 cm^2. Ela deseja caminhar sobre a neve, mas a neve não suporta pressões acima de 0,5 kPa. Determine o tamanho mínimo dos sapatos para neve necessários (área da pegada por sapato) para que ela possa caminhar sobre a neve sem afundar.

3–13 A leitura de um medidor a vácuo conectado a um tanque é de 30 kPa em um local onde a leitura barométrica é de 755 mmHg. Determine a pressão absoluta no tanque. Tome $\rho_{Hg} = 13.590$ kg/m^3.

Resposta: 70,6 kPa

3–14 A leitura de um medidor de pressão conectado a um tanque é de 500 kPa em um local onde a pressão atmosférica é de 94 kPa. Determine a pressão absoluta no tanque.

3–15 A leitura do barômetro de um alpinista indica 930 mbars no início de uma expedição de alpinismo e 780 mbars no final. Desprezando o efeito da altitude sobre a aceleração da gravidade, determine a distância vertical atingida. Considere a densidade média do ar de 1,20 kg/m^3.

Resposta: 1.274 m

3–16 O barômetro básico pode ser usado para medir a altura de um prédio. Se as leituras barométricas nas partes superior e inferior de um prédio são de 730 mmHg e 755 mmHg, respectivamente, determine a altura do prédio. Considere a densidade média do ar de 1,18 kg/m^3.

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

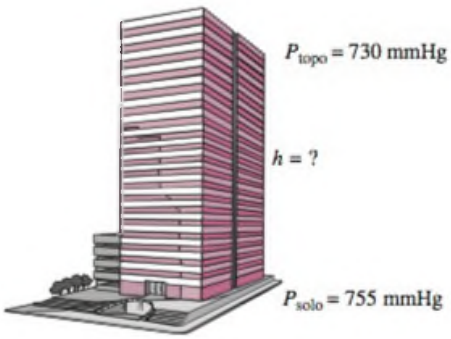


FIGURA P3–16

3–17 Resolva o Problema 3–16 usando o EES (ou outro aplicativo). Imprima toda a solução, incluindo os resultados numéricos com as unidades adequadas e tome a densidade do mercúrio como 13.600 kg/m³.

3–18 Determine a pressão exercida sobre um mergulhador a 30 m abaixo da superfície livre do mar. Considere uma pressão barométrica de 101 kPa e uma gravidade específica de 1,03 para a água do mar.

Resposta: 404,0 kPa

3–19 Um gás está contido em um dispositivo vertical pistão-cilindro e sem atrito. O pistão tem massa de 4 kg e uma seção transversal de 35 cm². Uma mola comprimida acima do pistão exerce uma força de 60 N sobre ele. Se a pressão atmosférica for de 95 kPa, determine a pressão dentro do cilindro.

Resposta: 123,4 kPa

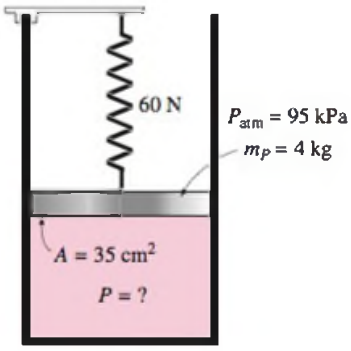


FIGURA P3–19

3–20 Reconsidere o Problema 3–19. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito da força da mola no intervalo entre 0 e 500 N sobre a pressão dentro do cilindro. Mostre um gráfico da pressão em função da força da mola e discuta os resultados.

3–21 Um medidor manométrico e um manômetro são anexados a um tanque de gás para medir sua pressão. Se a leitura do medidor manométrico de pressão for 80 kPa, determine a distância entre os dois níveis de fluido do manômetro se o fluido for (*a*) mercúrio (ρ = 13.600 kg/m³) ou (*b*) água (ρ = 1.000 kg/m³).

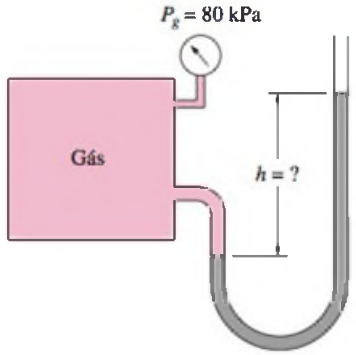


FIGURA P3–21

3–22 Reconsidere o Problema 3–21. Usando o EES (ou outro aplicativo) investigue o efeito da massa específica do fluido do manômetro no intervalo entre 800 e 13.000 kg/m³ sobre a diferença de altura do fluido do manômetro. Mostre um gráfico da diferença de altura do fluido em função da densidade e discuta os resultados.

3–23 Um manômetro contendo óleo (ρ = 850 kg/m³) é anexado a um tanque cheio com ar. Se a diferença do nível de óleo entre as duas colunas for de 45 cm e a pressão atmosférica for de 98 kPa, determine a pressão absoluta do ar no tanque.

Resposta: 101,75 kPa

3–24 Um manômetro a mercúrio (ρ = 13.600 kg/m³) está conectado a um duto de ar para medir a pressão interna. A diferença nos níveis do manômetro é de 15 mm e a pressão atmosférica é de 100 kPa. (*a*) Julgando pela Figura P3–24, determine se a pressão no duto está acima ou abaixo da pressão atmosférica. (*b*) Determine a pressão absoluta no duto.

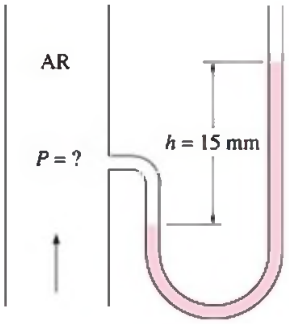


FIGURA P3–24

3–25 Repita o Problema 3–24 para uma diferença de altura de mercúrio de 30 mm.

3–26 A pressão sangüínea em geral é medida colocando-se um invólucro cheio de ar e fechado equipado com um medidor manométrico de pressão ao redor da parte superior do braço de uma pessoa no nível do coração. Usando um manômetro de mercúrio e um estetoscópio, a pressão sistólica (a pressão máxima quando o coração está bombeando sangue) e a pressão diastólica (a pressão mínima quando o coração está em repouso) são medidas em mmHg. As pressões sistólica e diastólica de uma pessoa saudável são de cerca de 120 mmHg e 80 mmHg, respectivamente, e indicadas como 120/80. Expresse essas duas pressões manométricas em kPa, psi e metros de coluna de água.

3–27 A pressão sangüínea máxima na parte superior do braço de uma pessoa saudável é de cerca de 120 mmHg. Se um tubo vertical aberto para a atmosfera estiver conectado à veia do braço da pessoa, determine até onde o sangue subirá no tubo. Considere a densidade do sangue como 1.050 kg/m³.

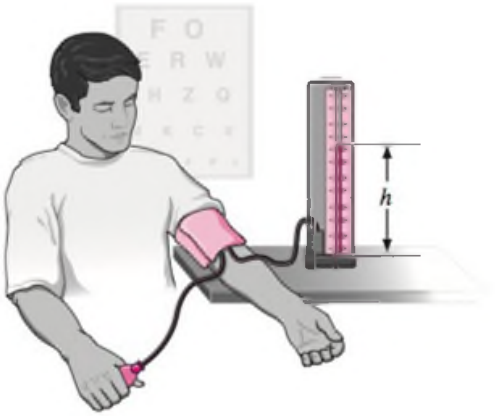


FIGURA P3–27

3–28 Considere um homem de 1,80 m de altura em pé na água e completamente submerso em uma piscina. Determine a diferença entre as pressões que agem sobre a cabeça e os dedos desse homem em kPa.

3–29 Considere um tubo em U cujos braços estão abertos para a atmosfera. Água é despejada no tubo em U de um braço, e óleo leve (ρ = 790 kg/m³) do outro. Um braço contém 70 cm de altura de água, enquanto o outro braço contém ambos os fluidos com a razão da altura do óleo para água de 6. Determine a altura de cada fluido naquele braço.

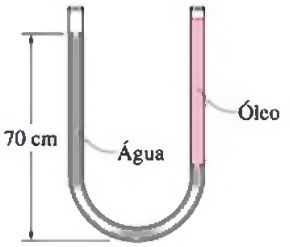


FIGURA P3–29

3–30 O macaco hidráulico de uma oficina de automóveis tem um diâmetro de saída de 30 cm e deve elevar carros com até 2.000 kg. Determine a pressão manométrica do fluido que deve ser mantida no reservatório.

3–31 Água doce e água do mar escoam em tubulações horizontais paralelas que estão conectadas entre si por um manômetro de tubo em U, como mostra a Figura P3–31. Determine a diferença de pressão entre as duas tubulações. Tome a densidade da água do mar no local como ρ = 1.035 kg/m³. A coluna de ar pode ser ignorada na análise?

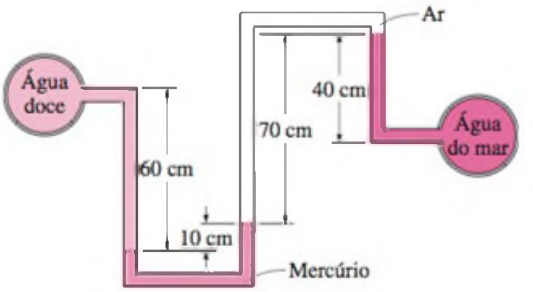


FIGURA P3–31

3–32 Repita o Problema 3–31 substituindo o ar por óleo cuja gravidade específica é de 0,72.

3–33 A pressão manométrica do ar no tanque mostrado na Figura P3–33 é medida como 65 kPa. Determine a altura diferencial *h* da coluna de mercúrio.

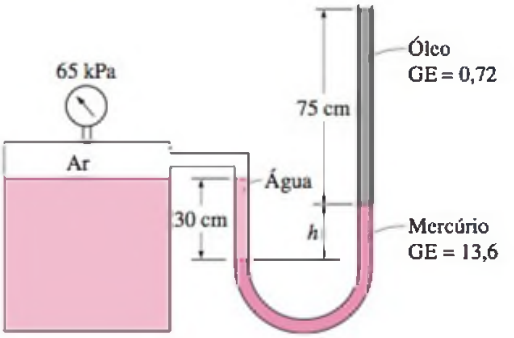


FIGURA P3–33

3–34 Repita o Problema 3–33 para uma pressão manométrica de 45 kPa.

3–35 A parte superior de um tanque de água está dividida em dois compartimentos, como mostra a Figura P3–35. Agora um fluido com uma densidade desconhecida é despejado de um lado e o nível da água sobe até determinada quantidade no outro lado para compensar esse efeito. Com base nas alturas finais do fluido mostradas na figura, determine a densidade do fluido adicionado. Suponha que o líquido não se misture com a água.

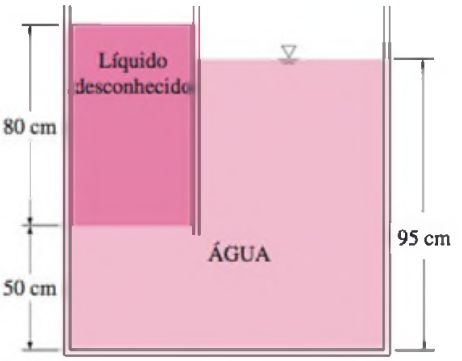


FIGURA P3–35

3–36 A carga de 500 kg do macaco hidráulico mostrado na Figura P3–36 deve ser elevada despejando-se óleo (ρ = 780 kg/m³) dentro de um tubo fino. Determine quão alto *h* deve ser para começar a levantar o peso.

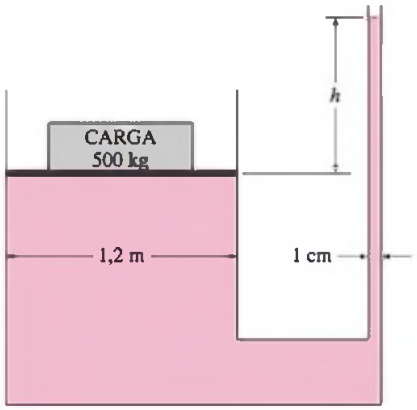


FIGURA P3–36

3–37 A pressão freqüentemente é dada em termos de uma coluna e é expressa como "carga de pressão". Expresse a pressão atmosférica padrão em termos de colunas de (*a*) mercúrio (GE = 13,6), (*b*) água (GE = 1,0) e (*c*) glicerina (GE = 1,26). Explique por que em geral usamos o mercúrio nos manômetros.

3–38 Um experimento simples há muito tempo é usado para demonstrar como a pressão negativa evita que a água seja derramada para fora de um copo invertido. Um copo completamente cheio com água e coberto com um papel fino é invertido, como mostra a Figura P3–38. Determine a pressão na parte inferior do vidro e explique por que a água não cai.

FIGURA P3–38

3–39 Duas câmaras com o mesmo fluido na base estão separadas por um pistão com peso de 25 N, como mostra a Figura P3–39. Calcule as pressões manométricas das câmaras *A* e *B*.

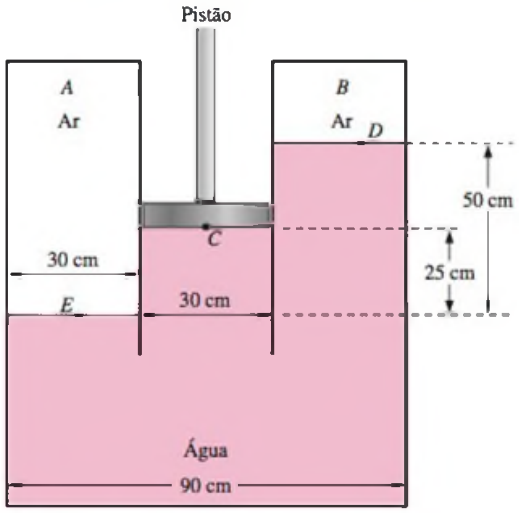


FIGURA P3–39

3–40 Considere um manômetro de fluido duplo preso a um tubo de ar mostrado na Figura P3–40. Se a gravidade específica de um fluido for 13,55, determine a gravidade específica do outro fluido para a pressão absoluta indicada do ar. Tome a pressão atmosférica como 100 kPa.

Resposta: 5,0

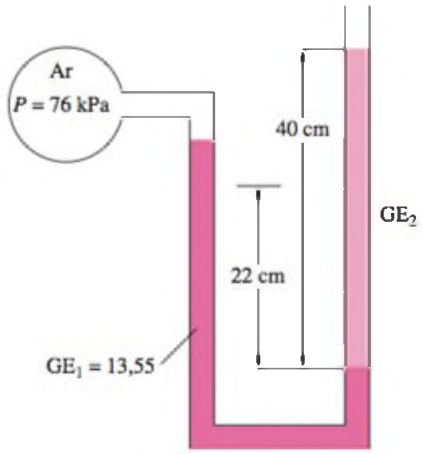


FIGURA P3–40

3–41 A diferença de pressão entre um tubo de óleo e um tubo de água é medida por um manômetro de fluido duplo, como mostra a Figura P3–41. Para as alturas de fluido e gravidades específicas dadas, calcule a diferença de pressão $\Delta P = P_B - P_A$.

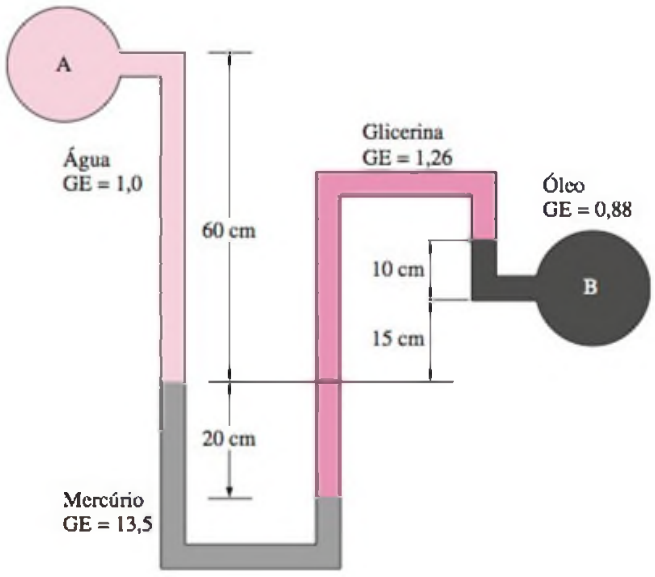


FIGURA P3–41

3–42 Considere o sistema mostrado na Figura P3–42. Se uma alteração de 0,7 kPa na pressão do ar fizer com que a interface entre a água salgada e o mercúrio da coluna da direita caia em 5 mm no nível da água salgada da coluna da direita, enquanto a pressão do tubo de água salgada permanece constante, determine a relação A_2/A_1.

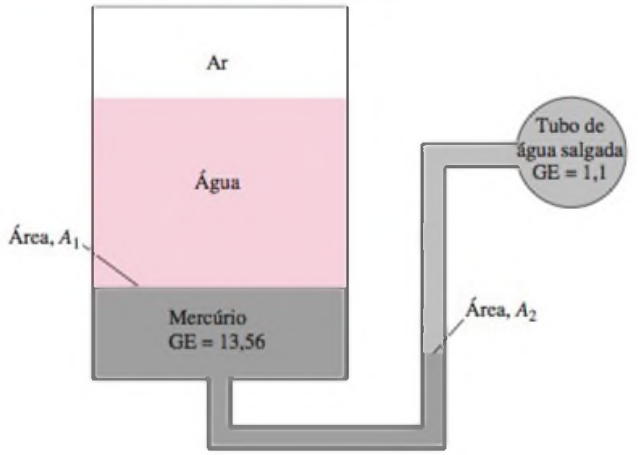


FIGURA P3–42

3–43 Os dois tanques de água estão conectados entre si através de um manômetro de mercúrio com tubos inclinados, como mostra a Figura P3–43. Se a diferença de pressão entre os dois tanques for de 20 kPa, calcule a e θ.

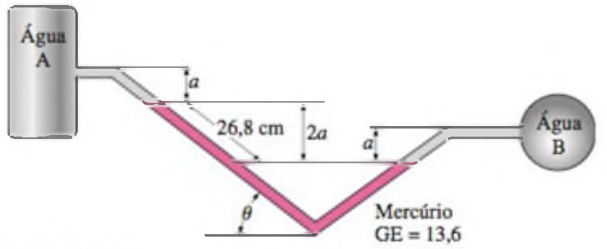


FIGURA P3–43

3–44 Um contêiner com vários fluidos está conectado a um tubo em U, como mostra a Figura P3–44. Para as gravidades específicas e alturas de coluna de fluido dadas, determine a pressão manométrica a A. Determine também a altura de uma coluna de mercúrio que criaria a mesma pressão a A. *Respostas:* 0,471 kPa, 0,353 cm

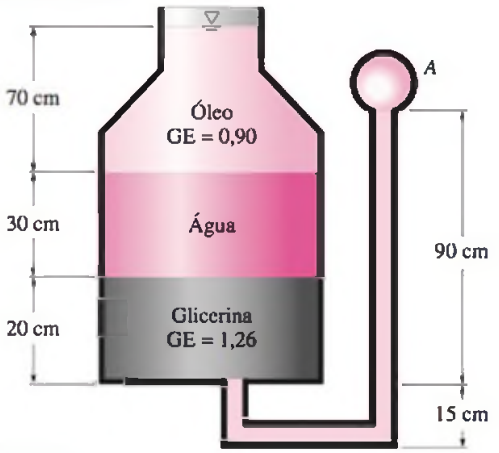


FIGURA P3–44

Estática dos Fluidos: Forças Hidrostáticas em Superfícies Planas e Curvas

3–45C Defina a força hidrostática resultante que age em uma superfície submersa e o centro da pressão.

3–46C Uma pessoa diz que pode determinar a intensidade da força hidrostática que age sobre uma superfície plana submersa na água, independentemente da forma e orientação, se ela conhecer a distância vertical do centróide da superfície à superfície livre e a área da superfície. Essa é uma alegação válida? Explique.

3–47C Uma placa plana horizontal submersa é suspensa na água por uma corda anexada ao centróide de sua superfície superior. Agora a placa é girada a 45° com relação a um eixo que passa através de seu centróide. Discuta a variação da força hidrostática que age sobre a superfície superior dessa placa como resultado da rotação. Suponha que a placa permaneça submersa durante todo o tempo.

3–48C Você já deve ter notado que a espessura de uma barragem é maior no fundo. Explique por que as barragens são construídas dessa forma.

3–49C Considere uma superfície curva submersa. Explique como você determinaria a componente horizontal da força hidrostática que age sobre essa superfície.

3–50C Considere uma superfície curva submersa. Explique como você determinaria a componente vertical da força hidrostática que age sobre essa superfície.

3–51C Considere uma superfície circular sujeita a forças hidrostáticas por um líquido de densidade constante. Se as intensidades das componentes horizontal e vertical da força hidrostática resultante forem determinadas, explique como você encontraria a linha de ação dessa força.

3–52 Considere um carro pesado submerso em água em um lago com fundo plano. A porta do motorista tem 1,1 m de altura e 0,9 m de largura, e a parte superior da porta está 8 m abaixo da superfície da água. Determine a força resultante que age sobre a porta (normal à sua superfície) e o local do centro da pressão se (*a*) o automóvel estiver bem vedado e tiver ar à pressão atmosférica e (*b*) o automóvel estiver cheio de água.

3–53 Considere uma piscina com 4 m de comprimento, 4 m de largura e 1,5 m de altura acima do solo que está cheia de água até a borda. (*a*) Determine a força hidrostática de cada parede e a distância da linha de ação dessa força ao solo. (*b*) Se o peso das paredes da piscina dobrar e a piscina estiver cheia, a força hidrostática de cada parede dobrará ou quadruplicará? Por quê? *Resposta:* (a) 44,1 kN

3–54 Uma sala no nível inferior de um navio de cruzeiro tem uma janela circular com 30 cm de diâmetro. Se o ponto médio da janela estiver 5 m abaixo da superfície da água, determine a força hidrostática que age sobre a janela e o centro de pressão. Tome a densidade da água do mar como 1,025. *Respostas:* 3.554 N, 5,001 m

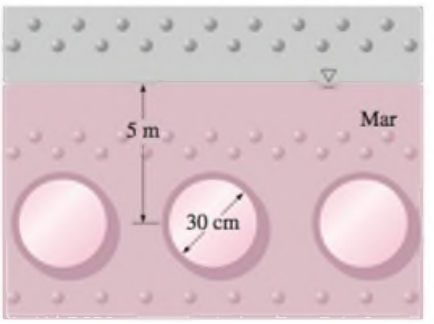


FIGURA P3–54

3–55 O lado em contato com a água da parede de uma represa com 100 m de comprimento é um quarto de círculo com raio de 10 m. Determine a força hidrostática sobre a barragem e sua linha de ação quando ela estiver cheia até a borda.

3–56 Uma placa retangular com 4 m de altura e 5 m de largura bloqueia a lateral de um canal de água doce com 4 m de profundidade, como mostra a Figura P3–56. A placa tem dobradiças em torno de um eixo horizontal ao longo do lado superior em um ponto *A* e sua abertura é impedida por uma saliência no ponto *B*. Determine a força exercida sobre a placa pela saliência.

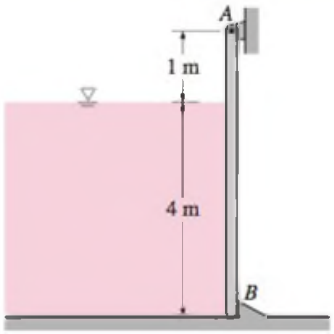


FIGURA P3–56

3–57 Reconsidere o Problema 3–56. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito da profundidade da água sobre a força exercida na placa pela saliência. Faça a profundidade da água variar de 0 a 5 m em incrementos de 0,5 m. Tabule e mostre graficamente os resultados.

3–58 Uma calha de água de seção transversal semicircular com raio de 0,5 m consiste em duas partes simétricas com dobradiças entre as partes inferiores, como mostra a Figura P3–58. As duas partes são mantidas juntas por um cabo e esticador colocados a cada 3 m ao longo do comprimento da calha. Calcule a tensão em cada cabo quando a calha está cheia até a borda.

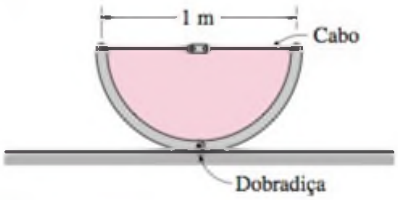


FIGURA P3–58

3–59 Os dois lados de uma calha de água em forma de V têm dobradiças na parte inferior onde eles se encontram, como mostra a Figura P3–59, formando um ângulo de 45° com o solo em ambos os lados. Cada lado tem 0,75 m de largura e as duas partes são mantidas unidas por um cabo e esticador colocados a cada 6 m ao longo do comprimento da calha. Calcule a tensão em cada cabo quando a calha está cheia até a borda. *Resposta:* 5.510 N

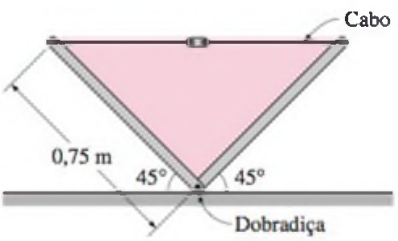


FIGURA P3–59

3–60 Repita o Problema 3–59 para o caso de uma calha parcialmente cheia com água até a altura de 0,4 m diretamente acima da dobradiça.

3–61 Um muro de arrimo contra um deslizamento de lama deve ser construído colocando-se blocos de concreto retangulares de 0,8 m de altura e 0,2 m de largura ($\rho = 2.700$ kg/m^3) lado a lado, como mostra a Figura P3–61. O coeficiente de atrito entre o solo e os blocos de concreto é $f = 0{,}3$, e a densidade da lama é de cerca de 1.800 kg/m^3. Existe a preocupação de que os blocos de concreto deslizem ou escapem da aresta esquerda inferior à medida que o nível de lama suba. Determine a altura da lama na qual (*a*) os blocos superarão o atrito e começarão a deslizar e (*b*) escaparão.

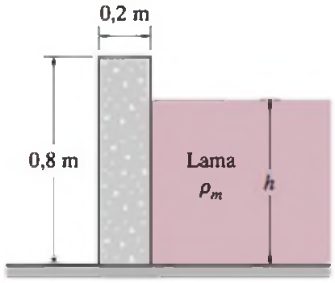


FIGURA P3–61

3–62 Repita o Problema 3–61 para blocos de concreto com 0,4 m de largura.

3–63 Uma comporta na forma de um quarto de círculo e 4 m de comprimento, com raio de 3 m e peso desprezível está ligada com dobradiças à sua aresta superior *A*, como mostra a Figura P3–63. A comporta controla o escoamento da água acima da borda em *B*, onde é pressionada por uma mola. Determine a força mínima da mola necessária para manter a comporta fechada quando o nível da água sobe até *A* na aresta superior da comporta.

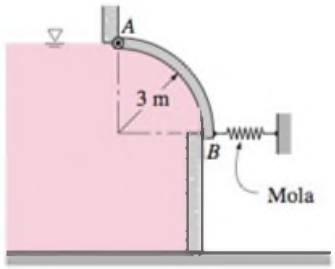


FIGURA P3–63

3–64 Repita o Problema 3–63 para um raio de 4 m para a comporta. *Resposta:* 314 kN

Flutuação

3–65C O que é força de flutuação? O que a causa? Qual é a intensidade da força de flutuação que age sobre um corpo submerso cujo volume é *V*? Quais são a direção e a linha de ação da força de flutuação?

3–66C Considere duas bolas esféricas idênticas submersas em água a profundidades diferentes. As forças de flutuação que agem sobre essas duas bolas serão iguais ou diferentes? Explique.

3–67C Considere duas bolas esféricas com 5 cm de diâmetro – uma feita de alumínio e a outra de ferro – submersas em água. As forças de flutuação que agem sobre essas duas bolas serão iguais ou diferentes? Explique.

3–68C Considere um cubo de cobre com 3 kg e uma bola de cobre com 3 kg submersas em líquido. As forças de flutuação que agem sobre essas duas bolas serão iguais ou diferentes? Explique.

3–69C Discuta a estabilidade de um corpo (*a*) submerso e (*b*) flutuante cujo centro de gravidade está acima do centro de flutuação.

3–70 A densidade de um líquido deve ser determinada por um velho hidrômetro cilíndrico com 1 cm de diâmetro cujas marcas de divisão foram completamente apagadas. A princípio o hidrômetro é colocado na água e o nível de água é marcado. Em seguida, o hidrômetro é solto no outro líquido e observa-se que a marca da água fica a 0,5 cm acima da interface entre o líquido e o ar. Se a altura da marca da água for 10 cm, determine a densidade do líquido.

FIGURA P3–70

3–71 O volume e a densidade média de um corpo de forma irregular devem ser determinados usando-se uma balança de mola. O corpo pesa 7.200 N no ar e 4.790 N na água. Determine o volume e a densidade do corpo. Diga quais as suas hipóteses.

3–72 Considere um grande bloco de gelo cúbico flutuando na água do mar. As densidades do gelo e da água do mar são 0,92 e 1,025, respectivamente. Se uma parte com 10 cm de altura do bloco de gelo ficar acima da superfície da água, determine a altura do bloco de gelo abaixo da superfície. *Resposta:* 87,6 cm

FIGURA P3–72

3–73 Uma pedra de granito de 170 kg (ρ = 2.700 kg/m^3) é solta em um lago. Um homem mergulha e tenta erguer a pedra. Determine quanta força o homem precisa aplicar para levantá-la do fundo do lago. Você acha que ele consegue fazer isso?

3–74 Diz-se que Arquimedes descobriu seu princípio durante um banho enquanto pensava sobre como poderia determinar se a coroa do rei Hiero era feita realmente de ouro puro. Enquanto estava na banheira, ele concebeu a idéia de que poderia determinar a densidade média de um objeto com forma irregular pesando-o no ar e também na água. Se a coroa pesar 3,20 kgf (= 31,4 N) no ar e 2,95 kgf (= 28,9 N) na água, determine se ela é feita de ouro puro. A densidade do ouro é 19.300 kg/m^3. Discuta como é possível resolver este problema sem pesar a coroa na água, mas usando um balde comum sem nenhuma medição do volume. Você pode pesar qualquer coisa no ar.

3–75 Um dos procedimentos comuns dos programas de condicionamento físico é determinar a relação entre gordura e músculos do corpo. Ela se baseia no princípio de que o tecido muscular é mais denso do que o tecido gorduroso e, portanto, quanto maior a densidade média do corpo, mais alta a fração de tecido muscular A densidade média do corpo pode ser determinada pesando-se a pessoa no ar e também enquanto ela está submersa na água de um tanque. Tratando todos os tecidos e ossos (além da gordura) como músculo com densidade equivalente a $\rho_{músculo}$, obtenha uma relação para a fração de volume da gordura do corpo x_{gord}. *Resposta:* $x_{gord} = (\rho_{músculo} - \rho_{méd})/(\rho_{músculo} - \rho_{gord})$.

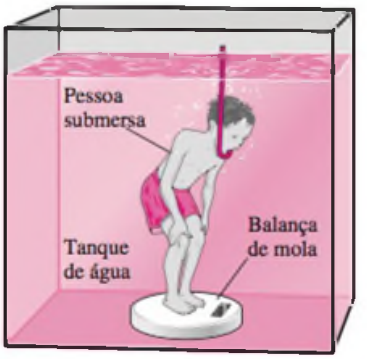


FIGURA P3–75

3–76 O casco de um barco tem um volume de 150 m^3, e a massa total do barco vazio é 8.560 kg. Determine quanta carga esse barco pode carregar sem afundar (*a*) em um lago e (*b*) na água do mar com uma densidade de 1,03.

Fluidos em Movimento de Corpo Rígido

3–77C Sob quais condições um corpo móvel de fluido pode ser tratado como um corpo rígido?

3–78C Considere um copo com água. Compare as pressões da água na superfície inferior nos seguintes casos: o copo está (*a*) parado, (*b*) movendo-se para cima a velocidade constante, (*c*) movendo-se para baixo a velocidade constante e (*d*) movendo-se horizontalmente a velocidade constante.

3–79C Considere dois copos idênticos com água, um parado e o outro se movendo em um plano horizontal com aceleração constante. Considerando que não haja derramamento, qual copo terá a pressão mais alta (*a*) na parte da frente, (*b*) no ponto médio e (*c*) na parte de trás da superfície inferior?

3–80C Considere um contêiner cilíndrico vertical parcialmente preenchido com água. Agora o cilindro é posto a girar com relação a seu eixo a uma velocidade angular especificada, e o movimento de corpo rígido é estabelecido. Discuta como a pressão será afetada no ponto médio e na borda da superfície inferior devido à rotação.

3–81 Um tanque de água está sendo rebocado por um caminhão em uma estrada plana e o ângulo que a superfície livre faz com a horizontal é medido como 15°. Determine a aceleração do caminhão.

3–82 Considere dois tanques cheios de água. O primeiro tem 8 m de altura e está parado, enquanto o segundo tem 2 m de altura e está se movimentando para cima com uma aceleração de 5 m/s^2. Qual tanque terá uma pressão mais alta na parte inferior?

3–83 Um tanque de água está sendo rebocado em uma estrada inclinada que faz 20° com a horizontal a uma aceleração constante de 5 m/s^2 na direção do movimento. Determine o ângulo

que a superfície livre da água faz com a horizontal. O que você responderia se a direção do movimento fosse descendente na mesma estrada com a mesma aceleração?

3–84 Um tanque cilíndrico de água com 60 cm de altura e 40 cm de diâmetro está sendo transportado em uma estrada plana. A maior aceleração prevista é de 4 m/s^2. Determine a altura inicial permitida da água no tanque se nenhuma água poder ser derramada durante a aceleração. *Resposta:* 51,8 cm

3–85 Um contêiner cilíndrico vertical com 40 cm de diâmetro e 90 cm de altura é preenchido parcialmente com água até 60 cm de altura. Agora o cilindro é girado a velocidade angular constante de 120 rpm. Determine quanto cairá o nível do líquido no centro do cilindro como resultado desse movimento de rotação.

3–86 Um aquário que contém água até 40 cm de altura é transportado na cabine de um elevador. Determine a pressão na parte inferior do tanque quando o elevador está (*a*) parado, (*b*) movendo-se para cima com aceleração de 3 m/s^2 e (*c*) movendo-se para baixo com aceleração para baixo de 3 m/s^2.

3–87 Um caminhão-tanque de leite cilíndrico vertical com 3 m de diâmetro gira à taxa constante de 12 rpm. Se a pressão no centro da parte inferior da superfície for de 130 kPa, determine a pressão na borda da superfície inferior do tanque. Considere que a densidade do leite seja de 1.030 kg/m^3.

3–88 Leite com densidade de 1.020 kg/m^3 é transportado em uma estrada plana em um tanque cilíndrico com 7 m de comprimento e 3 m de diâmetro. O caminhão-tanque é preenchido completamente com leite (sem espaço para ar) e acelera a 2,5 m/s^2. Se a pressão mínima do caminhão-tanque for de 100 kPa, determine a pressão máxima e sua localização. *Resposta:* 47,9 kPa

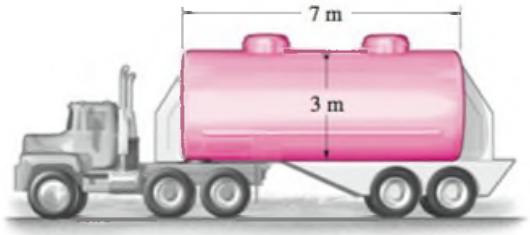


FIGURA P3–88

3–89 Repita o Problema 3–88 para uma desaceleração de 2,5 m/s^2.

3–90 A distância entre os centros dos dois braços do tubo em U aberto para a atmosfera é de 25 cm e o tubo em U contém 20 cm de altura de álcool em ambos os braços. Agora o tubo em U é posto a girar em torno do braço esquerdo a 4,2 rad/s. Determine a diferença de altura entre as superfícies do fluido nos dois braços.

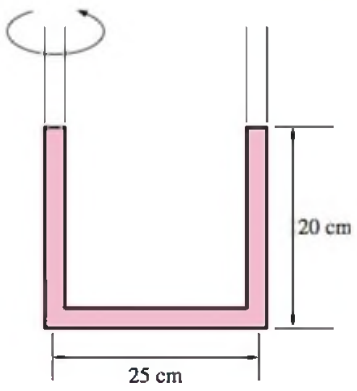


FIGURA P3–90

3–91 Um cilindro vertical vedado com 1,2 m de diâmetro e 3 m de altura é preenchido completamente com gasolina, cuja densidade é de 740 kg/m^3. Agora o tanque é posto a girar em torno de seu eixo vertical a taxa de 70 rpm. Determine (*a*) a diferença entre as pressões nos centros das superfícies inferior e superior e (*b*) a diferença entre as pressões no centro e na borda da superfície inferior.

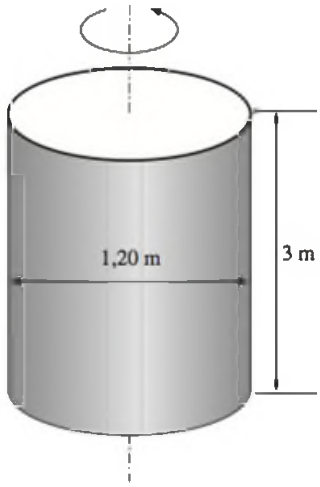


FIGURA P3–91

3–92 Reconsidere o Problema 3–91. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito da velocidade de rotação sobre a diferença de pressão entre o centro e a borda da superfície inferior do cilindro. Faça a velocidade de rotação variar de 0 rpm até 500 rpm em incrementos de 50 rpm. Tabule e represente graficamente os resultados.

3–93 Um tanque cilíndrico com 3 m de diâmetro e 7 m de comprimento é preenchido completamente com água. O tanque é puxado por um caminhão em uma estrada nivelada com o eixo de 7 m de comprimento na horizontal. Determine a diferença de pressão entre a parte dianteira e traseira do tanque ao longo de uma reta horizontal quando o caminhão (*a*) acelera a 3 m/s^2 e (*b*) desacelera a 4 m/s^2.

Problemas de Revisão

3–94 Um sistema de condicionamento de ar exige que uma seção com 20 m de comprimento de um sistema de dutos com 15 cm de diâmetro seja instalada sob a água. Determine a força para cima que a água exercerá sobre o duto. Tome as densidades do ar e da água como 1,3 kg/m^3 e 1.000 kg/m^3, respectivamente.

3–95 Os balões normalmente são cheios com gás hélio porque ele tem apenas um sétimo do peso do ar sob condições idênticas. A força de flutuação, que pode ser expressa como $F_b = \rho_{ar} g V_{balão}$, empurrará o balão para cima. Se o balão tiver um diâmetro de 10 m e transportar duas pessoas pesando 70 kg cada, determine a aceleração do balão quando ele for solto. Considere que a densidade do ar seja ρ = 1,16 kg/m^3, e despreze o peso dos cabos e da gaiola.
Resposta: 16,5 m/s^2

FIGURA P3–95

3–96 Reconsidere o Problema 3–95. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito do número de pessoas transportadas no balão sobre a aceleração. Mostre graficamente a aceleração como função do número de pessoas e discuta os resultados.

3–97 Determine a quantidade máxima de carga, em kg, que o balão descrito no Problema 3–95 pode transportar. *Resposta:* 520,6 kg

3–98 O barômetro básico pode ser usado como um dispositivo de medição da altitude em aviões. O controle de terra reporta uma leitura barométrica de 753 mmHg enquanto a leitura do piloto é de 690 mmHg. Estime a altitude do avião com relação ao nível do solo quando a densidade média do ar é de 1,20 kg/m^3. *Resposta:* 714 m

3–99 A metade inferior de um contêiner cilíndrico com 10 m de altura é preenchida com água (ρ = 1.000 kg/m^3) e a metade superior com óleo que tem gravidade específica de 0,85. Determine a diferença de pressão entre a parte superior e inferior do cilindro. *Resposta:* 90,7 kPa

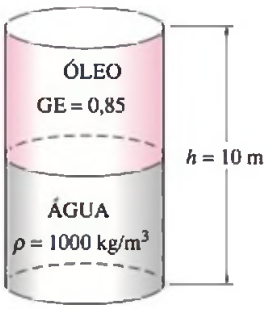


FIGURA P3–99

3–100 Um dispositivo de cilindro e pistão sem atrito e vertical contém um gás a 500 kPa. A pressão atmosférica externa é de 100 kPa e a área do pistão é de 30 cm^2. Determine a massa do pistão.

3–101 Uma panela de pressão cozinha muito mais rápido do que uma panela comum mantendo a pressão e a temperatura internas mais altas. A tampa de uma panela de pressão é bem vedada e o vapor só pode escapar pela abertura no meio da tampa. Uma peça de metal separada, a válvula, fica na parte superior dessa abertura e evita que o vapor escape até que a força da pressão supere o peso da válvula. O escape periódico de vapor dessa forma evita acúmulo de pressão potencialmente perigoso e mantém a pressão interna com valor constante. Determine a massa da válvula de uma panela de pressão cuja pressão operacional manométrica é de 100 kPa e cuja abertura tem uma seção transversal de 4 mm^2. Considere a pressão atmosférica de 101 kPa, e desenhe o diagrama de corpo livre da válvula. *Resposta:* 40,8 g

FIGURA P3–101

3–102 Um tubo de vidro é anexado a um cano de água, como mostra a Figura P3–102. Se a pressão da água na parte inferior do tubo for de 115 kPa e a pressão atmosférica local for de 92 kPa, determine até qual altura a água subirá no tubo, em m. Considere g = 9,8 m/s^2 naquele local e tome a densidade da água como 1.000 kg/m^3.

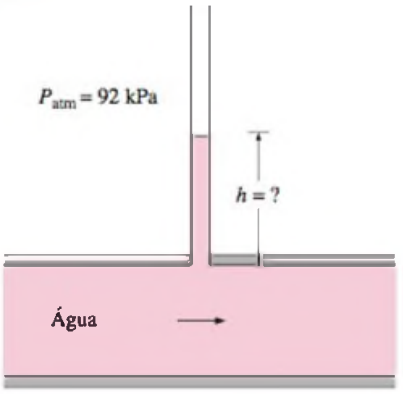


FIGURA P3–102

3–103 A pressão atmosférica média na Terra é aproximada como uma função da altitude pela relação P_{atm} = 101,325 $(1 - 0{,}02256z)^{5{,}256}$, onde P_{atm} é a pressão atmosférica em kPa e z é a altitude em km com z = 0 no nível do mar. Determine as pressões atmosféricas aproximadas em Atlanta (z = 306 m), Denver (z = 1.610 m), Cidade do México (z = 2.309 m) e no alto do Monte Everest (z = 8.848 m).

3–104 Ao medir diferenças de pressão pequenas com um manômetro, quase sempre um braço do manômetro é inclinado para melhorar a exatidão da leitura. (A diferença de pressão ainda é proporcional à distância *vertical*, e não ao comprimento real do fluido ao longo do tubo.) A pressão do ar em um duto circular deve ser medida usando-se um manômetro cujo braço aberto está inclinado a 35° da horizontal, como mostra a Figura P3–104. A densidade do líquido no manômetro é de 0,81 kg/L, e a distância vertical entre os níveis de fluido dos dois braços do manômetro é de 8 cm. Determine a pressão manométrica do ar no duto e o comprimento da coluna de fluido no braço inclinado acima do nível do fluido no braço vertical.

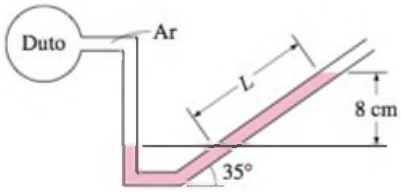


FIGURA P3–104

3–105 Infusões intravenosas em geral são movidas pela gravidade, pendurando-se a garrafa do fluido a uma altura suficiente para contrabalançar a pressão do sangue na veia e forçar o fluido a entrar no corpo. Quanto mais alto a garrafa for elevada, maior será a taxa de escoamento do fluido. (*a*) Se for observado que as pressões do fluido e do sangue se equilibram quando a garrafa está a 1,2 m acima do nível do braço, determine a pressão manométrica do sangue. (*b*) Se a pressão manométrica do fluido no nível do braço precisar ser de 20 kPa para que a taxa de escoamento seja suficiente, determine a que altura a garrafa deve ser colocada. Tome a densidade do fluido como 1.020 kg/m^3.

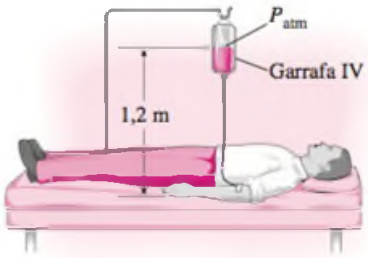


FIGURA P3–105

3–106 Uma linha de gasolina está conectada a um medidor de pressão através de um manômetro duplo em U, como mostra a Figura P3–106. Se a leitura da pressão manométrica for de 370 kPa, determine a pressão manométrica da linha de gasolina.

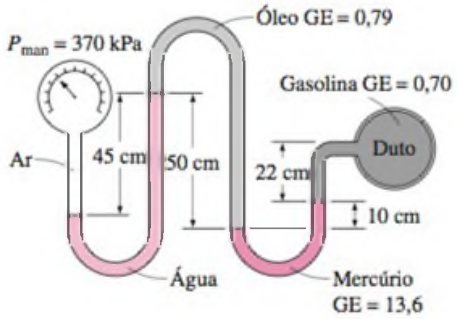


FIGURA P3–106

3–107 Repita o Problema 3–106 para uma leitura de pressão manométrica de 240 kPa.

3–108 A pressão da água escoando através de um duto é medida pelo dispositivo mostrado na Figura P3–108. Para os valores dados, calcule a pressão no duto.

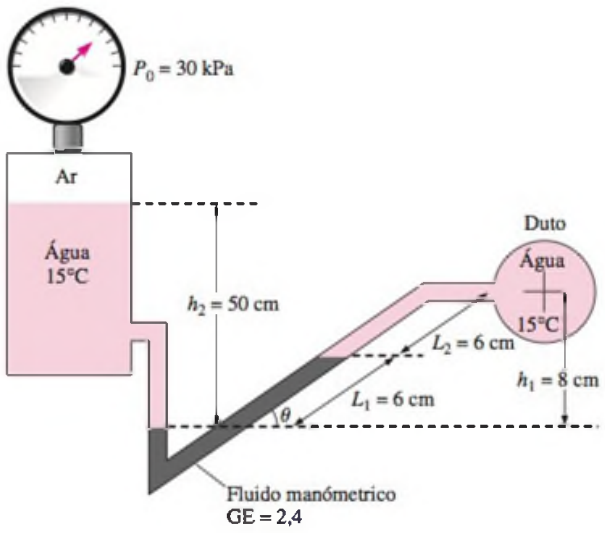


FIGURA P3–108

3–109 Considere um tubo em U preenchido com mercúrio, exceto por 18 cm de altura na parte superior, como mostra a Figura P3–109. O diâmetro do braço direito do tubo em U é D = 2 cm e o diâmetro do braço esquerdo é o dobro disso. Óleo com gravidade específica de 2,72 é despejado no braço esquerdo, forçando parte do mercúrio do braço esquerdo a passar para o direito. Determine a quantidade máxima de óleo que pode ser adicionada ao braço esquerdo.

Resposta: 0,256 L

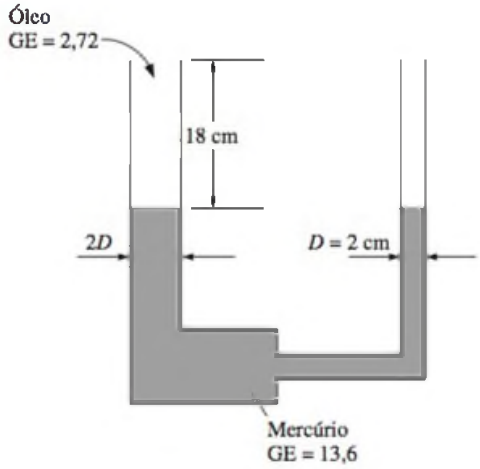


FIGURA P3–109

3–110 Um bule de chá com infusor na parte superior é usado para fazer chá, como mostra a Figura P3–110. O infusor pode impedir parcialmente que o vapor escape, fazendo com que a pressão no bule suba e ocorra um transbordamento do tubo de serviço. Desprezando a expansão térmica e a variação na quantidade de água do tubo de serviço com relação à quantidade de água do bule, determine o peso máximo da água fria que não causaria um transbordamento a pressões manométricas de até 0,32 kPa para o vapor.

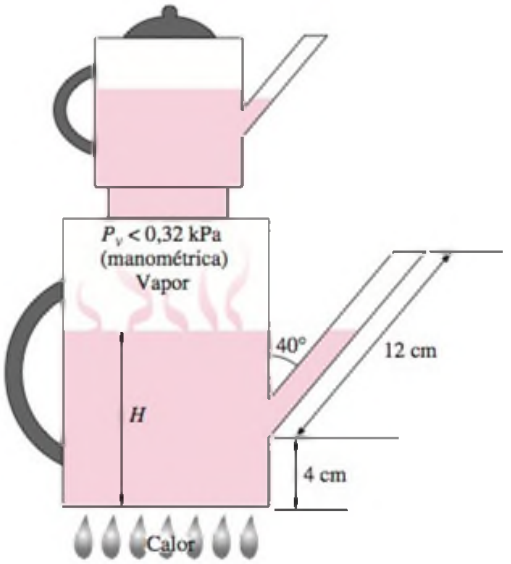


FIGURA P3–110

3–111 Repita o Problema 3–110 levando em conta a expansão térmica da água à medida que ela é aquecida de 20°C até a temperatura de ebulição de 100°C.

3–112 É sabido que a temperatura da atmosfera varia com a altitude. Na troposfera, que se estende até uma altitude de 11 km, por exemplo, a variação da temperatura pode ser aproximada por $T = T_0 - \beta z$, onde T_0 é a temperatura no nível do mar, que pode ser tomada como 288,15 K e $\beta = 0{,}0065$ K/m. A aceleração da gravidade também muda com a altitude, uma vez que $g(z) = g_0/(1 + z/6.370.320)^2$ onde $g_0 = 9{,}807$ m/s^2 e z é a altitude com relação ao nível do mar em m. Obtenha uma relação para a variação de pressão na troposfera (*a*) ignorando e (*b*) considerando a variação de g com a altitude.

3–113 A variação da pressão com a densidade em uma camada de gás espessa é dada por $P = C\rho^n$, onde C e n são constantes. Observando que a variação de pressão em uma camada de fluido diferencial com espessura dz na direção vertical z é dada por $dP = -\rho g\, dz$, obtenha uma relação para a pressão como função da elevação z. Considere a pressão e a densidade em $z = 0$ como P_0 e ρ_0, respectivamente.

3–114 Os transdutores de pressão normalmente são usados para medir a pressão gerando sinais analógicos que em geral variam de 4 mA até 20 mA ou 0 V dc até 10 V dc em resposta à pressão aplicada. O sistema cuja representação esquemática é mostrado na Figura P3–114 pode ser usado para calibrar os transdutores de pressão. Um contêiner rígido é preenchido com ar pressurizado e a pressão é medida pelo manômetro anexado a ele. Uma válvula é usada para regular a pressão no contêiner. A pressão e o sinal elétrico são medidos simultaneamente para várias configurações, e os resultados são tabulados. Para o conjunto dado de medições, obtenha a curva de calibração na forma de $P = aI + b$, onde a e b são constantes e calcule a pressão que corresponde a um sinal de 10 mA.

Δh, mm	28,0	181,5	297,8	413,1	765,9
I, mA	4,21	5,78	6,97	8,15	11,76
Δh, mm	1027	1149	1362	1458	1536
I, mA	14,43	15,68	17,86	18,84	19,64

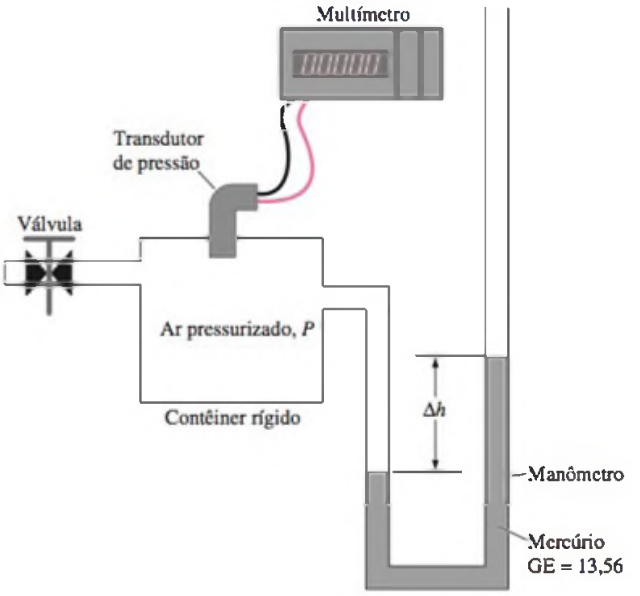


FIGURA P3–114

3–115 Um sistema está equipado com dois medidores de pressão e um manômetro, como mostra a Figura P3–115. Para $\Delta h = 8$ cm, determine a diferença de pressão $\Delta P = P_2 - P_1$.

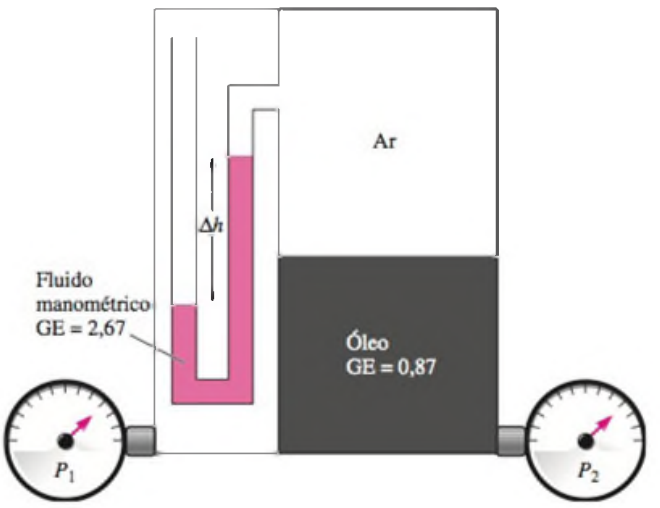


FIGURA P3–115

3–116 Uma tubulação de óleo e um tanque rígido de ar de 1,3 m^3 estão conectados entre si por um manômetro, como mostra a Figura P3–116. Se o tanque tiver 15 kg de ar a 80°C, determine (*a*) a pressão absoluta na tubulação e (*b*) a variação de Δh quando a temperatura do tanque cair até 20°C. Considere que a pressão na tubulação de óleo permaneça constante e que o volume de ar no manômetro seja desprezível com relação ao volume do tanque.

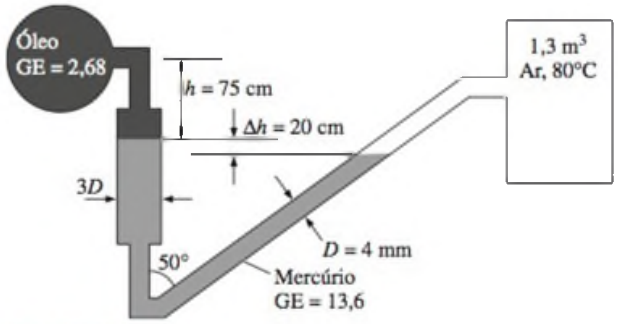


FIGURA P3–116

3–117 A densidade de um corpo flutuante pode ser determinada ligando-se pesos ao corpo até que o corpo e os pesos estejam completamente submersos e, em seguida, pesando-os separadamente no ar. Considere uma tora de madeira que pese 1.540 N no ar. Se forem precisos 34 kg de chumbo (ρ = 11.300 kg/m³) para afundar completamente a tora e o chumbo na água, determine a densidade média da tora.

Resposta: 835 kg/m³

3–118 A comporta retangular de 200 kg e 5 m de largura mostrada na Figura P3–118 tem dobradiças em *B* e se inclina contra o piso em *A*, formando um ângulo de 45° com a horizontal. A comporta deve ser aberta pelo lado mais baixo aplicando-se uma força normal ao seu centro. Determine a força mínima *F* necessária para abrir a comporta de água.

Resposta: 520 kN

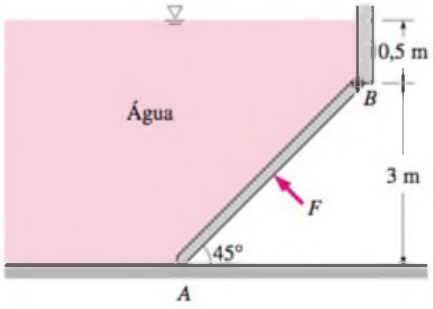


FIGURA P3–118

3–119 Repita o Problema 3–118 para uma altura da água de 1,2 m acima da dobradiça em *B*.

3–120 Uma comporta retangular com 3 m de altura e 6 m de largura tem dobradiças na parte superior em *A* e é restrita por uma saliência fixa em *B*. Determine a força hidrostática exercida sobre a porta pela água a 5 m de altura e o local do centro de pressão.

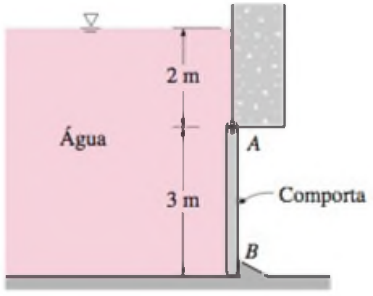


FIGURA P3–120

3–121 Repita o Problema 3–120 para uma altura de água total de 2 m.

3–122 Um domo hemisférico de 50 ton e diâmetro de 6 m sobre uma superfície nivelada é preenchido com água, como mostra a Figura P3–122. Uma pessoa diz que pode elevar esse domo utilizando a lei de Pascal e acoplando um tubo longo ao topo e preenchendo-o com água. Determine a altura de água necessária no tubo para elevar o domo. Despreze o peso do tubo e da água que ele contém. *Resposta:* 0,77 m

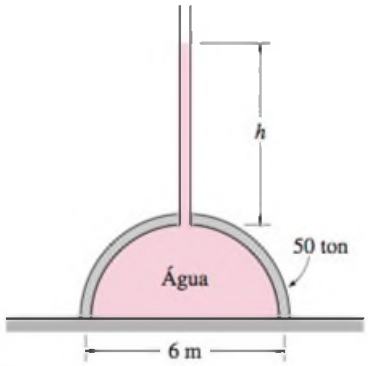


FIGURA P3–122

3–123 A água de um reservatório com 25 m de profundidade é mantida no seu interior por uma parede com 150 m de largura cuja seção transversal é um triângulo eqüilátero, como mostra a Figura P3–123. Determine (*a*) a força total (hidrostática + atmosférica) que age sobre a superfície interna da parede e sua linha de ação e (*b*) a intensidade da componente horizontal dessa força. Considere P_{atm} = 100 kPa.

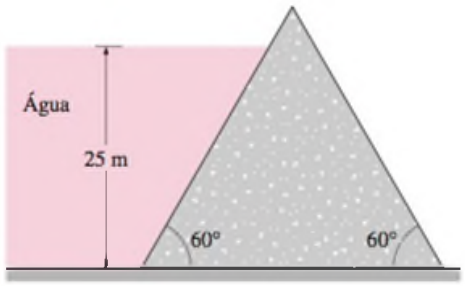


FIGURA P3–123

3–124 Um tubo em U contém água no braço direito e outro líquido no braço esquerdo. Observa-se que, quando o tubo em U gira a 30 rpm em torno do eixo que está a 15 cm do braço direito e 5 cm do braço esquerdo, os níveis de líquido em ambos os braços se igualam. Determine a densidade do fluido no braço esquerdo.

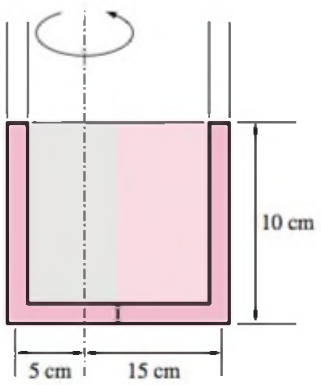


FIGURA P3–124

3–125 Um cilindro vertical com 1 m de diâmetro e 2 m de altura é preenchido completamente com gasolina, cuja densidade é de 740 kg/m³. O tanque agora é posto a rotar em torno do seu eixo vertical a uma taxa de 90 rpm, enquanto é acelerado para cima a 5 m/s². Determine (*a*) a diferença entre as pressões nos centros das superfícies inferior e superior e (*b*) a diferença entre as pressões no centro e na borda da superfície inferior.

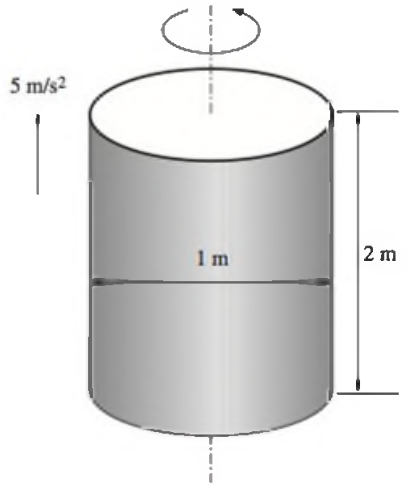


FIGURA P3–125

3–126 Um tanque com 5 m de comprimento e 4 m de altura contém água a uma profundidade de 2,5 m quando não está em movimento e é aberto para a atmosfera através de uma ventilação no meio. Agora o tanque é acelerado até a direita em uma superfície nivelada a 2 m/s². Determine a pressão máxima do tanque com relação à pressão atmosférica.

Resposta: 29,5 kPa

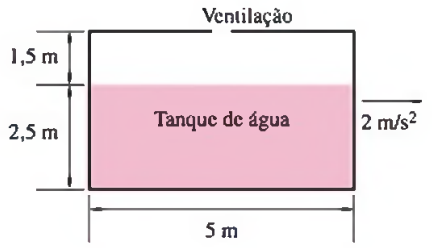


FIGURA P3–126

3–127 Reconsidere o Problema 3–126. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito da aceleração sobre a inclinação da superfície livre da água do tanque. Faça a aceleração variar de 0 m/s² até 5 m/s² em incremento de 0,5 m/s². Tabule e mostre graficamente os resultados.

3–128 Um balão de ar elástico com diâmetro de 30 cm é acoplado à base de um contêiner parcialmente preenchido com água a +4°C, como mostra a Figura P3–128. Se a pressão do ar acima da água aumentar gradualmente de 100 kPa até 1,6 MPa, a força no cabo variará? Nesse caso, qual é a variação percentual da força? Suponha que a pressão na superfície livre e o diâmetro do balão estejam relacionados por $P = CD^n$, onde C é uma constante e $n = -2$. O peso do balão e do ar que há nele são desprezíveis.

Resposta: 98,4%

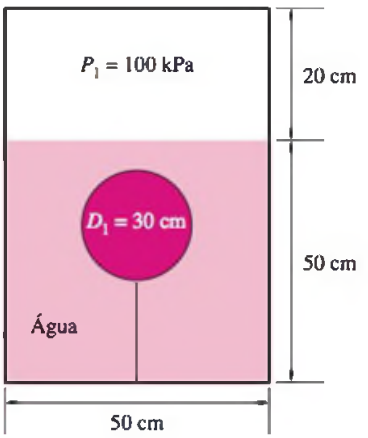


FIGURA P3–128

3–129 Reconsidere o Problema 3–128. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito da pressão do ar acima da água sobre a força no cabo. Faça a pressão variar de 0,1 MPa até 10 MPa. Represente graficamente a força do cabo *versus* a pressão do ar.

3–130 A densidade média dos icebergs é de cerca de 917 kg/m³. (*a*) Determine a porcentagem do volume total de um iceberg submerso em água do mar com densidade de 1.042 kg/m³. (*b*) Embora os icebergs estejam quase totalmente submersos, observa-se que eles viram. Explique como isso pode acontecer. (Sugestão: Considere as temperaturas dos icebergs e da água do mar.)

3–131 Um contêiner cilíndrico cujo peso é de 79 N é invertido e pressionado na água, como mostra a Figura P3–131. Determine a altura diferencial h do manômetro e a força F necessária para manter o contêiner na posição mostrada.

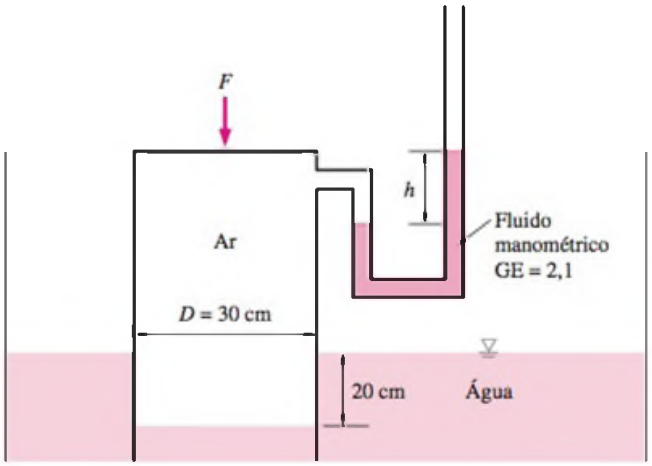


FIGURA P3–131

Problemas de Projeto e Ensaio

3–132 É preciso projetar sapatos que permitam a pessoas com até 80 kg caminhar sobre água doce ou água do mar. Os sapatos devem ser feitos de plástico injetado na forma de uma esfera, uma bola de futebol americano, ou na forma de um pão italiano. Determine o diâmetro equivalente de cada sapato e comente as formas propostas sob o ponto de vista da estabilidade. Qual é sua avaliação para a facilidade de comercialização desses sapatos?

3–133 O volume de uma rocha deve ser determinado sem usar nenhum dispositivo de medição de volume. Explique como você faria isso com uma balança de mola à prova de água.

CAPÍTULO

4

CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

A *cinemática dos fluidos* trata da descrição do movimento dos fluidos sem necessariamente considerar as forças e os momentos que *causam* o movimento. Neste capítulo, apresentamos diversos conceitos cinemáticos relacionados ao escoamento dos fluidos. Discutimos a *derivada material* e seu papel na transformação das equações de conservação na *descrição lagrangiana do escoamento de fluidos* (seguindo uma *partícula fluida*) para a *descrição euleriana do escoamento dos fluidos* (relativo a um *campo de escoamento*). Em seguida, discutimos as diversas maneiras de visualizar os campos de escoamento — *linhas de corrente, linhas de emissão, linhas de trajetória, linhas de tempo* e os métodos óticos *estereoscópico* e *gráfico por sombras* — e descrevemos três maneiras de representar graficamente os dados do escoamento — *gráficos de perfil, gráficos vetoriais* e *gráficos de curvas de contorno*. Explicamos as quatro propriedades fundamentais da cinemática de movimento e deformação dos fluidos — *taxa de translação, taxa de rotação, taxa de deformação linear* e *taxa de deformação por cisalhamento*. Os conceitos da *vorticidade, rotacionalidade* e *irrotacionalidade* dos escoamentos de fluido também são discutidos. Finalmente, discutimos o *teorema de transporte de Reynolds (TTR)*, enfatizando seu papel na transformação das equações do movimento daquelas que seguem um *sistema* para aquelas que consideram o escoamento do fluido para dentro e para fora de um *volume de controle*. A analogia entre a derivada material para elementos fluidos infinitesimais e o TTR para volumes de controle finitos é explicada.

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura deste capítulo você deve ser capaz de:

- Entender o papel da derivada material na transformação entre as descrições lagrangiana e euleriana
- Distinguir entre diversos tipos de visualizações de escoamento e métodos de representação gráfica das características de um escoamento de fluido
- Ter uma percepção das diversas maneiras pelas quais os fluidos se movem e se deformam
- Distinguir entre regiões rotacionais e irrotacionais do escoamento com base na vorticidade do escoamento
- Entender a utilidade do teorema de transporte de Reynolds

FIGURA 4–1
Com um número pequeno de objetos, como bolas de bilhar em uma mesa de sinuca, os objetos individuais podem ser acompanhados.

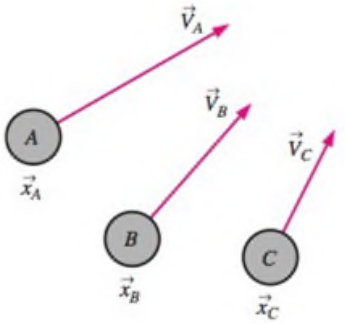


FIGURA 4–2
Na descrição lagrangiana, é preciso acompanhar a posição e a velocidade das partículas individuais.

4–1 • DESCRIÇÕES LAGRANGIANA E EULERIANA

O assunto chamado **cinemática** diz respeito ao estudo do *movimento*. Na dinâmica dos fluidos, a *cinemática dos fluidos* é o estudo de como os fluidos escoam e de como descrever o movimento de fluidos. Sob um ponto de vista fundamental, existem duas formas distintas de descrever o movimento. A primeira e mais familiar é aquela que você aprendeu nas aulas de física do colégio — seguir a trajetória dos objetos individuais. Por exemplo, todos já vimos as experiências de física nas quais uma bola em uma mesa de bilhar ou um disco em uma mesa de ar de hóquei colide com outra bola ou outro disco ou com a parede (Figura 4–1). As leis de Newton são usadas para descrever o movimento desses objetos, e podemos prever com exatidão aonde eles vão e como o momento e a energia cinética são trocados de um objeto para outro. A cinemática dessas experiências envolve acompanhar o **vetor posição** de cada objeto, $\vec{x}_A$, $\vec{x}_B$, . . . , e o **vetor velocidade** de cada objeto, $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$, . . . , como funções do tempo (Figura 4–2). Quando esse método é aplicado ao escoamento de um fluido, ele é chamado de **descrição lagrangiana** do momento do fluido em homenagem ao matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813). A análise lagrangiana é análoga à **análise de sistemas** que você aprendeu em suas aulas de termodinâmica; ou seja, seguimos uma massa de identidade fixa.

Como você deve imaginar, esse método de descrever o movimento é muito mais difícil para os fluidos do que para as bolas de bilhar! Em primeiro lugar, não podemos definir e identificar facilmente as partículas de fluido à medida que elas se movimentam. Em segundo lugar, um fluido é um **contínuo** (sob o ponto de vista macroscópico), de modo que as interações entre parcelas de fluido não são tão fáceis de descrever quanto as interações entre objetos distintos como bolas de bilhar ou discos de hóquei. Além disso, as porções de fluido *deformam-se* continuamente à medida que se movimentam no escoamento.

Sob o ponto de vista *microscópico*, um fluido é composto de *bilhões* de moléculas que estão continuamente se chocando, um pouco como as bolas de bilhar, mas a tarefa de acompanhar, mesmo que seja um subconjunto dessas moléculas, é muito difícil, até para nossos computadores mais rápidos e maiores. No entanto, existem muitas aplicações práticas para a descrição lagrangiana, como o controle dos escalares passivos em um escoamento, cálculos da dinâmica de gás rarefeito com relação à reentrada de uma nave espacial na atmosfera da Terra, e o desenvolvimento dos sistemas de medição de escoamento com base na imagem de partículas (como discutido na Seção 4–2).

Um método mais comum para descrever o escoamento de fluidos é a **descrição euleriana** do movimento de fluidos, que recebeu esse nome em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783). Na descrição euleriana do escoamento de fluidos, um volume finito chamado de **domínio de escoamento** ou **volume de controle** é definido, através do qual o fluido escoa para dentro e para fora. Não precisamos acompanhar a posição e a velocidade de uma massa de partículas de fluido com identidade fixa. Em vez disso, definimos as **variáveis de campo**, funções do espaço e do tempo, dentro do volume de controle. Por exemplo, o **campo de pressão** é uma **variável de campo escalar**, e para escoamento de fluido tridimensional geral em regime não permanente em coordenadas cartesianas

$$\textit{Campo de pressão:} \qquad P = P(x, y, z, t) \tag{4–1}$$

Definimos o **campo de velocidade** como uma **variável de campo vetorial** e de forma semelhante

$$\textit{Campo de velocidade:} \qquad \vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \tag{4–2}$$

Da mesma forma, o **campo de aceleração** também é uma variável de campo vetorial

$$\textit{Campo de aceleração:} \qquad \vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t) \tag{4–3}$$

Coletivamente, essas (e outras) variáveis de campo definem o **campo de escoamento**. O campo de velocidade da Equação 4–2 pode ser expandido em coordenadas cartesianas (x, y, z), $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ como

$$\vec{V} = (u, v, w) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} \tag{4–4}$$

Uma expansão semelhante pode ser escrita para o campo de aceleração da Equação 4–3. Na descrição euleriana, todas essas variáveis de campo são definidas em qualquer local (x, y, z) no volume de controle e em qualquer instante de tempo t como ilustrado na Figura 4–3. Na descrição euleriana não nos importamos realmente com o que acontece com as partículas individuais de fluido. Na verdade, estamos interessados na pressão, velocidade, aceleração e outras propriedades da partícula de fluido que esteja no local de interesse, no momento de interesse.

A diferença entre essas duas descrições fica mais clara quando se imagina uma pessoa em pé ao lado de um rio, medindo suas propriedades. Na abordagem lagrangiana, ela joga uma sonda que se move a jusante com a água. Na abordagem euleriana, ela ancora a sonda em um local fixo na água.

Embora haja muitas ocasiões nas quais a descrição lagrangiana é útil, a descrição euleriana quase sempre é mais conveniente para aplicações da mecânica dos fluidos. Além disso, medições experimentais em geral são mais adaptadas à descrição euleriana. Em um túnel de vento, por exemplo, sondas de velocidade ou pressão em geral são colocadas em locais fixos do escoamento, medindo $\vec{V}(x, y, z, t)$ ou $P(x, y, z, t)$. Entretanto, embora as equações do movimento da descrição lagrangiana que acompanham as partículas individuais de fluido sejam bem conhecidas (por exemplo, a segunda lei de Newton), as equações de movimento do escoamento de fluidos não são tão óbvias na descrição euleriana e devem ser cuidadosamente deduzidas.

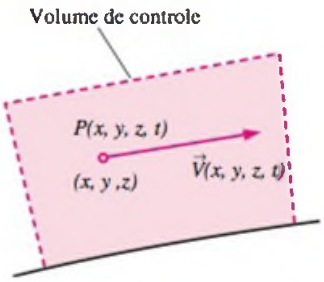


FIGURA 4–3
Na descrição euleriana é possível definir as variáveis de campo, como o campo de pressão e o campo de velocidade, em qualquer local e instante no tempo.

EXEMPLO 4–1 Um Campo de Velocidade Bidimensional em Regime Permanente

Um campo de velocidade bidimensional, incompressível e permanente é dado por

$$\vec{V} = (u, v) = (0{,}5 + 0{,}8x)\,\vec{i} + (1{,}5 - 0{,}8y)\,\vec{j} \qquad (1)$$

onde as coordenadas x e y estão em metros e a velocidade está em m/s. Um **ponto de estagnação** é definido como *um ponto no campo de escoamento no qual a velocidade é identicamente zero.* (*a*) Determine se há muitos pontos de estagnação neste campo de escoamento e, nesse caso, onde? (*b*) Esboce os vetores velocidade em diversos locais do domínio entre $x = -2$ m a 2 m e $y = 0$ m a 5 m; descreva qualitativamente o campo de escoamento.

SOLUÇÃO Para determinado campo de velocidade, as posições dos pontos de estagnação devem ser determinadas. Vários vetores velocidade devem ser desenhados e o campo da velocidade deve ser descrito.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** O escoamento é bidimensional, implicando uma componente nula z para a velocidade e nenhuma variação de u ou v com z.

Análise (*a*) Como $\vec{V}$ é um vetor, *todas* as suas componentes devem ser iguais a zero para que o próprio $\vec{V}$ seja zero. Usando a Equação 4–4 e definindo a Equação 1 igual a zero

Ponto de estagnação:
$$u = 0{,}5 + 0{,}8x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -0{,}625 \text{ m}$$
$$v = 1{,}5 - 0{,}8y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1{,}875 \text{ m}$$

Sim. Existe um ponto de estagnação localizado em $x = -0{,}625$ m, $y = 1{,}875$ m.

(*b*) As componentes x e y da velocidade são calculadas com a Equação 1 para vários locais (x, y) da região especificada. Por exemplo, no ponto $(x = 2$ m, $y = 3$ m), $u = 2{,}10$ m/s e $v = -0{,}900$ m/s. O módulo da velocidade (a *velocidade escalar*) naquele ponto é 2,28 m/s. Nesse e em uma variedade de outros locais, o vetor velocidade foi construído com suas duas componentes e os resultados são mostrados na Figura 4–4. O escoamento pode ser descrito como um escoamento de ponto de estagnação no qual o escoamento entra pelas partes superior e inferior e se espalha para a direita e a esquerda em torno de uma linha

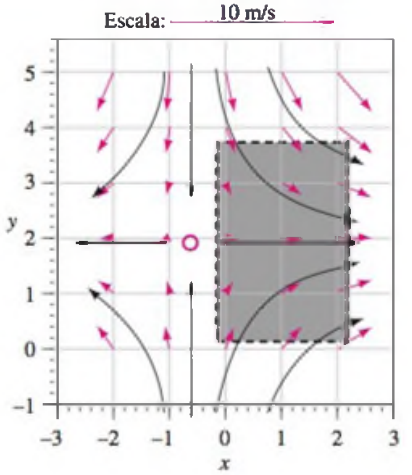


FIGURA 4–4
Os vetores velocidade do campo de velocidade do Exemplo 4–1. A escala é mostrada pela seta acima e as curvas sólidas pretas representam as formas aproximadas de algumas linhas de corrente, com base nos vetores velocidade calculados. O ponto de estagnação é indicado pelo círculo azul. A região sombreada representa uma parte do campo de escoamento que pode aproximar o escoamento na vizinhança de uma entrada (Figura 4–5).

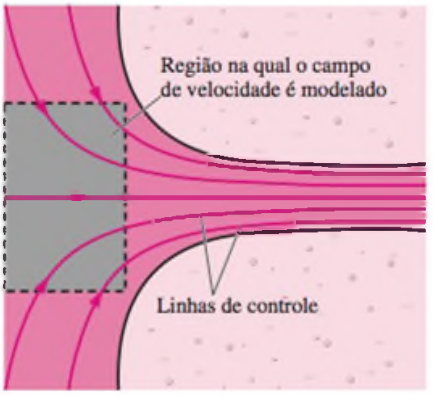


FIGURA 4–5
Campo de escoamento próximo à entrada em forma de boca de sino de uma represa hidrelétrica; uma parte do campo de velocidade do Exemplo 4–1 pode ser usada como aproximação de primeira ordem para esse campo de escoamento físico. A região sombreada corresponde àquela da Figura 4–4.

horizontal de simetria em $y = 1{,}875$ m. O ponto de estagnação da parte (*a*) é indicado pelo círculo azul na Figura 4–4.

Se olharmos apenas para a parte sombreada da Figura 4–4, esse campo de escoamento modela um escoamento convergente em aceleração da esquerda para a direita. Tal escoamento pode ser encontrado, por exemplo, próximo à entrada submersa em forma de boca de sino de uma represa hidrelétrica (Figura 4–5). A parte útil do campo de velocidade dado pode ser vista como uma aproximação de primeira ordem para a parte sombreada do campo de escoamento físico da Figura 4–5.

Discussão É possível verificar com o material do Capítulo 9 que esse campo de escoamento é fisicamente válido porque satisfaz a equação diferencial da conservação da massa.

Campo de Aceleração

No estudo da termodinâmica você deve ter visto que as leis fundamentais de conservação (como conservação de massa e a primeira lei da termodinâmica) são expressas para um *sistema* de identidade fixa (também chamado de *sistema fechado*). Nos casos em que a análise de um *volume de controle* (também chamado de *sistema aberto*) é mais conveniente do que a análise do sistema, é preciso reescrever essas leis fundamentais de forma que possam ser aplicadas ao volume de controle. O mesmo princípio se aplica aqui. Na verdade, existe uma analogia direta entre sistemas *versus* volumes de controle na termodinâmica e nas descrições lagrangiana *versus* euleriana na dinâmica dos fluidos. As equações do movimento do escoamento de fluidos (como a segunda lei de Newton) são escritas para um objeto de identidade fixa, tomado aqui como uma pequena porção de fluido, que chamamos de **partícula de fluido** ou **partícula material**. Se tivéssemos que seguir o movimento de determinada partícula de fluido em seu escoamento, estaríamos usando a descrição lagrangiana, e as equações do movimento seriam diretamente aplicáveis. Por exemplo, definiríamos o local da partícula no espaço em termos de um **vetor posição material** $(x_{\text{partícula}}(t),\ y_{\text{partícula}}(t),\ z_{\text{partícula}}(t))$. Entretanto, uma certa manipulação matemática seria necessária para converter as equações de movimento em formas aplicáveis à descrição euleriana.

Considere, por exemplo, a Segunda Lei de Newton aplicada a nossa partícula de fluido

Segunda Lei de Newton: $$\vec{F}_{\text{partícula}} = m_{\text{partícula}}\vec{a}_{\text{partícula}} \qquad (4\text{–}5)$$

onde $\vec{F}_{\text{partícula}}$ é a força resultante que age sobre a partícula de fluido, $m_{\text{partícula}}$ é sua massa e $\vec{a}_{\text{partícula}}$ é sua aceleração (Figura 4–6). Por definição, a aceleração da partícula de fluido é a derivativa no tempo da velocidade da partícula

Aceleração : $$\vec{a}_{\text{partícula}} = \frac{d\vec{V}_{\text{partícula}}}{dt} \qquad (4\text{–}6)$$

Entretanto, em qualquer instante de tempo t, a velocidade da partícula é igual ao valor local do *campo* de velocidade no local $(x_{\text{partícula}}(t),\ y_{\text{partícula}}(t),\ z_{\text{partícula}}(t))$ da partícula, uma vez que a partícula de fluido se movimenta com o fluido, por definição. Em outras palavras, $\vec{V}_{\text{partícula}}(t) \equiv \vec{V}(x_{\text{partícula}}(t),\ y_{\text{partícula}}(t),\ z_{\text{partícula}}(t),\ t)$. Para tomar a derivada de tempo da Equação 4–6, devemos usar a *regra da cadeia*, uma vez que a variável dependente $(\vec{V})$ é uma função de *quatro* variáveis independentes $(x_{\text{partícula}},\ y_{\text{partícula}},\ z_{\text{partícula}}$ e $t)$,

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{partícula}} &= \frac{d\vec{V}_{\text{partícula}}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}(x_{\text{partícula}},\ y_{\text{partícula}},\ z_{\text{partícula}},\ t)}{dt} \\ &= \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x_{\text{partícula}}}\frac{dx_{\text{partícula}}}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y_{\text{partícula}}}\frac{dy_{\text{partícula}}}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z_{\text{partícula}}}\frac{dz_{\text{partícula}}}{dt}\end{aligned} \qquad (4\text{–}7)$$

Na Equação 4–7, ∂ é o **operador de derivada parcial** e d é o **operador de derivada total.** Considere o segundo termo do lado direito da Equação 4–7. Como a aceleração é definida como a obtida seguindo *uma partícula de fluido* (descrição lagrangiana), a taxa de variação da posição x da partícula com relação ao tempo é $dx_{\text{partícula}}/dt = u$ (Figura 4–7), onde u é a componente x do vetor velocidade definido pela Equação 4–4. Da mesma forma, $dy_{\text{partícula}}/dt = v$ e $dz_{\text{partícula}}/dt = w$. Além disso, em qualquer instante de tempo considerado, o vetor posição material ($x_{\text{partícula}}$, $y_{\text{partícula}}$, $z_{\text{partícula}}$) da partícula de fluido na descrição lagrangiana é igual ao vetor posição (x, y, z) na descrição euleriana. Assim, a Equação 4–7 torna-se

$$\vec{a}_{\text{partícula}}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \qquad (4\text{–}8)$$

onde também usamos o fato (óbvio) que $dt/dt = 1$. Finalmente, em qualquer instante de tempo t, o campo de aceleração da Equação 4–3 deve ser igual à aceleração da partícula de fluido que ocupa o local (x, y, z) naquele instante t, uma vez que a partícula de fluido está, por definição, acelerando com o escoamento do fluido. Dessa forma, *podemos substituir* $\vec{a}_{\text{partícula}}$ por $\vec{a}(x, y, z, t)$ *nas Equações 4–7 e 4–8 para transformar do sistema de referência lagrangiano para o euleriano.* Na forma vetorial, a Equação 4–8 pode ser escrita como

A aceleração de uma partícula de fluido expressa como variável de campo:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \qquad (4\text{–}9)$$

onde $\vec{\nabla}$ é o **operador gradiente** ou o **operador del,** um operador vetorial que é definido em coordenadas cartesianas como

Operador gradiente ou del:
$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (4\text{–}10)$$

Em coordenadas cartesianas, portanto, as componentes do vetor aceleração são

Coordenadas cartesianas:
$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (4\text{–}11)$$
$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 4–9, $\partial\vec{V}/\partial t$, é chamado de **aceleração local** e é diferente de zero para escoamentos em regime não permanente. O segundo termo, $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$, é chamado de **aceleração advectiva** (também chamada de **aceleração convectiva**); *este termo pode ser diferente de zero mesmo para escoamentos em regime permanente.* Ele representa o efeito de uma partícula de fluido que se move (advectiva ou convectivamente) para um novo local no escoamento, onde o campo de velocidade é diferente. Por exemplo, considere o escoamento em regime permanente da água através do bocal de uma mangueira de jardim (Figura 4–8). No sistema de referência euleriana, *em regime permanente* pode ser definido como sendo quando as propriedades em qualquer ponto do campo de escoamento não variam com relação ao tempo. Como a velocidade da saída do bocal é maior do que aquela da entrada do bocal, as partículas de fluido claramente aceleram, embora o escoamento seja em regime permanente. A aceleração é diferente de zero por conta dos termos da aceleração advectiva da Equação 4–9. Observe que embora o escoamento seja em regime permanente do ponto de vista de um observador fixo no sistema de referência euleriano, ele *não* é em regime permanente no sistema de referência lagrangiana movendo-se com uma partícula de fluido que entra no bocal e acelera à medida que passa através dele.

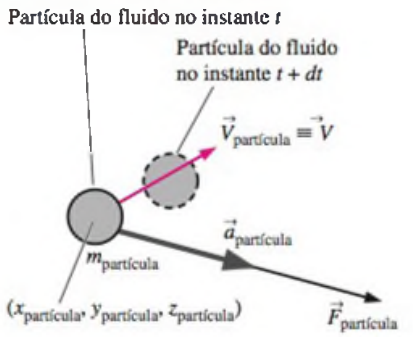


FIGURA 4–6
A segunda lei de Newton aplicada a uma partícula de fluido; o vetor aceleração (seta cinza) está na mesma direção do vetor força (seta preta), mas o vetor velocidade (seta azul) pode agir em direção diferente.

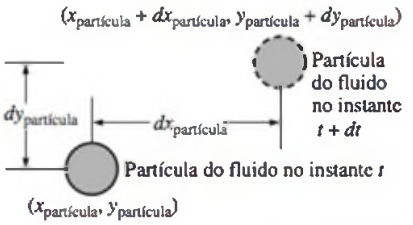


FIGURA 4–7
Ao acompanhar uma partícula de fluido, a componente x da velocidade, u, é definida como $dx_{\text{partícula}}/dt$. Da mesma forma, $v = dy_{\text{partícula}}/dt$ e $w = dz_{\text{partícula}}/dt$. O movimento é mostrado aqui apenas em duas dimensões, por simplicidade.

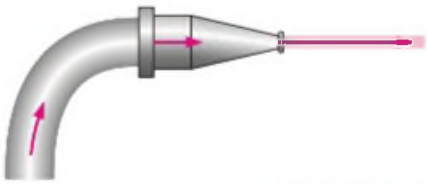


FIGURA 4–8
O escoamento de água através de um bocal de mangueira de jardim ilustra que as partículas de fluido podem acelerar, mesmo no escoamento em regime permanente. Neste exemplo, a velocidade de saída da água é muito mais alta do que a velocidade da entrada de água na mangueira, implicando que as partículas de fluido aceleraram apesar do escoamento ser em regime permanente.

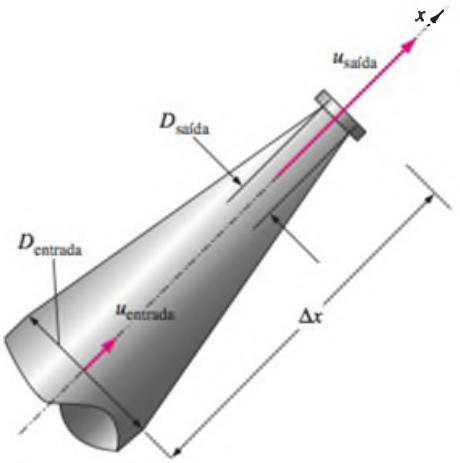


FIGURA 4–9
Escoamento de água através do bocal do Exemplo 4–2.

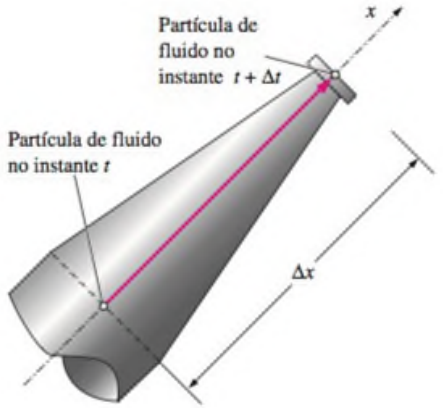


FIGURA 4–10
O *tempo de residência* Δt é definido como o tempo necessário para que uma partícula de fluido percorra todo o bocal da entrada à saída (distância Δx).

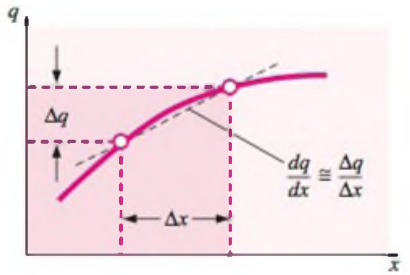


FIGURA 4–11
Uma *aproximação por diferença finita de primeira ordem* para a derivada dq/dx é apenas a variação da variável dependente (q) dividida pela variação da variável independente (x).

EXEMPLO 4–2 A Aceleração de uma Partícula de Fluido através de um Bocal

Laura está lavando seu carro, usando um bocal semelhante àquele mostrado na Figura 4–8. O bocal tem 3,90 pol (0,325 pés) de comprimento, com diâmetro de entrada de 0,420 pol (0,0350 pé) e diâmetro de saída de 0,182 pol (ver Figura 4–9). A vazão em volume através da mangueira de jardim (e através do bocal) é $\dot{V}$ = 0,841 gal/min (0,00187 pé³/s) e o escoamento é estacionário. Estime o módulo da aceleração de uma partícula de fluido que se movimenta no eixo central do bocal.

SOLUÇÃO A aceleração seguindo uma partícula de fluido no eixo central de um bocal deve ser estimada.

Hipóteses 1 O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** A direção x é tomada ao longo do eixo central do bocal. **3** Por simetria, $v = w = 0$ ao longo do eixo central, mas u aumenta através do bocal.

Análise O escoamento é em regime permanente e você pode se sentir tentado a dizer que a aceleração é zero. Entretanto, embora a aceleração local $\partial \vec{V}/\partial t$ seja identicamente zero para este campo de escoamento em regime permanente, a aceleração advectiva $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$ *não* é zero. Primeiro calculamos a componente x média da velocidade na entrada e saída do bocal, dividindo a vazão de volume pela área da seção transversal:

Velocidade de entrada: $$u_{entrada} \cong \frac{\dot{V}}{A_{entrada}} = \frac{4\dot{V}}{\pi D_{entrada}^2} = \frac{4(0{,}00187 \text{ pé}^3/\text{s})}{\pi(0{,}0350 \text{ pé})^2} = 1{,}95 \text{ pé/s}$$

Da mesma forma, a velocidade de saída média é $u_{saída}$ = 10,4 pés/s. Agora calculamos a aceleração de duas maneiras, com resultados equivalentes. Em primeiro lugar, um simples valor médio de aceleração na direção x é calculado com base na variação da velocidade dividida por uma estimativa do **tempo de residência** de uma partícula de fluido no bocal, $\Delta t = \Delta x/u_{méd}$ (Figura 4–10). Pela definição fundamental da aceleração como a taxa de variação da velocidade,

Método A: $$a_x \cong \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_{saída} - u_{entrada}}{\Delta x/u_{méd}} = \frac{u_{saídat} - u_{entrada}}{2\,\Delta x/(u_{saída} + u_{entrada})} = \frac{u_{saída}^2 - u_{entrada}^2}{2\,\Delta x}$$

O segundo método usa a equação das componentes do campo de aceleração em coordenadas cartesianas, a Equação 4–11,

Método B: $$a_x = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{0} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{0} \cong u_{méd}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Estacionário; $v = 0$ ao longo do eixo central; $w = 0$ ao longo do eixo central

Aqui vemos que apenas um termo advectivo é diferente de zero. Aproximamos a velocidade média através do bocal como a média entre as velocidades de entrada e saída e usamos como **aproximação a diferença finita de primeira ordem** (Figura 4–11) para o valor médio da derivada $\partial u/\partial x$ no eixo central do bocal:

$$a_x \cong \frac{u_{saída} + u_{entrada}}{2}\frac{u_{saída} - u_{entrada}}{\Delta x} = \frac{u_{saída}^2 - u_{entrada}^2}{2\,\Delta x}$$

O resultado do método B é idêntico ao do método A. A substituição dos valores dados fornece:

Aceleração axial:

$$a_x \cong \frac{u_{saída}^2 - u_{entrada}^2}{2\,\Delta x} = \frac{(10{,}4 \text{ pés/s})^2 - (1{,}95 \text{ pé/s})^2}{2(0{,}325 \text{ pé})} = \mathbf{160 \text{ pés/s}^2}$$

Discussão As partículas de fluido são aceleradas através do bocal quase cinco vezes a aceleração da gravidade (quase cinco g's)! Este exemplo simples ilustra claramente que a aceleração de uma partícula de fluido pode ser diferente de zero, mesmo em escoamento em regime permanente. Observe que a aceleração, na verdade, é uma **função puntual**, embora tenhamos estimado uma aceleração média simples em todo o bocal.

Derivada Material

O operador diferencial total *d*/*dt* da Equação 4–9 recebe um nome especial, **derivada material**; alguns autores também atribuem uma notação especial a ele, *D*/*Dt*, para enfatizar que ele é formado *seguindo uma partícula de fluido à medida que ela se movimenta através do campo de escoamento* (Figura 4–12). Outros nomes para a derivada material incluem **derivada total**, **de partícula**, **lagrangiana**, **euleriana** e **substancial**.

Derivada material:
$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \qquad (4\text{–}12)$$

Quando aplicamos a derivada material da Equação 4–12 ao campo de velocidade, o resultado é o campo de aceleração expresso pela Equação 4–9 que, portanto, às vezes é chamado de **aceleração material**.

Aceleração material:
$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \qquad (4\text{–}13)$$

A Equação 4–12 também pode ser aplicada a outras propriedades dos fluidos além da velocidade, tanto escalares quanto vetoriais. Por exemplo, a derivada material da pressão pode ser escrita como

Derivada material da pressão:
$$\frac{DP}{Dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})P \qquad (4\text{–}14)$$

A Equação 4–14 representa a taxa de variação da pressão no tempo acompanhando uma partícula à medida que ela se movimenta através do escoamento, e contém as componentes local (não estecionária) e advectiva (Figura 4–13).

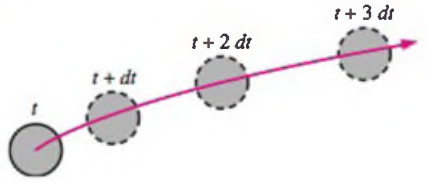


FIGURA 4–12
A derivada material *D*/*Dt* é definida acompanhando uma partícula de fluido à medida que ela se movimenta através do campo de escoamento. Nesta ilustração, a partícula de fluido está acelerando para a direita à medida que se movimenta para cima e para a direita.

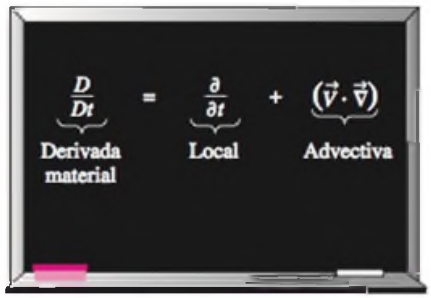


FIGURA 4–13
A derivada material *D*/*Dt* é composta de uma parte *local* ou *em regime não permanente* e de uma parte *convectiva* ou *advectiva*.

EXEMPLO 4–3 Aceleração Material de um Campo de Velocidade em Regime Não Permanente

Considere o campo de velocidade em regime não permanente, incompressível e bidimensional do Exemplo 4–1. (*a*) Calcule a aceleração material no ponto (x = 2 m, y = 3 m). (*b*) Represente os vetores aceleração material no mesmo conjunto de valores x e y do Exemplo 4–1.

SOLUÇÃO Para o campo de velocidade dado, o vetor aceleração material deve ser calculado em determinado ponto e representado graficamente em um conjunto de locais no campo de escoamento.

Hipóteses 1 O escoamento é em regime não permanente e incompressível. **2** O escoamento é bidimensional, implicando componente z nula para a velocidade e nenhuma variação de u ou v com z.

Análise (*a*) Usando o campo de velocidade da Equação 1 do Exemplo 4–1 e a equação para as componentes da aceleração material em coordenadas cartesianas (Equação 4–11), escrevemos as expressões das duas componentes diferentes de zero do vetor aceleração:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= 0 + \underbrace{(0{,}5 + 0{,}8x)(0{,}8)} + \underbrace{(1{,}5 - 0{,}8y)(0)} + 0 = (0{,}4 + 0{,}64x)\ \text{m/s}^2$$

e

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$= 0 + \underbrace{(0{,}5 + 0{,}8x)(0)} + \underbrace{(1{,}5 - 0{,}8y)(-0{,}8)} + 0 = (-1{,}2 + 0{,}64y)\ \text{m/s}^2$$

No ponto (x = 2 m, y = 3 m), a_x = 1,68 m/s² e a_y = 0,720 m/s².

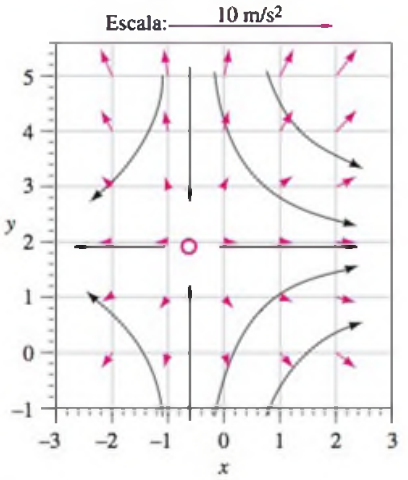


FIGURA 4–14
Vetores aceleração para o campo de velocidade dos Exemplos 4–1 e 4–3. A escala é mostrada pela seta acima e as curvas sólidas pretas representam as formas aproximadas de algumas linhas de corrente, com base nos vetores velocidade calculados (consultar a Figura 4–4). O ponto de estagnação é indicado pelo círculo azul.

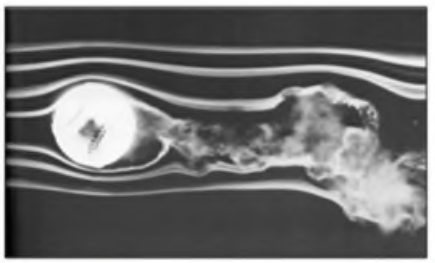


FIGURA 4–15
Bola de beisebol girando. O falecido F. N. M. Brown dedicou muitos anos ao desenvolvimento e uso da visualização por fumaça em túneis de vento na Universidade de Notre Dame. Aqui a velocidade de escoamento é de cerca de 77 pés/s e a bola gira a 630 rpm.
Foto cedida por cortesia de T. J. Mueller.

(*b*) As equações da parte (*a*) são aplicadas a um conjunto de valores x e y no domínio do escoamento dentro dos limites dados, e os vetores de aceleração estão representados graficamente na Figura 4–14.

Discussão O campo de aceleração é diferente de zero, embora o escoamento seja *em regime não permanente.* Acima do ponto de estagnação (acima de y = 1,875 m), os vetores aceleração representados graficamente na Figura 4–14 apontam para cima, aumentando de módulo a partir do ponto de estagnação. À direita do ponto de estagnação (à direita de $x = -0{,}625$ m), os vetores aceleração apontam para a direita, novamente aumentando de módulo ao se afastarem do ponto de estagnação. Isso concorda qualitativamente com os vetores velocidade da Figura 4–4 e com as linhas de corrente representadas na Figura 4–14; na parte direita superior do campo de escoamento, as partículas de fluido são aceleradas na direção do canto superior direito e, portanto, giram na direção anti-horária devido à **aceleração centrípeta** na direção do canto superior direito. O escoamento abaixo de y = 1,875 m é uma imagem especular do escoamento acima da reta de simetria, e o escoamento à esquerda de $x = -0{,}625$ m é uma imagem especular do escoamento à direita dessa reta de simetria.

4–2 ▪ FUNDAMENTOS DA VISUALIZAÇÃO DO ESCOAMENTO

Embora o estudo quantitativo da dinâmica dos fluidos exija matemática avançada, é possível aprender muito com a **visualização do escoamento** — o exame visual das características do campo de escoamento. A visualização do escoamento não é apenas útil em experiências físicas (Figura 4–15), mas em soluções *numéricas* também [**dinâmica de fluidos computacional (CFD)**]. Na verdade, a primeira coisa que um engenheiro faz ao usar a CFD e após obter uma solução numérica é simular alguma forma de visualização do escoamento, para que possa ver o "quadro geral", em vez de apenas listar os números e dados quantitativos. Por quê? Porque a mente humana foi feita para processar rapidamente uma quantidade incrível de informações visuais; como dizem, uma figura vale mil palavras. Existem muitos tipos de padrões de escoamento que podem ser visualizados fisicamente (experimentalmente) e/ou computacionalmente.

Linhas de Corrente e Tubos de Corrente

Uma **linha de corrente** é uma curva que é tangente em todos os pontos ao vetor velocidade local instantâneo.

As linhas de corrente são úteis como indicadores da direção instantânea do movimento dos fluidos ao longo do campo de escoamento. Por exemplo, as regiões de escoamento de recirculação e separação de um fluido de uma parede sólida são facilmente identificadas pelo padrão das linhas de corrente. As linhas de corrente não podem ser observadas experimentalmente, exceto nos campos de escoamento em regime permanente, nos quais elas são coincidentes com as linhas de trajetória e linhas de emissão, que serão discutidas a seguir. Matematicamente, porém, podemos escrever uma expressão simples para uma linha de corrente com base em sua definição.

Considere um comprimento de arco infinitesimal $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ ao longo de uma linha de corrente; $d\vec{r}$ deve ser paralelo ao vetor velocidade local $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ por definição de linha de corrente. Por meio de argumentos geométricos simples usando triângulos semelhantes, sabemos que as componentes de $d\vec{r}$ devem ser proporcionais àquelas de $\vec{V}$ (Figura 4–16). Assim,

Equação de uma linha de corrente:
$$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \qquad (4\text{–}15)$$

onde dr é o comprimento de $d\vec{r}$ e V é a velocidade escalar, o módulo de $\vec{V}$. Na Figura 4–16, a Equação 4–15 está ilustrada em duas dimensões por simplicidade. Para um campo de velocidade conhecido, podemos integrar a Equação 4–15 para obter as equações das linhas de corrente. Em duas dimensões (x, y), (u, v), a seguinte equação diferencial é obtida:

Linha de corrente no plano xy:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{ao longo de uma linha de corrente}} = \frac{v}{u} \qquad \textbf{(4–16)}$$

Em alguns casos simples a Equação 4–16 pode ser resolvida analiticamente; no caso geral ela deve ser resolvida numericamente. Em ambos os casos, uma constante arbitrária de integração aparece e a *família* de curvas que satisfaz a Equação 4–16 representa as linhas de corrente do campo de escoamento.

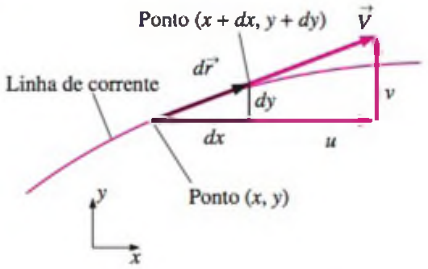


FIGURA 4–16
Para o escoamento bidimensional no plano xy, o comprimento de arco $d\vec{r} = (dx, dy)$ ao longo de uma *linha de corrente* é tangente em todos os pontos ao vetor velocidade local instantânea $\vec{V} = (u, v)$.

EXEMPLO 4–4 Linhas de Corrente no Plano *xy* — Uma Solução Analítica

Para o campo de velocidade bidimensional, incompressível e estacionário do Exemplo 4–1 trace várias linhas de corrente na metade direita do escoamento ($x > 0$) e compare aos vetores velocidade desenhados na Figura 4–4.

SOLUÇÃO Uma expressão analítica das linhas de corrente deve ser gerada e está representada graficamente no quadrante direito superior.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** O escoamento é bidimensional, implicando uma componente z nula para a velocidade e nenhuma variação de u ou v com z.

Análise A Equação 4–16 se aplica aqui e, portanto, ao longo de uma linha de corrente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1{,}5 - 0{,}8y}{0{,}5 + 0{,}8x}$$

Resolvemos essa equação diferencial por separação das variáveis:

$$\frac{dy}{1{,}5 - 0{,}8y} = \frac{dx}{0{,}5 + 0{,}8x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{1{,}5 - 0{,}8y} = \int \frac{dx}{0{,}5 + 0{,}8x}$$

Após alguma álgebra (que deixamos para o leitor), escrevemos y como uma função de x ao longo de uma linha de corrente

$$y = \frac{C}{0{,}8(0{,}5 + 0{,}8x)} + 1{,}875$$

onde C é uma constante de integração que irá assumir diversos valores para traçar as linhas de corrente. A Figura 4–17 mostra várias linhas de corrente do campo de escoamento dado.

Discussão Os vetores de velocidade da Figura 4–4 são superpostos sobre as linhas de corrente da Figura 4–17; a concordância é excelente no sentido de que os vetores velocidade apontam nas direções tangentes às linhas de corrente em todos os pontos. Observe que a velocidade escalar não pode ser determinada diretamente somente por meio das linhas de corrente.

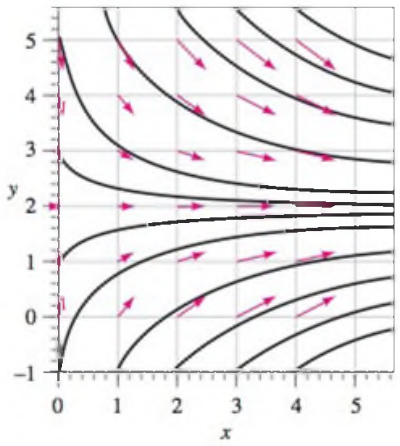


FIGURA 4–17
As linhas de corrente (curvas pretas sólidas) do campo de velocidade do Exemplo 4–4; os vetores velocidade da Figura 4–4 (setas azuis) são superpostos para comparação.

Um **tubo de corrente** consiste em um conjunto de linhas de corrente (Figura 4–18), da mesma forma que um cabo de comunicação consiste em um conjunto de cabos de fibra ótica. Como as linhas de corrente são paralelas em todos os pontos à velocidade local, o fluido não pode cruzar uma linha de corrente, por definição. Por extensão, o *fluido dentro de um tubo de corrente deve permanecer lá e não pode cruzar a fronteira do tubo de corrente*. Você deve lembrar que tanto as linhas de corrente quanto os tubos de corrente são quantidades instantâneas definidas em determinado instante no tempo, de acordo com o campo de velocidade naquele instante. Em um *escoamento em regime não permanente*, o padrão das linhas de

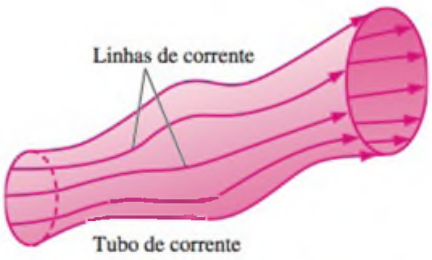


FIGURA 4–18
Um *tubo de corrente* consiste em um conjunto de linhas de corrente individuais.

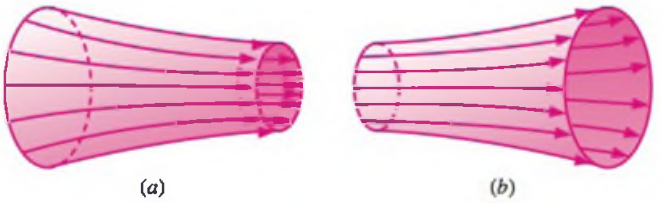


FIGURA 4–19
Em um campo de escoamento incompressível, um tubo de corrente (*a*) diminui de diâmetro à medida que o escoamento acelera ou converge e (*b*) aumenta de diâmetro à medida que o escoamento desacelera ou diverge.

corrente pode variar significativamente com o tempo. No entanto, em qualquer instante, a vazão em massa que passa através de qualquer fatia de seção transversal de determinado tubo de corrente deve permanecer a mesma. Por exemplo, em uma parte convergente de um campo de escoamento incompressível, o diâmetro do tubo de corrente deve diminuir à medida que a velocidade aumenta, para conservar a massa (Figura 4–19*a*). Da mesma forma, o diâmetro do tubo de corrente aumenta em pontos divergentes do escoamento incompressível (Figura 4–19*b*).

Linhas de Trajetória

Uma **linha de trajetória** é a trajetória real percorrida por uma partícula de fluido individual em determinado período de tempo.

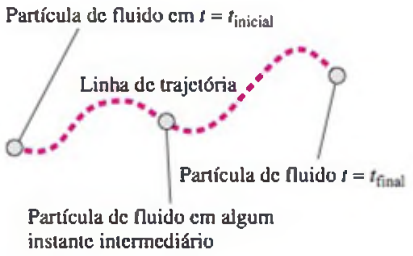


FIGURA 4–20
Uma *linha de trajetória* é formada seguindo a trajetória real de uma partícula de fluido.

As linhas de trajetória formam o padrão do escoamento mais fácil de entender. Uma linha de trajetória é um conceito lagrangiano, pois apenas seguimos o caminho de uma partícula de fluido individual à medida que ela se movimenta ao longo do campo de escoamento (Figura 4–20). Assim, uma linha de trajetória é igual ao vetor posição material da partícula de fluido ($x_{partícula}(t)$, $y_{partícula}(t)$, $z_{partícula}(t)$), discutido na Seção 4–1, acompanhado sobre algum intervalo de tempo finito. Em uma experiência física, você pode imaginar uma partícula de fluido sinalizadora que está marcada de alguma forma — seja por cor ou brilho — para que ela possa ser facilmente diferenciada das partículas de fluido vizinhas. Agora imagine uma câmera com o obturador aberto por determinado período, $t_{inicial} < t < t_{final}$, na qual a trajetória da partícula é registrada; a curva resultante é chamada de linha de trajetória. Um exemplo intrigante é mostrado na Figura 4–21 no caso de ondas que se movimentam na superfície da água de um tanque. As **partículas sinalizadoras** flutuantes brancas e neutras estão suspensas na água, e uma fotografia de longa exposição é tirada durante um período de onda completo. O resultado são linhas de trajetória de forma elíptica, mostrando que as partículas de fluido agitam-se para cima e para baixo e para a frente e para trás, mas retornam à posição original após a conclusão de um período de onda; não existe um movimento resultante para a frente. Você já deve ter experimentado algo semelhante ao boiar para cima e para baixo nas ondas do mar.

Uma técnica experimental moderna chamada de **velocimetria de imagem de partícula (PIV, particle image velocimetry)** utiliza as linhas de trajetória de partículas para medir o campo de velocidade ao longo de todo um plano em um escoamento (Adrian, 1991). (Os avanços recentes também estendem a técnica para três dimensões.) Na PIV, as minúsculas partículas sinalizadoras estão suspensas no fluido, como na Figura 4–21. Entretanto, o escoamento é iluminado por dois raios de luz (em geral de um laser como na Figura 4–22) para produzir dois pontos brilhantes no filme ou fotosensor para cada partícula móvel. Assim, tanto o módulo quanto a direção do vetor velocidade na localização de cada partícula podem ser inferidos,

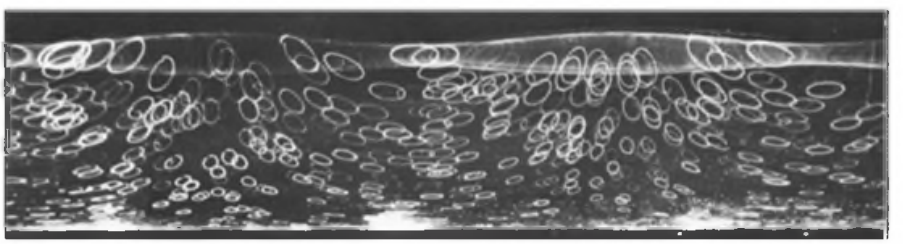


FIGURA 4–21
As linhas de trajetória produzidas pelas partículas sinalizadoras brancas suspensas na água e capturadas pela fotografia de longa exposição; à medida que as ondas passam na horizontal, cada partícula se movimenta em uma trajetória elíptica durante um período de onda.
Wallet, A. & Ruellan, F. 1950, La Houille Blanche *5:483–489. Usada com permissão.*

considerando-se que as partículas sinalizadoras sejam suficientemente pequenas para que se movam com o fluido. A moderna fotografia digital e os computadores mais rápidos permitiram que a PIV fosse executada com rapidez suficiente para que as características *em regime não permanente* de um campo de escoamento também pudessem ser medidas. A PIV é discutida com mais detalhes no Capítulo 8.

As linhas de trajetória também podem ser calculadas numericamente para um campo de velocidade conhecido. Especificamente, a posição da partícula sinalizadora é integrada ao longo do tempo a partir de uma posição inicial $\vec{x}_{\text{inicial}}$ e tempo inicial t_{inicial} até algum momento posterior t.

A posição da partícula sinalizadora no instante t:
$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{inicial}} + \int_{t_{\text{inicial}}}^{t} \vec{V}\, dt \qquad \textbf{(4–17)}$$

Quando a Equação 4–17 for calculada para t entre t_{inicial} e t_{final}, uma representação gráfica de $\vec{x}(t)$ é a linha de trajetória da partícula de fluido durante aquele intervalo de tempo, como ilustra a Figura 4–20. Para alguns campos de escoamento simples, a Equação 4–17 pode ser integrada analiticamente. Para escoamentos mais complexos, devemos fazer uma integração numérica.

Se o campo da velocidade é em regime permanente, as partículas individuais de fluido seguirão as linhas de corrente. Assim, para *escoamento em regime permanente, as linhas de trajetória são idênticas às linhas de corrente.*

Linhas de Emissão

Uma **linha de emissão** é o conjunto das posições das partículas de fluido que passaram seqüencialmente através de um ponto prescrito do escoamento.

As linhas de emissão são o padrão de escoamento mais comum gerado por um experimento físico. Se você inserir um pequeno tubo em um escoamento e introduzir uma corrente de fluido sinalizador (tinta em um escoamento de água ou fumaça em um escoamento de ar), o padrão observado é uma linha de emissão. A Figura 4–23 mostra um sinalizador sendo injetado em um escoamento em corrente livre contendo um objeto, como o perfil de uma asa. Os círculos representam as partículas individuais do fluido sinalizador injetado liberadas em intervalos de tempo uniformes. À medida que as partículas são forçadas para fora do caminho do objeto, elas aceleram ao redor do ombro do objeto, como indica a maior distância entre as partículas sinalizadoras individuais naquela região. A linha de emissão é formada conectando-se todos os círculos em uma curva suave. Em experimentos físicos em um túnel de vento ou água, a fumaça ou tinta é injetada *continuamente*, não como partículas individuais, e o padrão de escoamento resultante é, por definição, uma linha de emissão. Na Figura 4–23, a partícula sinalizadora 1 foi liberada em um instante anterior ao da partícula 2 e assim por diante. A posição de uma partícula sinalizadora individual é determinada pelo campo de velocidade em torno dela partir do instante de sua injeção no escoamento até o instante atual. Se o escoamento é em regime não permanente, o campo de velocidade na vizinhança muda e não podemos esperar que a linha de emissão resultante se pareça com uma linha de corrente ou com uma linha de trajetória em nenhum instante dado. Entretanto, *se o escoamento é em regime permanente, as linhas de corrente, as linhas de trajetória e as linhas de emissão são idênticas* (Figura 4–24).

Com freqüência as linhas de emissão são confundidas com as linhas de corrente ou linhas de trajetória. Embora os três padrões de escoamento sejam idênticos no escoamento estacionário, elas podem ser bem diferentes no escoamento não estacionário. A principal diferença é que uma linha de corrente representa um padrão de escoamento *instantâneo* em determinado instante de tempo, enquanto as linhas de corrente e linhas de trajetória têm alguma *idade* e, portanto, um *histórico de tempo* associado a elas. Uma linha de emissão é um instantâneo de um padrão de escoamento *integrado no tempo*. Uma linha de trajetória, por outro lado, é uma fotografia de *longa exposição* da trajetória no escoamento de uma partícula individual em algum período de tempo.

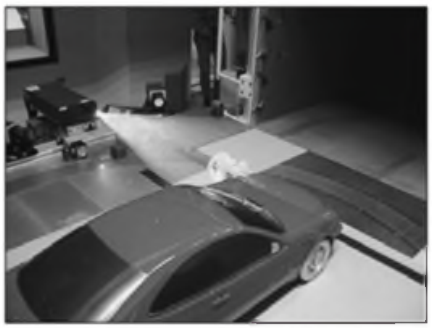


FIGURA 4–22
A PIV aplicada a um automóvel-modelo em um túnel de vento.
Cortesia da Dantec Dynamics, Inc. Usada com permissão.

FIGURA 4–23
Uma *linha de emissão* é formada pela introdução contínua de tinta ou fumaça em um ponto do escoamento. As partículas sinalizadoras rotuladas (1 a 8) foram introduzidas seqüencialmente.

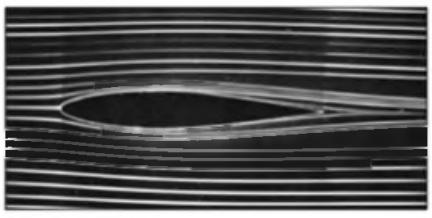


FIGURA 4–24
Linhas de emissão produzidas por fluido colorido introduzido a montante; como o escoamento é em regime permanente, essas linhas de emissão são iguais às linhas de corrente e linhas de trajetória.
Cortesia ONERA. Fotografia de Werlé.

A propriedade de integração no tempo das linhas de emissão é bem ilustrada em um experimento de Cimbala et al. (1988), reproduzido aqui na Figura 4–25. Os autores usaram **fio de fumaça** para a visualização do escoamento em um túnel de vento. Em operação, o fio de fumaça é um fio vertical fino coberto com óleo mineral. O óleo se divide em anéis ao longo do comprimento do fio devido aos efeitos da tensão superficial. Quando uma corrente elétrica aquece o fio, cada pequeno anel de óleo produz uma linha de emissão de fumaça. Na Figura 4–25*a*, as linhas de emissão são introduzidas por meio de um fio de fumaça localizado a jusante de um cilindro circular de diâmetro D normal ao plano de visão. (Quando várias linhas de emissão são introduzidas ao longo de uma reta, como na Figura 4–25, nos referimos a isso como uma **fileira** de linhas de emissão.) O número de Reynolds do escoamento é $\text{Re} = \rho VD/\mu = 93$. Devido aos **vórtices** não estacionários lançados em um padrão alternante a partir do cilindro, a fumaça se reúne em um padrão claramente definido chamado de **esteira de vórtices de Kármán**.

Somente a partir da Figura 4–25*a*, seria possível pensar que os vórtices lançados continuam existindo por várias centenas de diâmetros a jusante do cilindro. Entretanto, o padrão da linha de emissão dessa figura pode ser enganoso! Na Figura 4–25*b*, o fio de fumaça é colocado 150 diâmetros abaixo do cilindro. As linhas de emissão resultantes são retas, indicando que os vórtices lançados na verdade já desapareceram nessa distância a jusante. O escoamento é em regime permanente e paralelo nesse local e não há mais vórtices; a difusão viscosa fez com que os vórtices adjacentes de sinais opostos ja tivessem se cancelado em torno de 100 diâmetros do cilindro. Os padrões da Figura 4–25*a* próximos a $x/D = 150$ são apenas *remanescentes* da esteira de vórtices que existia a montante. As linhas de emissão da Figura 4–25*b*, porém, mostram as características corretas do escoamento naquele local. As linhas de emissão geradas em $x/D = 150$ são idênticas às linhas de corrente ou linhas de trajetória nessa região de escoamento — linhas retas, quase horizontais — uma vez que o escoamento aqui é permanente.

Para um campo de velocidade conhecido, uma linha de emissão pode ser gerada numericamente, embora com alguma dificuldade. É preciso seguir as trajetórias de uma corrente contínua de partículas sinalizadoras desde o instante de sua injeção no escoamento até o instante presente usando a Equação 4–17. Matematicamente, a posição de uma partícula sinalizadora é integrada ao longo do tempo a partir do instante de sua injeção $t_{\text{injeção}}$ até o tempo presente t_{presente}. A Equação 4–17 torna-se

A posição da partícula sinalizadora integrada:
$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{injeção}} + \int_{t_{\text{injeção}}}^{t_{\text{presente}}} \vec{V}\, dt \qquad \textbf{(4–18)}$$

Em um escoamento em regime não permanente complexo, a integração no tempo deve ser executada numericamente à medida que o campo de velocidade muda com o tempo. Quando as posições das partículas sinalizadoras em $t = t_{\text{presente}}$ são conectadas por uma curva suave, o resultado é a linha de emissão desejada.

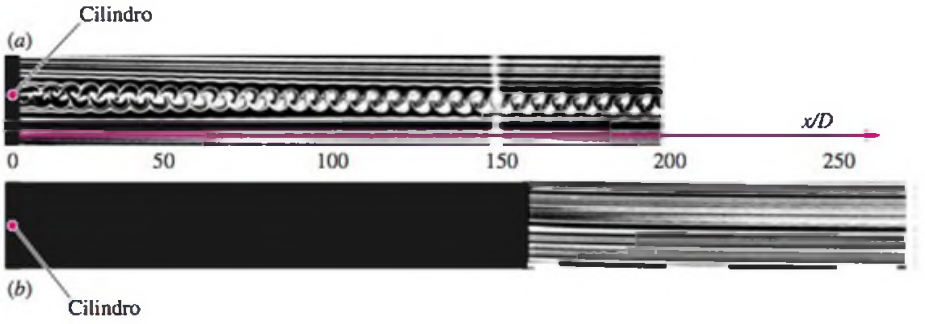


FIGURA 4–25
As linhas de emissão introduzidas por um fio de fumaça em dois locais diferentes na esteira de um cilindro circular: (*a*) o fio de fumaça logo a jusante do cilindro e (*b*) o fio de fumaça localizado em $x/D = 150$. A natureza de integração no tempo das linhas de emissão pode ser vista claramente comparando-se as duas fotos.
Foto de John M. Cimbala.

EXEMPLO 4–5 Comparação dos Padrões de um Escoamento em Regime Não Permanente

Um campo de velocidade bidimensional, incompressível e *em regime não permanente* é dado por

$$\vec{V} = (u, v) = (0{,}5 + 0{,}8x)\vec{i} + (1{,}5 + 2{,}5\,\text{sen}(\omega t) - 0{,}8y)\vec{j} \qquad (1)$$

onde a freqüência angular ω é igual a 2π rad/s (uma freqüência física de 1 Hz). Esse campo de velocidade é idêntico àquele da Equação 1 do Exemplo 4–1, exceto pelo termo periódico adicional na componente v da velocidade. Na verdade, como o período de oscilação é 1 s, quando o tempo t é qualquer múltiplo inteiro de $\frac{1}{2}$ s (t = 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, . . . s), o termo com seno da Equação 1 é zero e o campo de velocidade é instantaneamente idêntico àquele do Exemplo 4–1. Fisicamente, imaginamos o escoamento em uma entrada de boca de sino grande que oscila para cima e para baixo com freqüência de 1 Hz. Considere dois ciclos completos de escoamento de t = 0 s até t = 2 s. Compare as linhas de corrente instantâneas em t = 2 s com as linhas de trajetória e linhas de emissão geradas durante o período de t = 0 s até t = 2 s.

SOLUÇÃO As linhas de corrente, as linhas de trajetória e as linhas de emissão devem ser geradas e comparadas para o campo de velocidade não permanente dado.

Hipóteses 1 O escoamento é incompressível. **2** O escoamento é bidimensional, implicando uma componente z nula para a velocidade e nenhuma variação de u ou v com z.

Análise As linhas de corrente instantâneas em t = 2 s são idênticas àquelas da Figura 4–17, e várias delas são traçadas novamente na Figura 4–26. Para simular as linhas de trajetória, usamos a técnica de integração numérica Runge–Kutta para variar o tempo de t = 0 s a t = 2 s, traçando a trajetória das partículas de fluido liberadas em três posições: (x = 0,5 m, y = 0,5 m), (x = 0,5 m, y = 2,5 m) e (x = 0,5 m, y = 4,5 m). Essas linhas de trajetória são mostradas na Figura 4–26 com as linhas de corrente. Finalmente, as linhas de emissão são simuladas seguindo as trajetórias de *muitas* partículas sinalizadoras de fluido liberadas em três locais determinados nos instantes entre t = 0 s e t = 2 s, e conectando o local exato de suas posições em t = 2 s. Essas linhas de emissão também são traçadas na Figura 4–26.

Discussão Como o escoamento é não permanente, as linhas de corrente, linhas de trajetória e linhas de emissão *não* são coincidentes. Na verdade, elas diferem significativamente umas das outras. Observe que as linhas de emissão e as linhas de trajetória são onduladas devido ao componente *ondulatório* da componente v da velocidade. Dois períodos completos de oscilação ocorreram entre t = 0 s e t = 2 s, como pode ser verificado observando-se cuidadosamente as linhas de trajetória e as linhas de emissão. As linhas de corrente não têm essa ondulação, uma vez que elas não têm histórico de tempo; elas representam uma fotografia instantânea do campo de velocidade em t = 2 s.

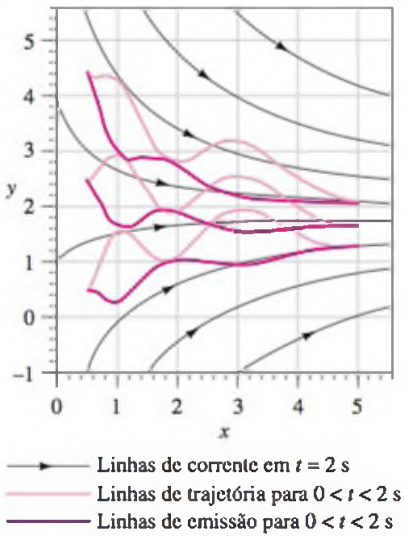


FIGURA 4–26
As linhas de corrente, as linhas de trajetória e as linhas de emissão para o campo de velocidade oscilante do Exemplo 4–5. As linhas de emissão e as linhas de trajetória são onduladas por conta de seu histórico de integração no tempo, mas as linhas de corrente não são onduladas, uma vez que representam uma fotografia instantânea do campo de velocidade.

Linhas de Tempo

Uma **linha de tempo** é um conjunto de partículas de fluido adjacentes que foram marcadas no mesmo instante (anterior) do tempo.

As linhas de tempo são particularmente úteis em situações nas quais a uniformidade de um escoamento (ou sua falta) deve ser examinada. A Figura 4–27 ilustra as linhas de tempo de um escoamento em canal entre duas paredes paralelas. Devido ao atrito nas paredes, a velocidade do fluido nesse ponto é zero (a condição de não-escorregamento), e as partes superior e inferior da linha de tempo são ancoradas em suas posições iniciais. Em regiões de escoamento longe das paredes, as partículas de fluido marcadas se movimentam na velocidade local do fluido, deformando a linha de tempo. No exemplo da Figura 4–27, a velocidade próxima ao centro do canal é bastante uniforme, mas pequenos desvios tendem a aumentar com o tempo à

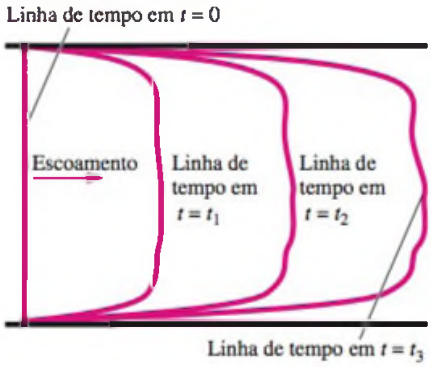


FIGURA 4–27
As linhas de tempo são formadas pela marcação de uma linha de partículas de fluido e, em seguida, observando o movimento (e deformação) da linha através do campo de escoamento; as linhas de tempo são mostradas em $t = 0, t_1, t_2$ e t_3.

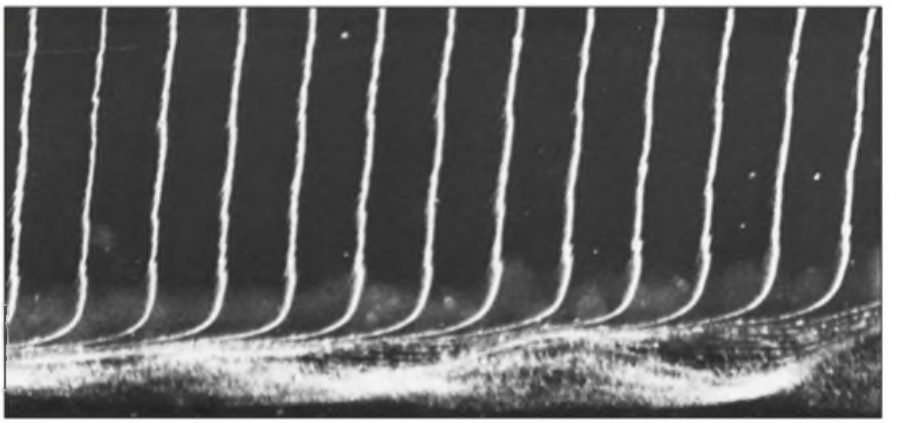


FIGURA 4–28
As linhas de tempo produzidas por um fio de bolhas de hidrogênio são usadas para visualizar a forma do perfil de velocidade da camada limite. O escoamento se dá da esquerda para a direita, e o fio de bolhas de hidrogênio está localizado à esquerda do campo de visão. As bolhas próximas à parede revelam uma instabilidade de escoamento que leva à turbulência.
Bippes, H. 1972 Sitzungsber, Heidelb. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. *Kl., n. 3, 103–180; Nasa TM-75243, 1978.*

medida que a linha de tempo estica. As linhas de tempo podem ser geradas experimentalmente em um canal de água com o uso de um **fio de bolha de hidrogênio**. Quando um pulso curto de corrente elétrica é enviado através do fio catódico, ocorre a eletrólise da água e minúsculas bolhas de gás hidrogênio se formam no fio. Como as bolhas são muito pequenas, sua flutuação é quase desprezível e as bolhas acompanham bem o escoamento da água (Figura 4–28).

Técnicas de Refração para Visualização do Escoamento

Outra categoria de visualização do escoamento tem por base a **propriedade de refração** das ondas de luz. Você deve lembrar do estudo da física que a velocidade da luz através de um material pode diferir um pouco daquela de outro material ou até no *mesmo* material se a sua densidade variar. À medida que a luz viaja de um fluido para outro com um índice de refração diferente, os raios de luz se curvam (eles são **refratados**).

Existem duas técnicas primárias de visualização de escoamento que utilizam o fato de que o índice de refração do ar (ou de outros gases) varia com a densidade. Eles são a **técnica do gráfico por sombras** e a **técnica estereoscópica** (Settles, 2001). A **interferometria** é uma técnica de visualização que utiliza a *variação de fase* da luz à medida que esta passa através do ar com densidades variadas como base para a visualização do escoamento e não é discutida aqui (ver Merzkirch, 1987). Todas essas técnicas são úteis para a visualização do escoamento em campos de escoamento onde a densidade varia de um local do escoamento para outro, como os escoamentos por convecção natural (as diferenças de temperatura causam as variações de densidade), mistura de fluidos (as espécies de fluidos causam as variações da densidade) e os escoamentos supersônicos (as ondas de choque e as ondas de expansão causam as variações da densidade).

Ao contrário das visualizações do escoamento que envolvem as linhas de emissão, linhas de trajetória e linhas de tempo, os métodos de gráfico por sombras e estereoscópico não exigem a injeção de um marcador visível (fumaça ou tinta). Em vez disso, as diferenças de densidade e a propriedade refrativa da luz fornecem os meios necessários para visualizarmos as regiões de atividade do campo de escoamento, permitindo que "vejamos o invisível". A imagem produzida pelo método do **gráfico por sombras** se forma quando os raios refratados de luz reorganizam a projeção da sombra em uma tela de visualização ou plano focal de câmera, fazendo com que padrões brilhantes ou escuros apareçam na sombra. Os padrões escuros indicam o local no qual os raios refratados se *originam*, enquanto os padrões brilhantes marcam o local onde esses raios *acabam* e podem ser enganosos. Como resultado, as regiões escuras são menos distorcidas do que as regiões claras e são mais úteis na interpretação do gráfico por sombras. No gráfico por sombras da Figura 4–29, por exemplo, podemos ter confiança na forma e posição da onda de choque curva (a faixa escura), mas a luz clara refratada distorceu a parte da frente da sombra da esfera.

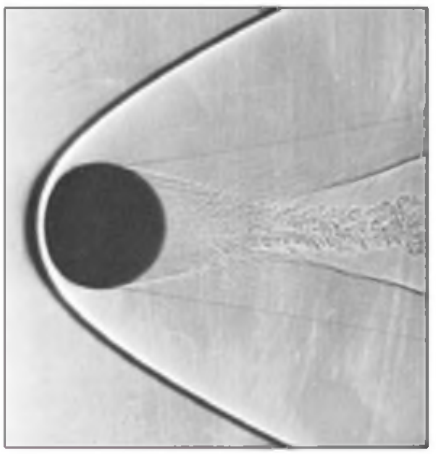


FIGURA 4–29
O gráfico por sombras de uma esfera de 14,3 mm em vôo livre através do ar a Ma = 3,0. Uma onda de choque é claramente visível na sombra como uma faixa escura que se curva ao redor da esfera e é chamada de *onda curva* (veja o Capítulo 12).
A. C. Charters, Air Flow Branch, U. S. Army Ballistic Research Laboratory.

Um gráfico por sombras não é uma verdadeira imagem ótica; ele é, afinal de contas, apenas uma sombra. Uma **imagem estereoscópica**, porém, envolve lentes (ou espelhos) e uma lâmina de faca ou outro dispositivo selecionador para bloquear a luz refratada. Essa é uma verdadeira imagem ótica focalizada. A imagem estereoscópica é mais complicada de configurar do que um gráfico por sombras (consulte Settles, 2001, para obter os detalhes), mas há várias vantagens. Por exemplo, uma imagem estereoscópica não sofre distorção ótica pelos raios de luz refratados. A imagem estereoscópica também é mais sensível a gradientes de densidade fracos, como aqueles causados pela convecção natural (Figura 4–30) ou por fenômenos graduais, como zonas de expansão no escoamento supersônico. Técnicas de imagem estereoscópica colorida também foram desenvolvidas. Finalmente, é possível ajustar mais componentes em uma configuração estereoscópica, como o local, a orientação e o tipo de dispositivo selecionador, para produzir uma imagem que seja mais útil para o problema em questão.

FIGURA 4–30
A imagem estereoscópica da convecção natural de uma churrasqueira.
G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Universidade do Estado da Pennsylvania. Usada com permissão.

Técnicas de Visualização do Escoamento em Superfícies

Mencionaremos brevemente algumas técnicas de visualização de escoamento que são úteis ao longo de superfícies sólidas. A direção do escoamento de fluido que está imediatamente acima de uma superfície sólida pode ser visualizada com **tufos** — cordões curtos e flexíveis colados à superfície em uma extremidade, que aponta a direção do escoamento. Os tufos são particularmente úteis para localizar as regiões de separação do escoamento, nas quais a direção do escoamento se reverte repentinamente.

Uma técnica chamada de **visualização de óleo em superfície** pode ser usada com a mesma finalidade — o óleo colocado sobre a superfície forma riscas que indicam a direção do escoamento. Se cair uma chuva leve e seu automóvel estiver sujo (particularmente no inverno quando há sal nas estradas dos países onde neva), você já deve ter notado riscas ao longo do capô e nas laterais do automóvel, ou mesmo no pára-brisas. Isso é similar ao que observamos na visualização de óleo em superfície.

Existem tintas sensíveis à pressão e à temperatura que permitem aos pesquisadores observarem a distribuição da pressão ou da temperatura ao longo das superfícies sólidas.

4–3 • REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS DADOS DE ESCOAMENTO DE FLUIDOS

Independentemente do modo como os resultados são obtidos (de forma analítica, experimental ou computacional), em geral é preciso *representar graficamente* os dados de escoamento de forma que permitam ao leitor ter uma idéia de como as propriedades de escoamento variam com o tempo e/ou o espaço. Você já deve estar familiarizado com as *representações gráficas de tempo,* as quais são particularmente úteis nos escoamentos turbulentos (por exemplo, uma componente da velocidade representada como função do tempo), e as representações gráficas *xy* (por exemplo, a pressão como função do raio). Nesta seção, discutimos três tipos adicionais de representações gráficas que são úteis na mecânica dos fluidos — gráficos de perfil, gráficos vetoriais e gráficos de contorno.

Gráficos de Perfil

Um **gráfico de perfil** indica como o valor de uma propriedade escalar varia ao longo de alguma direção escolhida no campo de escoamento.

Os gráficos de perfil são os mais simples de entender, porque são como os gráficos *xy* comuns que você vem fazendo desde a escola secundária. Você faz o gráfico do modo que uma variável *y* varia como função de uma segunda variável *x*. Em

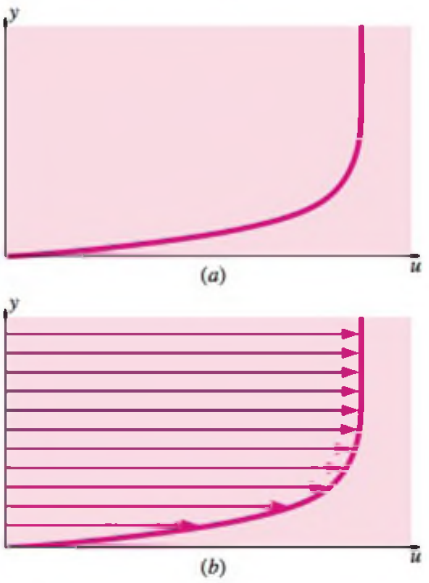


FIGURA 4–31
Os *gráficos de perfil* da componente horizontal da velocidade como função da distância vertical; o escoamento na camada limite aumentando ao longo de uma placa plana horizontal: (*a*) gráfico de perfil padrão e (*b*) gráfico de perfil com setas.

mecânica dos fluidos, os gráficos de *qualquer* variável escalar (pressão, temperatura, densidade etc.) podem ser criados, mas o mais usado neste livro é o *gráfico de perfil de velocidade*. Observamos que, como a velocidade é uma quantidade vetorial, geralmente traçamos o módulo da velocidade ou uma das componentes do vetor de velocidade como função da distância em alguma direção desejada.

Por exemplo, uma das linhas de tempo no escoamento da camada limite da Figura 4–28 pode ser convertida em um gráfico de perfil de velocidade se reconhecermos que em determinado instante a distância horizontal percorrida por uma bolha de hidrogênio em uma posição vertical y é proporcional à componente x da velocidade u *local*. Traçamos u como uma função de y na Figura 4–31. Os valores de u para o gráfico também podem ser obtidos analiticamente (ver Capítulos 9 e 10), experimentalmente usando a PIV ou por algum tipo de dispositivo de medição da velocidade local (ver Capítulo 8), ou por computador (ver Capítulo 15). Observe que fisicamente é mais significativo neste exemplo representar u na *abscissa* (eixo horizontal) em vez de na *ordenada* (eixo vertical), embora ela seja a variável dependente, pois então a posição y estará em sua orientação apropriada (para cima) em vez de atravessada.

Finalmente, é comum adicionar setas aos gráficos de perfil de velocidade para que eles tenham mais apelo visual, embora as setas não ofereçam nenhuma informação adicional. Se mais de uma componente da velocidade for representada pela seta, a *direção* do vetor de velocidade local será indicada e o gráfico de perfil de velocidade torna-se um gráfico de *vetor* de velocidade.

Gráficos Vetoriais

Um **gráfico vetorial** é uma matriz de setas que indicam o módulo e a direção de uma propriedade vetorial em determinado instante de tempo.

Embora as linhas de corrente indiquem a *direção* do campo de velocidade instantânea, elas não indicam diretamente o *módulo* da velocidade (ou seja, a velocidade). Assim, um padrão de escoamento útil para escoamentos de fluido experimentais e computacionais é o gráfico vetorial, que consiste em uma matriz de setas que indicam ambos o módulo *e* a direção de uma propriedade instantânea vetorial. Já vimos um exemplo de um gráfico vetorial de velocidade na Figura 4–4 e de um gráfico vetorial de aceleração na Figura 4–14. Eles foram gerados analiticamente. Os gráficos vetoriais também podem ser gerados por meio dos dados obtidos experimentalmente (ou seja, das medições da PIV) ou numericamente dos cálculos CFD.

Para melhor ilustrarmos os gráficos vetoriais, geramos um campo de escoamento bidimensional que consiste em escoamento de corrente livre incidindo sobre um bloco de seção transversal retangular. Executamos os cálculos CFD e os resultados são mostrados na Figura 4–32. Observe que esse escoamento é turbulento por natureza, mas apenas os valores médios no tempo são calculados e exibidos aqui. As linhas de corrente são mostradas na Figura 4–32*a*; uma visão de todo o bloco e uma parte grande de sua esteira também são mostradas. As linhas de corrente fechadas acima e abaixo do plano de simetria indicam grandes turbilhões recirculantes, um acima e outro abaixo do plano de simetria. Um gráfico vetorial de velocidade é mostrado na Figura 4–32*b*. (Apenas a metade superior do escoamento é mostrada por causa da simetria.) Esse gráfico deixa claro que o escoamento acelera ao redor do canto a montante do bloco, e prova disso é que a camada limite não consegue vencer o canto agudo e se separa do bloco, produzindo os grandes turbilhões recirculantes a jusante do bloco. (Observe que esses vetores velocidade são valores médios no tempo; os vetores instantâneos variam em módulo e direção com o tempo, à medida que os vórtices são emitidos do corpo, como aqueles da Figura 4–25*a*.) Uma visão mais próxima da região do escoamento separado é mostrado na Figura 4–32*c*, onde verificamos o escoamento reverso na metade inferior do grande turbilhão recirculante.

Os códigos CFD modernos e o pós-processamento podem dar *cor* a um gráfico vetorial. Por exemplo, os vetores podem ser coloridos de acordo com alguma outra

propriedade de escoamento, como a pressão (vermelho para alta pressão e azul para baixa pressão) ou temperatura (vermelho para quente e azul para frio). Dessa forma, é possível visualizar facilmente não apenas o módulo e a direção do escoamento, mas também outras propriedades, simultaneamente.

Gráfico de Contorno

Um **gráfico de contorno** mostra as curvas de valor constante de uma propriedade escalar (ou módulo de uma propriedade vetorial) em determinado instante.

Se você pratica caminhada, já está acostumado aos mapas de contorno das trilhas nas montanhas. Os mapas consistem em uma série de curvas fechadas, cada uma delas indicando uma elevação ou altitude constante. Próximo ao centro de um grupo dessas curvas está o pico da montanha ou o vale; o pico ou vale real é um *ponto* do mapa mostrando a elevação mais alta ou mais baixa. Tais mapas são úteis não apenas porque você tem uma visão panorâmica dos riachos e trilhas, entre outros, mas também pode ver facilmente sua altitude e onde a trilha é plana ou íngreme. Em mecânica dos fluidos, o mesmo princípio se aplica às diversas propriedades escalares do escoamento; gráficos de contorno (também chamados **gráficos de isocurvas**) são gerados para a pressão, temperatura, módulo da velocidade, concentração de espécie, propriedades de turbulência etc. Um gráfico de contorno pode revelar facilmente regiões com valores altos (ou baixos) da propriedade de escoamento que está sendo estudada.

Um gráfico de contorno pode consistir simplesmente em curvas que indicam os diversos níveis da propriedade; isso é chamado de **gráfico da linha de contorno**. Alternativamente, os contornos podem ser preenchidos com cores ou tons de cinza; isso é chamado de **gráfico de contorno preenchido**. Um exemplo de contorno de pressão é mostrado na Figura 4–33 para o mesmo escoamento da Figura 4–32. Na Figura 4–33*a*, os contornos preenchidos são mostrados usando tons de cinza para identificar as regiões com níveis de pressão diferentes — as regiões escuras indicam baixa pressão e as regiões claras indicam alta pressão. Essa figura deixa claro que a pressão é mais alta na face frontal do bloco e mais baixa ao longo da parte superior do bloco, na zona separada. A pressão também é baixa na esteira do bloco, como esperado. Na Figura 4–33*b*, os mesmos contornos de pressão aparecem, mas como um gráfico de linha de contorno com níveis identificáveis de pressão manométrica em unidades de pascals.

Na CFD os gráficos de contorno em geral são exibidos com cores vibrantes. Normalmente o vermelho indica o valor mais alto do escalar e o azul o mais baixo. Um olho humano saudável pode detectar facilmente uma região vermelha ou azul e, portanto, pode localizar as regiões nas quais a propriedade de escoamento tem valor alto ou baixo. Devido às bonitas figuras produzidas pela CFD, a dinâmica dos fluidos computacional às vezes recebe o apelido de "dinâmica dos fluidos colorida".

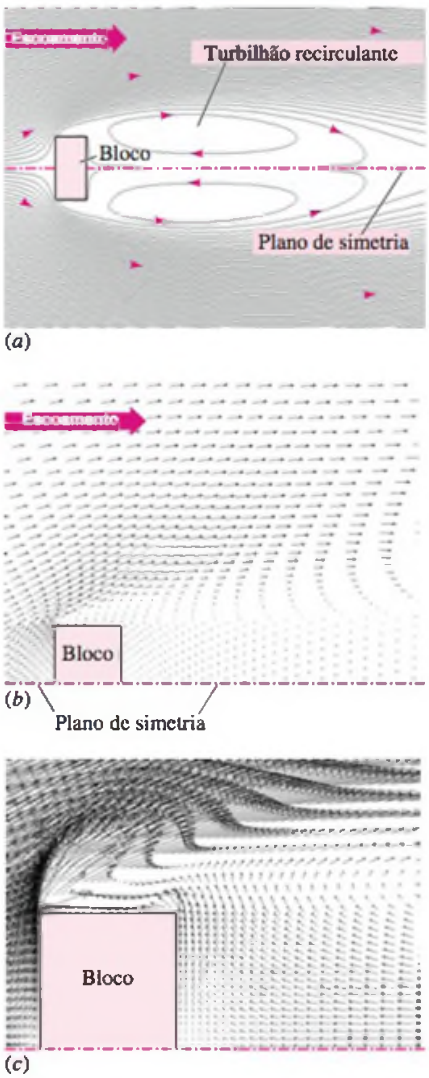


FIGURA 4–32
Os resultados dos cálculos CFD do escoamento incidente em um bloco. (*a*) linhas de corrente, (*b*) gráfico vetorial de velocidade da metade superior do escoamento e (*c*) gráfico vetorial de velocidade, visão mais próxima revelando mais detalhes.

4–4 • OUTRAS DESCRIÇÕES CINEMÁTICAS

Tipos de Movimento ou Deformação dos Elementos de Fluido

Em mecânica dos fluidos, assim como na mecânica de sólidos, um elemento pode passar por quatro tipos fundamentais de movimento ou deformação, como ilustrado em duas dimensões na Figura 4–34: (*a*) **translação** (*b*) **rotação** (*c*) **deformação linear** (também chamada de **deformação extensional**) e (*d*) **deformação por cisalhamento**. O estudo da dinâmica dos fluidos complica-se ainda mais pelo fato de que em geral todos os quatro tipos de movimento ou deformação ocorrem simultaneamente. Como os elementos de fluido podem estar em movimento constante, em dinâmica dos fluidos é preferível descrever o movimento e a deformação dos elementos fluidos em termos de *taxas*. Em particular, discutimos a *velocidade* (taxa

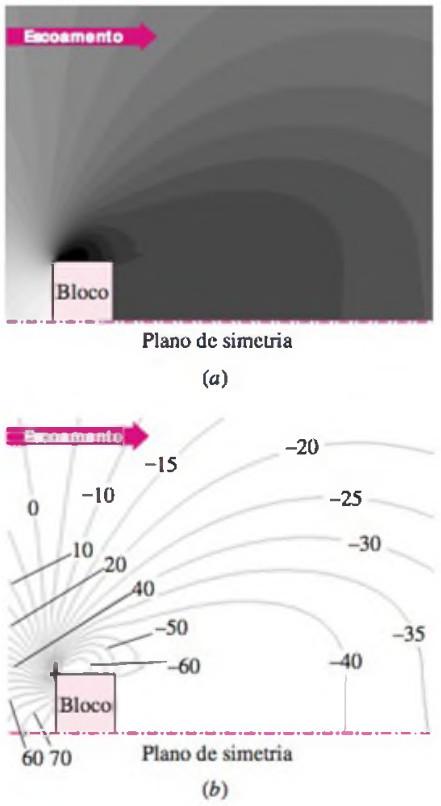


FIGURA 4–33
Gráficos de contorno do campo de pressão devido ao escoamento incidente em um bloco, produzido pelos cálculos CFD; apenas a metade superior aparece devido à simetria. (*a*) gráfico de contorno preenchido em tons de cinza e (*b*) gráfico de linha de contorno no qual os valores da pressão são exibidos em unidades de pressão manométrica em Pa (pascals).

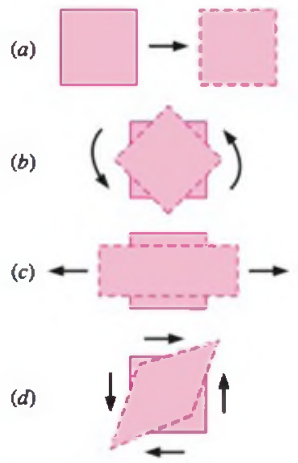


FIGURA 4–34
Tipos fundamentais de movimento ou deformação do elemento fluido: (*a*) translação, (*b*) rotação, (*c*) deformação linear e (*d*) deformação por cisalhamento.

de translação), a *velocidade angular* (taxa de rotação), a *taxa de deformação linear* e a *taxa de deformação por cisalhamento*. Para que essas **taxas de deformação** sejam úteis no cálculo dos escoamentos de fluidos, devemos expressá-los em termos da velocidade e derivadas da velocidade.

A translação e a rotação são facilmente entendidas, uma vez que são observadas facilmente no movimento das partículas sólidas, como as bolas de bilhar (Figura 4–1). É um vetor necessário para descrever totalmente a taxa de translação em três dimensões. O **vetor taxa de translação** é descrito matematicamente como o **vetor velocidade**. Em coordenadas cartesianas

Vetor taxa de translação em coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \tag{4–19}$$

Na Figura 4–34*a*, o elemento de fluido se movimentou na direção horizontal positiva (x); assim, u é positivo, enquanto v e w são nulos.

A **taxa de rotação (velocidade angular)** em um ponto é definida como a *taxa de rotação média de duas retas inicialmente perpendiculares que se cruzam nesse ponto*. Na Figura 4–34*b*, por exemplo, considere o ponto do canto inferior esquerdo do elemento de fluido inicialmente quadrado. Os lados esquerdo e inferior do elemento se cruzam nesse ponto e inicialmente são perpendiculares. Ambas as retas giram no sentido anti-horário, que é a direção matematicamente positiva. O ângulo entre essas duas retas (ou entre duas retas inicialmente perpendiculares *quaisquer* desse elemento de fluido) permanece em 90°, uma vez que a rotação de corpo rígido é ilustrada na figura. Assim, ambas as retas giram com mesma taxa e a taxa de rotação no plano é simplesmente a componente da velocidade angular nesse plano.

No caso mais geral, porém ainda bidimensional (Figura 4–35), a partícula de fluido translada e se deforma à medida que gira, e a taxa de rotação é calculada de acordo com a definição dada no parágrafo anterior. Começamos no instante t_1 com duas retas inicialmente perpendiculares (retas a e b da Figura 4–35) que se cruzam no ponto P do plano xy. Acompanhamos essas retas à medida que elas se movimentam e giram em um incremento de tempo infinitesimal $dt = t_2 - t_1$. No instante t_2, a reta a girou um ângulo α_a, e a reta b girou um ângulo α_b, e ambas as retas se movimentaram com o escoamento, como esboçado (ambos os valores dos ângulos são dados em radianos e são mostrados matematicamente positivos no esboço). Assim, o ângulo médio de rotação é $(\alpha_a + \alpha_b)/2$, e a *taxa de rotação* ou velocidade angular no plano xy é igual à derivada no tempo desse ângulo de rotação médio

Taxa de rotação do elemento de fluido com relação ao ponto P da Figura 4–35:

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4–20}$$

Buscamos como exercício demonstrar o lado direito da Equação 4–20, onde escrevemos ω em termos das componentes da velocidade u e v em vez dos ângulos α_a e α_b.

Em três dimensões, devemos definir um *vetor* para a taxa de rotação em um ponto do escoamento, uma vez que seu valor pode diferir em cada uma das três dimensões. A dedução do vetor taxa de rotação em três dimensões pode ser encontrada em muitos livros sobre mecânica dos fluidos, como Kundu (1990) e White (1991). O **vetor da taxa de rotação** é igual ao **vetor velocidade angular** e é expresso em coordenadas cartesianas como

Vetor taxa de rotação em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{4–21}$$

A **taxa de deformação linear** é definida como *a taxa de aumento do comprimento por unidade de comprimento*. Matematicamente, a taxa de deformação linear de um elemento de fluido depende da orientação inicial ou da direção do segmento de reta no qual medimos a deformação linear. Assim, não é possível expressá-la como uma quantidade escalar ou vetorial. Em vez disso, definimos a taxa de defor-

mação linear em alguma direção arbitrária, que denotamos por direção x_α. Por exemplo, o segmento de reta PQ da Figura 4–36 tem um comprimento inicial dx_α, e aumenta para o segmento de reta $P'Q'$ como mostrado. Da definição dada e usando os comprimentos marcados na Figura 4–36, a taxa de deformação linear na direção x_α é

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{P'Q' - PQ}{PQ}\right)$$

$$\cong \frac{d}{dt}\left(\frac{\overbrace{\left(u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}dx_\alpha\right)dt + dx_\alpha - u_\alpha\,dt}^{\text{Comprimento de } P'Q' \text{ na direção } x_\alpha} \quad \overbrace{-\ dx_\alpha}^{\text{Comprimento de } PQ \text{ na direção } x_\alpha}}{\underbrace{dx_\alpha}_{\text{Comprimento de } PQ \text{ na direção } x_\alpha}}\right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \qquad (4\text{–}22)$$

Em coordenadas cartesianas, normalmente tomamos a direção x_α como a direção de cada um dos três eixos de coordenadas, embora não estejamos restritos a essas direções.

Taxa de deformação linear em coordenadas cartesianas:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (4\text{–}23)$$

Para o caso mais geral, o elemento fluido se move e deforma como mostra a Figura 4–35. Deixamos como exercício mostrar que a Equação 4–23 ainda é válida para o caso geral.

Os objetos sólidos como fios, hastes e vigas se esticam quando são puxados. Você deve estar lembrado do seu estudo de mecânica na engenharia que quando um objeto se estica em uma direção, em geral ele se encolhe na direção ou nas direções normais àquela direção. O mesmo vale para os elementos de fluido. Na Figura 4–34*c*, o elemento de fluido originalmente quadrado se estica na direção horizontal e encolhe na direção vertical. A taxa de deformação linear, portanto, é positiva na horizontal e negativa na vertical.

Se o escoamento é *incompressível*, o volume total do elemento de fluido deve permanecer constante; portanto, se o elemento se estica em uma direção, ele deve encolher na quantidade apropriada na outra direção ou direções para compensar. O volume de um elemento de fluido *compressível*, porém, pode aumentar ou diminuir à medida que sua densidade diminui ou aumenta, respectivamente. (A massa de um elemento de fluido deve permanecer constante, mas como $\rho = m/V$, a densidade e o volume são inversamente proporcionais.) Considere, por exemplo, uma porção de ar em um cilindro que está sendo comprimido por um pistão (Figura 4–37); o volume do elemento fluido diminui enquanto sua densidade aumenta, de modo que a massa do elemento fluido é conservada. A taxa de aumento do volume de um elemento fluido por unidade de volume é a sua **taxa de deformação volumétrica** ou **taxa de deformação em volume**. Essa propriedade cinemática é definida como *positiva* quando o volume *aumenta*. Outro sinônimo de taxa de deformação volumétrica é a **taxa de dilatação volumétrica**, que é fácil de lembrar se você pensar sobre como a íris do seu olho dilata (aumenta) quando é exposta a luz fraca. É possível mostrar que a taxa de deformação volumétrica é a soma das taxas de deformação linear nas três direções mutuamente ortogonais. Em coordenadas cartesianas (Equação 4–23), a taxa de deformação volumétrica é portanto

Taxa de deformação volumétrica em coordenadas cartesianas:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (4\text{–}24)$$

Na Equação 4–24, a notação D maiúsculo é usada para enfatizar que estamos falando do volume que *acompanha um elemento de fluido*, ou seja, o *volume material* do elemento de fluido, como na Equação 4–12.

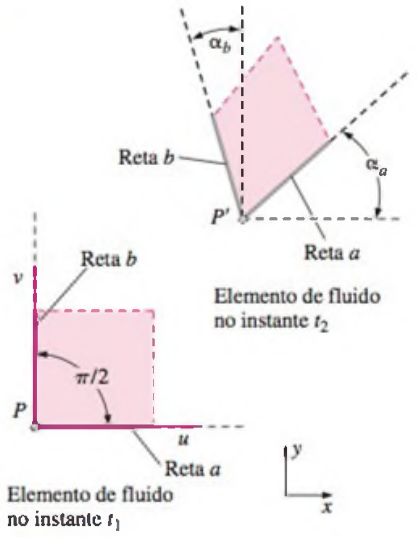


FIGURA 4–35
Para um elemento de fluido que translada e se deforma como na figura, a *taxa de rotação* no ponto P é definida como a taxa de rotação média de duas retas inicialmente perpendiculares (retas a e b).

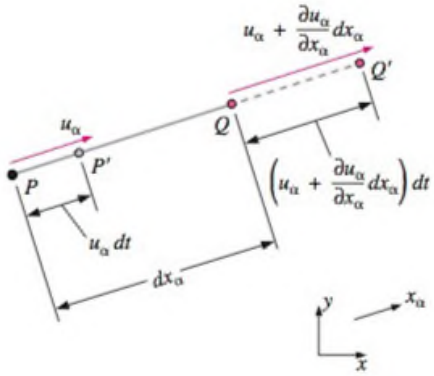


FIGURA 4–36
A *taxa de deformação linear* em alguma direção arbitrária x_α é definida como a taxa de aumento do comprimento por unidade de comprimento naquela direção. A taxa de deformação linear seria *negativa* se o comprimento do segmento de reta tivesse *diminuído*. Aqui seguimos o aumento do comprimento do segmento de reta PQ para o segmento de reta $P'Q'$, que resulta em uma taxa de deformação linear positiva. As componentes da velocidade e as distâncias são truncadas na primeira ordem, uma vez que dx_α e dt são infinitesimalmente pequenos.

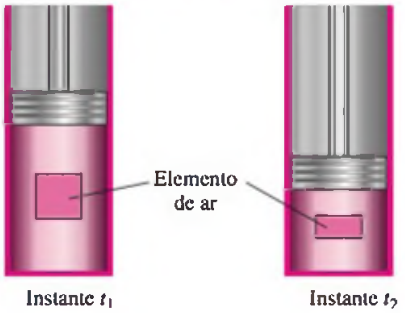


FIGURA 4–37
Ar sendo comprimido por um pistão em um cilindro; o volume de um elemento fluido no cilindro diminui, correspondendo a uma taxa negativa de dilatação volumétrica.

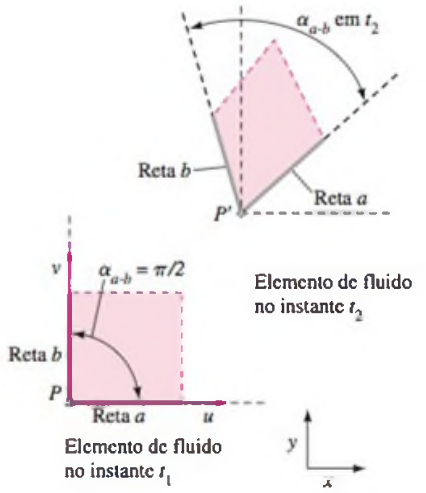


FIGURA 4–38
Para um elemento fluido que translada e se deforma como na figura, a *taxa de deformação por cisalhamento* no ponto P é definida como metade da taxa de diminuição do ângulo entre duas retas inicialmente perpendiculares (retas a e b).

A taxa de deformação volumétrica é zero em um escoamento incompressível.

A taxa de deformação por cisalhamento é uma taxa de deformação mais difícil de descrever e entender. A **taxa de deformação por cisalhamento** em um ponto é definida como *metade da taxa da diminuição do ângulo entre duas retas inicialmente perpendiculares que se cruzam no ponto.* (O motivo para a metade ficará claro mais tarde quando combinarmos a taxa de deformação por cisalhamento e a taxa de deformação linear em um único tensor.) Na Figura 4–34*d*, por exemplo, os ângulos inicialmente de 90° dos cantos inferior esquerdo e superior direito do elemento de fluido quadrado diminuem, o que, por definição, é uma deformação por cisalhamento *positiva*. Entretanto, os ângulos dos cantos superior esquerdo e inferior direito do elemento fluido quadrado aumentam à medida que o elemento fluido inicialmente quadrado se deforma; isso é uma deformação por cisalhamento *negativa*. Obviamente não podemos descrever a taxa de deformação por cisalhamento em termos de apenas uma quantidade escalar ou mesmo em termos de uma quantidade *vetorial*. Em vez disso, uma descrição matemática completa da taxa de deformação por cisalhamento exige sua especificação em quaisquer *duas direções mutuamente perpendiculares*. Em coordenadas cartesianas, os próprios eixos são a opção mais óbvia, embora não precisemos nos restringir a eles. Considere um elemento de fluido em duas dimensões no plano xy. O elemento translada e se deforma com o tempo como esboçado na Figura 4–38. Duas retas inicialmente perpendiculares (retas a e b nas direções x e y, respectivamente) são acompanhadas. O ângulo entre essas duas linhas diminui de $\pi/2$ (90°) até o ângulo marcado $\alpha_{a\text{-}b}$ em t_2 no esboço. Buscamos como exercício mostrar que a taxa da deformação por cisalhamento no ponto P para retas inicialmente perpendiculares nas direções x e y é dada por

Taxa de deformação de cisalhamento, retas inicialmente perpendiculares nas direções x e y:

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha_{a\text{-}b} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{4–25}$$

A Equação 4–25 pode ser facilmente estendida para três dimensões. Portanto, a taxa de deformação por cisalhamento é:

Taxa de deformação por cisalhamento em coordenadas cartesianas:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{4–26}$$

Finalmente, podemos combinar matematicamente a taxa de deformação linear e a taxa de deformação por cisalhamento em um tensor simétrico de segunda ordem chamado de **tensor de taxa de deformação**, que é uma combinação das Equações 4–23 e 4–26:

Tensor de taxa de deformação em coordenadas cartesianas:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4–27}$$

O tensor da taxa de deformação obedece a todas as leis dos tensores matemáticos, tais como a dos invariantes tensoriais, as leis de transformação e dos eixos principais.

A Figura 4–39 mostra uma situação geral (embora bidimensional) em um escoamento de fluido compressível, no qual todos os movimentos e deformações possíveis estão presentes simultaneamente. Em particular, existe translação, rotação, deformação linear e por cisalhamento. Devido à natureza compressível do fluido, também existe deformação volumétrica (dilatação). Agora você deve ter uma melhor apreciação da complexidade inerente da dinâmica dos fluidos e a sofisticação matemática necessária para descrever totalmente o movimento do fluido.

EXEMPLO 4–6 Cálculo das Propriedades Cinemáticas de um Escoamento Bidimensional

Considere o campo de velocidade estacionário e bidimensional do Exemplo 4–1:

$$\vec{V} = (u, v) = (0{,}5 + 0{,}8\,x)\vec{i} + (1{,}5 - 0{,}8\,y)\vec{j} \qquad (1)$$

onde os comprimentos estão em unidades de m, o tempo está em s e as velocidades em m/s. Existe um ponto de estagnação em (–0,625, 1,875) como mostra a Figura 4–40. As linhas de corrente do escoamento também são mostradas na Figura 4–40. Calcule as diversas propriedades cinemáticas, a saber, a taxa de translação, a taxa de rotação, a taxa de deformação linear, a taxa de deformação por cisalhamento e a taxa de deformação volumétrica. Verifique se esse escoamento é incompressível.

SOLUÇÃO Devemos calcular várias propriedades cinemáticas de determinado campo de velocidade e verificar se o escoamento é incompressível.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente. **2** O escoamento é bidimensional, implicando uma componente z nula para a velocidade e nenhuma variação de u ou v com z.

Análise Da Equação 4–19, a taxa de translação é simplesmente o próprio vetor velocidade dado pela Equação 1. Assim

$$\textit{Taxa de translação:} \quad u = 0{,}5 + 0{,}8x \qquad v = 1{,}5 - 0{,}8y \qquad w = 0 \qquad (2)$$

A taxa de rotação é dada pela Equação 4–21. Neste caso, como $w = 0$ em toda a parte, e como nem u nem v variam com z, a única componente possivelmente não-nula da taxa de rotação está na direção z. Assim

$$\textit{Taxa de rotação:} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = \frac{1}{2}(0 - 0)\vec{k} = 0 \qquad (3)$$

Neste caso, vemos que não há rotação das partículas de fluido à medida que elas se movimentam. (Essa informação é significativa e será discutida com mais detalhes neste capítulo e também no Capítulo 10.)

As taxas de deformação linear podem ser calculadas em uma direção arbitrária usando a Equação 4–22. Nas direções x, y e z, as taxas de deformação linear da Equação 4–23 são

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0{,}8\ \text{s}^{-1} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -0{,}8\ \text{s}^{-1} \qquad \varepsilon_{zz} = 0 \qquad (4)$$

Assim, prevemos que as partículas de fluido *esticam* na direção x (taxa de deformação linear positiva) e *encolhem* na direção y (taxa de deformação linear negativa). Isso é ilustrado na Figura 4–41, onde marcamos uma porção inicialmente quadrada de fluido centralizada em (0,25, 4,25). Integrando as Equações 2 com o tempo, calculamos a posição dos quatro cantos do fluido marcado após um período de 1,5 s. Sem dúvida, essa porção de fluido esticou na direção x e encolheu na direção y, como previsto.

A taxa de deformação por cisalhamento é determinada pela Equação 4–26. Por causa da bidimensionalidade, as taxas de deformação por cisalhamento diferentes de zero só podem ocorrer no plano xy. Usando as retas paralelas aos eixos x e y como nossas retas inicialmente perpendiculares, calculamos ε_{xy} com a Equação 4–26:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \qquad (5)$$

Assim, não há deformação por cisalhamento nesse escoamento, como também indicado pela Figura 4–41. Embora a amostra de fluido de exemplo se deforme, ela permanece retangular; seus ângulos de canto inicialmente de 90° permanecem como 90° durante todo o período do cálculo.

Finalmente, a taxa de deformação volumétrica é calculada com a Equação 4–24:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (0{,}8 - 0{,}8 + 0)\ \text{s}^{-1} = 0 \qquad (6)$$

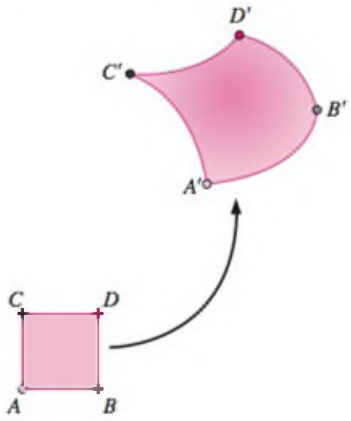


FIGURA 4–39
Um elemento de fluido ilustrando a translação, rotação, deformação linear, deformação por cisalhamento e deformação volumétrica.

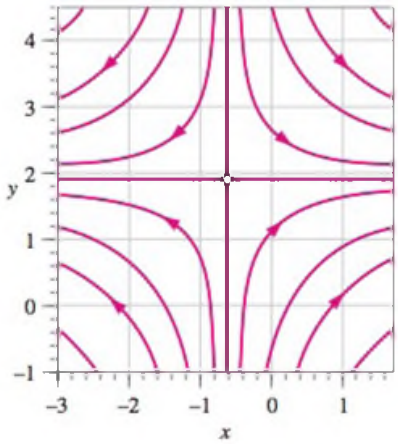


FIGURA 4–40
As linhas de corrente do campo de velocidade do Exemplo 4–6. O ponto de estagnação é indicado pelo círculo em $x = -0{,}625$ m e $y = 1{,}875$ m.

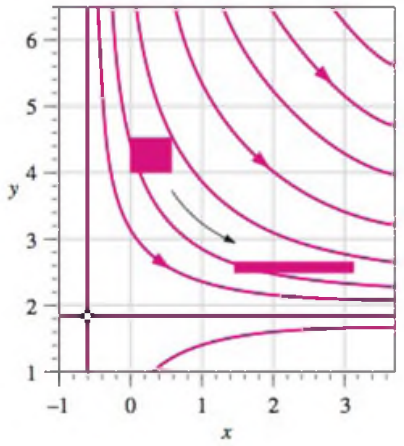


FIGURA 4–41
A deformação de uma parcela inicialmente quadrada de fluido marcado, sujeito ao campo de velocidade do Exemplo 4–6 por um período de 1,5 s. O ponto de estagnação é indicado pelo círculo em $x = -0{,}625$ m e $y = 1{,}875$ m, e várias linhas de corrente são traçadas.

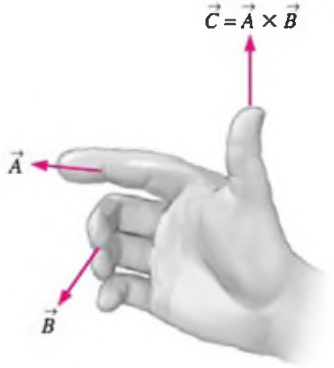


FIGURA 4–42
A direção de um produto vetorial é determinada pela lei da mão direita.

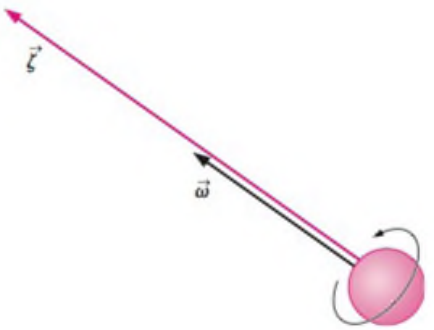


FIGURA 4–43
O *vetor vorticidade* é igual ao dobro do vetor velocidade angular de uma partícula de fluido giratória.

Como a taxa de deformação volumétrica é zero em todas as partes, podemos dizer definitivamente que o volume das partículas de fluido não está se dilatando (expandindo), nem encolhendo (comprimindo) Assim, **verificamos que esse escoamento sem dúvida é incompressível**. Na Figura 4–41, a área de fluido sombreada permanece constante à medida que ela se movimenta e deforma no campo de escoamento.

Discussão Neste exemplo, as taxas de deformação linear (ε_{xx} e ε_{yy}) são diferentes de zero, enquanto as taxas de deformação por cisalhamento (ε_{xy} e seu parceiro simétrico ε_{yx}) são zero. Isso significa que os *eixos x e y desse campo de escoamento são os eixos principais*. Assim, o tensor taxa de deformação (bidimensional) nessa orientação é

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{pmatrix} \text{s}^{-1} \qquad (7)$$

Se rodássemos os eixos de um ângulo arbitrário, os novos eixos *não* seriam os eixos principais, e todos os quatro elementos do tensor taxa de deformação seriam diferentes de zero. Você deve se lembrar dos eixos giratórios das aulas de engenharia mecânica no uso dos círculos de Mohr para determinar os eixos principais, as deformações por cisalhamento máximas etc. Análises semelhantes podem ser feitas na mecânica dos fluidos.

Vorticidade e Rotacionalidade

Já definimos a taxa do vetor de rotação para um elemento fluido (ver Equação 4–21). Uma propriedade cinemática relacionada é de grande importância para a análise dos escoamentos de fluidos. O **vetor vorticidade** é definido matematicamente como o rotacional do vetor velocidade $\vec{V}$,

Vetor vorticidade: $$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{rot}(\vec{V}) \qquad (4\text{–}28)$$

Fisicamente, é possível saber a direção do vetor vorticidade usando a regra da mão direita para o produto vetorial (Figura 4–42). O símbolo ζ usado para a vorticidade é a letra grega *zeta*. Observe que esse símbolo da vorticidade *não* é universal para os livros de mecânica dos fluidos; alguns autores usam a letra grega *omega* (ω) enquanto outros ainda usam a letra *omega* maiúscula (Ω). Neste livro, $\vec{\omega}$ é usado para indicar o vetor taxa de rotação (o vetor velocidade angular) de um elemento de fluido. O vetor taxa de rotação é igual à metade do vetor vorticidade,

Taxa do vetor de rotação: $$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2}\text{rot}(\vec{V}) = \frac{\vec{\zeta}}{2} \qquad (4\text{–}29)$$

Assim, a *vorticidade é uma medida da rotação de uma partícula fluida*. Especificamente:

> A **vorticidade** é igual ao dobro da velocidade angular de uma partícula de fluido (Figura 4–43).

Se a vorticidade em um ponto de um campo de escoamento é diferente de zero, a partícula de fluido que ocupa aquele ponto no espaço está girando; o escoamento naquela região é chamado de **rotacional.** Da mesma forma, se a vorticidade em uma região do escoamento é zero (ou tão pequena que pode ser desprezada), as partículas fluidas dessa região não estão girando. O escoamento naquela região é chamado de **irrotacional.** Fisicamente, as partículas de fluido de uma região rotacional do escoamento giram lado a lado à medida que se movem ao longo do escoamento Por exemplo, as partículas de fluido na camada limite viscosa próxima a uma parede sólida são rotacionais (e, portanto, têm vorticidade diferente de zero), enquanto as partículas de fluido que estão fora da camada limite são irrotacionais (e sua vorticidade é zero). Ambos os casos estão ilustrados na Figura 4–44.

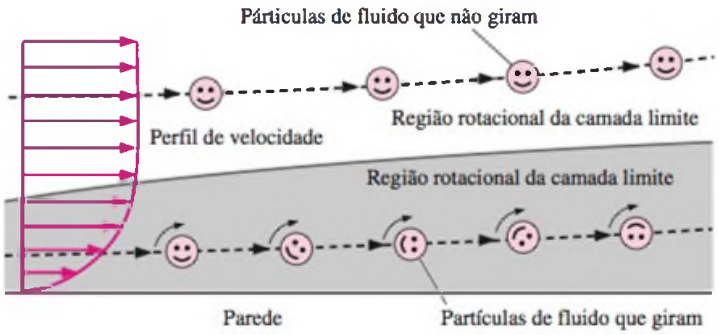


FIGURA 4–44
A diferença entre o escoamento rotacional e irrotacional: os elementos fluidos de uma região rotacional do escoamento giram, mas aqueles de uma região irrotacional do escoamento não giram.

A rotação dos elementos de fluido está associada a esteiras, camadas limite, escoamento através de turbomaquinário (ventiladores, turbinas, compressores etc.) e o escoamento com transferência de calor. A vorticidade de um elemento de fluido não pode variar, exceto através da ação da viscosidade, aquecimento não uniforme (gradientes de temperatura) ou outros fenômenos não uniformes. Assim, se um escoamento se origina em uma região irrotacional, ele permanece irrotacional até que algum processo não uniforme o altere. Por exemplo, o ar que entra vindo de uma vizinhança parada é irrotacional e permanece assim, a menos que ele encontre um objeto em sua trajetória ou seja submetido ao aquecimento não uniforme. Se uma região de escoamento puder ser aproximada como irrotacional, as equações do movimento ficam muito simplificadas, como você verá no Capítulo 10.

Em coordenadas cartesianas $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (x, y, z) e (u, v, w) a Equação 4–28 pode ser expandida da seguinte maneira:

Vetor vorticidade em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (4\text{–}30)$$

Se o escoamento for bidimensional no plano xy, a componente z da velocidade (w) é zero e nem u nem v variam com z. Assim, as duas primeiras componentes da Equação 4–30 são identicamente nulas e a vorticidade reduz-se a

Escoamento bidimensional em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (4\text{–}31)$$

Observe que, se um escoamento é bidimensional no plano xy, o vetor vorticidade deve apontar na direção z ou $-z$ (Figura 4–45).

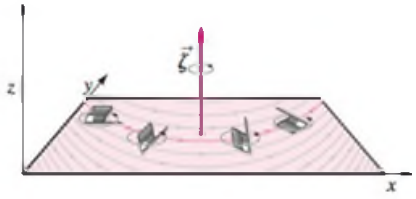


FIGURA 4–45
Para um escoamento bidimensional no plano xy, o vetor vorticidade sempre aponta na direção z ou $-z$. Nesta ilustração, a partícula de fluido em forma de bandeira gira na direção anti-horária ao se mover no plano xy. Sua vorticidade aponta na direção z positiva como foi mostrado.

EXEMPLO 4–7 Contornos de Vorticidade em um Escoamento Bidimensional

Considere o cálculo CFD do escoamento em corrente livre e bidimensional imposto a um bloco de seção transversal, como mostram as Figuras 4–32 e 4–33. Trace os contornos de vorticidade e discuta.

SOLUÇÃO Devemos calcular o campo de vorticidade de determinado campo de velocidade produzido pela CFD e, em seguida, geramos um gráfico de contorno para a vorticidade.

Análise Como o escoamento é bidimensional, a única componente diferente de zero da vorticidade está na direção z, normal à página nas Figuras 4–32 e 4–33. Um gráfico de contorno da componente z da vorticidade para esse campo de escoamento é mostrado na Figura 4–46. A região escura próxima ao canto superior esquerdo do bloco indica os grandes valores negativos da vorticidade, implicando a rotação *horária* das partículas de fluido naquela região. Isso se deve aos

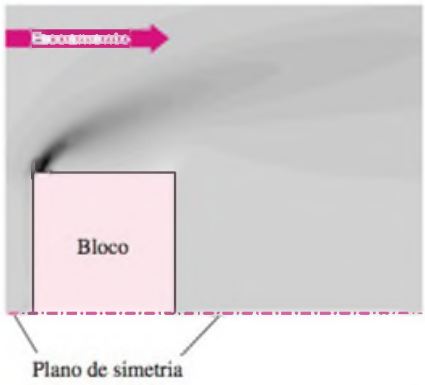


FIGURA 4–46
Gráfico de contorno do campo de vorticidade ζ_z devido ao escoamento atingindo um bloco, produzido pelos cálculos CFD; apenas a metade superior é mostrada devido à simetria. As regiões escuras representam grande vorticidade negativa e as regiões claras representam grande vorticidade positiva.

grandes gradientes de velocidade encontrados nesta parte do campo de escoamento. A camada limite se separa da parede no canto do corpo e forma uma **camada de cisalhamento** fina através da qual a velocidade varia rapidamente. A concentração da vorticidade na camada de cisalhamento diminui à medida que a vorticidade se difunde a jusante. A pequena região ligeiramente sombreada próxima ao canto superior direito do bloco representa uma região de vorticidade *positiva* (rotação no sentido anti-horário) — um padrão de escoamento secundário causado pela separação do escoamento.

Discussão Esperamos que o módulo da vorticidade seja mais alto em regiões nas quais as derivadas espaciais da velocidade são altas (veja a Equação 4–30). Um exame detalhado revela que a região escura da Figura 4–46 sem dúvida corresponde aos grandes gradientes de velocidade da Figura 4–32. Lembre-se de que o campo da vorticidade da Figura 4–46 é uma média temporal. O campo de escoamento instantâneo é, na verdade, turbulento e vórtices são lançados do corpo.

EXEMPLO 4–8 Determinação da Rotacionalidade em um Escoamento Bidimensional

Considere o seguinte campo de velocidade em regime permanente, incompressível e bidimensional:

$$\vec{V} = (u, v) = x^2\vec{i} + (-2xy - 1)\vec{j} \qquad (1)$$

Esse escoamento é rotacional ou irrotacional? Desenhe algumas linhas de corrente no primeiro quadrante e discuta.

SOLUÇÃO Devemos determinar se um escoamento com determinado campo de velocidade é rotacional ou irrotacional, e devemos desenhar algumas linhas de corrente no primeiro quadrante.

Análise Como o escoamento é bidimensional, a Equação 4–31 é válida. Assim

Vorticidade: $$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = (-2y - 0)\vec{k} = -2y\vec{k} \qquad (2)$$

Como a vorticidade não é zero, esse é um escoamento **rotacional**. Na Figura 4–47 traçamos várias linhas de corrente do escoamento no primeiro quadrante; vemos que o fluido se movimenta para baixo e para a direita. A translação e a deformação de uma porção de fluido também são conhecidas: em $\Delta t = 0$, a porção de fluido é quadrada, em $\Delta t = 0{,}25$ s, ela se movimentou e deformou, e em $\Delta t = 0{,}50$ s a porção se moveu mais ainda e está mais deformada. Em particular, a parte da extrema direita da porção de fluido se move mais rapidamente para a direita e para baixo em comparação à parte da extrema esquerda, esticando a porção na direção x e amassando-a na direção vertical. Está claro que também há uma rotação *horária* da porção de fluido, o que coincide com o resultado da Equação 2.

Discussão Pela Equação 4–29, as partículas de fluido individuais giram a uma velocidade angular igual a $\vec{\omega} = -y\vec{k}$, metade do vetor vorticidade. Como $\vec{\omega}$ não é constante, esse escoamento *não* é uma rotação de corpo rígido. Em vez disso, $\vec{\omega}$ é uma função linear de y. Uma análise mais detalhada revela que esse campo de escoamento é incompressível; as áreas sombreadas que representam a porção de fluido da Figura 4–47 permanecem constantes em todos os três instantes no tempo.

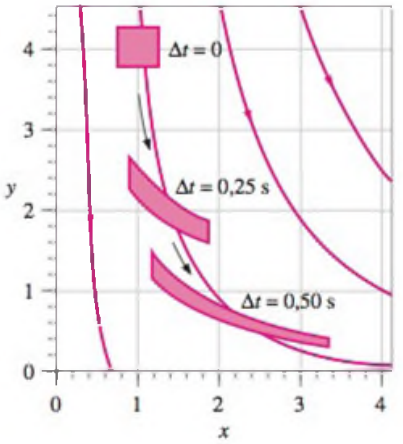


FIGURA 4–47
A deformação de uma porção de fluido inicialmente quadrada, sujeita ao campo de velocidade do Exemplo 4–8 por um período de 0,25 s e 0,50 s. Várias linhas de corrente também são traçadas no primeiro quadrante. Está claro que esse escoamento é *rotacional*.

Em coordenadas cilíndricas $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, (r, θ, z), e (u_r, u_θ, u_z) a Equação 4–28 pode ser expandida como

Vetor vorticidade em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \qquad (4\text{–}32)$$

Para o escoamento bidimensional no plano $r\theta$, a Equação 4–32 se reduz a

Escoamento bidimensional em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{k} \qquad \textbf{(4–33)}$$

onde $\vec{k}$ é usado como vetor unitário na direção z no lugar de $\vec{e}_z$. Observe que se um escoamento é bidimensional no plano $r\theta$, o vetor vorticidade deve apontar na direção z ou –z (Figura 4–48).

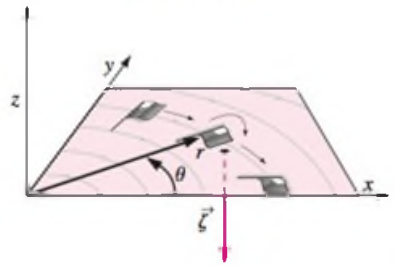


FIGURA 4–48
Para um escoamento bidimensional no plano $r\theta$, o vetor vorticidade sempre aponta na direção z (ou –z). Nesta ilustração, a partícula de fluido em forma de bandeira roda na direção horária ao se mover no plano $r\theta$. Sua vorticidade aponta na direção −z, como foi mostrado.

Comparação entre Dois Escoamentos Circulares

Nem todos os escoamentos com linhas de corrente circulares são rotacionais. Para ilustrarmos este ponto, consideramos dois escoamentos incompressíveis, em regime permanente e bidimensionais, ambos com linhas de corrente circulares no plano $r\theta$:

Escoamento A — rotação de corpo rígido: $u_r = 0$ e $u_\theta = \omega r$ **(4–34)**

Escoamento B — linha de vórtices: $u_r = 0$ e $u_\theta = \dfrac{K}{r}$ **(4–35)**

onde ω e K são constantes. (Os leitores atentos notarão que u_θ na Equação 4–35 é infinito em $r = 0$, o que é fisicamente impossível; nós ignoramos a região próxima à origem para evitar esse problema.) Como a componente radial da velocidade é zero em ambos os casos, as linhas de corrente são círculos ao redor da origem. Os perfis de velocidade dos dois escoamentos, juntamente com suas linhas de corrente, são mostrados na Figura 4–49. Agora, calculamos e comparamos o campo de vorticidade de cada um desses escoamentos, usando a Equação 4–33.

Escoamento A — rotação de corpo rígido:
$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0\right)\vec{k} = 2\omega\vec{k} \qquad \textbf{(4–36)}$$

Escoamento B — linha de vórtices:
$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(K)}{\partial r} - 0\right)\vec{k} = 0 \qquad \textbf{(4–37)}$$

Não é surpresa que a vorticidade da rotação de corpo rígido seja diferente de zero. Na verdade, ela é uma constante cujo módulo é o dobro da velocidade angular e aponta para a mesma direção. (Isso coincide com a Equação 4–29.) *O escoamento A é rotacional*. Fisicamente, isso significa que as partículas de fluido individuais giram à medida que revolvem ao redor da origem (Figura 4–49*a*). Por outro lado, a vorticidade da linha de vórtices é identicamente zero em qualquer parte (exceto exatamente na origem, que é uma singularidade matemática). *O escoamento B é irrotacional*. Fisicamente, as partículas de fluido *não* giram, enquanto elas revolvem em círculos em torno da origem (Figura 4–49*b*).

Uma analogia simples pode ser feita entre o escoamento A e um carrossel, e entre o escoamento B e uma roda-gigante (Figura 4–50). Quando as crianças giram em torno de um carrossel, elas também rodam com a mesma velocidade angular que a do próprio carrossel. Isso é análogo a um escoamento rotacional. Por outro lado, as crianças em uma roda-gigante sempre permanecem orientadas na posição vertical enquanto percorrem sua trajetória circular. Isso é análogo a um escoamento irrotacional.

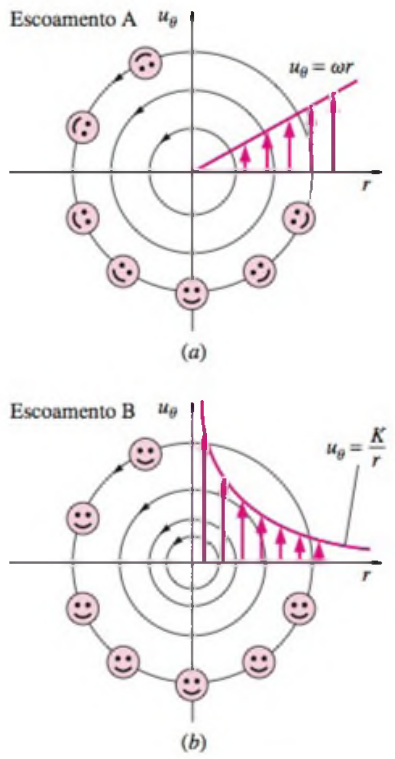


FIGURA 4–49
As linhas de corrente e os perfis de velocidade para (*a*) escoamento A, rotação de corpo rígido e (*b*) escoamento B, uma linha de vórtices. O escoamento A é rotacional, mas o escoamento B é irrotacional em toda parte, exceto na origem.

EXEMPLO 4–9 Determinação da Rotacionalidade de Linha de Sorvedouros

Um campo de velocidade bidimensional simples chamado de **linha de sorvedouros** é muito usado para simular o fluido sendo sugado em uma reta ao longo do eixo *z*. Suponhamos que a vazão em volume por unidade de comprimento ao longo do eixo *z*, $\dot{V}/L$, seja conhecida, onde $\dot{V}$ é uma quantidade negativa. Em duas dimensões, no plano $r\theta$

(*a*)

(*b*)

FIGURA 4–50
Uma analogia simples: (*a*) o escoamento circular *rotacional* é análogo a um carrossel, enquanto (*b*) o escoamento circular *irrotacional* é semelhante a uma roda-gigante.
© Robb Gregg/PhotoEdit

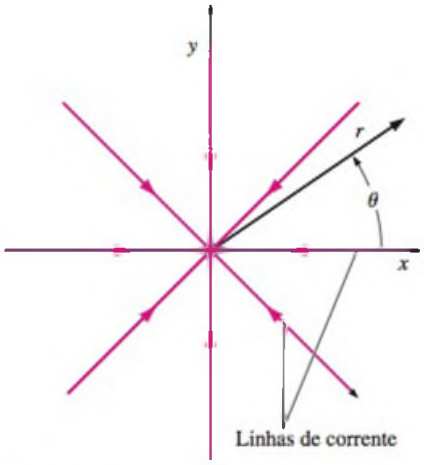


FIGURA 4–51
As linhas de corrente do plano $r\theta$ no caso de uma linha de sorvedouros.

Linha de sorvedouros: $u_r = \dfrac{\dot{V}}{2\pi L}\dfrac{1}{r}$ e $u_\theta = 0$ (1)

Desenhe várias linhas de corrente do escoamento e calcule a vorticidade. Esse escoamento é rotacional ou irrotacional?

SOLUÇÃO As linhas de corrente do campo de escoamento dado devem ser desenhadas e a rotacionalidade do escoamento deve ser determinada.
Análise Como só existe o escoamento radial e nenhum escoamento tangencial, sabemos imediatamente que todas as linhas de corrente devem ser raios em direção à origem. Várias linhas de corrente estão desenhadas na Figura 4–51. A vorticidade é calculada pela Equação 4–33:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta}u_r\right)\vec{k} = \frac{1}{r}\left(0 - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\dot{V}}{2\pi L}\frac{1}{r}\right)\right)\vec{k} = 0 \qquad (2)$$

Como o vetor da vorticidade em todas as partes é zero, esse campo de escoamento e **irrotacional**.
Discussão Muitos campos de escoamento práticos envolvendo sucção, como escoamento por entradas e tampas, podem ser aproximados de forma bastante exata supondo-se que o escoamento seja irrotacional (Heinsohn e Cimbala, 2003).

4–5 • O TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS

Em termodinâmica e mecânica de sólidos quase sempre trabalhamos com um **sistema** (também chamado de **sistema fechado**), definido como uma *quantidade de matéria de identidade fixa*. Em dinâmica dos fluidos, é mais comum trabalhar com um **volume de controle** (também chamado de **sistema aberto**), definido como uma *região no espaço selecionada para estudo*. O tamanho e a forma de um sistema pode mudar durante um processo, mas nenhuma massa cruza suas fronteiras. Um volume de controle, por outro lado, permite que a massa escoe para dentro ou para fora de suas fronteiras, as quais são chamadas de **superfície de controle**. Um volume de controle também pode se movimentar e deformar durante um processo, mas muitas aplicações do mundo real envolvem volumes de controle fixos e não deformáveis.

A Figura 4–52 ilustra tanto um sistema quanto um volume de controle para o caso de um desodorante sendo aplicado por meio de uma lata de spray. Ao analisar o processo do spray, uma opção natural para nossa análise seria o fluido móvel e deformante (um sistema) ou o volume definido pelas superfícies internas da lata (um volume de controle). Essas duas opções são idênticas antes do desodorante ser aplicado. Quando parte do conteúdo da lata é descarregado, a abordagem via sistema considera a massa descarregada parte do sistema e esta é seguida (uma tarefa sem dúvida difícil). Assim, a massa do sistema permanece constante. Conceitualmente, isso é equivalente a anexar um balão vazio ao bocal da lata e deixar que o spray infle o balão. A superfície interna do balão agora torna-se parte da fronteira do sistema. A abordagem via volume de controle, porém, não se preocupa com o desodorante que escapou da lata (além de suas propriedades na saída) e, portanto, a massa do volume de controle diminui durante esse processo, enquanto seu volume permanece constante. Portanto, a abordagem via sistema trata do processo de spray como uma expansão do volume do sistema, enquanto a abordagem via volume de controle o considera uma descarga de fluido através da superfície de controle do volume de controle fixo.

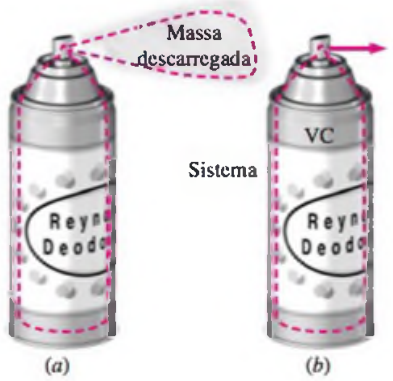


FIGURA 4–52
Dois métodos para analisar a aplicação do desodorante por meio de uma lata de spray: (*a*) seguimos o fluido à medida que ele se movimenta e se deforma. Essa é a *abordagem via sistema* — nenhuma massa cruza a fronteira e a massa total do sistema permanece fixa. (*b*) Consideramos um volume interior fixo da lata. Essa é a *abordagem via volume de controle* — a massa cruza a fronteira.

A maioria dos princípios da mecânica dos fluidos são adotados da mecânica dos sólidos, na qual as leis da física que tratam de taxas de variação no tempo de propriedades extensivas são expressas para sistemas. Na mecânica dos fluidos, em geral é mais conveniente trabalhar com volumes de controle e, portanto, existe a necessidade de relacionar as variações em um volume de controle com as variações em um sistema. A relação entre as taxas de variação no tempo de uma propriedade extensiva para um sistema e para um volume de controle é expressa pelo **teorema de transporte de Reynolds (TTR)**, que oferece a ligação entre as abordagens de sistema e o volume de controle (Figura 4–53). O nome TTR é uma homenagem ao engenheiro inglês, Osborne Reynolds (1842–1912), que fez muito pelo avanço de sua aplicação na mecânica dos fluidos.

A forma geral do teorema de transporte de Reynolds pode ser deduzida considerando-se um sistema com uma forma arbitrária e interações arbitrárias, mas a dedução é bastante complicada. Para ajudá-lo a entender o significado fundamental do teorema, primeiro ele é deduzido de maneira direta usando uma geometria simples e, em seguida, generalizamos os resultados.

Considere o escoamento da esquerda para a direita através de uma parte divergente (em expansão) de um campo de escoamento como esboçado na Figura 4–54. Os limites superior e inferior considerados são *linhas de corrente* do escoamento, e consideramos o escoamento uniforme através de qualquer seção transversal entre essas duas linhas de corrente. Escolhemos o volume de controle como fixo entre as seções (1) e (2) do campo de escoamento. Tanto (1) quanto (2) são normais à direção do escoamento. Em algum instante inicial t, o sistema coincide com o volume de controle e, portanto, o sistema e o volume de controle são idênticos (a região sombreada da Figura 4–54). Durante o intervalo de tempo Δt, o sistema se movimenta na direção do escoamento com velocidades uniformes V_1 na seção (1) e V_2 na seção (2). O sistema neste último instante é indicado pela região hachurada. A região descoberta pelo sistema durante esse movimento é designada como seção I (parte do VC) e a região nova coberta pelo sistema é designada como seção II (não é parte do VC). Assim, no instante $t + \Delta t$, o sistema consiste no mesmo fluido, mas ocupa a região VC − I + II. O volume de controle é fixo no espaço e, portanto, permanece como a região sombreada, marcada VC, em todos os instantes.

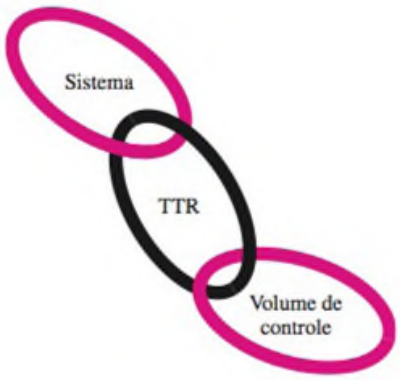


FIGURA 4–53
O *teorema de transporte de Reynolds* (TTR) oferece uma ligação entre a abordagem de sistema e a abordagem de volume de controle.

Seja B uma **propriedade extensiva** qualquer (como massa, energia ou momento) e seja $b = B/m$ a **propriedade intensiva** correspondente. Observando que as propriedades extensivas são aditivas, a propriedade extensiva B do sistema nos instantes t e $t + \Delta t$ pode ser expressa como

$$B_{\text{sis},\,t} = B_{\text{VC},\,t} \qquad \text{(o sistema e o VC coincidem no instante } t\text{)}$$

$$B_{\text{sis},\,t+\Delta t} = B_{\text{VC},\,t-\Delta t} - B_{\text{I},\,t+\Delta t} + B_{\text{II},\,t+\Delta t}$$

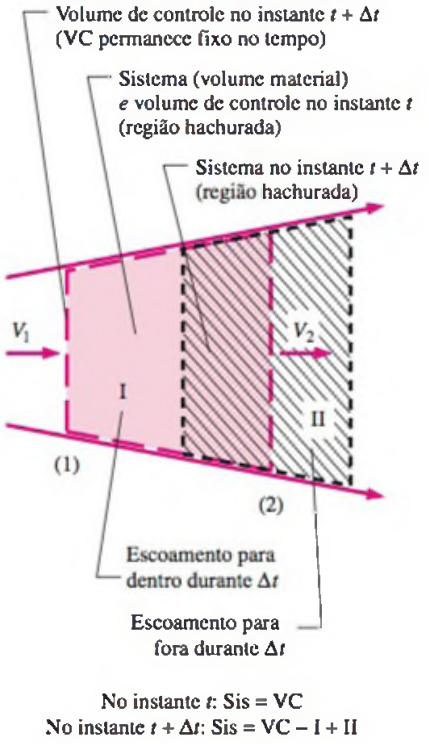


FIGURA 4–54
Um *sistema* móvel (região hachurada) e um *volume de controle* fixo (região sombreada) de uma parte divergente de um campo de escoamento nos instantes t e $t + \Delta t$. Os limites superior e inferior são linhas de corrente do escoamento.

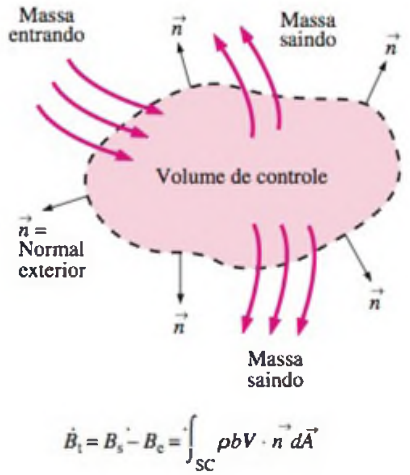


FIGURA 4–55
A integral de $b\rho\vec{V} \cdot \vec{n}$ em uma superfície de controle dá a quantidade total da propriedade B que escoa para fora do volume de controle (ou para dentro do volume de controle, se for negativa) por unidade de tempo.

Subtraindo a primeira equação da segunda e dividindo por Δt temos

$$\frac{B_{\text{sis},\,t+\Delta t} - B_{\text{sis},\,t}}{\Delta t} = \frac{B_{\text{VC},\,t+\Delta t} - B_{\text{VC},\,t}}{\Delta t} - \frac{B_{\text{I},\,t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{B_{\text{II},\,t+\Delta t}}{\Delta t}$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$, e usando a definição de derivada temos

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{dB_{\text{VC}}}{dt} - \dot{B}_e + \dot{B}_s \qquad \textbf{(4–38)}$$

ou

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{dB_{\text{VC}}}{dt} - b_1\rho_1 V_1 A_1 + b_2\rho_2 V_2 A_2$$

uma vez que

$$B_{\text{I},\,t+\Delta t} = b_1 m_{\text{I},\,t+\Delta t} = b_1\rho_1 V_{\text{I},\,t+\Delta t} = b_1\rho_1 V_1\,\Delta t\, A_1$$
$$B_{\text{II},\,t+\Delta t} = b_2 m_{\text{II},\,t+\Delta t} = b_2\rho_2 V_{\text{II},\,t+\Delta t} = b_2\rho_2 V_2\,\Delta t\, A_2$$

e

$$\dot{B}_e = \dot{B}_1 = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{B_{\text{I},\,t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{b_1\rho_1 V_1\,\Delta t\, A_1}{\Delta t} = b_1\rho_1 V_1 A_1$$

$$\dot{B}_s = \dot{B}_{\text{II}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{B_{\text{II},\,t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{b_2\rho_2 V_2\,\Delta t\, A_2}{\Delta t} = b_2\rho_2 V_2 A_2$$

onde A_1 e A_2 são as seções transversais nos locais 1 e 2. A Equação 4–38 afirma que *a taxa de variação no tempo da propriedade B no sistema é igual à taxa de variação no tempo de B no volume de controle mais o fluxo total de B para fora do volume de controle pela massa que atravessa a superfície de controle.* Essa é a relação desejada, uma vez que ela relaciona a variação de uma propriedade de um sistema com a variação daquela propriedade para um volume de controle. Observe que a Equação 4–38 se aplica em qualquer instante, onde é suposto que o sistema e o volume de controle ocupam o mesmo espaço naquele determinado instante de tempo.

A fluxo entrando $\dot{B}_e$ e o fluxo saindo $\dot{B}_s$ da propriedade B neste caso são fáceis de determinar, uma vez que existe apenas uma entrada e uma saída, e as velocidades são normais às superfícies das seções (1) e (2). Em geral, porém, podemos ter várias portas de entrada e saída e a velocidade pode não ser normal à superfície de controle no ponto de entrada. Da mesma forma, a velocidade pode não ser uniforme. Para generalizarmos o processo, consideramos a área de uma superfície infinitesimal dA, na superfície de controle e indicamos sua **normal unitária exterior** por $\vec{n}$. A vazão da propriedade b através de dA é $\rho b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$ já que o produto escalar $\vec{V} \cdot \vec{n}$ fornece a componente normal da velocidade. Em seguida, a vazão total através de toda a superfície de controle é determinada por integração como (Figura 4–55):

$$\dot{B}_t = \dot{B}_s - \dot{B}_e = \int_{SC} \rho b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \quad \text{(se negativo, o escoamento é para dentro)} \qquad \textbf{(4–39)}$$

Um aspecto importante dessa relação é que ela subtrai automaticamente o escoamento de entrada do escoamento de saída, como será explicado a seguir. O produto escalar do vetor velocidade em um ponto da superfície de controle pela normal exterior naquele ponto é $V \cdot \vec{n} = |V||\vec{n}| \cos\theta = |\vec{V}| \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre o vetor velocidade e a normal exterior, como mostra a Figura 4–56. Para $\theta < 90°$, temos $\cos\theta > 0$ e, portanto, $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$ para o escoamento de massa para fora do volume de controle e para $\theta > 90°$, temos $\cos\theta < 0$ e, portanto, $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$ para o escoamento para dentro de massa do volume de controle. Assim, a quantidade infinitesimal $\rho b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$ é positiva para a massa que escoa para fora do volume de controle e negativa para a massa que escoa para dentro do volume de controle, e sua integral em toda a superfície de controle dá a taxa de saída total da propriedade B pela massa.

Em geral, as propriedades dentro do volume de controle podem variar com a posição. Em tal caso, a quantidade total da propriedade B dentro do volume de controle deve ser determinada pela integração:

$$B_{VC} = \int_{VC} \rho b \, dV \tag{4–40}$$

O termo dB_{VC}/dt da Equação 4–38, portanto, é igual a $\dfrac{d}{dt}\int_{VC} \rho b \, dV$, e representa a taxa de variação no tempo do conteúdo de propriedade B no volume de controle. Um valor positivo para dB_{VC}/dt indica um aumento de conteúdo B, e um valor negativo indica uma diminuição. Substituindo as Equações 4–39 e 4–40 na Equação 4–38, temos o teorema de transporte de Reynolds, também conhecido como a *transformação de sistema para volume de controle* para um volume de controle fixo:

TTR, VC fixo:
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b \, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \tag{4–41}$$

Como o volume de controle não se movimenta nem se deforma com o tempo, a derivada no tempo no lado direito pode ser posta para dentro da integral, uma vez que o domínio de integração não varia com o tempo. (Em outras palavras, é irrelevante o fato de diferenciarmos ou integrarmos primeiro.) Mas a derivada no tempo nesse caso deve ser expressa como derivada *parcial* ($\partial/\partial t$), uma vez que a densidade e a quantidade b podem depender da posição dentro do volume de controle. Assim, uma forma alternativa para o teorema de transporte de Reynolds para um volume de controle fixo é

TTR alternativo, VC fixo:
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b) \, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \tag{4–42}$$

A Equação 4–41 foi deduzida para um volume de controle *fixo*. Entretanto, muitos sistemas práticos como as lâminas de turbina e propulsor envolvem volumes de controle não fixos. Felizmente a Equação 4–41 também é válida para volumes de controle *móveis* e/ou *deformantes* desde que a velocidade absoluta do fluido $\vec{V}$ do último termo seja substituída pela **velocidade relativa** $\vec{V}_r$,

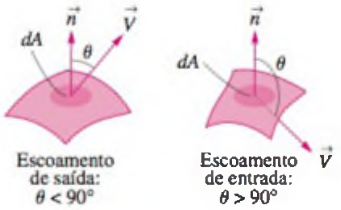
Velocidade relativa:
$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{SC} \tag{4–43}$$

onde $\vec{V}_{SC}$ é a velocidade local da superfície de controle (Figura 4–57). Assim, a forma mais geral do teorema de transporte de Reynolds é:

TTR, VC não fixo:
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b \, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dA \tag{4–44}$$

Observe que para um volume de controle que se movimenta e/ou se deforma com o tempo, a derivada no tempo deve ser aplicada *após* a integração, como na Equação 4–44. Como um exemplo simples de um volume de controle móvel, considere um carrinho de brinquedo que se move a uma velocidade absoluta constante $\vec{V}_{carro}$ = 10 km/h para a direita. Um jato de água de alta velocidade (velocidade relativa = $\vec{V}_{jato}$ para a direita) atinge a parte traseira do carrinho e o impulsiona (Figura 4–58). Se desenharmos um volume de controle ao redor do carrinho, a velocidade relativa é $\vec{V}_r$ = 25 − 10 = 15 km/h para a direita. Isso representa a velocidade na qual um observador que se movimenta com o volume de controle (que se move com o carro) observaria o fluido cruzando a superfície de controle. Em outras palavras, $\vec{V}_r$ é a velocidade do fluido expressa com relação a um sistema de coordenadas que se move *com* o volume de controle.

Por fim, pela aplicação do teorema de Leibnitz, é possível mostrar que o teorema de transporte de Reynolds para um volume de controle geral móvel e/ou



$\vec{V} \cdot \vec{n} = |\vec{V}||\vec{n}| \cos\theta = V \cos\theta$
Se $\theta < 90°$, então $\cos\theta > 0$ (escoamento para fora).
Se $\theta > 90°$, então $\cos\theta < 0$ (escoamento para dentro).
Se $\theta = 90°$, então $\cos\theta = 0$ (sem escoamento).

FIGURA 4–56
O escoamento de saída e de entrada de massa através de uma área infinitesimal da superfície de controle.

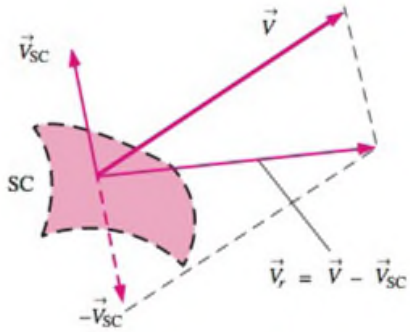


FIGURA 4–57
A *velocidade relativa* através de uma superfície de controle é encontrada pela adição vetorial da velocidade absoluta do fluido com o oposto da velocidade local da superfície de controle.

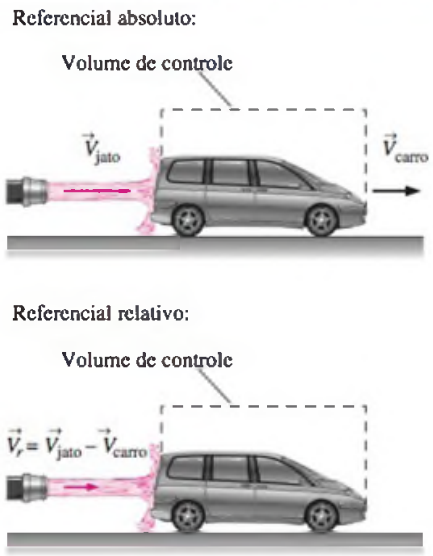


FIGURA 4–58
Teorema de transporte de Reynolds aplicado a um volume de controle que se movimenta a uma velocidade constante.

deformante (Equação 4–44) é equivalente à forma dada na Equação 4–42, que é repetida aqui:

TTR alternativo, VC não fixo:
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (4\text{–}45)$$

Em contraste com a Equação 4–44, o vetor velocidade $\vec{V}$ da Equação 4–45 deve ser tomado como a velocidade *absoluta* (visto de um sistema de referência fixo) para aplicação a um volume de controle não fixo.

Durante o escoamento permanente, a quantidade da propriedade B dentro do volume de controle permanece constante no tempo e, portanto, a derivada no tempo na Equação 4–44 torna-se zero. Assim, o teorema de transporte de Reynolds se reduz a

TTR, escoamento permanente:
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA \qquad (4\text{–}46)$$

Observe que, ao contrário de um volume de controle, o conteúdo de propriedade B de um sistema ainda pode variar com o tempo durante um processo em regime permanente. Mas nesse caso, a variação deve ser igual à propriedade total transportada pela massa através da superfície de controle (um efeito advectivo em vez de um efeito não permanente).

Na maioria das aplicações práticas do TTR em engenharia, o fluido cruza a fronteira do volume de controle em um número finito de entradas e saídas bem definidas (Figura 4–59). Em tais casos, é conveniente cortar a superfície de controle diretamente através de cada entrada e saída e substituir a integral de superfície da Equação 4–44 pelas expressões algébricas aproximadas em cada entrada e saída com base nos valores *médios* das propriedades de fluido que cruzam a fronteira. Definimos $\rho_{méd}$, $b_{méd}$ e $V_{r,\,méd}$ como os valores médios de ρ, b e V_r, respectivamente, através de uma entrada ou saída de seção transversal com área A [por exemplo, $b_{méd} = (1/A)\int_A b\, dA$]. As integrais de superfície no TTR (Equação 4–44), quando aplicadas em uma entrada ou saída com área transversal A, são *aproximadas* retirando a propriedade b para fora da integral de superfície e a substituindo pela sua média. O resultado é

$$\int_A \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA \cong b_{méd} \int_A \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA = b_{méd} \dot{m}_r$$

onde $\dot{m}_r$ é a vazão em massa através da entrada ou saída com relação à superfície de controle (móvel). A aproximação dessa equação é exata quando a propriedade b for uniforme ao longo da seção transversal de área A. A Equação 4–44, portanto, torna-se

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b\, dV + \sum_s \underbrace{\dot{m}_r b_{méd}}_{\text{para cada saída}} - \sum_e \underbrace{\dot{m}_r b_{méd}}_{\text{para cada entrada}} \qquad (4\text{–}47)$$

Em algumas aplicações, podemos querer reescrever a Equação 4–47 em termos da vazão em volume (e não em massa). Em tais casos, fazemos mais uma aproximação, que $\dot{m}_r \approx \rho_{méd} \dot{V}_r = \rho_{méd} V_{r,\,méd} A$. Essa aproximação é exata quando a densidade do fluido ρ é uniforme em A. A Equação 4–47 então fica reduzida a

O TTR aproximado para entradas e saídas bem definidas:
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b\, dV + \sum_s \underbrace{\rho_{méd} b_{méd} V_{r,\,méd} A}_{\text{para cada saída}} - \sum_e \underbrace{\rho_{méd} b_{méd} V_{r,méd} A}_{\text{para cada entrada}} \qquad (4\text{–}48)$$

Observe que essas aproximações simplificam muito a análise, mas nem sempre são exatas, particularmente nos casos em que a distribuição da velocidade através da entrada ou saída não é muito uniforme (por exemplo, escoamentos de tubo; Figura

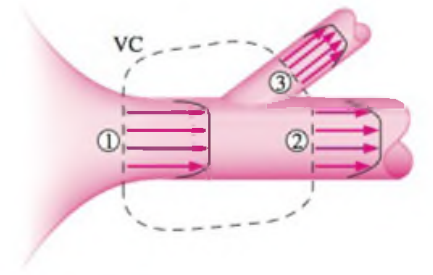


FIGURA 4–59
Um exemplo de volume de controle no qual existe uma entrada bem definida (1) e duas saídas bem definidas (2 e 3). Em tais casos, a integral de superfície de controle do TTR pode ser escrita de forma mais conveniente em termos dos valores médios das propriedades do fluido que atravessam cada entrada e saída.

4–59). Em particular, a integral de superfície de controle da Equação 4–45 torna-se *não-linear* quando a propriedade b contém um termo de velocidade (por exemplo, quando o TTR é aplicado à equação de momento linear, $b = \vec{V}$) e a aproximação da Equação 4–48 leva a erros. Felizmente, podemos eliminar os erros incluindo *fatores de correção* na Equação 4–48, como discutido nos Capítulos 5 e 6.

As Equações 4–47 e 4–48 se aplicam a volumes de controle fixos *ou* móveis, mas como já discutimos antes, a *velocidade relativa* deve ser usada para o caso de um volume de controle não fixo. Na Equação 4–47, por exemplo, a vazão de massa $\dot{m}_r$ é relativa à superfície de controle (móvel), por conseguinte o subscrito r.

*Dedução Alternativa do Teorema de Transporte de Reynolds

Uma dedução matemática mais elegante do teorema de transporte de Reynolds é possível com a utilização do **teorema de Leibnitz** (veja Kundu, 1990). Provavelmente você já conhece a versão unidimensional desse teorema, que permite diferenciar uma integral cujos limites de integração são funções da variável na qual você precisa diferenciar (Figura 4–60):

Teorema de Leibnitz unidimensional:

$$\frac{d}{dt}\int_{x=a(t)}^{x=b(t)} G(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}\,dx + \frac{db}{dt}G(b,t) - \frac{da}{dt}G(a,t) \qquad (4\text{–}49)$$

O teorema de Leibnitz leva em conta a variação dos limites $a(t)$ e $b(t)$ com relação ao tempo, bem como às variações não permanentes do integrando $G(x, t)$ com o tempo.

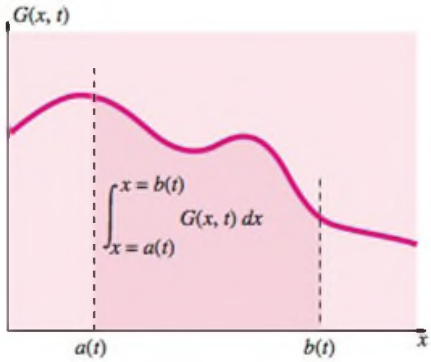


FIGURA 4–60
O *teorema de Leibnitz unidimensional* é necessário ao calcular a derivada no tempo de uma integral (com relação a x) na qual os limites da integral são funções do tempo.

EXEMPLO 4–10 Integração Unidimensional de Leibnitz

Reduza o máximo possível a seguinte expressão:

$$F(t) = \frac{d}{dt}\int_{x=0}^{x=Ct} e^{-x^2}\,dx \qquad (1)$$

SOLUÇÃO $F(t)$ deve ser calculado por meio da expressão dada.

Análise Poderíamos tentar integrar primeiro e, em seguida, diferenciar, mas como a Equação 1 está na forma da Equação 4–49, usamos o teorema de Leibnitz unidimensional. Aqui, $G(x, t) = e^{-x^2}$ (G não é uma função do tempo neste exemplo simples). Os limites da integração são $a(t) = 0$ e $b(t) = Ct$. Assim,

$$F(t) = \int_a^b \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_{0}\,dx + \underbrace{\frac{db}{dt}}_{C}\underbrace{G(b,t)}_{e^{-b^2}} - \underbrace{\frac{da}{dt}}_{0}G(a,t) \quad \rightarrow \quad F(t) = Ce^{-C^2t^2} \qquad (2)$$

Discussão Você pode tentar obter a mesma solução sem usar o teorema de Leibnitz.

Em três dimensões, o teorema de Leibnitz para uma integral de *volume* é

Teorema de Leibnitz tridimensional:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} G(x,y,z,t)\,dV = \int_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t}\,dV + \int_{A(t)} G\vec{V}_A \cdot \vec{n}\,dA \qquad (4\text{–}50)$$

onde $V(t)$ é um volume móvel e/ou deformante (uma função do tempo), $A(t)$ é sua superfície (fronteira) e $\vec{V}_A$ é a velocidade absoluta dessa superfície (móvel) (Figura 4–61). A Equação 4–50 é válida para *qualquer* volume, movendo e/ou deformando de modo arbitrário no espaço e no tempo. Por questões de consistência com as

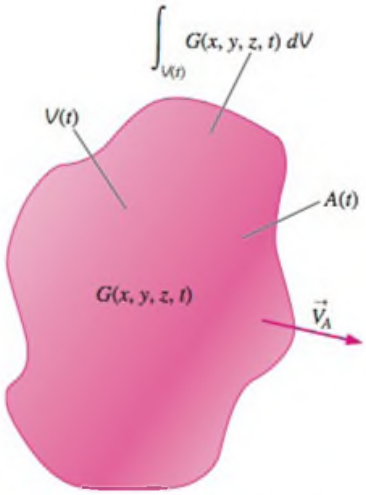


FIGURA 4–61
O *teorema de Leibnitz tridimensional* é necessário quando se calcula a derivada de tempo de uma integral de volume para a qual o volume propriamente dito se movimenta e/ou deforma com o tempo. Acontece que a forma tridimensional do teorema de Leibnitz pode ser usada em uma derivação alternativa do teorema de transporte de Reynolds.

* Esta seção pode ser omitida sem perda da continuidade.

análises anteriores, colocamos o integrando G como ρb para aplicação ao escoamento de fluido

Teorema de Leibnitz tridimensional aplicado ao escoamento de fluidos:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho b\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{A(t)} \rho b \vec{V}_A \cdot \vec{n}\, dA \qquad (4\text{–}51)$$

Se aplicarmos o teorema de Leibnitz ao caso especial de um **volume material** (um sistema com identidade fixa que se movimenta com o escoamento do fluido), então $\vec{V}_A = \vec{V}$ em toda a parte da superfície material, uma vez que ela se move *com* o fluido. Aqui $\vec{V}$ é a velocidade local do fluido e a Equação 4–51 torna-se o

Teorema de Leibnitz aplicado a um volume material:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho b\, dV = \frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{A(t)} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (4\text{–}52)$$

A Equação 4–52 é válida em qualquer instante no tempo t. Definimos nosso volume de controle para que nesse instante t, o volume de controle e o sistema ocupem o mesmo espaço; em outras palavras, eles são *coincidentes*. Em algum tempo posterior $t + \Delta t$, o sistema moveu-se e deformou-se com o escoamento, mas o volume de controle pode ter-se movido e deformado de modo diferente (Figura 4–62). O segredo, porém, é que no *instante t o sistema (volume material) e o volume de controle são a mesma coisa.* Assim, a integral de volume do lado direito da Equação 4–52 pode ser calculada no *volume de controle* no instante t, e a integral de superfície pode ser calculada na *superfície de controle* no instante t. Assim,

TTR geral, VC não fixo:

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \qquad (4\text{–}53)$$

Essa expressão é idêntica àquela da Equação 4–45 e é válida para um volume de controle de forma arbitrária, móvel e/ou deformante no instante t. Lembre-se de que $\vec{V}$ na Equação 4–53 é a velocidade *absoluta* do fluido.

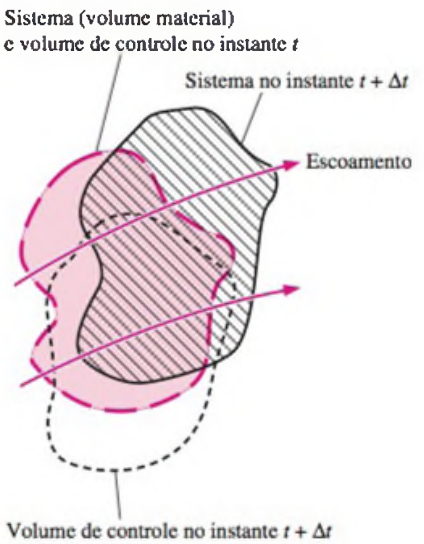


FIGURA 4–62
O volume material (sistema) e o volume de controle ocupam o mesmo espaço no instante t (a área sombreada azul), mas se move e se deforma de modo diferente. Em um instante posterior eles *não* são coincidentes.

EXEMPLO 4–11 Teorema de Transporte de Reynolds em Termos da Velocidade Relativa

Começando com o teorema de Leibnitz e com o teorema geral de transporte de Reynolds para um volume de controle arbitrariamente móvel e deformante, Equação 4–53, demonstre que a Equação 4–44 é válida.

SOLUÇÃO A Equação 4–44 deve ser demonstrada.

Análise A versão geral tridimensional do teorema de Leibnitz, Equação 4–50, se aplica a *qualquer* volume. Optamos por aplicá-la ao volume de controle de interesse, que pode se mover e/ou deformar de modo diferente do volume material (Figura 4–62). Tomando G como ρb, a Equação 4–50 torna-se

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b\, dV = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V}_{CS} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (1)$$

Isolamos a integral no volume de controle da Equação 4–53:

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV = \frac{dB_{sis}}{dt} - \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (2)$$

Substituindo a Equação 2 na Equação 1, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b\, dV = \frac{dB_{sis}}{dt} - \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA + \int_{SC} \rho b \vec{V}_{SC} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (3)$$

Combinando os dois últimos termos e reorganizando

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b\, dV + \int_{SC} \rho b(\vec{V} - \vec{V}_{SC}) \cdot \vec{n}\, dA \qquad (4)$$

Mas lembre-se de que a velocidade relativa é definida pela Equação 4–43. Assim

TTR em termos de velocidade relativa: $$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b\, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA \quad (5)$$

Discussão A Equação 5, sem dúvida, é idêntica à Equação 4–44, e o poder e a elegância do teorema de Leibnitz são ilustrados.

Relação entre a Derivada Material e o TTR

Você já deve ter notado uma similaridade ou analogia entre a derivada material discutida na Seção 4–1 e o teorema de transporte de Reynolds discutido aqui. Na verdade, ambas as análises representam métodos para transformar conceitos fundamentalmente lagrangianos em interpretações eulerianas destes conceitos. Embora o teorema de transporte de Reynolds trate dos volumes de controle com tamanho finito e a derivada material trate de partículas de fluido infinitesimais, a mesma interpretação física fundamental se aplica a ambos (Figura 4–63). Na verdade, o teorema de transporte de Reynolds pode ser visto como o equivalente integral da derivada material. Em ambos os casos, a taxa total de variação de alguma propriedade que segue uma parte identificada do fluido consiste em duas partes: existe uma parte local ou não estacionária que é responsável pelas variações do campo de escoamento com o tempo (compare o primeiro termo do lado direito da Equação 4–12 com aquele da Equação 4–45). Também existe uma parte advectiva que é responsável pelo movimento do fluido de uma região para outra do escoamento (compare o segundo termo no lado direito das Equações 4–12 e 4–45).

Assim como a derivada material pode ser aplicada a qualquer propriedade de fluido, escalar ou vetorial, o teorema de transporte de Reynolds também pode ser aplicado a qualquer propriedade escalar ou vetorial. Nos Capítulos 5 e 6, aplicamos o teorema de transporte de Reynolds à conservação de massa, energia, momento e momento angular selecionando o parâmetro B como massa, energia, momento e momento angular, respectivamente. Desse modo podemos converter facilmente as leis fundamentais de conservação de sistema (ponto de vista lagrangiano) em formas que são válidas e úteis em uma análise de volume de controle (ponto de vista euleriano).

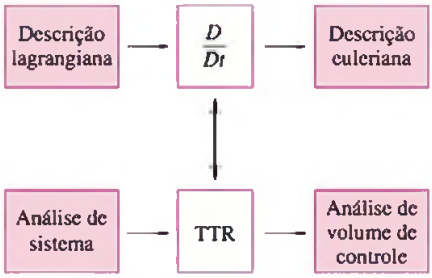


FIGURA 4–63
O teorema de transporte de Reynolds para volumes finitos (análise integral) é análogo à derivada material para volumes infinitesimais (análise diferencial). Em ambos os casos transformamos o ponto de vista lagrangiano ou de sistema no ponto de vista euleriano ou de volume de controle.

RESUMO

A *cinemática dos fluidos* diz respeito à descrição do movimento do fluido, sem necessariamente analisar as forças responsáveis por tal movimento. Existem duas descrições fundamentais do movimento dos fluidos — *lagrangiana* e *euleriana*. Em uma descrição lagrangiana, acompanhamos as partículas individuais do fluido ou coleções de partículas de fluido, enquanto na descrição euleriana, definimos um *volume de controle* através do qual o fluido escoa para dentro e para fora. Transformamos as equações do movimento de lagrangianas para eulerianas usando a *derivada material* para partículas infinitesimais de fluido e usando o *teorema de transporte de Reynolds* (*TTR*) para os sistemas com volume finito. Para algumas propriedades extensivas B ou sua propriedade intensiva correspondente b

Derivada de material: $$\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})b$$

TTR geral, VC não fixo: $$\frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$$

Em ambas as equações a variação total da propriedade acompanhando uma partícula de fluido ou um sistema é composta por duas partes: uma parte *local* (não permanente) e uma parte *advectiva* (movimento).

Existem várias maneiras de visualizar e analisar os campos de escoamento — *linhas de corrente, linhas de emissão, linhas de trajetória, linhas de tempo, imagem de superfície, gráfico por sombras, imagem estereoscópica, gráficos de perfil, gráficos vetores e gráficos de contorno*. Neste capítulo definimos cada um deles e fornecemos exemplos. Em escoamento em regime não permanente geral, as linhas de corrente, as linhas de emissão e as linhas de trajetória diferem, mas *no escoamento em regime permanente as linhas de corrente, as linhas de emissão e as linhas de trajetória são coincidentes.*

Quatro taxas de movimento fundamentais (*taxas de deformação*) são necessárias para descrever totalmente a cinemática de um escoamento de fluido: *velocidade* (taxa de translação), *velocidade angular* (taxa de rotação), *taxa de deformação linear* e *taxa de deformação por cisalhamento*. A *vorticidade* é uma propriedade dos escoamentos de fluidos que indica a *rotacionalidade* das partículas de fluido.

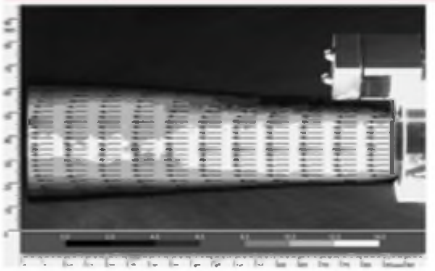
Vetor vorticidade: $$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{rot}(\vec{V}) = 2\vec{\omega}$$

Uma região do escoamento é *irrotacional* se a vorticidade for nula naquela região.

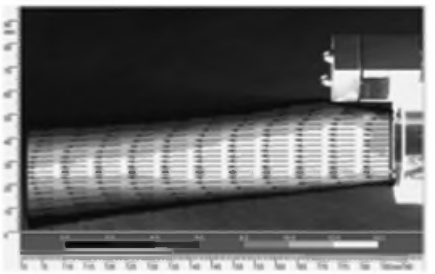
Os conceitos aprendidos neste capítulo são usados várias vezes em todo o restante do livro. Utilizamos o TTR para transformar as leis de conservação para sistemas fechados em leis de conservação para volumes de controle nos Capítulos 5 e 6 e novamente no Capítulo 9, na dedução das equações diferenciais do movimento dos fluidos. O papel da vorticidade e irrotacionalidade é revisto com mais detalhes no Capítulo 10, no qual mostramos que a aproximação da irrotacionalidade leva a uma redução muito grande de complexidade na solução dos escoamentos de fluidos. Finalmente, usamos diversos tipos de visualização de escoamento e representações gráficas de dados para descrever a cinemática em exemplos de campos de escoamento em quase todos os capítulos deste livro.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Atuadores Fluídicos

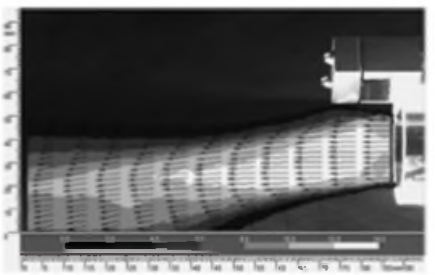
Autor Convidado: Ganesh Raman,
Illinois Institute of Technology



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA 4–64
Média no tempo do campo da velocidade de um jato atuador fluídico. Os resultados são obtidos de 150 realizações de PIV, sobrepostas em uma imagem do escoamento-base. Cada sétimo e segundo vetor velocidade é mostrado nas direções horizontal e vertical, respectivamente. As curvas de nível indicam o módulo do campo de velocidade em m/s. (*a*) Sem atuação, (*b*) único atuador operando a 3 psig, (*c*) único atuador operando a 9 psig.

Cortesia de Ganesh Raman, Illinois Institute of Technology. Usada com permissão.

Os atuadores fluídicos são dispositivos que utilizam circuitos lógicos de fluidos para produzir velocidade oscilatória ou perturbações de pressão em jatos e camadas de cisalhamento para retardar a separação, aumentar a mistura e suprimir o ruído. Por vários motivos, os atuadores fluídicos são potencialmente úteis nas aplicações de controle de escoamentos livres: eles não têm partes móveis; podem produzir perturbações com freqüência, amplitude e fase controláveis; eles podem operar em ambientes de condições térmicas severas e não são suscetíveis à interferência eletromagnética, além de serem fáceis de integrar a um dispositivo em operação. Embora a tecnologia fluídica já exista há muitos anos, os avanços recentes na miniaturização e microfabricação tornaram-na muito atraente para a utilização prática. O atuador fluídico produz um escoamento oscilatório auto-sustentável utilizando os princípios do efeito de parede e de escoamento reverso que ocorrem dentro das passagens em miniatura do dispositivo.

A Figura 4–64 ilustra a aplicação de um atuador fluídico para controle de direção de jatos. Direcionadores de impulso fluídicos são importantes para projetos futuros de aviões, uma vez que eles podem melhorar a manobrabilidade sem a complexidade de superfícies adicionais próximas ao bocal de exaustão. Nas três imagens da Figura 4–64, a exaustão do primeiro jato é feita da direita para a esquerda e um único atuador fluídico está localizado na parte superior. A Figura 4–64*a* mostra o jato sem perturbações. As Figuras 4–64*b* e *c* mostram o efeito de mudança de direção em dois níveis de atuação fluídica. As variações no jato primário são caracterizadas usando-se a velocimetria por imagem de partícula (PIV). A seguir temos uma explicação simplificada: Nessa técnica as partículas sinalizadoras são introduzidas no escoamento e iluminadas por uma fina folha de luz de laser que é pulsada para congelar o movimento da partícula. A luz de laser espalhada pelas partículas é gravada em duas instâncias de tempo usando uma câmera digital. O vetor do deslocamento local é obtido usando-se uma correlação espacial cruzada. Os resultados indicam que existe potencial para integrar múltiplos subelementos fluídicos nos componentes do avião para melhorar o desempenho.

A Figura 4–64 é, na verdade, uma combinação entre gráficos vetorial e de contorno. Os vetores velocidade são superpostos aos gráficos de contorno do módulo da velocidade (velocidade escalar). As regiões brancas representam altas velocidades e as regiões escuras representam baixas velocidades.

Referências

Raman, G., Packiarajan, S., Papadopoulos, G., Weissman, C. e Raghu, S. "Jet Thrust Vectoring Using a Miniature Fluidic Oscillator". ASME FEDSM 2001-18057, 2001.

Raman, G., Raghu, S. e Bencic, T. J. "Cavity Resonance Suppression Using Miniature Fluidic Oscillators". AIAA Paper 99-1900, 1999.

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. R. J. Adrian. "Particle-Imaging Technique for Experimental Fluid Mechanics". *Annual Reviews in Fluid Mechanics*, 23, p. 261–304, 1991.
2. J. M. Cimbala, H. Nagib e A. Roshko. "Large Structure in the Far Wakes of Two-Dimensional Bluff Bodies". *Journal of Fluid Mechanics*, 190, p. 265–298, 1988.
3. R. J. Heinsohn e J. M. Cimbala. *Indoor Air Quality Engineering*. Nova Iorque: Marcel-Dekker, 2003.
4. P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. San Diego, CA: Academic Press, 1990.
5. W. Merzkirch. *Flow Visualization*, 2ª ed. Orlando, FL: Academic Press, 1987.
6. G. S. Settles. *Schlieren and Shadowgraph Techniques: Visualizing Phenomena in Transparent Media*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
7. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.
8. F. M. White. *Viscous Fluid Flow*, 2ª ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1991.

PROBLEMAS*

Problemas Introdutórios

4–1C O que significa a palavra *cinemática*? Explique o que está envolvido no estudo da *cinemática dos fluidos*.

4–2 Considere o escoamento estacionário da água através do bocal de uma mangueira de jardim assimétrico (Figura P4–2). Ao longo do eixo central do bocal, a velocidade da água aumenta de $u_{entrada}$ para $u_{saída}$ conforme a ilustração. As medições revelam que a velocidade da água no eixo central aumenta parabolicamente através do bocal. Escreva uma equação para a velocidade no eixo central, $u(x)$, com base nos parâmetros dados aqui, de $x = 0$ até $x = L$.

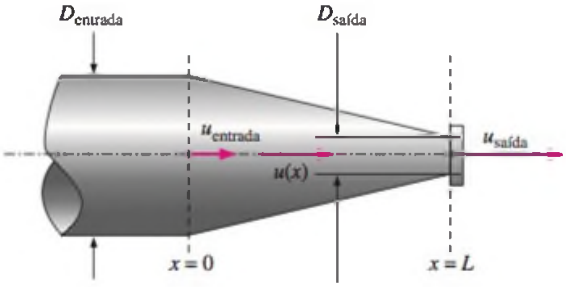


FIGURA P4–2

4–3 Considere o seguinte campo de velocidade em regime permanente e bidimensional:

$$\vec{V} = (u, v) = (0{,}5 + 1{,}2x)\vec{i} + (-2{,}0 - 1{,}2y)\vec{j}$$

Existe algum ponto de estagnação nesse campo de escoamento? Se existir, onde ele está? *Resposta: $x = -0{,}417$, $y = -1{,}67$*

4–4 Considere o seguinte campo de velocidade estacionário e bidimensional:

$$\vec{V} = (u, v) = (a^2 - (b - cx)^2)\vec{i} + (-2cby + 2c^2xy)\vec{j}$$

Existe algum ponto de estagnação nesse campo de escoamento? Se existir, onde ele está?

Descrições Lagrangiana e Euleriana

4–5C Qual é a descrição *lagrangiana* do movimento dos fluidos?

4–6C O método lagrangiano de análise do escoamento de fluidos é mais semelhante ao estudo de um sistema ou de um volume de controle? Explique.

4–7C Qual é a descrição *euleriana* do movimento dos fluidos? Em que ela difere da descrição lagrangiana?

4–8C Uma sonda fixa é colocada em um escoamento de fluido e mede a pressão e a temperatura como funções do tempo em determinado local do escoamento (Figura P4–8C). Essa é uma medição lagrangiana ou euleriana? Explique.

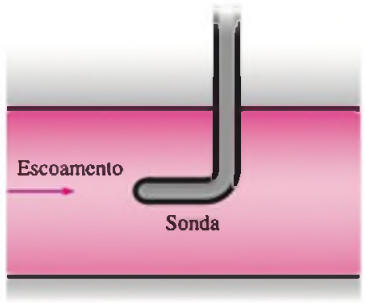


FIGURA P4–8C

4–9C Uma minúscula sonda de pressão eletrônica e neutramente flutuante é liberada no tubo de entrada de uma bomba de água e transmite 2.000 leituras de pressão por segundo ao passar através da bomba. Essa é uma medição lagrangiana ou euleriana? Explique.

4–10C Um balão meteorológico é lançado na atmosfera por meteorologistas. Quando o balão atinge uma altitude na qual é neutramente flutuante, ele transmite informações sobre as condições climáticas para estações de monitoramento no solo (Figura P4–10C). Essa é uma medição lagrangiana ou euleriana? Explique.

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

FIGURA P4–10C

4–11C Uma sonda estática de Pitot com freqüência pode ser vista na parte inferior de um avião (Figura P4–11C). À medida que o avião voa, a sonda mede a velocidade relativa do vento. Essa é uma medição lagrangiana ou euleriana? Explique.

FIGURA P4–11C

4–12C O método euleriano de análise do escoamento de fluidos é mais semelhante ao estudo de um sistema ou de um volume de controle? Explique.

4–13C Defina *campo de escoamento* em regime permanente no sistema de referência euleriano. Em tal escoamento permanente é possível que uma partícula de fluido sofra uma aceleração diferente de zero?

4–14C Cite pelo menos três outros nomes para a derivada material e escreva uma breve explicação sobre o motivo pelo qual cada nome é apropriado.

4–15 Considere o escoamento em regime permanente, incompressível e bidimensional através de um duto convergente (Figura P4–15). Um campo de velocidade aproximado simples para esse escoamento é

$$\vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j}$$

onde U_0 é a velocidade horizontal em $x = 0$. Observe que essa equação ignora os efeitos viscosos ao longo das paredes, mas é uma aproximação razoável na maior parte do campo de escoamento. Calcule a aceleração material das partículas de fluido que passam através desse duto. Dê sua resposta de duas maneiras: (1) como componentes da aceleração a_x e a_y e (2) como vetor aceleração $\vec{a}$.

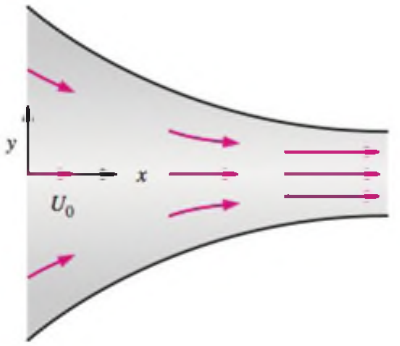


FIGURA P4–15

4–16 O escoamento de duto convergente é modelado pelo campo de velocidade permanente e bidimensional do Problema 4–15. O campo de pressão é dado por

$$P = P_0 - \frac{\rho}{2}\left[2U_0 bx + b^2(x^2 + y^2)\right]$$

onde P_0 é a pressão em $x = 0$. Gere uma expressão para a taxa de variação da pressão *acompanhando uma partícula de fluido.*

4–17 Um campo de velocidade permanente, incompressível e bidimensional é dado pelas seguintes componentes do plano xy:

$$u = 1{,}1 + 2{,}8x + 0{,}65y \qquad v = 0{,}98 - 2{,}1x - 2{,}8y$$

Calcule o campo de aceleração (encontre expressões para os componentes da aceleração a_x e a_y), e calcule a aceleração no ponto $(x, y) = (-2, 3)$. *Respostas:* $a_x = -9{,}233$, $a_y = 14{,}37$

4–18 Um campo de velocidade permanente, incompressível e bidimensional é dado pelas seguintes componentes do plano xy:

$$u = 0{,}20 + 1{,}3x + 0{,}85y \qquad v = -0{,}50 + 0{,}95x - 1{,}3y$$

Calcule o campo de aceleração (encontre expressões para as componentes da aceleração a_x e a_y), e calcule a aceleração no ponto $(x, y) = (1, 2)$.

4–19 Para o campo de velocidade do Problema 4–2, calcule a aceleração do fluido ao longo do eixo central do bocal como função de x e dos parâmetros dados.

4–20 Considere o escoamento permanente do ar através da parte do difusor de um túnel de vento (Figura P4–20). Ao longo do eixo central do difusor, a velocidade do ar diminui de u_{entrada} para $u_{\text{saída}}$ conforme a ilustração. As medições revelam que a velocidade do ar ao longo do eixo central diminui parabolicamente através do difusor. Escreva uma equação para a velocidade do eixo central, $u(x)$, com base nos parâmetros dados aqui de $x = 0$ até $x = L$.

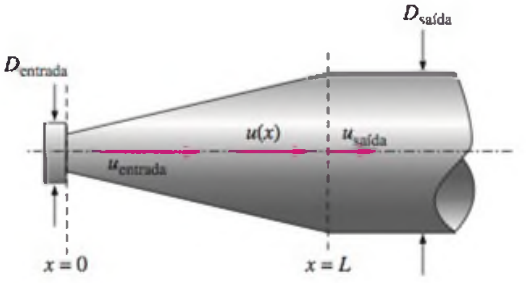


FIGURA P4–20

4–21 Para o campo de velocidade do Problema 4–20, calcule a aceleração do fluido ao longo do eixo central do difusor como função de x e dos parâmetros dados. Para $L = 2{,}0$ m, $u_{entrada} = 30{,}0$ m/s e $u_{saída} = 5{,}0$ m/s, calcule a aceleração em $x = 0$ e $x = 1{,}0$ m. *Respostas:* 0, -297 m/s²

Padrões de Escoamentos e Visualização do Escoamento

4–22C Qual é a definição de uma *linha de corrente*? O que indicam as linhas de corrente?

4–23 O escoamento de duto convergente (Figura P4–15) é modelado pelo campo de velocidade estacionário e bidimensional do Problema 4–15. Gere uma expressão analítica para as linhas de corrente do escoamento.
Resposta: $y = C/(U_0 + bx)$

4–24C Considere a visualização do escoamento em um cone de 12° na Figura P4–24C. Estamos vendo linhas de corrente, linhas de emissão, linhas de trajetória ou linhas de tempo? Explique.

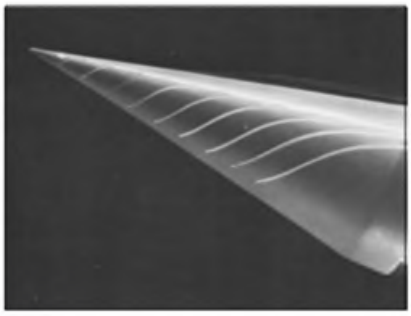


FIGURA P4–24C
Visualização do escoamento sobre um cone de 12°, com um ângulo de ataque de 16° e com um número de Reynolds de 15.000. A visualização é produzida por fluido colorido injetado na água em orifícios do corpo.
Cortesia de ONERA. Fotografado por Worlé.

4–25C Qual é a definição de uma *linha de trajetória*? O que indicam as linhas de trajetória?

4–26C Qual é a definição de uma *linha de emissão*? Como as linhas de emissão diferem das linhas de corrente?

4–27C Considere a visualização do escoamento em uma asa-delta com abertura de 15° na Figura P4–27C. Estamos vendo linhas de corrente, linhas de emissão, linhas de trajetória ou linhas de tempo? Explique.

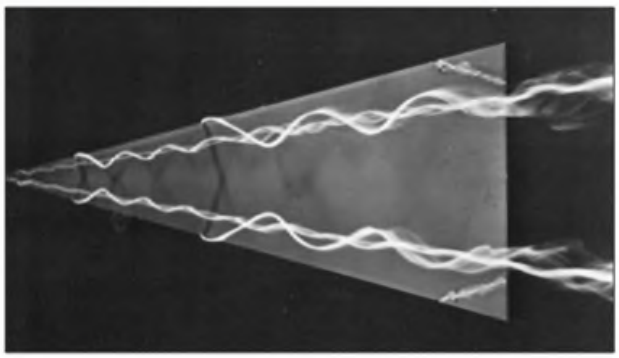


FIGURA P4–27C
Visualização do escoamento sobre uma asa-delta de 15°, com um ângulo de ataque de 20° e com um número de Reynolds de 20.000. A visualização é produzida por fluido colorido injetado na água por meio de orifícios na parte de baixo da asa.
Cortesia de ONERA. Fotografado por Worlé.

4–28C Considere a visualização do escoamento de um vórtice em efeito solo na Figura P4–29C. Estamos vendo linhas de corrente, linhas de emissão, linhas de trajetória ou linhas de tempo? Explique.

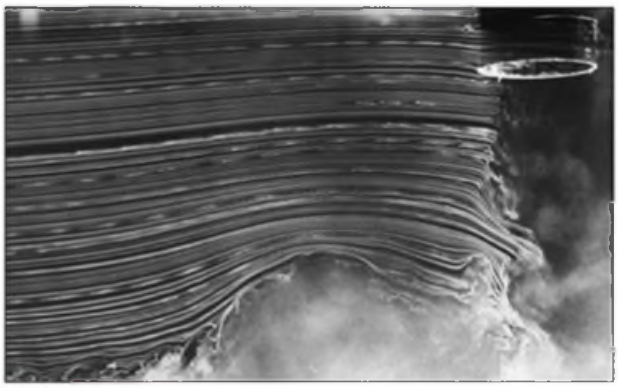


FIGURA P4–28C
Visualização do escoamento de um vórtice em efeito solo. Um jato de ar arredondado de alta velocidade atinge o solo na presença de um escoamento em ar livre de corrente da esquerda para a direita. (O solo está na parte debaixo da figura.) A parte do jato que viaja a montante forma um escoamento recirculante conhecido como vórtice em efeito solo. A visualização é produzida por um fio de fumaça colocado verticalmente à esquerda do campo de visão.
Foto de John M. Cimbala.

4–29C Considere a visualização do escoamento ao redor da esfera na Figura P4–29C. Estamos vendo linhas de corrente, linhas de emissão, linhas de trajetória ou linhas de tempo? Explique.

FIGURA P4–29C
Visualização do escoamento sobre uma esfera, com um número de Reynolds de 15.000. A visualização é produzida por uma exposição de longa duração de bolhas de ar na água.
Cortesia de ONERA. Fotografado por Worlé.

4–30C Qual é a definição de uma *linha de tempo*? Como as linhas de tempo podem ser produzidas em um canal de água? Mencione uma aplicação na qual as linhas de tempo são mais úteis do que as linhas de emissão.

4–31C Considere uma fatia transversal através de uma matriz de tubos de trocador de calor (Figura P4–31C). Para cada informação desejada, selecione o tipo de gráfico de visualização do escoamento (gráfico vetorial ou gráfico de contorno) que seria mais apropriado e explique por quê.

(*a*) O local da velocidade máxima do fluido deve ser visualizado.
(*b*) A separação de escoamento na parte traseira dos tubos deve ser visualizada.
(*c*) O campo de temperatura através do plano deve ser visualizado.
(*d*) A distribuição da componente de vorticidade normal ao plano deve ser visualizada.

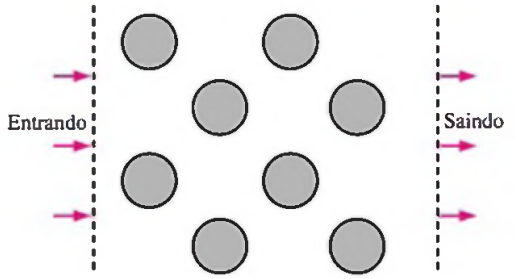


FIGURA P4–31C

4–32 Considere o seguinte campo de velocidade em regime permanente, incompressível e bidimensional:

$$\vec{V} = (u, v) = (0{,}5 + 1{,}2x)\vec{i} + (-2{,}0 - 1{,}2y)\vec{j}$$

Gere uma expressão analítica para as linhas de corrente do escoamento e desenhe várias linhas de corrente no quadrante superior direito de $x = 0$ a 5 e de $y = 0$ a 6.

4–33 Considere o campo de velocidade em regime permanente, incompressível e bidimensional do Problema 4–32. Gere um gráfico vetorial de velocidade no quadrante superior direito de $x = 0$ a 5 e de $y = 0$ a 6.

4–34 Considere o campo de velocidade em regime permanente, incompressível e bidimensional do Problema 4–33. Gere um gráfico vetorial do campo de aceleração no quadrante superior direito de $x = 0$ a 5 e de $y = 0$ a 6.

4–35 Um campo de velocidade bidimensional, incompressível e em regime permanente é dado por

$$\vec{V} = (u, v) = (1 + 2{,}5x + y)\vec{i} + (-0{,}5 - 1{,}5x - 2{,}5y)\vec{j}$$

onde as coordenadas x e y estão em m e o módulo da velocidade está em m/s.

(*a*) Determine se há muitos pontos de estagnação nesse campo de escoamento e, neste caso, onde?

(*b*) Represente graficamente os vetores velocidade em diversos locais do quadrante superior direito de $x = 0$ m a 4 m e de $y = 0$ m a 4 m; descreva qualitativamente o campo de escoamento.

4–36 Considere o campo de velocidade em regime permanente, incompressível e bidimensional do Problema 4–35.

(*a*) Calcule a aceleração material no ponto ($x = 2$ m, $y = 3$ m). *Respostas:* $a_x = 11{,}5$ m/s^2, $a_y = 14{,}0$ m/s^2

(*b*) Esboce os vetores aceleração material no mesmo intervalo de valores x e y do Problema 4–36.

4–37 O campo da velocidade para a *rotação de corpo rígido* no plano $r\theta$ (Figura P4–37) é dado por

$$u_r = 0 \qquad u_\theta = \omega r$$

onde ω é o módulo da velocidade angular ($\vec{\omega}$ aponta para a direção z). No caso com $\omega = 1{,}0$ s^{-1}, trace o gráfico de contorno do módulo de velocidade (velocidade escalar). Especificamente, desenhe curvas de velocidade constante $V = 0{,}5$, 1,0, 1,5, 2,0 e 2,5 m/s. Verifique se essas velocidades estão rotuladas em seu esboço. Certifique-se de identificar estas velocidades escalares no seu gráfico.

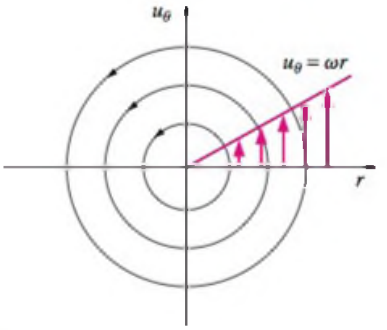


FIGURA P4–37

4–38 O campo da velocidade para uma linha de vórtices no plano $r\theta$ (Figura P4–38) é dado por

$$u_r = 0 \qquad u_\theta = \frac{K}{r}$$

onde K é a *intensidade da linha de vórtices*. No caso com $K = 1{,}0$ m^2/s faça o gráfico de contorno do módulo da velocidade (velocidade escalar). Especificamente, desenhe curvas de velocidade constante $V = 0{,}5$, 1,0, 1,5, 2,0 e 2,5 m/s. Certifique-se de identificar estas velocidades escalares no seu gráfico.

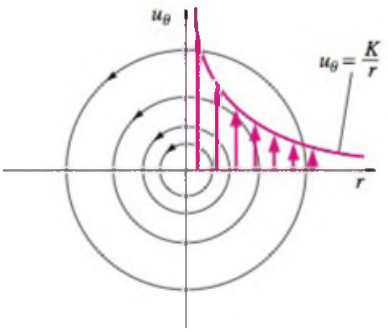


FIGURA P4–38

4–39 O campo de velocidade para uma *linha de fontes* no plano $r\theta$ (Figura P4–39) é dado por

$$u_r = \frac{m}{2\pi r} \qquad u_\theta = 0$$

onde m é a intensidade da linha de fontes. No caso com $m/(2\pi) = 1{,}0$ m^2/s, faça um gráfico de contorno do módulo da velocidade. Especificamente, desenhe curvas de velocidade constante $V = 0{,}5$, 1,0, 1,5, 2,0 e 2,5 m/s.

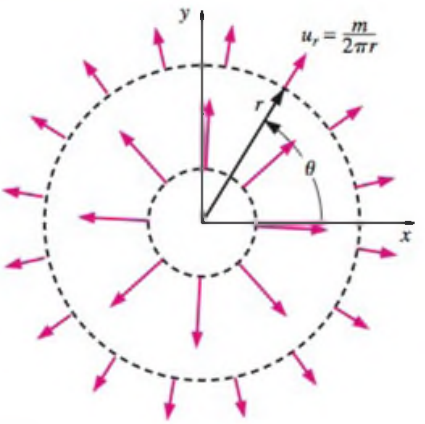


FIGURA P4–39

Movimento e Deformação de Elementos de Fluidos

4–40C Cite e descreva brevemente os quatro tipos fundamentais de movimento ou deformação das partículas de fluido.

4–41 O escoamento de duto convergente (Figura P4–15) é modelado pelo campo de velocidade em regime permanente e bidimensional do Problema 4–15. Esse campo de escoamento é rotacional ou irrotacional? Mostre todo o seu trabalho.

Resposta: irrotacional

4–42 O escoamento de duto convergente é modelado pelo campo de velocidade em regime permanente e bidimensional do Problema 4–15. Uma partícula de fluido (A) está localizada no eixo x em $x = x_A$ no instante $t = 0$ (Figura P4–42). Em algum instante posterior t, a partícula de fluido moveu-se a jusante com o escoamento até algum novo local $x = x_{A'}$, como mostra a figura. Como o escoamento é simétrico com relação ao eixo x, a partícula de fluido permanece no eixo x em todos os instantes. Gere uma expressão analítica para a posição x da partícula de fluido em qualquer instante t arbitrário em termos de sua posição inicial x_A e das constantes U_0 e b. Em outras palavras, deduza uma expressão para $x_{A'}$. (Sugestão: Sabemos que $u = dx_{\text{partícula}}/dt$ seguindo uma partícula de fluido. Substitua u, separe as variáveis e integre.)

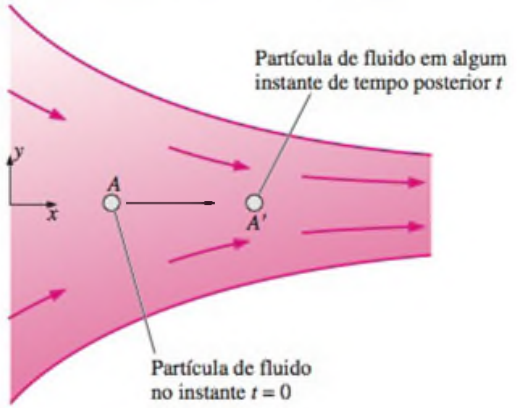


FIGURA P4–42

4–43 O escoamento de duto convergente é modelado pelo campo de velocidade em regime permanente e bidimensional do Problema 4–15. Como o escoamento é simétrico com relação ao eixo x, o segmento de reta AB ao longo do eixo x permanece no eixo, mas se estica do comprimento ξ até o comprimento $\xi + \Delta\xi$ ao escoar ao longo do eixo central do canal (Figura P4–43). Gere uma expressão analítica para a variação de comprimento do segmento de reta $\Delta\xi$. (Sugestão: Use os resultados do Problema 4–41.) *Resposta:* $(x_B - x_A)(e^{bt} - 1)$

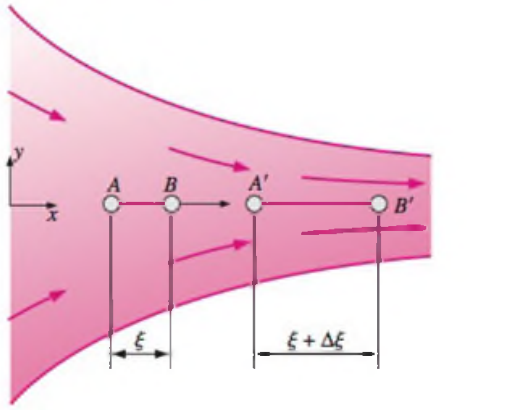


FIGURA P4–43

4–44 Usando os resultados do Problema 4–43 e a definição fundamental da taxa de deformação linear (a taxa de aumento do comprimento por unidade de comprimento), deduza uma expressão para a taxa de deformação linear na direção x (ε_{xx}) das partículas de fluido localizadas no eixo central do canal. Compare seu resultado com a expressão geral de ε_{xx} em termos do campo de velocidade, ou seja, $\varepsilon_{xx} = \partial u/\partial x$. (Sugestão: Tome o limite quando o tempo $t \to 0$. Talvez seja preciso aplicar uma expansão em série truncada para e^{bt}.) *Resposta: b*

4–45 O escoamento de duto convergente é modelado pelo campo de velocidade em regime permanente e bidimensional do Problema 4–15. Uma partícula de fluido (A) está localizada em $x = x_A$ e $y = y_A$ no instante $t = 0$ (Figura P4–45). Em algum instante posterior t, a partícula de fluido moveu-se a jusante com o escoamento até algum local novo $x = x_{A'}$, $y = y_{A'}$, como mostra a figura. Gere uma expressão analítica para a localização y da partícula de fluido em algum instante t arbitrário em termos de sua posição inicial $y = y_A$ e da constante b. Em outras palavras, deduza uma expressão para $y_{A'}$. (Sugestão: Sabemos que $v = dy_{\text{partícula}}/dt$ seguindo uma partícula de fluido. Substitua v na equação, separe as variáveis e integre.) *Resposta:* $y_A e^{-bt}$

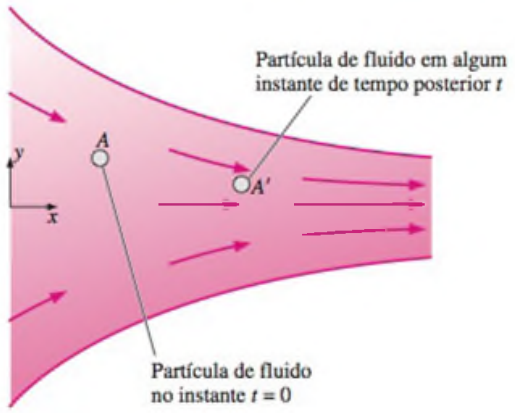


FIGURA P4–45

4–46 O escoamento de duto convergente é modelado pelo campo de velocidade em regime permanente e bidimensional do Problema 4–15. À medida que o segmento de reta vertical AB se movimenta a jusante, ele encolhe do comprimento η até o comprimento $\eta + \Delta\eta$ conforme a Figura P4–46. Gere uma expressão analítica para a variação de comprimento do segmento de reta $\Delta\eta$. Observe que a variação no comprimento $\Delta\eta$ é negativa. (Sugestão: Use os resultados do Problema 4–45.)

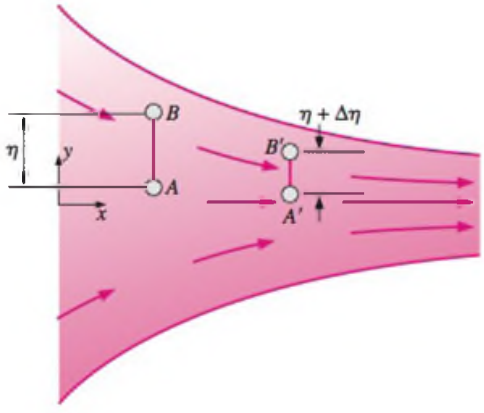


FIGURA P4–46

4–47 Com os resultados do Problema 4–46 e a definição fundamental da taxa de deformação linear (a taxa de aumento do comprimento por unidade de comprimento), desenvolva uma expressão para a taxa de deformação linear na direção y (ε_{yy}) das partículas de fluido que se movimentam no canal. Compare seu resultado com a expressão geral de ε_{yy} em termos do campo de velocidade, ou seja, $\varepsilon_{yy} = \partial v/\partial y$. (Sugestão: Tome o limite quanto o tempo $t \to 0$. Talvez seja preciso aplicar uma expansão em série truncada para e^{-bt}).

4–48 O escoamento de duto convergente é modelado pelo campo de velocidade em regime permanente e bidimensional do Problema 4–15. Use a equação da taxa de deformação volumétrica para verificar se esse campo de escoamento é incompressível.

4–49 Uma equação geral para um campo de velocidade bidimensional e em regime permanente que é linear nas direções espacial (x e y) é

$$\vec{V} = (u, v) = (U + a_1x + b_1y)\vec{i} + (V + a_2x + b_2y)\vec{j}$$

onde U e V e os coeficientes são constantes. Será suposto que suas dimensões são definidas apropriadamente. Calcule as componentes x e y do campo de aceleração.

4–50 Para o campo de velocidade do Problema 4–49, qual relação deve existir entre os coeficientes para garantir que o campo de escoamento seja incompressível? *Resposta:* $a_1 + b_2 = 0$

4–51 Para o campo de velocidade do Problema 4–49, calcule as taxas de deformação linear nas direções x e y. *Respostas:* a_1, b_2

4–52 Para o campo de velocidade do Problema 4–49, calcule a taxa de deformação por cisalhamento no plano xy.

4–53 Combine seus resultados dos Problemas 4–51 e 4–52 para formar o tensor taxa de deformação bidimensional ε_{ij} no plano xy

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

Sob quais condições os eixos x e y seriam eixos principais? *Resposta:* $b_1 + a_2 = 0$

4–54 Para o campo de velocidade do Problema 4–49, calcule o vetor vorticidade. Em qual direção aponta o vetor vorticidade? *Resposta:* $(a_2 - b_1)\vec{k}$

4–55 Considere o **escoamento com cisalhamento** em regime permanente, incompressível e bidimensional para o qual o campo de velocidade é

$$\vec{V} = (u, v) = (a + by)\vec{i} + 0\vec{j}$$

onde a e b são constantes. A Figura P4–55 representa uma pequena partícula de fluido retangular com dimensões dx e dy no instante t. A partícula de fluido se movimenta e deforma com o escoamento, de forma que em um instante posterior ($t + dt$) a partícula não é mais retangular, como também mostra a figura. O local inicial de cada canto da partícula de fluido está marcado na Figura P4–54. O canto esquerdo inferior está em (x, y) no instante t, onde a componente x da velocidade é $u = a + by$. Mais tarde, esse canto se move para $(x + u\,dt, y)$ ou

$$(x + (a + by)\,dt, y)$$

(*a*) De forma semelhante, calcule a posição de cada um dos três cantos da partícula de fluido no instante $t + dt$.

(*b*) Da definição fundamental da *taxa de deformação linear* (a taxa de aumento do comprimento por unidade de comprimento), calcule as taxas de deformação linear ε_{xx} e ε_{yy}. *Respostas:* 0, 0

(*c*) Compare seus resultados com aqueles obtidos nas equações para ε_{xx} e ε_{yy} em coordenadas cartesianas, ou seja

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

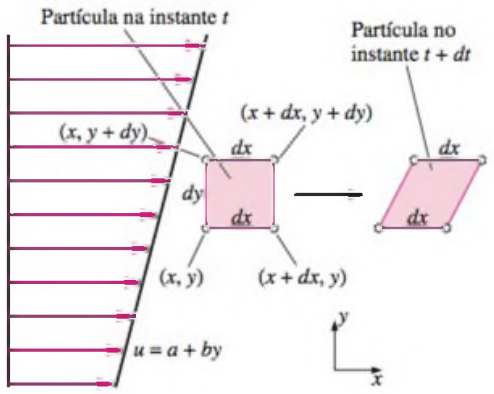


FIGURA P4–55

4–56 Use dois métodos para verificar se o escoamento do Problema 4–55 é incompressível: (*a*) calculando o volume da partícula de fluido em ambos os instantes e (*b*) calculando a taxa de deformação volumétrica. Observe que o Problema 4–55 deve ser feito antes deste problema.

4–57 Considere o campo de velocidade estacionário, incompressível e bidimensional do Problema 4–55. Usando os resultados do Problema 4–55(*a*) faça o seguinte:

(*a*) Da definição fundamental de *taxa de deformação por cisalhamento* (metade da taxa de diminuição do ângulo entre duas retas inicialmente perpendiculares que se interceptam em um ponto), calcule a taxa de deformação por cisalhamento ε_{xy} no plano xy. (Sugestão: Use os lados inferior e esquerdo da partícula de fluido, que se cruzam a 90° no canto inferior esquerdo da partícula no instante inicial.)

(*b*) Compare seus resultados com aqueles obtidos pelas equações para ε_{xy} em coordenadas cartesianas, ou seja

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Respostas: (*a*) $b/2$, (*b*) $b/2$

4–58 Considere o campo de velocidade em regime permanente, incompressível e bidimensional do Problema 4–55. Usando os resultados do Problema 4–55(*a*), faça o seguinte:

(*a*) Da definição fundamental da *taxa de rotação* (taxa de rotação média de duas retas inicialmente perpendiculares que se cruzam em um ponto), calcule a taxa de rotação da partícula de fluido no plano xy, ω_z. (Sugestão: Use os lados inferior e esquerdo da partícula de fluido, que se cruzam a 90° no canto inferior esquerdo da partícula, no instante inicial.)

(*b*) Compare seus resultados com aqueles obtidos pelas equações para ω_z em coordenadas cartesianas, ou seja

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Respostas: (*a*) $-b/2$, (*b*) $-b/2$

4–59 Usando os resultados do Problema 4–58:

(*a*) Esse escoamento é rotacional ou irrotacional?

(*b*) Calcule a componente *z* da vorticidade para esse campo de escoamento.

4–60 Um elemento de fluido bidimensional de dimensões *dx* e *dy* é transladado e distorcido como mostra a Figura P4–60 durante o período de tempo infinitesimal $dt = t_2 - t_1$. As componentes da velocidade no ponto *P* no instante inicial são *u* e *v* nas direções *x* e *y*, respectivamente. Mostre que o módulo da taxa de rotação (velocidade angular) com relação ao ponto *P* no plano *xy* é

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

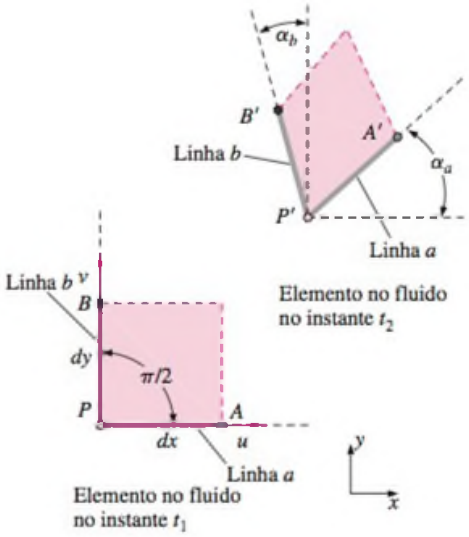


FIGURA P4–60

4–61 Um elemento de fluido bidimensional de dimensões *dx* e *dy* é transladado e distorcido como mostra a Figura P4–60 durante o período de tempo infinitesimal $dt = t_2 - t_1$. As componentes da velocidade no ponto *P* no instante inicial são *u* e *v* nas direções *x* e *y*, respectivamente. Considere o segmento da reta PA da Figura P4–60, e mostre que o módulo da taxa de deformação linear na direção *x* é

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

4–62 Um elemento de fluido bidimensional de dimensões *dx* e *dy* é transladado e distorcido como mostra a Figura P4–60 durante o período de tempo infinitesimal $dt = t_2 - t_1$. As componentes da velocidade no ponto *P* no instante inicial são *u* e *v* nas direções *x* e *y* respectivamente. Mostre que o módulo da taxa de deformação por cisalhamento com relação ao ponto *P* no plano *xy* é

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

4–63 Considere um campo de escoamento em regime permanente, bidimensional e incompressível no plano *xy*. A taxa de deformação linear na direção *x* é de 2,5 s^{-1}. Calcule a taxa de deformação linear na direção *y*.

4–64 Um tanque cilíndrico de água gira em rotação de corpo rígido, no sentido anti-horário com relação a seu eixo vertical (Figura P4–64) com velocidade angular $\dot{n} = 360$ rpm. Calcule a vorticidade das partículas de fluido no tanque.

Resposta: 75,4 $\vec{k}$ rad/s

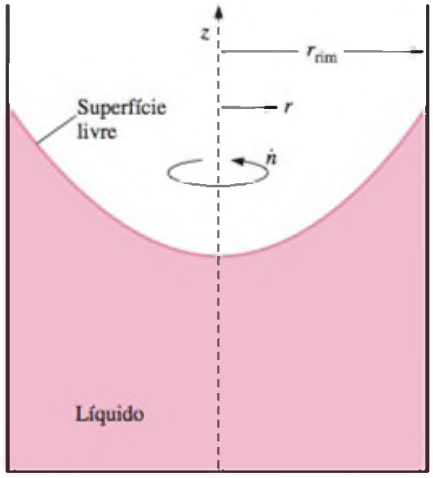


FIGURA P4–64

4–65 Um tanque cilíndrico de água gira com relação ao seu eixo vertical (Figura P4–64). Um sistema PIV é usado para medir o campo de vorticidade do escoamento. O valor medido da vorticidade na direção *z* é –55,4 rad/s e é constante até ±0,5% em toda a parte em que foi medido. Calcule a velocidade angular de rotação do tanque em rpm. O tanque gira no sentido horário ou anti-horário com relação ao eixo vertical?

4–66 Um tanque cilíndrico de raio $r_{borda} = 0{,}35$ m gira com relação ao seu eixo vertical (Figura P4–64). O tanque é preenchido parcialmente com óleo. A velocidade da borda é de 2,6 m/s na direção anti-horária (olhando de cima para baixo) e o tanque girou por tempo suficiente para estar em rotação de corpo rígido. Para uma partícula de fluido do tanque, calcule o módulo da componente da vorticidade na direção vertical *z*.

Resposta: 15,0 rad/s

4–67 Explique a relação entre vorticidade e rotacionalidade.

4–68 Considere um campo de escoamento bidimensional e incompressível no qual uma partícula de fluido inicialmente quadrada se movimenta e deforma. A dimensão da partícula de fluido é *a* no instante *t* e está alinhada aos eixos *x* e *y* conforme a Figura P4–68. Em algum instante posterior, a partícula ainda está alinhada aos eixos *x* e *y*, mas se deformou em um retângulo com comprimento horizontal 2*a*. Qual é o comprimento vertical da partícula de fluido retangular nesse instante posterior?

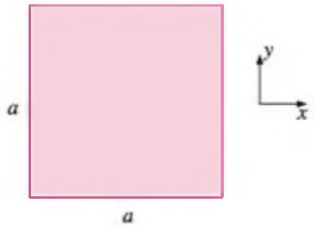


FIGURA P4–68

4–69 Considere um campo de escoamento bidimensional e incompressível no qual uma partícula de fluido inicialmente quadrada se movimenta e deforma. A dimensão da partícula de fluido é a no instante t e está alinhada aos eixos x e y conforme a Figura P4–68. Em algum instante posterior, a partícula ainda está alinhada aos eixos x e y, mas se deformou em um retângulo com comprimento horizontal 1,06a e comprimento vertical 0,931a. (A dimensão da partícula na direção z não varia, uma vez que o escoamento é bidimensional.) Qual a porcentagem de aumento ou diminuição da densidade da partícula de fluido?

4–70 Considere o seguinte campo de velocidade em regime permanente e tridimensional:

$$\vec{V} = (u, v, w)$$
$$= (3{,}0 + 2{,}0x - y)\vec{i} + (2{,}0x - 2{,}0y)\vec{j} + (0{,}5xy)\vec{k}$$

Calcule o vetor vorticidade como função do espaço (x, y, z).

4–71 Considere o **escoamento de Couette** — o escoamento entre duas placas paralelas infinitas separadas pela distância h, com a placa superior se movendo e a placa inferior fixa, como ilustra a Figura P7–71. O escoamento é em regime permanente, incompressível e bidimensional no plano xy. O campo de velocidade é dado por

$$\vec{V} = (u, v) = V\frac{y}{h}\vec{i} + 0\vec{j}$$

Esse escoamento é rotacional ou irrotacional? Se ele for rotacional, calcule a componente da vorticidade na direção z. As partículas de fluido desse escoamento giram no sentido horário ou anti-horário? *Respostas:* sim, $-V/h$, horário

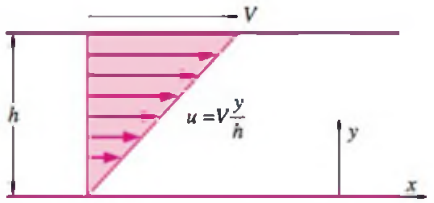


FIGURA P4–71

4–72 Para o escoamento de Couette da Figura P4–71, calcule as taxas de deformação linear nas direções x e y, e calcule a taxa de deformação por cisalhamento ε_{xy}.

4–73 Combine seus resultados do Problema 4–72 para formar o tensor de taxa de deformação bidimensional ε_{ij},

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

Os eixos x e y são principais?

Teorema de Transporte de Reynolds

4–74 Verdadeiro ou falso: para cada afirmação, decida se ela é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta.

(*a*) O teorema de transporte de Reynolds é útil para transformar as equações de conservação de suas formas de volume de controle, que ocorrem naturalmente, para suas formas de sistema.

(*b*) O teorema de transporte de Reynolds se aplica apenas aos volumes de controle não deformantes.

(*c*) O teorema de transporte de Reynolds pode ser aplicado aos campos de escoamento permanente e não permanente.

(*d*) O teorema de transporte de Reynolds pode ser aplicado às quantidades escalares e vetoriais.

4–75 Considere a forma geral do teorema de transporte de Reynolds (TTR) dada por

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b\, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA$$

onde $\vec{V}_r$ é a velocidade do fluido com relação à superfície de controle. Seja B_{sis} a massa m de um sistema de partículas de fluido. Sabemos que para um sistema $dm/dt = 0$, uma vez que, por definição, nenhuma massa pode entrar ou sair do sistema. Use a equação dada para deduzir a equação da conservação da massa para um volume de controle.

4–76 Considere a forma geral do teorema de transporte de Reynolds (TTR) dada no Problema 4–75. Seja B_{sis} o momento $m\vec{V}$ de um sistema de partículas de fluido. Sabemos que para um sistema, a segunda lei de Newton é

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})_{sis}$$

Use a equação do Problema 4–75 e esta equação para deduzir a equação de conservação do momento para um volume de controle.

4–77 Considere a forma geral do teorema de transporte de Reynolds (TTR) dada no Problema 4–75. Seja B_{sis} o momento angular $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$ de um sistema de partículas de fluido, onde $\vec{r}$ é o braço do momento. Sabemos que para um sistema, a conservação do momento angular pode ser expressa como

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{H}_{sis}$$

onde $\Sigma\, \vec{M}$ é o momento total aplicado ao sistema. Use a equação dada no Problema 4–75 e esta equação para deduzir a equação de conservação do momento angular para um volume de controle.

4–78 Reduza ao máximo a seguinte expressão:

$$F(t) = \frac{d}{dt}\int_{x=At}^{x=Bt} e^{-2x^2}\, dx$$

(Sugestão: Use o teorema de Leibnitz unidimensional.)
Resposta: $Be^{-2Bt^2} - Ae^{-2At^2}$

Problemas de Revisão

4–79 Considere o **escoamento de Poiseuille** totalmente desenvolvido e bidimensional — o escoamento entre duas placas paralelas finitas separadas pela distância h, com as placas superior e inferior fixas, e um gradiente de pressão forçado dP/dx movendo o escoamento como ilustra a Figura P4–79. (dP/dx é constante e negativo.) O escoamento é incompressível, em regime permanente e bidimensional no plano xy. As componentes da velocidade são dadas por

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}(y^2 - hy) \qquad v = 0$$

onde μ é a viscosidade do fluido. Esse escoamento é rotacional ou irrotacional? Se ele for rotacional, calcule a componente da vorticidade na direção z. As partículas de fluido desse escoamento giram no sentido horário ou anti-horário?

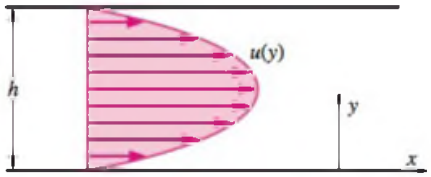


FIGURA P4–79

4–80 Para o escoamento de Poiseuille bidimensional do Problema 4–79, calcule as taxas de deformação linear nas direções x e y e calcule a taxa de deformação por cisalhamento ε_{xy}.

4–81 Combine seus resultados do Problema 4–80 para formar o tensor da taxa de deformação bidimensional ε_{ij} no plano xy

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

Os eixos x e y são principais?

4–82 Considere o escoamento de Poiseuille bidimensional do Problema 4–79. O fluido entre as placas é água a 40°C. Seja $h = 1{,}6$ mm a altura da lacuna e $dP/dx = -230$ N/m^3 o gradiente de pressão. Calcule e trace sete *linhas de trajetória* de $t = 0$ a $t = 10$ s. As partículas de fluido são liberadas em $x = 0$ e $y = 0{,}2$, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0, 1,2 e 1,4 mm.

4–83 Considere o escoamento de Poiseuille bidimensional do Problema 4–79. O fluido entre as placas é água a 40°C. Seja $h = 1{,}6$ mm a altura da lacuna e $dP/dx = -230$ N/m^3 o gradiente de pressão. Calcule e trace sete *linhas de emissão* geradas com uma varredura de tinta que introduz listras de tinta em $x = 0$ e $y = 0{,}2$, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0, 1,2 e 1,4 mm (Figura P4–83). A tinta é introduzida de $t = 0$ a $t = 10$ s e as linhas de emissão devem ser traçadas em $t = 10$ s.

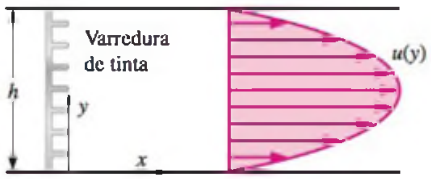


FIGURA P4–83

4–84 Repita o Problema 4–83, exceto que a tinta é introduzida de $t = 0$ a $t = 10$ s e as linhas de emissão devem ser traçadas em $t = 12$ s em vez de 10 s.

4–85 Compare os resultados do Problema 4–79 e 4–84 e comente sobre a taxa de deformação linear na direção x.

4–86 Considere o escoamento de Poiseuille bidimensional do Problema 4–79. O fluido entre as placas é água a 40°C. Seja $h = 1{,}6$ mm a altura da lacuna e $dP/dx = -230$ N/m^3 o gradiente de pressão. Imagine um fio de bolha de hidrogênio esticado verticalmente através do canal em $x = 0$ (Figura P4–86). O fio é pulsado, ligando e desligando, de forma que as bolhas são produzidas periodicamente para criar *linhas de tempo*. Cinco linhas de tempo distintas são geradas em $t = 0$, 2,5, 5,0, 7,5 e 10,0 s. Calcule e esboce a aparência dessas cinco linhas de tempo no instante $t = 12{,}5$ s.

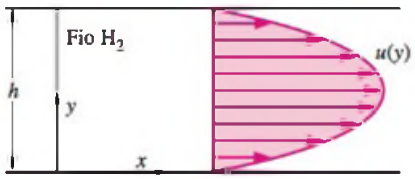


FIGURA P4–86

4–87 Considere o escoamento de Poiseuille com simetria axial completamente desenvolvido — o escoamento em um tubo redondo de raio R (diâmetro $D = 2R$), com um gradiente de pressão forçado dP/dx movendo o escoamento como ilustra a Figura P4–87. (dP/dx é constante e negativo.) O escoamento é permanente, incompressível e simétrico com relação ao eixo x. As componentes da velocidade são dadas por

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(r^2 - R^2) \qquad u_r = 0 \qquad u_\theta = 0$$

onde μ é a viscosidade do fluido. Esse escoamento é rotacional ou irrotacional? Se ele for rotacional, calcule a componente da vorticidade na direção circunferencial (θ) e discuta o sinal da rotação.

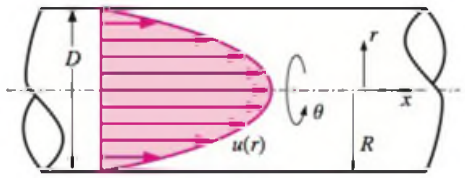


FIGURA P4–87

4–88 Para o escoamento de Poiseuille com simetria axial do Problema 4–87, calcule as taxas de deformação linear nas direções x e r e calcule a taxa de deformação por cisalhamento ε_{xr}. O tensor taxa de deformação em coordenadas cilíndricas (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u_x), é

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta x} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u_\theta}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u_\theta}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

4–89 Combine seus resultados do Problema 4–88 para formar o tensor taxa de deformação simétrico ε_{ij},

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

Os eixos x e r são principais?

4–90 Aproximamos o escoamento do ar em um acessório de aspirador de pó seguindo as componentes da velocidade no plano central (o plano xy):

$$u = \frac{-\dot{V}x}{\pi L}\frac{x^2 + y^2 + b^2}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2b^2 + y^4 - 2y^2b^2 + b^4}$$

e

$$v = \frac{-\dot{V}y}{\pi L}\,\frac{x^2 + y^2 - b^2}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2b^2 + y^4 - 2y^2b^2 + b^4}$$

onde b é a distância do acessório acima do piso, L é o comprimento do acessório e $\dot{V}$ é a vazão em volume do ar sendo sugado para dentro da mangueira (Figura P4–89). Determine o local dos pontos de estagnação nesse campo de escoamento.
Resposta: na origem

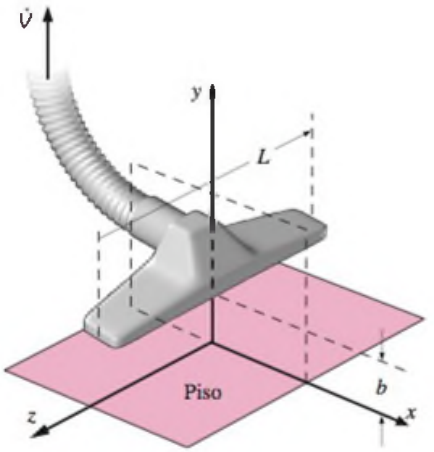


FIGURA P4–90

4–91 Considere o aspirador de pó do Problema 4–90. No caso em que b = 2,0 cm, L = 35 cm e $\dot{V}$ = 0,1098 m³/s, crie um gráfico vetorial de velocidade da metade superior do plano xy de x = –3 cm a 3 cm e de y = 0 cm a 2,5 cm. Desenhe tantos vetores quanto forem necessários para ter uma boa idéia do campo de escoamento. *Observação*: A velocidade é infinita no ponto (x, y) = (0, 2,0 cm) e, portanto, não tente desenhar um vetor velocidade nesse ponto.

4–92 Considere o campo de velocidade aproximado para o aspirador de pó do Problema 4–90. Calcule a velocidade de escoamento ao longo do piso. As partículas de poeira do piso têm mais chance de serem sugadas pelo aspirador de pó no local de velocidade máxima. Onde fica esse local? Você acha que o aspirador de pó realizará um bom trabalho ao sugar a poeira diretamente abaixo da entrada (na origem)? Por que sim ou por que não?

4–93 Considere um campo de escoamento em regime permanente e bidimensional cuja componente x da velocidade é dada por

$$u = a + b(x - c)^2$$

onde a, b e c são constantes com dimensões apropriadas. Com qual forma a componente y da velocidade precisa estar para que o campo de escoamento seja incompressível? Em outras palavras, gere uma expressão para v como função de x, y e das constantes da equação dada, de forma que o escoamento seja incompressível. *Resposta:* $-2b(x - c)y + f(x)$

4–94 Existem várias ocasiões em que um escoamento de corrente livre razoavelmente uniforme encontra um cilindro longo normal ao escoamento (Figura P4–94). Os exemplos incluem o ar escoando ao redor de uma antena de automóvel, o vento soprando contra um mastro de bandeira ou poste de telefone, o vento atingindo fios elétricos e as correntes oceânicas atingindo as vigas redondas e submersas que suportam as plataformas de petróleo. Em todos esses casos, o escoamento na parte traseira do cilindro é separado, em regime não permanente e em geral turbulento. Entretanto, o escoamento na metade dianteira do cilindro é muito mais estacionário e previsível. Na verdade, exceto por uma camada limite muito fina próxima à superfície do cilindro, o campo de escoamento pode ser aproximado pelas seguintes componentes de velocidade permanentes e bidimensionais do plano xy ou $r\theta$:

$$u_r = V\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -V\,\text{sen}\,\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Esse campo de escoamento é rotacional ou irrotacional? Explique.

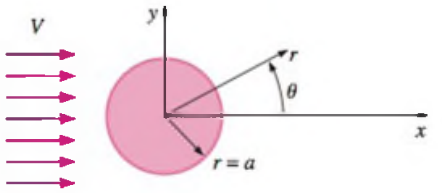


FIGURA P4–94

4–95 Considere o campo de escoamento do Problema 4–94 (escoamento sobre um cilindro circular). Considere apenas a metade dianteira do escoamento (x < 0). Existe um ponto de estagnação na metade dianteira do campo de escoamento. Onde ele está? Dê a resposta em coordenadas cilíndricas (r, θ) e cartesianas (x, y).

4–96 Considere a metade a montante (x < 0) do campo de escoamento do Problema 4–94 (escoamento sobre um cilindro circular). Introduzimos um parâmetro chamado **função de corrente** ψ, que é *constante ao longo das linhas de corrente* dos escoamentos bidimensionais como aquela considerada aqui (Figura P4–96). O campo de velocidade do Problema 4–94 corresponde a uma função de corrente dada por

$$\psi = V\,\text{sen}\,\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

(*a*) Tomando ψ constante, gere uma equação para uma linha de corrente. (Sugestão: Use a fórmula quadrática para solucionar r como função de θ.)

(*b*) Para o caso particular em que V = 1,00 m/s e o raio do cilindro a = 10,0 cm, trace várias linhas de corrente na metade a montante do escoamento (90° < θ < 270°). Por questões de consistência, trace-as no intervalo −0,4 m < x < 0 m, −0,2 m < y < 0,2 m, com os valores da função de corrente espaçados uniformemente entre −0,16 m²/s e 0,16 m²/s.

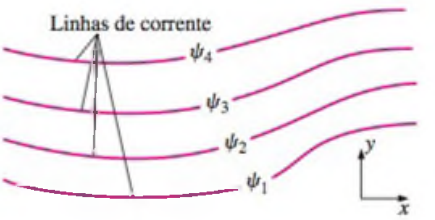


FIGURA P4–96

4–97 Considere o campo de escoamento do Problema 4–94 (escoamento sobre um cilindro circular). Calcule as duas taxas de deformação linear no plano $r\theta$; ou seja, calcule ε_{rr} e $\varepsilon_{\theta\theta}$. Discuta se os segmentos da reta de fluido se esticam (ou encolhem) nesse campo de escoamento. (Sugestão: O tensor taxa de deformação em coordenadas cilíndricas é dado no Problema 4–88.)

4–98 Com base em seus resultados para o Problema 4–94, discuta a compressibilidade (ou incompressibilidade) desse escoamento. *Resposta:* o escoamento é incompressível

4–99 Considere o campo de escoamento do Problema 4–94 (escoamento sobre um cilindro circular). Calcule $\varepsilon_{r\theta}$, a taxa de deformação por cisalhamento no plano $r\theta$. Discuta se as partículas de fluido desse escoamento se deformam ou não por cisalhamento. (Sugestão: O tensor taxa de deformação em coordenadas cilíndricas é dado no Problema 4–88.)

CAPÍTULO

5

EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DE MASSA, DE BERNOULLI E DE ENERGIA

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura deste capítulo, você deve ser capaz de:

- Aplicar a equação de conservação massa para balancear as vazões de entrada e saída de um sistema fluido
- Reconhecer as diversas formas de energia mecânica e trabalhar com as eficiências de conversão de energia
- Entender o uso e as limitações da equação de Bernoulli e aplicá-la para solucionar uma variedade de problemas de escoamento de fluidos.
- Trabalhar com a equação de conservação de energia expressa em termos de cargas e utilizá-la para determinar a potência resultante da turbina e os requisitos de potência para bombeamento

Este capítulo aborda as três equações mais usadas na mecânica dos fluidos: as equações de conservação de massa, de Bernoulli e de energia. A *equação de conservação de massa* é uma expressão do princípio de conservação de massa. A equação de *Bernoulli* diz respeito à conservação das energias cinética, potencial e de escoamento em uma corrente de fluido, e à conversão entre estas formas de energia nas regiões de escoamento onde o efeito médio das forças viscosas for desprezível, e onde outras condições restritivas se aplicarem. A *equação da energia* é um enunciado do princípio da conservação de energia. Em mecânica dos fluidos é conveniente separar a *energia mecânica* da *energia térmica* e considerar a conversão da energia mecânica em energia térmica resultante dos efeitos do atrito como *perda de energia mecânica*. Assim, a equação de conservação da energia torna-se o *balanço da energia mecânica*.

Iniciamos este capítulo com uma visão geral de princípios de conservação e da relação de conservação de massa. Segue uma discussão sobre as diversas formas de energia mecânica e a eficiência de dispositivos de trabalho mecânico, como bombas e turbinas. Em seguida, deduzimos a equação de Bernoulli aplicando a Segunda Lei de Newton a um elemento de fluido ao longo de uma linha de corrente e ilustramos seu uso em uma variedade de aplicações. Continuamos com o desenvolvimento da equação de conservação de energia em uma forma adequada ao uso na mecânica dos fluidos e apresentamos o conceito da *perda de carga*. Finalmente, aplicamos a equação da energia a diversos sistemas da engenharia.

5–1 ▪ INTRODUÇÃO

Você já conhece inúmeras **leis de conservação** como as leis de conservação de massa, de conservação de energia e de conservação de momento. Historicamente as leis de conservação são aplicadas primeiro a uma quantidade fixa de matéria chamada *sistema fechado* ou apenas *sistema* e, em seguida, são estendidas a regiões no espaço chamadas *volumes de controle*. As relações de conservação também são chamadas de *equações de balanço,* uma vez que qualquer quantidade conservada deve ser balanceada durante um processo. Agora descreveremos rapidamente as relações de conservação de massa, momento e energia (Figura 5–1).

FIGURA 5–1
Muitos dispositivos de escoamento de fluidos, como esta turbina hidráulica com roda de Pelton são analisados pela aplicação dos princípios de conservação de massa, momento e energia.
Cortesia da Hydro Tasmania, www.hydro.com.au. Utilizado com permissão.

Conservação de Massa

A relação de conservação de massa de um sistema fechado que passa por uma variação é expressa como $m_{sist} = constante$ ou $dm_{sist}/dt = 0$, que é um enunciado óbvio de que a massa do sistema permanece constante durante um processo. Para um volume de controle (VC), o balanço de massa é expresso na forma de vazão como

Conservação de massa:
$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \frac{dm_{VC}}{dt} \qquad (5\text{–}1)$$

onde $\dot{m}_e$ e $\dot{m}_s$ são as vazões totais do escoamento de massa para dentro e para fora do volume de controle, respectivamente, e dm_{CV}/dt é a taxa de variação da massa dentro das fronteiros do volume de controle. Em mecânica dos fluidos, a relação de conservação de massa escrita para um volume de controle diferencial é chamada de *equação da continuidade*. A conservação de massa é discutida na Seção 5–2.

Conservação do Momento

O produto da massa e da velocidade de um corpo é chamado de *momento linear* ou apenas *momento* do corpo, e o momento de um corpo rígido de massa m que se move à velocidade $\vec{V}$ é $m\vec{V}$. A Segunda Lei de Newton afirma que a aceleração de um corpo é proporcional à força resultante que age sobre ele, e é inversamente proporcional à sua massa, e que a taxa de variação do momento de um corpo no tempo é igual à força resultante que age sobre o corpo. Portanto, o momento de um sistema permanece constante quando a força resultante que age sobre ele é zero e, então, o momento de tal sistema é conservado. Isso é conhecido como o *princípio de conservação do momento linear.* Em mecânica dos fluidos, a Segunda Lei de Newton geralmente é chamada de *equação do momento linear* e é discutida no Capítulo 6 juntamente com a *equação do momento angular.*

Conservação de Energia

A energia pode ser transferida de ou para um sistema fechado por calor ou trabalho, e o princípio de conservação da energia exige que a transferência de energia líquida de ou para um sistema durante um processo seja igual à variação da energia contida no sistema. Volumes de controle também envolvem transferência de energia por meio do escoamento de massa, e o *princípio de conservação da energia,* também chamado de *balanço de energia*, é expresso como

Conservação da energia:
$$\dot{E}_e - \dot{E}_s = \frac{dE_{VC}}{dt} \qquad (5\text{–}2)$$

onde $\dot{E}_e$ e $\dot{E}_s$ são as taxas totais de transferência de energia para dentro e para fora do volume de controle, respectivamente, e dE_{VC}/dt é a taxa de variação de energia dentro das fronteiras do volume de controle. Em mecânica dos fluidos, geralmente limitamos nossa consideração apenas às formas mecânicas de energia. A conservação da energia é discutida na Seção 5–6.

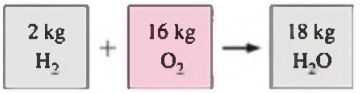


FIGURA 5–2
A massa é conservada mesmo durante as reações químicas.

5–2 • CONSERVAÇÃO DE MASSA

O princípio da conservação de massa é um dos princípios mais fundamentais da natureza. Todos conhecemos este princípio, e não é difícil entendê-lo. Como diz o ditado: você não pode ter o bolo e comê-lo também! Uma pessoa não precisa ser cientista para descobrir a quantidade de molho de vinagre com azeite que será obtida pela mistura de 100 g de azeite e 25 g de vinagre. Até mesmo as equações químicas são balanceadas com base no princípio da conservação de massa. Quando 16 kg de oxigênio reagem com 2 kg de hidrogênio, 18 kg de água são formados (Figura 5–2). Em um processo de eletrólise, a água se dissociará em 2 kg de hidrogênio e 16 kg de oxigênio.

A massa, assim como a energia, é uma propriedade conservada, e não pode ser criada nem destruída durante um processo. Entretanto, a massa m e a energia E podem ser convertidas entre si de acordo com a conhecida fórmula proposta por Albert Einstein (1879–1955):

$$E = mc^2 \tag{5–3}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, que é $c = 2{,}9979 \times 10^8$ m/s. Essa equação sugere que a massa de um sistema varia quando sua energia também varia. Entretanto, para todas as interações de energia encontradas na prática, com exceção das reações nucleares, a variação da massa é extremamente pequena e não pode ser detectada nem pelos mais sensíveis dispositivos. Por exemplo, quando 1 kg de água é formado por meio de oxigênio e hidrogênio, a quantidade de energia liberada é 15.879 kJ, que corresponde a uma massa de $1{,}76 \times 10^{-10}$ kg. Uma massa dessa ordem está além da exatidão exigida em praticamente todos os cálculos de engenharia e, portanto, pode ser desprezada.

Para *sistemas fechados*, o princípio da conservação de massa é usado implicitamente com a exigência de que a massa do sistema permaneça constante durante um processo. Para os *volumes de controle*, porém, a massa pode cruzar as fronteiras e, assim, devemos controlar a quantidade de massa que entra e sai do volume de controle.

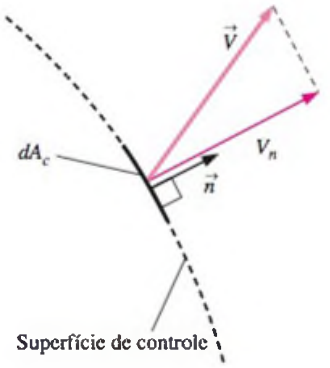


FIGURA 5–3
A velocidade normal V_n para uma superfície é o componente da velocidade perpendicular à superfície.

Vazões em Massa e Volume

A quantidade de massa que escoa através de uma seção transversal por unidade de tempo é chamada de **vazão em massa** e é indicada por $\dot{m}$. O ponto sobre um símbolo é usado para indicar a *taxa de variação no tempo*.

Um fluido escoa para dentro ou para fora de um volume de controle, geralmente através de tubos ou dutos. A vazão em massa diferencial que escoa através de um pequeno elemento de área dA_c de uma seção transversal do tubo é proporcional à própria dA_c, à densidade do fluido ρ e ao componente da velocidade do escoamento normal a dA_c, indicado por V_n, e é expressa como (Figura 5–3)

$$\delta\dot{m} = \rho V_n \, dA_c \tag{5–4}$$

Observe que δ e d são usados para indicar as quantidades diferenciais, mas que δ em geral é usado para quantidades (como calor, trabalho e transferência de massa) que são *funções de caminho* e têm *diferenciais não exatas*, enquanto d é usado para quantidades (como as propriedades) que são *funções puntuais* e têm *diferenciais exatas*. Para o escoamento através de um anel com raio interno r_1 e raio externo r_2, por exemplo, $\int_1^2 dA_c = A_{c2} - A_{c1} = \pi(r_2^2 - r_1^2)$, mas $\int_1^2 \delta\dot{m} = \dot{m}_{\text{total}}$, mas (a vazão de massa total através do anel) diferente de $\dot{m}_2 - \dot{m}_1$. Para valores especificados r_1 e r_2, o valor da integral de dA_c é fixo (daí, os nomes função puntual e diferencial exata), mas este não é o caso para a integral de $\delta\dot{m}$ (daí os nomes função de ponto e diferencial não exata).

A vazão em massa através de toda a seção transversal de um tubo ou duto é obtida por integração:

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta\dot{m} = \int_{A_c} \rho V_n \, dA_c \qquad \text{(kg/s)} \tag{5–5}$$

Embora a Equação 5–5 seja sempre válida (na verdade ela é *exata*), nem sempre é útil para as análises de engenharia por causa da integral. Em vez disso, gostaríamos de expressar a taxa do escoamento de massa em termos de valores médios sobre uma seção transversal do tubo. Para um escoamento geral compressível, ρ e V_n variam através do tubo. Em muitas aplicações práticas, porém, a densidade (ou massa específica) é essencialmente uniforme ao longo da seção transversal do tubo, e podemos colocar ρ fora da integral da Equação 5–5. A velocidade, porém, *nunca* é uniforme ao longo de uma seção transversal de um tubo, devido à condição de não-escorregamento nas paredes. Em vez disso, a velocidade varia de zero nas paredes até algum valor máximo no eixo central do tubo ou perto dele. Definimos a **velocidade média** $V_{méd}$ como o valor médio de V_n sobre toda a seção transversal do tubo (Figura 5–4),

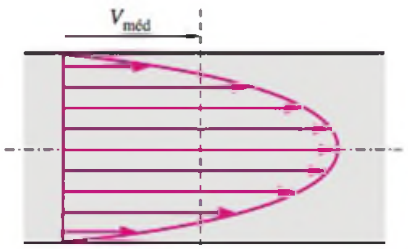


FIGURA 5–4
A velocidade média $V_{méd}$ é definida como a velocidade escalar média através de uma seção transversal.

Velocidade média:
$$V_{méd} = \frac{1}{A_c}\int_{A_c} V_n\, dA_c \qquad (5\text{–}6)$$

onde A_C é a área da seção transversal normal à direção do escoamento. Observe que se a velocidade fosse $V_{méd}$ ao longo de toda a seção transversal, a vazão em massa seria idêntica àquela obtida pela integração do real perfil de velocidades. Então, para o escoamento incompressível ou mesmo para o escoamento compressível onde ρ seja uniforme ao longo de A_c, a Equação 5–5 torna-se

$$\dot{m} = \rho V_{méd} A_c \qquad \text{(kg/s)} \qquad (5\text{–}7)$$

Para o escoamento compressível, podemos pensar em ρ como a densidade média sobre a seção transversal e, portanto, a Equação 5–7 ainda pode ser usada como uma aproximação razoável. Por questões de simplicidade, tiramos o subscrito da velocidade média. A menos que mencionado contrário, V indica a velocidade média na direção do escoamento. Além disso, A_C indica a área da seção normal à direção do escoamento.

O volume do fluido que escoa através de uma seção transversal por unidade de tempo é chamado de **vazão em volume** $\dot{V}$ (Figura 5–5) e é dado por

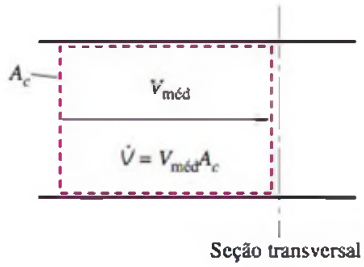


FIGURA 5–5
A vazão em volume é o volume de fluido escoando através de uma seção transversal por unidade de tempo.

$$\dot{V} = \int_{A_c} V_n\, dA_c = V_{méd} A_c = VA_c \qquad (\text{m}^3/\text{s}) \qquad (5\text{–}8)$$

Uma versão anterior da Equação 5–8 foi publicada em 1628 pelo monge italiano Benedetto Castelli (1577–1644). Observe que muitos livros sobre mecânica dos fluidos utiliza Q em vez de $\dot{V}$ para a vazão em volume. Utilizamos $\dot{V}$ para evitar confusão com a transferência de calor.

As vazões em massa e em volume estão relacionadas por

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = \frac{\dot{V}}{v} \qquad (5\text{–}9)$$

onde v é o volume específico. Essa relação é análoga a $m = \rho V = V/v$, que é a relação entre a massa e o volume de um fluido em um contêiner.

Princípio de Conservação de Massa

O **princípio de conservação de massa** para um volume de controle pode ser expresso como: *a transferência total de massa para dentro ou para fora de um volume de controle durante um intervalo de tempo Δt é igual à variação total (aumento ou diminuição) da massa total dentro do volume de controle durante Δt.* Ou seja,

$$\begin{pmatrix}\text{Massa total entrando}\\ \text{no VC durante } \Delta t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Massa total saindo}\\ \text{no VC durante } \Delta t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Variação total da massa}\\ \text{dentro do VC durante } \Delta t\end{pmatrix}$$

ou

$$m_e - m_s = \Delta m_{VC} \qquad \text{(kg)} \qquad (5\text{–}10)$$

FIGURA 5–6
Princípio da conservação da massa em uma banheira comum.

onde $\Delta m_{VC} = m_{final} - m_{inicial}$ é variação da massa dentro do volume de controle durante o processo (Figura 5–6). Ela também pode ser expressa na *forma de taxa* como

$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = dm_{VC}/dt \quad \text{(kg/s)} \tag{5–11}$$

onde $\dot{m}_e$ e $\dot{m}_s$ são as vazões totais de massa para dentro e para fora do volume de controle, e dm_{VC}/dt é a taxa de variação de massa no tempo dentro das fronteiras do volume de controle. As Equações 5–10 e 5–11 são chamadas de **balanço de massa** e se aplicam a qualquer volume de controle passando por um processo qualquer.

Considere um volume de controle com forma arbitrária, como mostra a Figura 5–7. A massa de um volume diferencial dV dentro do volume de controle é $dm = \rho\, dV$. A massa total dentro do volume de controle em determinado momento t é determinada por integração como

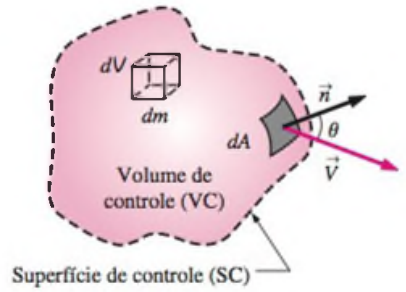


FIGURA 5–7
O volume de controle diferencial dV e a superfície de controle diferencial dA usada na dedução da relação de conservação de massa.

Massa total dentro do VC:
$$m_{VC} = \int_{VC} \rho\, dV \tag{5–12}$$

Então, a taxa de variação no tempo da quantidade de massa dentro do volume de controle pode ser expressa como

Taxa de variação de massa dentro do VC:
$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, dV \tag{5–13}$$

Para o caso especial de nenhuma massa cruzar a superfície de controle (ou seja, o volume de controle se parece com um sistema fechado), o princípio de conservação de massa pode ser expresso como $dm_{VC}/dt = 0$. Essa relação é válida independentemente do fato do volume de controle ser fixo, móvel ou deformável.

Agora, considere uma vazão de massa para dentro ou fora do volume de controle através de uma área diferencial dA na superfície de controle de um volume de controle fixo. Seja $\vec{n}$ o vetor unitário na direção da normal exterior dA a dA e seja $\vec{V}$ a velocidade do escoamento em dA em relação a um sistema de coordenadas fixo, como mostra a Figura 5–7. Em geral, a velocidade pode cruzar dA com um ângulo θ em relação à normal da dA, e a vazão de massa é proporcional ao componente normal da velocidade $\vec{V}_n = \vec{V}\cos\theta$, que pode variar entre o valor máximo de saída $\vec{V}$ para $\theta = 0$ (o escoamento é normal a dA) até um mínimo de zero para $\theta = 90°$ (o escoamento é tangente a dA) e até um valor máximo de *entrada* $\vec{V}$ para $\theta = 180°$ (o escoamento é normal a dA, mas na direção oposta). Utilizando o conceito do produto escalar entre dois vetores, a magnitude do componente normal da velocidade pode ser expressa como

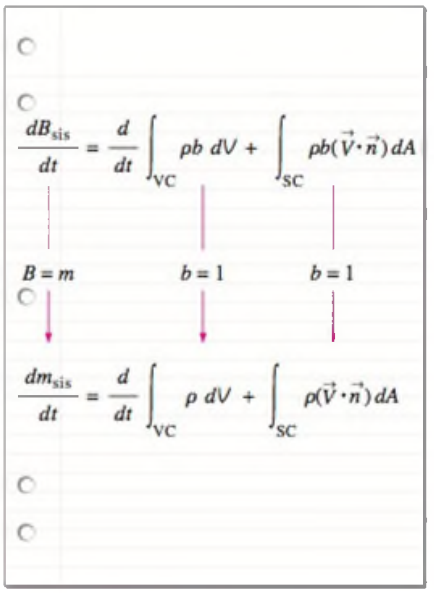


FIGURA 5–8
A equação da conservação de massa é obtida pela substituição de B no teorema de transporte de Reynolds pela massa m e de b por 1 (m por unidade de massa = m/m = 1).

Componente normal da velocidade:
$$V_n = V\cos\theta = \vec{V}\cdot\vec{n} \tag{5–14}$$

A vazão de massa através de dA é proporcional à densidade do fluido ρ, à velocidade normal V_n e à área de escoamento dA, e pode ser expressa como

Vazão de massa diferencial:
$$\delta\dot{m} = \rho V_n\, dA = \rho(V\cos\theta)\, dA = \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA \tag{5–15}$$

A vazão líquida para dentro ou para fora do volume de controle através de toda a superfície de controle é obtida pela integração de $\delta\dot{m}$ sobre toda a superfície de controle,

Vazão total de massa:
$$\dot{m}_{tot} = \int_{SC} \delta\dot{m} = \int_{SC} \rho V_n\, dA = \int_{SC} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA \tag{5–16}$$

Observe que $\vec{V}\cdot\vec{n} = \cos\theta$ é positivo para $\theta < 90°$ (vazão para fora) e negativo para $\theta < 90°$ (vazão para dentro). Assim, a direção do escoamento é automaticamente levada em conta e a integral de superfície da Equação 5–16 fornece diretamente a vazão total de massa. Um valor positivo para $\dot{m}_{tot}$ indica vazão total para fora, e um valor negativo indica vazão total de massa para dentro.

Reorganizando a Equação 5–11 como dm_{VC}/dt 1 $\dot{m}_s$ 2 $\dot{m}_e$ 5 0, a relação de conservação de massa de um volume de controle fixo pode ser expressa como

Conservação geral de massa:
$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, dV + \int_{SC} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA = 0 \tag{5–17}$$

Ela afirma que *a taxa de variação no tempo da massa dentro do volume de controle mais a vazão total de massa através da superfície de controle é igual a zero.*

A relação geral de conservação de massa de um volume de controle também pode ser deduzida usando o teorema de transporte de Reynolds (TTR), tomando a massa m como a propriendade B (Capítulo 4). Assim, temos $b = 1$, uma vez que dividindo a massa pela massa para obter a propriedade por unidade de massa temos a unidade. Além disso, a massa de um sistema é constante e, portanto, sua derivativa no tempo é zero. Ou seja, $dm_{sis}/dt = 0$. Assim, a equação de transporte de Reynolds se reduz imediatamente à Equação 5–17, como mostra a Figura 5–8 e, portanto, ela ilustra que o teorema de transporte de Reynolds é de fato uma ferramenta muito poderosa. No Capítulo 6 aplicamos o TTR para obter as equações de momento linear e angular para volumes de controle.

Dividindo a integral de superfície na Equação 5–17 em duas partes — uma para o escoamento de saída (positivo) e outra para o escoamento de entrada (negativo) — temos que a relação geral da conservação de massa também pode ser expressa como

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, dV + \sum_{s} \int_{A} \rho V_n\, dA - \sum_{e} \int_{A} \rho V_n\, dA = 0 \qquad \textbf{(5–18)}$$

onde A representa a área de uma entrada ou saída, e os simbolos de soma são usados para enfatizar que *todas* as entradas e saídas devem ser levadas em conta. Usando a definição da vazão de massa, a Equação 5–18 também pode ser expressa como

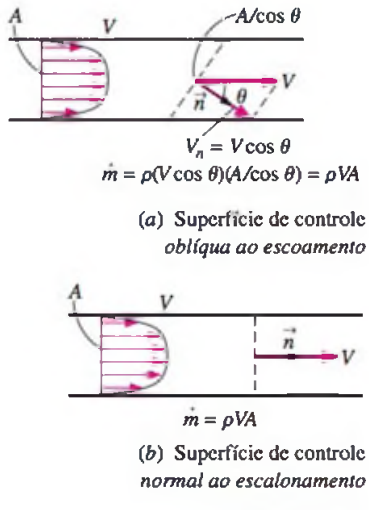
$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, dV = \sum_{e} \dot{m} - \sum_{s} \dot{m} \quad \text{ou} \quad \frac{dm_{VC}}{dt} = \sum_{e} \dot{m} - \sum_{s} \dot{m} \qquad \textbf{(5–19)}$$

Existe uma flexibilidade considerável na escolha de um volume de controle ao resolver um problema. Várias opções de volume de controle podem estar corretas, mas o trabalho com algumas delas é mais conveniente. Um volume de controle não deve introduzir complicações desnecessárias. A opção adequada de um volume de controle pode facilitar bastante a solução de um problema aparentemente complicado. Uma regra simples ao selecionar um volume de controle é tornar sempre que possível a superfície de controle *normal ao escoamento* em todos os locais nos quais ela cruza o escoamento do fluido. Dessa forma, o produto escalar $\vec{V} \cdot \vec{n}$ torna-se simplesmente a intensitude da velocidade e a integral $\int_A \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA$ dA torna-se simplesmente pVA (Figura 5–9).

Volumes de Controle Móveis ou Deformáveis

As Equações 5–17 e 5–18 também valem para os volumes de controle móveis ou deformáveis, desde que a *velocidade absoluta* $\vec{V}$ seja substituída pela *velocidade relativa* $\vec{V}_r$, que é a velocidade do fluido em relação à superfície de controle (Capítulo 4). No caso de um volume de controle não deformável, a velocidade relativa é a velocidade do fluido observada por uma pessoa que se move com o volume de controle e é expressa por $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{VC}$, onde $\vec{V}$ é a velocidade do fluido e $\vec{V}_{VC}$ é a velocidade do volume de controle, ambas relativas a um ponto externo fixo. Observe que essa é uma subtração de *vetores*.

Alguns problemas práticos (como a injeção de medicação através da agulha de uma seringa pelo movimento forçado do êmbolo) envolvem volumes de controle deformáveis. As relações de conservação de massa desenvolvidas ainda podem ser usadas para esses volumes de controle deformáveis, desde que a velocidade do fluido que cruza uma parte deformável da superfície de controle seja expressa em relação à superfície de controle (ou seja, a velocidade do fluido deve ser expressa em relação a um sistema de referência ligada à parte deformável da superfície de controle). Nesse caso, a velocidade relativa em qualquer ponto da superfície de controle é expressa como $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{SC}$, onde $\vec{V}_{SC}$ é a velocidade local da superfície de controle naquele ponto com relação a um ponto fixo fora do volume de controle.



(*a*) Superfície de controle *oblíqua ao escoamento*

(*b*) Superfície de controle *normal ao escalonamento*

FIGURA 5–9
Uma superfície de controle sempre deve ser selecionada *normal ao escoamento* em todos os locais onde ela cruzar o escoamento do fluido para evitar complicações, embora o resultado seja o mesmo.

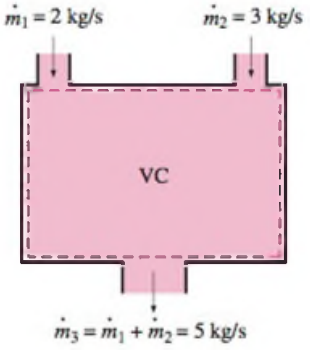


FIGURA 5–10
O princípio da conservação de massa para um sistema de escoamento em regime permanente com duas entradas e uma saída.

Balanço de Massa para Processos com Escoamento em Regime Permanente

Durante um processo de escoamento em regime permanente, a quantidade total de massa contida dentro de um volume de controle não se altera com o tempo (m_{VC} = constante). Assim, o princípio da conservação da massa exige que a quantidade total de massa que entra em um volume de controle seja igual à quantidade total de massa que sai dele. Para uma mangueira de jardim operando em regime permanente, por exemplo, a quantidade de água que entra no bocal por unidade de tempo é igual à quantidade de água que sai dele por unidade de tempo.

Ao lidarmos com processos de escoamento em regime permanente, nós não estamos interessados na quantidade de massa que escoa para dentro ou para fora de um dispositivo ao longo do tempo. Em vez disso, estamos interessados na quantidade de massa que escoa por unidade de tempo, ou seja, na *vazão em massa* $\dot{m}$. *O princípio da conservação de massa* para um sistema geral de escoamento em regime permanente com várias entradas e saídas pode ser expresso na forma de taxa como (Figura 5–10)

$$\textit{Escoamento em regime permanente:}\quad \sum_e \dot{m} = \sum_s \dot{m} \quad \text{(kg/s)} \qquad \textbf{(5–20)}$$

Ele afirma que *a vazão total de massa que entra em um volume de controle é igual à vazão total de massa que sai dele.*

Muitos dispositivos de engenharia como bocais, difusores, turbinas, compressores e bombas envolvem uma única corrente (apenas uma entrada e uma saída). Nesses casos, indicamos o estado de entrada com o subscrito 1 e o estado de saída com o subscrito 2 e tiramos os sinais de soma. Assim, a Equação 5–20 fica reduzida, para *sistemas de escoamento em regime permanente e corrente simples*, a

$$\textit{Escoamento em regime permanente (corrente simples):}\quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \qquad \textbf{(5–21)}$$

Caso Especial: Escoamento Incompressível

As relações de conservação de massa podem ser simplificadas ainda mais quando o fluido é incompressível, o que geralmente acontece no caso dos líquidos. Cancelando a densidade em ambos os lados da relação geral para escoamento em regime permanente temos

$$\textit{Escoamento em regime permanente, incompressível:}\quad \sum_e \dot{V} = \sum_s \dot{V} \quad (\text{m}^3/\text{s}) \qquad \textbf{(5–22)}$$

Para os sistemas com escoamento em regime permanente de corrente simples ele se torna

$$\textit{Escoamento em regime permanente, incompressível (corrente simples):}\quad \dot{V}_1 = \dot{V}_2 \rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \qquad \textbf{(5–23)}$$

É preciso lembrar de que não existe um princípio de "conservação de volume". Assim, as vazões em volume de entrada e saída de um dispositivo com escoamento em regime permanente podem ser diferentes. A vazão em volume na entrada de um compressor de ar é muito menor do que a vazão de saída, embora a vazão em massa do ar através do compressor seja constante (Figura 5–11). Isso acontece devido à densidade do ar ser mais alta na saída do compressor. Para escoamento em regime permanente de líquidos, porém, as vazões em volume, bem como as vazões em massa, permanecem constantes, uma vez que os líquidos são substâncias essencialmente incompressíveis (densidade constante). A água que escoa através do bocal de uma mangueira de jardim é um exemplo deste último caso.

O princípio da conservação de massa tem por base observações experimentais e exige que toda a massa seja levada em conta durante um processo. Se você puder fazer o saldo do seu talão de cheques (controlando depósitos e retiradas, ou simplesmente observando o princípio da "conservação do dinheiro"), não terá dificuldades em aplicar o princípio da conservação de massa aos sistemas de engenharia.

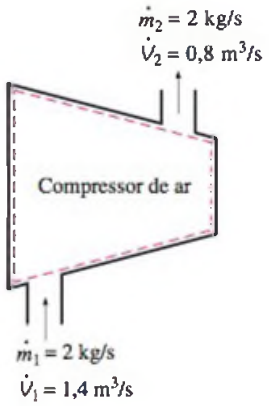


FIGURA 5–11
Durante um processo com escoamento em regime permanente, as vazões de volume não se conservam necessariamente, embora as vazões em massa se conservem.

EXEMPLO 5–1 Escoamento de Água Através do Bocal de uma Mangueira de Jardim

Uma mangueira de jardim conectada a um bocal é usada para encher um balde de 10 galões. O diâmetro interno da mangueira é de 2 cm, e ele se reduz a 0,8 cm na saída do bocal (Figura 5–12). Se são necessários 50 s para encher o balde com água, determine (*a*) as vazões em volume e massa de água através da mangueira e (*b*) a velocidade média da água na saída do bocal.

FIGURA 5–12
Esquemas do Exemplo 5–1.

SOLUÇÃO Uma mangueira de jardim é usada para encher um balde com água. As vazões em volume e massa de água e a velocidade na saída devem ser determinadas.

Hipóteses **1** A água é uma substância incompressível. **2** O escoamento através da mangueira é em regime permanente. **3** Não há desperdício de água.

Propriedades Tomamos a densidade da água como 1000 kg/m^3 = 1 kg/L.

Análise (a) Observando que 10 galões de água são descarregados em 50 s, as vazões em volume e em massa da água são

$$\dot{V} = \frac{V}{\Delta t} = \frac{10\ \text{gal}}{50\ \text{s}}\left(\frac{3{,}7854\ \text{L}}{1\ \text{gal}}\right) = \mathbf{0{,}757\ L/s}$$

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (1\ \text{kg/L})(0{,}757\ \text{L/s}) = \mathbf{0{,}757\ kg/s}$$

(*b*) A área da seção transversal na saída do bocal é

$$A_e = \pi r_e^2 = \pi(0{,}4\ \text{cm})^2 = 0{,}5027\ \text{cm}^2 = 0{,}5027 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

A vazão em volume através da mangueira e do bocal é constante. Assim, a velocidade média da água na saída do bocal torna-se

$$V_e = \frac{\dot{V}}{A_e} = \frac{0{,}757\ \text{L/s}}{0{,}5027 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}\left(\frac{1\ \text{m}^3}{1000\ \text{L}}\right) = \mathbf{15{,}1\ m/s}$$

Discussão É possível mostrar que a velocidade média na mangueira é de 2,4 m/s. Portanto, o bocal aumenta a velocidade da água em mais de seis vezes.

EXEMPLO 5–2 Descarga da Água de um Tanque

Um tanque cilíndrico de água com 4 pés de altura e 3 pés de diâmetro cuja parte superior está aberta para a atmosfera inicialmente está cheio com água. Agora a tampa de descarga próxima à parte inferior do tanque é retirada, e sai um jato de água cujo diâmetro é de 0,5 pol (Figura 5–13). A velocidade média do jato é dada por $V = \sqrt{2gh}$, onde h é a altura da água no tanque medida a partir do centro do orifício (uma variável) e g é a aceleração da gravidade. Determine o tempo necessário para que o nível da água no tanque caia para 2 pés a partir da sua parte inferior.

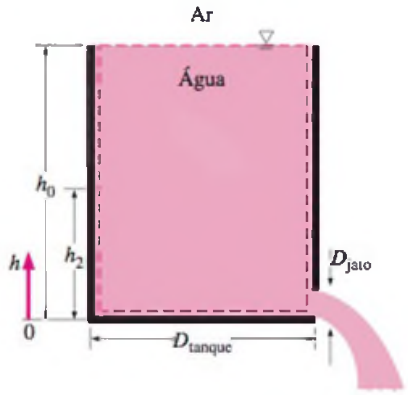


FIGURA 5–13
Esquema do Exemplo 5–2.

SOLUÇÃO A tampa próxima à parte inferior de um tanque de água é retirada. O tempo necessário para que saia metade da água do tanque deve ser determinado.

Hipóteses **1** A água é uma substância incompressível. **2** A distância entre a parte inferior do tanque e o centro do orifício é desprezível, comparada à altura total da água. **3** A aceleração da gravidade é 32,2 pés/s^2.

Análise Tomamos o volume ocupado pela água como o volume de controle. O tamanho do volume de controle diminui neste caso à medida que o nível da água cai e, portanto, este é um volume de controle variável. (Também poderíamos tratá-lo como um volume de controle fixo que consiste no volume interior do tanque, desprezando o ar que substitui o espaço criado pela água que saiu.) Obviamente, esse é um problema de escoamento não permanente, uma vez que as propriedades (como a quantidade de massa) do volume de controle mudam com o tempo.

A relação de conservação de massa para um volume de controle que está passando por qualquer processo é dada na forma de taxa como

$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \frac{dm_{VC}}{dt} \quad (1)$$

Durante esse processo nenhuma massa entra no volume de controle ($\dot{m}_e = 0$), e a vazão de massa da água ejetada pode ser expressa como

$$\dot{m}_s = (\rho V A)_s = \rho\sqrt{2gh}A_{jato} \quad (2)$$

onde $A_{jato} = \pi D_{jato}^2/4$ é a área de seção transversal do jato, que é constante. Observando que a densidade da água é constante, a massa de água no tanque em determinado instante é

$$m_{VC} = \rho V = \rho A_{tanque} h \quad (3)$$

onde $A_{tanque} = \pi D_{tanque}^2/4$ é a área da base do tanque cilíndrico. Substituindo as Equações 2 e 3 na relação de balanço de massa (Equação 1), temos

$$-\rho\sqrt{2gh}A_{jato} = \frac{d(\rho A_{tanque} h)}{dt} \rightarrow -\rho\sqrt{2gh}(\pi D_{jato}^2/4) = \frac{\rho(\pi D_{tanque}^2/4)\,dh}{dt}$$

Cancelando as densidades e outros termos comuns e separando as variáveis, temos

$$dt = -\frac{D_{tanque}^2}{D_{jato}^2}\frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

Integrando $t = 0$ onde $h = h_0$ a $t = t$ onde $h = h_2$ temos,

$$\int_0^t dt = -\frac{D_{tanque}^2}{D_{jato}^2\sqrt{2g}}\int_{h_0}^{h_2}\frac{dh}{\sqrt{h}} \rightarrow t = \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{g/2}}\left(\frac{D_{tanque}}{D_{jato}}\right)^2$$

Substituindo os valores apropriados, o tempo de descarga é determinado por

$$t = \frac{\sqrt{4\text{ pés}} - \sqrt{2\text{ pés}}}{\sqrt{32{,}2/2\text{ pés/s}^2}}\left(\frac{3 \times 12\text{ pol}}{0{,}5\text{ pol}}\right)^2 = 757\text{ s} = \mathbf{12{,}6\text{ min}}$$

Assim, metade do tanque será esvaziado 12,6 min depois de o orifício de descarga ser destampado.

Discussão Usando a mesma relação com $h_2 = 0$, temos $t = 43{,}1$ min para a descarga de toda a quantidade de água do tanque. Assim, esvaziar a metade inferior do tanque leva muito mais tempo do que esvaziar a metade superior. Isso se deve à diminuição da velocidade média de descarga da água com o decréscimo de h.

5–3 • ENERGIA MECÂNICA E EFICIÊNCIA

Muitos sistemas fluidos foram projetados para transportar um fluido de um local para outro a uma vazão, velocidade e diferença de elevação especificadas, e o sistema pode gerar trabalho mecânico em uma turbina, ou pode consumir trabalho mecânico em uma bomba durante esse processo. Esses sistemas não envolvem a conversão de energia nuclear, química ou térmica em energia mecânica. Da mesma forma, eles não envolvem nenhuma transferência de calor em nenhuma quantidade significativa e operam essencialmente a temperatura constante. Tais sistemas podem ser convenientemente analisados considerando apenas as *formas mecânicas de energia* e os efeitos do atrito que causam a perda de energia mecânica (ou seja, a sua conversão em energia térmica que em geral não pode ser usada em nenhuma finalidade útil).

A **energia mecânica** pode ser definida como a *forma de energia que pode ser convertida direta e completamente em trabalho mecânico por um dispositivo mecânico ideal como, por exemplo, uma turbina ideal.* As energias cinética e potencial

são as formas familiares de energia mecânica. Entretanto, a energia térmica não é energia mecânica uma vez que ela não pode ser convertida em trabalho direta e completamente (a Segunda Lei da Termodinâmica).

Uma bomba transfere a energia mecânica para um fluido elevando sua pressão, e uma turbina extrai a energia mecânica de um fluido fazendo sua pressão cair. Portanto, a pressão de um fluido em escoamento também está associada à sua energia mecânica. Na verdade, a unidade de pressão Pa é equivalente a Pa = N/m^2 = $N \cdot m/m^3$ = J/m^3, que é a energia por unidade de volume, e o produto Pv ou seu equivalente P/π tem como unidade J/kg, que é a energia por unidade de massa. Observe que a própria pressão não é uma forma de energia. Mas uma força de pressão agindo sobre um fluido em uma distância produz trabalho, chamado de *trabalho do escoamento*, na quantidade de P/ρ por unidade de massa. O trabalho do escoamento é expresso em termos das propriedades do fluido, e é conveniente visualizá-lo como parte da energia de um fluido em escoamento e chamá-lo de *energia do escoamento*. Portanto, a energia mecânica de um fluido em escoamento pode ser expressa, por unidade de massa, como (Figura 5–14).

$$e_{mec} = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

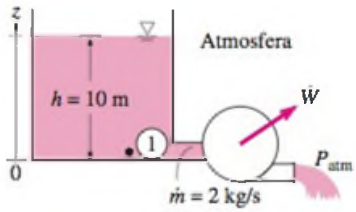
onde P/ρ é a *energia do escoamento*, $V^2/2$ é a *energia cinética* e gz é a *energia potencial* do fluido, tudo por unidade de massa. Assim, a variação da energia mecânica de um fluido durante escoamentos imcompressíveis torna-se

$$\Delta e_{mec} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \qquad \text{(kJ/kg)} \qquad \textbf{(5–24)}$$

Portanto, a energia mecânica de um fluido não varia durante um escoamento se sua pressão, densidade, velocidade e elevação permanecem constantes. Na ausência de perdas, a variação da energia mecânica representa o trabalho mecânico fornecido ao fluido (se $\Delta e_{mec} > 0$) ou extraído do fluido (se $\Delta e_{mec} < 0$).

Considere um contêiner de altura h preenchido com água, como mostra a Figura 5–15, com a superfície do fundo escolhida como nível de referência. A pressão manométrica e a energia potencial por unidade de massa são, respectivamente, $P_A = 0$ e $pe_A = gh$ no ponto A localizado na superfície livre, e $P_B = \rho gh$ e $pe_B = 0$ no ponto B no fundo do contêiner. Uma turbina hidráulica ideal produziria o mesmo trabalho por unidade de massa $w_{turbina} = gh$ se recebesse água (ou qualquer outro fluido com densidade constante) da parte superior ou inferior do contêiner. Observe que também estamos considerando o escoamento ideal (nenhuma perda irreversível) através do tubo que vai do tanque à turbina. Portanto, a energia mecânica total da água na parte inferior é equivalente àquela da parte superior.

A transferência da energia mecânica, em geral, é realizada por um eixo rotativo e, então, o trabalho mecânico quase sempre é chamado de *trabalho de eixo*. Uma bomba ou um ventilador recebem o trabalho de eixo (em geral, de um motor elétrico) e o transferem para o fluido como energia mecânica (menos perdas por atrito). Uma turbina, por outro lado, converte a energia mecânica de um fluido em trabalho de eixo. Na ausência de irreversibilidades como o atrito, a energia mecânica



$$\dot{W}_{máx} = \dot{m}\frac{P_1 - P_{atm}}{\rho} = \dot{m}\frac{\rho gh}{\rho} = \dot{m}gh$$

$$= (2\ kg/s)(9{,}81\ m/s^2)(10\ m)$$

$$= 196\ W$$

FIGURA 5–14
Na falta de variações na velocidade e elevação do escoamento, a potência produzida por uma turbina hidráulica ideal é proporcional à queda de pressão da água através da turbina.

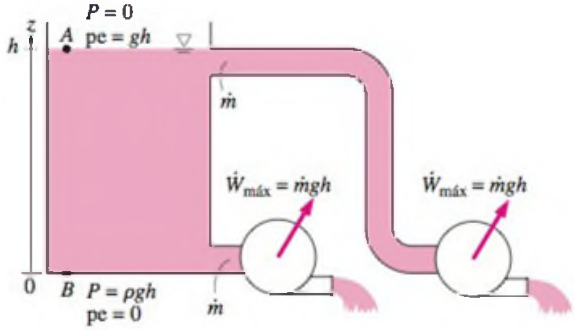
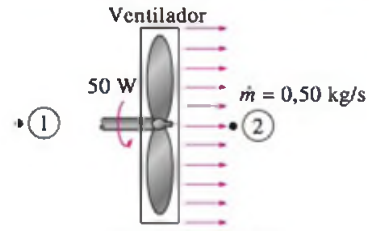


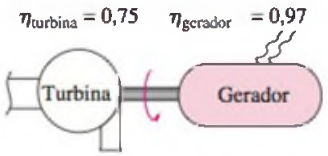
FIGURA 5–15
A energia mecânica da água na parte inferior de um contêiner é igual à energia mecânica em qualquer profundidade, incluindo a superfície livre do contêiner.



$V_1 = 0$, $V_2 = 12$ m/s
$z_1 = z_2$
$P_1 = P_2$

$$\eta_{\text{mec, ventilador}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{eixo, e}}} = \frac{\dot{m}V_2^2/2}{\dot{W}_{\text{eixo, e}}} = \frac{(0{,}50 \text{ kg/s})(12 \text{ m/s})^2/2}{50 \text{ W}} = 0.72$$

FIGURA 5–16
A eficiência mecânica de um ventilador é a relação entre a energia cinética do ar na saída do ventilador e a potência mecânica fornecida.



$$\eta_{\text{turbina-gerador}} = \eta_{\text{turbina}}\eta_{\text{gerador}} = 0{,}75 \times 0{,}97 = 0{,}73$$

FIGURA 5–17
A eficiência global de uma combinação gerador-turbina é o produto entre a eficiência da turbina e a eficiência do gerador, e representa a fração da potência mecânica do fluido convertida em energia elétrica.

pode ser totalmente convertida de uma forma mecânica para outra, e a **eficiência mecânica** de um dispositivo ou processo pode ser definida como (Figura 5–16)

$$\eta_{\text{mec}} = \frac{\text{Energia mecânica saindo}}{\text{Energia mecânica entrando}} = \frac{E_{\text{mec, s}}}{E_{\text{mec, e}}} = 1 - \frac{E_{\text{mec, perda}}}{E_{\text{mec, e}}} \quad (5\text{–}25)$$

Uma eficiência de conversão menor do que 100% indica que a conversão é menos do que perfeita e que algumas perdas ocorreram durante a conversão. Uma eficiência mecânica de 97% indica que 3% da energia mecânica fornecida é convertida em energia térmica como resultado do aquecimento por atrito, e isso se manifesta como uma ligeira elevação da temperatura do fluido.

Em sistemas fluidos, estamos usualmente interessados em aumentar a pressão, a velocidade e/ou a elevação de um fluido. Isso é feito *fornecendo energia mecânica* ao fluido por meio de uma bomba, um ventilador ou um compressor (nos referiremos a todos eles como bombas). Ou então, estamos interessados no processo inverso de *extração da energia mecânica* de um fluido por uma turbina e na produção de potência mecânica na forma de um eixo rotatório que pode mover um gerador ou qualquer outro dispositivo rotatório. O grau de perfeição do processo de conversão entre o trabalho mecânico fornecido ou extraído e a energia mecânica do fluido é expresso pela **eficiência da bomba** e pela **eficiência da turbina**, definida como

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\text{Aumento de energia mecânica do fluido}}{\text{Energia mecânica entrando}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{eixo, e}}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba, u}}}{\dot{W}_{\text{bomba}}} \quad (5\text{–}26)$$

onde $\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}} = \dot{E}_{\text{mec, s}} - \dot{E}_{\text{mec, e}}$ é a taxa de incremento da energia mecânica do fluido, que é equivalente à **potência de bombeamento útil** $\dot{W}_{\text{bomba, u}}$ fornecida ao fluido, e

$$\eta_{\text{turbina}} = \frac{\text{Energia mecânica saindo}}{\text{Diminuição de energia mecânica do fluido}} = \frac{\dot{W}_{\text{eixo, s}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{turbina}}}{\dot{W}_{\text{turbina, e}}} \quad (5\text{–}27)$$

onde $\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}| = \dot{E}_{\text{mec, e}} - \dot{E}_{\text{mec, s}}$ é a taxa de decrescimento na energia mecânica do fluido, que é equivalente à potência mecânica extraída do fluido pela turbina $\dot{W}_{\text{turbina, e}}$ e utilizamos o valor absoluto para evitar eficiências com valores negativos. Uma eficiência de 100% para uma bomba ou turbina indica a conversão perfeita entre o trabalho do eixo e a energia mecânica do fluido, e esse valor pode ser aproximado (mas nunca atingido) à medida que os efeitos do atrito são minimizados.

A eficiência mecânica não deve ser confundida com **eficiência do motor** ou **eficiência do gerador**, que são definidas como

Motor: $$\eta_{\text{motor}} = \frac{\text{Potência mecânica saindo}}{\text{Potência elétrica entrando}} = \frac{\dot{W}_{\text{eixo, s}}}{\dot{W}_{\text{elétr, e}}} \quad (5\text{–}28)$$

e

Gerador: $$\eta_{\text{gerador}} = \frac{\text{Potência elétrica entrando}}{\text{Potência mecânica entrando}} = \frac{\dot{W}_{\text{elétr, s}}}{\dot{W}_{\text{eixo, e}}} \quad (5\text{–}29)$$

Uma bomba vem usualmente junto com seu motor e uma turbina, com seu gerador. Portanto, nós usualmente temos interesse na **eficiência combinada** ou **global** das combinações motor-bomba e gerador-turbina (Figura 5–17), que são definidas como

$$\eta_{\text{bomba-motor}} = \eta_{\text{bomba}}\eta_{\text{motor}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba, u}}}{\dot{W}_{\text{elétr, e}}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{elétr, e}}} \quad (5\text{–}30)$$

e

$$\eta_{\text{turbina-gerador}} = \eta_{\text{turbina}}\eta_{\text{gerador}} = \frac{\dot{W}_{\text{elétr, s}}}{\dot{W}_{\text{turbina, e}}} = \frac{\dot{W}_{\text{elétr, s}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}|} \quad (5\text{–}31)$$

Todas as eficiências que acabamos de definir variam de 0 a 100%. O limite inferior de 0% corresponde à conversão de toda a energia elétrica ou mecânica

fornecida em energia térmica, e o dispositivo neste caso funciona como um aquecedor por resistência. O limite superior de 100% corresponde ao caso de conversão perfeita sem nenhum atrito ou outras irreversibilidades e, portanto, não ocorre nenhuma conversão de energia mecânica ou elétrica em energia térmica.

EXEMPLO 5–3 Desempenho de um Conjunto Turbina-Gerador Hidráulico

A água de um grande lago deve ser utilizada para gerar eletricidade, por meio da instalação de um conjunto turbina-gerador hidráulico em um local onde a profundidade da água é de 50 m (Figura 5–18). A água será fornecida à vazão de 5000 kg/s. Se a potência elétrica gerada é medida como 1862 kW e a eficiência do gerador é de 95%, determine (*a*) a eficiência global do conjunto turbina-gerador, (*b*) a eficiência mecânica da turbina e (*c*) a potência de eixo fornecida pela turbina ao gerador.

SOLUÇÃO Um conjunto turbina-gerador hidráulico deve gerar eletricidade por meio da água de um lago. A eficiência global, a eficiência da turbina e a potência do eixo devem ser determinadas.

Hipóteses **1** A profundidade do lago permanece constante. **2** A energia mecânica da água na saída da turbina é desprezível.

Propriedades A densidade da água pode ser tomada como $\rho = 1000$ kg/m^3.

Análises (*a*) Consideramos a parte inferior do lago como o nível de referência por conveniência. Assim, as energias cinética e potencial da água são nulas, e a variação em sua energia mecânica por unidade de massa torna-se

$$e_{\text{mec, e}} - e_{\text{mec, s}} = \frac{P}{\rho} - 0 = gh = (9{,}81\ \text{m/s}^2)(50\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{kJ/kg}}{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}\right) = 0{,}491\ \text{kJ/kg}$$

Então, a taxa na qual a energia mecânica é fornecida à turbina pelo fluido e a eficiência global tornam-se

$$|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}| = \dot{m}(e_{\text{mec, e}} - e_{\text{mec, s}}) = (5000\ \text{kg/s})(0{,}491\ \text{kJ/kg}) = 2455\ \text{kW}$$

$$\eta_{\text{global}} = \eta_{\text{turbina–gerador}} = \frac{\dot{W}_{\text{elétr, s}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}|} = \frac{1862\ \text{kW}}{2455\ \text{kW}} = \mathbf{0{,}76}$$

(*b*) Conhecendo a eficiência global e a do gerador, a eficiência mecânica da turbina é determinada por

$$\eta_{\text{turbina–gerador}} = \eta_{\text{turbina}}\,\eta_{\text{gerador}} \rightarrow \eta_{\text{turbina}} = \frac{\eta_{\text{turbina–gerador}}}{\eta_{\text{gerador}}} = \frac{0{,}76}{0{,}95} = \mathbf{0{,}80}$$

(*c*) A potência de eixo fornecida é determinada pela definição da eficiência mecânica,

$$\dot{W}_{\text{eixo, s}} = \eta_{\text{turbina}}|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}| = (0{,}80)(2455\ \text{kW}) = \mathbf{1964\ kW}$$

Discussão Observe que o lago fornece 2455 kW de energia mecânica à turbina, a qual converte 1964 kW dessa energia em trabalho de eixo que move o gerador, o qual gera 1,862 kW de energia elétrica. Existem perdas irreversíveis em cada componente.

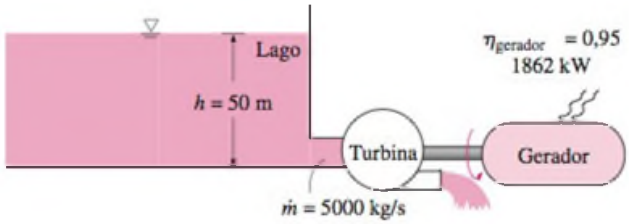


FIGURA 5–18
Esquema do Exemplo 5–3.

EXEMPLO 5–4 Conservação de Energia para uma Bola de Aço Oscilante

O movimento de uma bola de aço em uma hemisfera com raio h mostrado na Figura 5–19 deve ser analisado. Inicialmente, a bola é mantida na posição mais alta no ponto A e, em seguida, é liberada. Obtenha as relações para conservação de energia da bola para os casos de movimentos sem atrito e movimentos reais.

SOLUÇÃO Uma bola de aço é liberada em uma hemisfera. As relações de balanço da energia devem ser obtidas.

Hipóteses O movimento ocorre sem atrito e, portanto, o atrito entre a bola, a hemisfera e o ar é desprezível.

Análise Quando a bola é liberada, ela acelera sob influência da gravidade, atinge uma velocidade máxima (e elevação mínima) no ponto B na parte inferior da tigela e se move até o ponto C no lado oposto. No caso ideal de movimento sem atrito, a esfera oscilará entre os pontos A e C. O movimento real envolve a conversão das energias cinética e potencial da esfera entre si, juntamente com a superação da resistência ao movimento devido ao atrito (realizando trabalho de atrito). O balanço da energia global de qualquer sistema que passa por qualquer processo é

$$\underbrace{E_e - E_s}_{\substack{\text{Transferência líquida}\\ \text{de energia por calor,}\\ \text{trabalho e massa}}} = \underbrace{\Delta E_{\text{sistema}}}_{\substack{\text{Variação das energias}\\ \text{interna, cinética,}\\ \text{potencial etc.}}}$$

Portanto, o balanço da energia da esfera para um processo do ponto 1 até o ponto 2 torna-se

$$-w_{\text{atrito}} = (\text{ec}_2 + \text{ep}_2) - (\text{ec}_1 + \text{ep}_1)$$

ou

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{atrito}}$$

uma vez que não há transferência de energia por calor ou massa, e nenhuma variação da energia interna da esfera (o calor gerado pelo aquecimento por atrito é dissipado no ar ambiente). O termo do trabalho de atrito w_{atrito} é freqüentemente expresso para representar a perda (conversão) de energia mecânica em energia térmica.

Para o caso idealizado do movimento sem atrito, a última relação se reduz a

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad \text{ou} \quad \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{constante}$$

onde o valor da constante é $C = gh$. Ou seja, *quando os efeitos do atrito são desprezíveis, a soma das energias cinética e potencial da esfera permanece constante.*

Discussão Essa certamente é uma forma mais intuitiva e conveniente para a equação de conservação da energia deste e de outros processos semelhantes, como o movimento de oscilação do pêndulo de um relógio de parede. A relação obtida é análoga à equação de Bernoulli derivada na Seção 5–4.

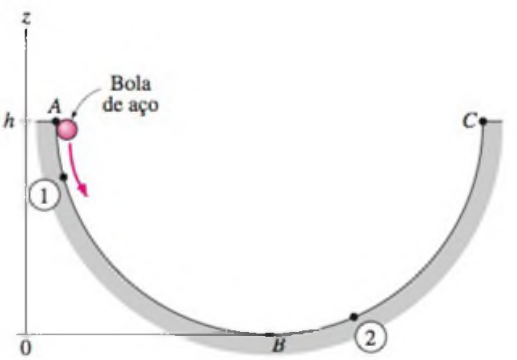
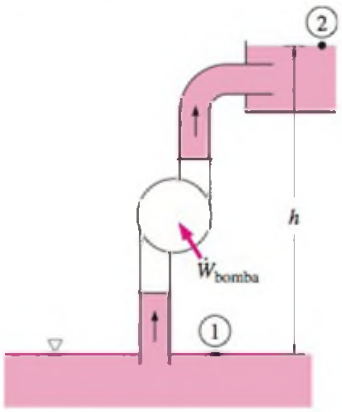


FIGURA 5–19
Esquema do Exemplo 5–4.

A maioria dos processos encontrados na prática envolve apenas determinadas formas de energia e em tais casos é mais conveniente trabalhar com as versões simplificadas de balanço de energia. Para sistemas que envolvem apenas *formas mecânicas de energia* e sua transferência como *trabalho de eixo*, o princípio da conservação de energia pode ser expresso de maneira conveniente como

$$E_{\text{mec, e}} - E_{\text{mec, s}} = \Delta E_{\text{mec, sistema}} + E_{\text{mec, perda}} \quad \textbf{(5–32)}$$

onde $E_{\text{mec, perda}}$ representa a conversão da energia mecânica em energia térmica devido a irreversibilidades como o atrito. Para um sistema em regime permanente, o balanço da energia mecânica torna-se $\dot{E}_{\text{mec, e}} = \dot{E}_{\text{mec, s}} + \dot{E}_{\text{mec, perda}}$ (Figura 5–20).



Escoamento em regime permanente

$V_1 = V_2$

$z_2 = z_1 + h$

$P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$

$\dot{E}_{\text{mec, e}} = \dot{E}_{\text{mec, s}} + \dot{E}_{\text{mec, perda}}$

$\dot{W}_{\text{bomba}} + \dot{m}gz_1 = \dot{m}gz_2 + \dot{E}_{\text{mec, perda}}$

$\dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{m}gh + \dot{E}_{\text{mec, perda}}$

FIGURA 5–20
A maioria dos problemas com escoamento de fluidos envolve apenas formas mecânicas de energia e tais problemas são solucionados de maneira conveniente com o uso do balanço da energia mecânica.

5–4 ▪ A EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A **equação de Bernoulli** é uma *relação aproximada entre pressão, velocidade e elevação* e é válida em *regiões de escoamento incompressível e em regime permanente, onde as forças de atrito resultantes são desprezíveis* (Figura 5–21). Apesar de sua simplicidade, essa provou ser uma ferramenta muito útil na mecânica de fluidos. Nesta seção, deduzimos a equação de Bernoulli aplicando o *princípio da conservação do momento linear* e mostramos sua utilidade e limitações.

A principal aproximação na dedução da equação de Bernoulli é que *os efeitos viscosos são desprezivelmente pequenos quando comparados aos efeitos da inércia, da gravidade e da pressão.* Como todos os fluidos têm viscosidade (não existe um "fluido não viscoso"), essa aproximação não pode ser válida para o todo de um campo de escoamento de interesse prático. Em outras palavras, não podemos aplicar a equação de Bernoulli em *toda a parte* em um escoamento, mesmo quando a viscosidade do fluido é pequena. Entretanto, a aproximação *é* razoável em determinadas *regiões* de muitos escoamentos de caráter prático. Chamamos tais regiões de *regiões do escoamento sem viscosidade,* e enfatizamos que elas *não* são regiões nas quais o próprio fluido não tem viscosidade nem atrito, mas sim que elas são regiões nas quais as forças viscosas ou resultantes de atrito são desprezivelmente pequenas quando comparadas a outras forças que atuam sobre as partículas do fluido.

É preciso tomar cuidado ao aplicar a equação de Bernoulli, uma vez que ela é uma aproximação que se aplica apenas às regiões não viscosas do escoamento. Em geral, os efeitos do atrito sempre são importantes em regiões muito próximas de paredes sólidas (*camadas-limite*) e diretamente a jusante de corpos (*esteiras*). Portanto, a aproximação de Bernoulli é geralmente útil nas regiões de escoamento fora das camadas-limite e esteiras, onde o movimento do fluido é governado pelos efeitos combinados das forças de pressão e gravidade.

O movimento de uma partícula e o caminho que ela segue são descritos pelo *vetor velocidade* como função do tempo, das coordenadas espaciais e da posição inicial da partícula. Quando o escoamento é *em regime permanente* (nenhuma alteração com o tempo em um local especificado), todas as partículas que passam através do mesmo ponto seguem o mesmo caminho (que é a *linha de corrente)* e os vetores velocidade permanecem tangentes ao caminho em todos os pontos.

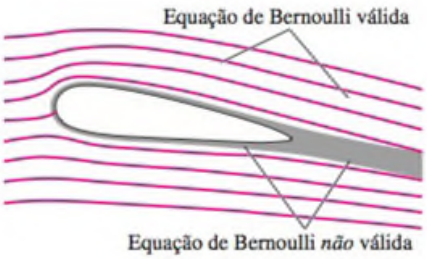


FIGURA 5–21
A *equação de Bernoulli* é uma equação *aproximada* que só é válida em *regiões de escoamento não viscoso*, onde as forças viscosas resultantes são desprezivelmente pequenas se comparadas às forças de inércia, gravitacional ou de pressão. Tais regiões ocorrem fora das *camadas limites* e *esteiras*.

Aceleração de uma Partícula de Fluido

Com freqüência é conveniente descrever o movimento de uma partícula em termos de sua distância s ao longo da linha de corrente juntamente com o raio da curvatura ao longo da linha de corrente. A velocidade da partícula está relacionada à distância por $V = ds/dt$, que pode variar ao longo da linha de corrente. Em escoamentos bidimensionais, a aceleração pode ser decomposta em dois componentes: *aceleração na direção da linha de corrente* (a_s) ao longo da linha de corrente e *aceleração normal* (a_n) na direção normal à linha de corrente, a qual é dada por $a_n = V^2/R$. Observe que a aceleração na direção da linha de corrente é devida a uma variação da velocidade ao longo da linha de corrente e a aceleração normal é devida a uma variação na direção. Para as partículas que se movem ao longo de uma *trajetória reta,* $a_n = 0$, uma vez que o raio da curvatura é infinito e, portanto, não há variação na direção.

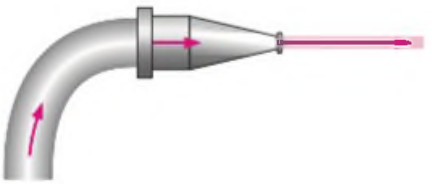


FIGURA 5–22
Durante o escoamento em regime permanente, um fluido não pode acelerar no tempo em um ponto fixo, mas pode acelerar no espaço.

A equação de Bernoulli decorre de um balanço de força ao longo de uma linha de corrente.

É possível se sentir tentado a achar que a aceleração é zero no escoamento em regime permanente, uma vez que a aceleração é a taxa de variação da velocidade com o tempo, e no escoamento em regime permanente não há variação com o tempo. Bem, um bocal de mangueira de jardim nos mostra que essa idéia não é correta. Mesmo com escoamento em regime permanente e, portanto, com vazão de massa constante, a água acelera através do bocal (Figura 5–22 como discutido no Capítulo 4). *Em regime permanente* significa apenas *nenhuma variação com o tempo em um local especificado*, mas o valor de uma quantidade pode variar de um local para outro. No caso de um bocal, a velocidade da água permanece constante em um ponto especificado, mas varia entre a entrada e a saída (a água acelera ao longo do bocal).

Matematicamente, isso pode ser expresso da seguinte maneira: consideramos a velocidade V de uma partícula do fluido função de s e t. Considerando a diferencial total de $V(s, t)$ e dividindo ambos os lados por dt temos

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad \text{e} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{5–33}$$

No escoamento em regime permanente $\partial V/\partial t = 0$ e, assim, $V = V(s)$ e a aceleração na direção de s torna-se

$$a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} V = V\frac{dV}{ds} \tag{5–34}$$

onde $V = ds/dt$ se estamos seguindo uma partícula de fluido à medida que ela se move ao longo de uma linha de corrente. Portanto, a aceleração em um escoamento em regime permanente é devida à variação da velocidade com a posição.

Dedução da Equação de Bernoulli

Considere o movimento de uma partícula de fluido no campo de escoamento em regime permanente descrito com detalhes no Capítulo 4. Aplicando a Segunda Lei de Newton (chamada de relação de *conservação do momento linear* na mecânica dos fluidos), na direção s, a uma partícula que se movimenta ao longo de uma linha de corrente temos

$$\sum F_s = ma_s \tag{5–35}$$

Nas regiões de escoamento onde as forças resultantes de atrito são desprezíveis, as forças significativas que atuam na direção s são a pressão (agindo em ambos os lados) e o componente do peso da partícula na direção s (Figura 5–23). Portanto, a Equação 5–35 torna-se

$$P\,dA - (P + dP)\,dA - W \operatorname{sen}\theta = mV\frac{dV}{ds} \tag{5–36}$$

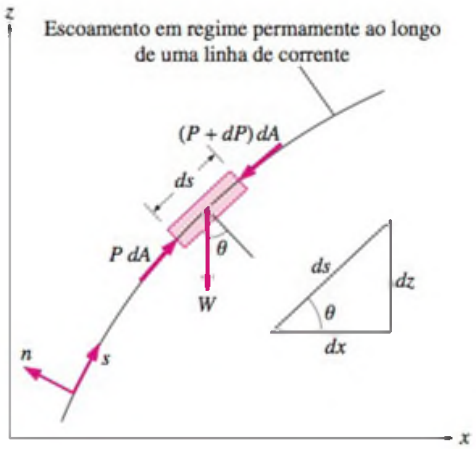


FIGURA 5–23
As forças que atuam em uma partícula de fluido ao longo de uma linha de corrente.

onde θ é o ângulo entre a normal da linha de corrente e o eixo vertical z naquele ponto, $m = \rho V = \rho\, dA\, ds$ é a massa, $W = mg = \rho g\, dA\, ds$ é o peso da partícula de fluido e sen $\theta = dz/ds$. Substituindo temos

$$-dP\, dA - \rho g\, dA\, ds \frac{dz}{ds} = \rho\, dA\, ds\, V \frac{dV}{ds} \tag{5–37}$$

Cancelando dA de cada termo e simplificando, temos

$$-dP - \rho g\, dz = \rho V\, dV \tag{5–38}$$

Observando que $V\, dV = \frac{1}{2}\, d(V^2)$ e dividindo cada termo por ρ temos

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2}\, d(V^2) + g\, dz = 0 \tag{5–39}$$

Integrando (Figura 5–24),

Escoamento em regime permanente:
$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante (ao longo de uma linha de corrente)} \tag{5–40}$$

uma vez que os dois últimos termos são diferenciais exatas. No caso de escoamento incompressível, o primeiro termo também se torna uma diferencial exata e sua integração resulta em

Escoamento em regime permanente incompressível:
$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante (ao longo de uma linha de corrente)} \tag{5–41}$$

Essa é a famosa **equação de Bernoulli**, usada normalmente em mecânica dos fluidos para escoamento em regime permanente incompressível ao longo de uma linha de corrente nas regiões do escoamento sem viscosidade. O valor da constante pode ser calculado em qualquer ponto da linha de corrente em que a pressão, densidade, velocidade e elevação sejam conhecidas. A equação de Bernoulli também pode ser escrita entre dois pontos quaisquer na mesma linha de corrente como

Escoamento em regime permanente incompressível:
$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \tag{5–42}$$

A equação de Bernoulli é obtida por meio da conservação do momento de uma partícula de fluido que se move ao longo de uma linha de corrente. Ela também pode ser obtida pela *Primeira Lei da Termodinâmica* aplicada a um sistema com escoamento em regime permanente, como mostra a Seção 5–7.

A equação de Bernoulli foi enunciada pela primeira vez pelo matemático suíço Daniel Bernoulli (1700–1782) em um texto escrito em 1738, época em que ele trabalhava em São Petersburgo, Rússia. Em 1755 ela foi deduzida na forma de equação por seu colega Leonhard Euler. Reconhecemos $V^2/2$ como a *energia cinética*, gz como a *energia potencial* e P/ρ como a *energia de escoamento*, todas por unidade de massa. Portanto, a equação de Bernoulli pode ser vista como uma expressão de *balanço da energia mecânica* e enunciada da seguinte maneira (Figura 5–25):

> A soma das energias cinética, potencial e de escoamento de uma partícula de fluido é constante ao longo de uma linha de corrente durante um escoamento em regime permanente quando os efeitos da compressibilidade e do atrito são desprezíveis.

As energias cinética, potencial e de escoamento são as formas mecânicas da energia, discutidas na Seção 5–3, e a equação de Bernoulli pode ser vista como o "princípio da conservação da energia mecânica". Isso é equivalente ao princípio geral da conservação de energia para os sistemas que não envolvem nenhuma conversão entre energia mecânica e energia térmica e, portanto, a energia mecânica e a energia térmica são conservadas separadamente. A equação de Bernoulli afirma que durante o escoamento em regime permanente com atrito desprezível, as diversas

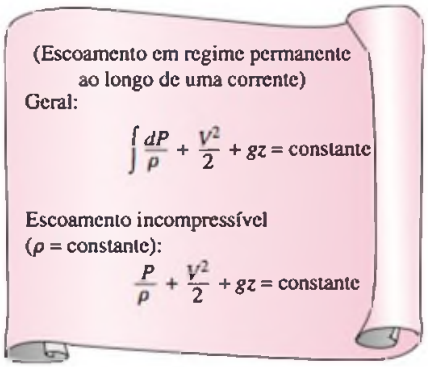


FIGURA 5–24
A equação de Bernoulli é deduzida supondo o escoamento incompressível e, portanto, ela não deve ser usada para escoamentos com efeitos de compressibilidade significativos.

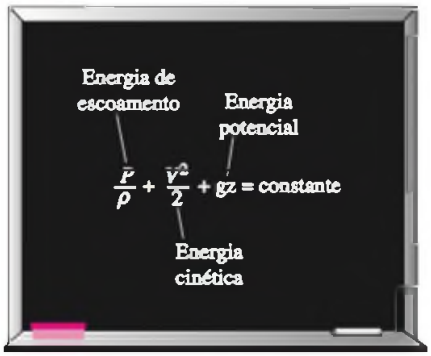


FIGURA 5–25
A equação de Bernoulli afirma que a soma das energias cinética, potencial e de escoamento de uma partícula de fluido é constante ao longo de uma linha de corrente durante o escoamento em regime permanente.

formas de energia mecânica são convertidas entre si, mas sua soma permanece constante. Em outras palavras, não há dissipação de energia mecânica durante tais escoamentos, uma vez que não há atrito que converta a energia mecânica em energia térmica sensível (interna).

Lembre-se de que a energia é transferida para um sistema como trabalho quando uma força é aplicada a um sistema ao longo de uma distância. À luz da Segunda Lei de Newton do movimento, a equação de Bernoulli também pode ser vista como: *O trabalho realizado pelas forças de pressão e gravidade sobre a partícula de fluido é igual ao aumento da energia cinética da partícula.*

Apesar das aproximações altamente restritivas utilizadas nessa dedução, a equação de Bernoulli é comumente usada na prática, uma vez que com ela uma variedade de problemas práticos de escoamento de fluido podem ser analisados com realismo razoável. Isso acontece porque muitos escoamentos de interesse prático para a engenharia são em regime permanente (ou pelo menos em regime permanente em média), os efeitos da compressibilidade são relativamente pequenos e as forças de atrito resultantes são desprezíveis nas regiões de interesse do escoamento.

Balanço de Forças Transversal às Linhas de Corrente

Como um exercício, mostre que o balanço de forças na direção n normal à linha de corrente resulta na seguinte relação que se aplica *transversalmente* às linhas de corrente para o escoamento em regime permanente e incompressível:

$$\frac{P}{\rho} + \int \frac{V^2}{R}\,dn + gz = \text{constante} \qquad \text{(transversal às linhas de corrente)} \qquad \textbf{(5–43)}$$

Para um escoamento ao longo de uma linha reta $R \to \infty$ e, portanto, a relação (Equação 5–44) se reduz a $P/\rho + gz = \text{constante}$ ou $P = -\rho gz + \text{constante}$, que é uma expressão da variação da pressão hidrostática com a distância vertical de um corpo fixo de fluido. Portanto, a variação da pressão com a elevação em um escoamento em regime permanente incompressível ao longo de uma linha reta é igual àquela do fluido em repouso (Figura 5–26).

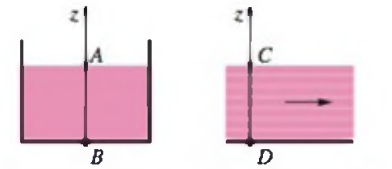


FIGURA 5–26
A variação da pressão com a elevação em um escoamento em regime permanente incompressível ao longo de uma linha reta é igual àquela do fluido em repouso (mas isso não se aplica a uma seção curva do escoamento).

Escoamento Compressível Não Permanente

Da mesma forma, usando ambos os termos da expressão de aceleração (Equação 5–33), é possível mostrar que a equação de Bernoulli para *escoamento compressível não permanente* é

Escoamento compressível não permanente:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \int \frac{\partial V}{\partial t}\,ds + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad \textbf{(5–44)}$$

Pressões Estática, Dinâmica e de Estagnação

A equação de Bernoulli afirma que a soma das energias de escoamento, cinética e potencial de uma partícula de fluido ao longo de uma linha de corrente é constante. Assim, as energias cinética e potencial do fluido podem ser convertidas em energia de escoamento (e vice-versa) durante o escoamento, causando variação da pressão. Esse fenômeno fica mais visível multiplicando a equação de Bernoulli pela densidade ρ,

$$P + \rho\frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{constante (ao longo de uma linha de corrente)} \qquad \textbf{(5–45)}$$

Cada termo dessa equação tem unidades de pressão e, portanto, cada termo representa algum tipo de pressão:

- P é a **pressão estática** (ela não incorpora nenhum efeito dinâmico); ela representa a pressão termodinâmica real do fluido. Essa pressão é igual àquela usada em termodinâmica e nas tabelas de propriedade.
- $\rho V_2/2$ é a **pressão dinâmica**; ela representa o aumento de pressão quando o fluido em movimento é parado de forma isoentrópica.

- $\rho g z$ é a **pressão hidrostática**, que não é pressão no sentido real, uma vez que seu valor depende do nível de referência selecionado; ela representa os efeitos na altura, ou seja, do peso do fluido na pressão.

A soma das pressões estática, dinâmica e hidrostática é chamada de **pressão total**. Portanto, a equação de Bernoulli afirma que *a pressão total ao longo de uma linha de corrente é constante.*

A soma das pressões estática e dinâmica é chamada de **pressão de estagnação** e é expressa como

$$P_{estag} = P + \rho \frac{V^2}{2} \quad \text{(kPa)} \tag{5–46}$$

A pressão de estagnação representa a pressão em um ponto no qual o fluido é parado totalmente de forma isoentrópica. As pressões estática, dinâmica e de estagnação são mostradas na Figura 5–27. Quando as pressões estática e de estagnação são medidas em um local especificado, a velocidade do fluido naquele local pode ser calculada por

$$V = \sqrt{\frac{2(P_{estag} - P)}{\rho}} \tag{5–47}$$

A Equação 5–47 é útil na medição da velocidade do escoamento quando uma combinação entre uma tomada de pressão e um tubo de Pitot for usada, como ilustra a Figura 5–27. Uma **tomada de pressão estática** é simplesmente um pequeno orifício em uma parede de forma que o plano do orifício fique paralelo à direção do escoamento. Ele mede a pressão estática. Um **tubo de Pitot** é um tubo pequeno com sua extremidade aberta alinhada *perpendicularmente ao* escoamento para sentir o impacto total da pressão de escoamento do fluido. Ele mede a pressão de estagnação. Nas situações nas quais a pressão estática e de estagnação de um *líquido* em escoamento são maiores do que a pressão atmosférica, um tubo transparente vertical chamado de **tubo piezômetro** (ou simplesmente **piezômetro**) pode ser anexado à tomada de pressão e ao tubo de Pitot, como mostra a Figura 5–27. O líquido se eleva no tubo do piezômetro até uma altura de coluna (*carga*) que é proporcional à pressão que está sendo medida. Se as pressões a serem medidas estão abaixo da pressão atmosférica, ou se a medição for feita em *gases*, os tubos de piezômetro não funcionam. Entretanto, a tomada de pressão estática e o tubo de Pitot ainda podem ser usados, mas eles devem estar conectados a algum outro tipo de dispositivo de medição de pressão como um manômetro com tubo em forma de U ou um transdutor de pressão (Capítulo 3). Às vezes é conveniente integrar orifícios da pressão estática em uma sonda de Pitot. O resultado é uma **sonda estática de Pitot**, mostrada na Figura 5–28 e discutida com mais detalhes no Capítulo 8. Uma sonda estática de Pitot conectada a um transdutor de pressão ou manômetro mede a pressão dinâmica (e, portanto, a velocidade do fluido) diretamente.

Quando a pressão estática é medida pela perfuração de um orifício na parede do tubo, é preciso tomar cuidado para garantir que a abertura do orifício esteja alinhada com a superfície da parede, sem extrusões antes ou depois do orifício (Figura 5–29). Caso contrário, a leitura incorporará alguns efeitos dinâmicos e, portanto, apresentará erro.

Quando um corpo em repouso é imerso em uma corrente de escoamento, o fluido é parado no nariz do corpo (o **ponto de estagnação**). A linha de corrente do escoamento que se estende desde a montante até o ponto de estagnação é chamada de **linha de corrente de estagnação** (Figura 5–30). Para um escoamento bidimensional no plano xy, o ponto de estagnação é, na verdade, uma *reta* paralela ao eixo z, e a linha de corrente de estagnação é, na verdade, uma *superfície* que separa o fluido que escoa *sobre* o corpo do fluido que escoa *abaixo* do corpo. Em um escoamento incompressível, o fluido desacelera quase isoentropicamente de seu valor de corrente livre até zero no ponto de estagnação, e a pressão no ponto de estagnação é, portanto, a pressão de estagnação.

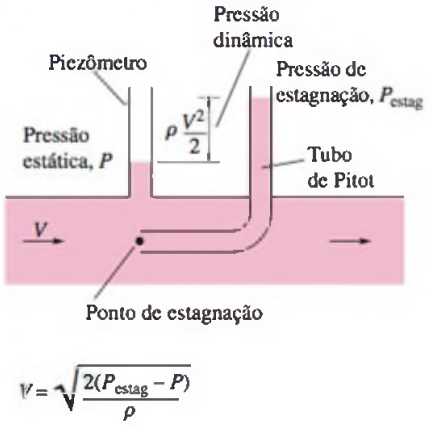


FIGURA 5–27
As pressões estática, dinâmica e de estagnação.

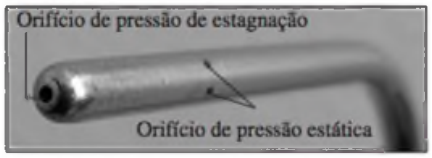


FIGURA 5–28
Detalhe de uma sonda estática de Pitot, mostrando o orifício da pressão de estagnação e dois dos cinco orifícios circunferenciais de pressão estática.
Foto de Po-Ya Abel Chuang. Usado com permissão.

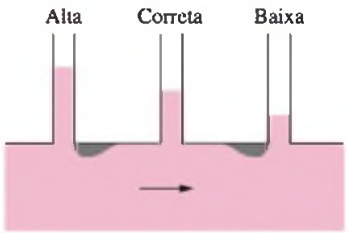


FIGURA 5–29
A perfuração descuidada da tomada de pressão estática pode resultar em erros de leitura da pressão estática.

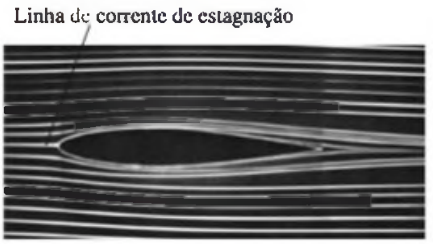


FIGURA 5–30
Linhas de emissão produzidas por fluido colorido introduzido a jusante de um aerofólio. Como o escoamento é em regime permanente, as linhas de esmissão são iguais às linhas de corrente e trajetórias. A linha de corrente de estagnação está marcada.
Cortesia ONERA. Fotografia de Werlé.

Limitações do Uso da Equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli (Equação 5–41) é uma das equações mais freqüentemente utilizada e mais mal empregada da mecânica dos fluidos. Sua versatilidade, simplicidade e facilidade de uso a tornam uma ferramenta muito valiosa para análise, mas os mesmos atributos também tornam muito tentadora a sua má utilização. Portanto, é importante entender as restrições de sua aplicabilidade e observar as limitações de seu uso, como explicamos a seguir:

1. **Escoamento em regime permanente** A primeira limitação da equação de Bernoulli que ela se aplica somente ao *escoamento em regime permanente.* Portanto, ela não deve ser usada durante os períodos em regime permanente de início e fechamento de escoamentos, ou durante os períodos de modificação nas condições do escoamento. Observe que existe uma forma não permanente da equação de Bernoulli (Equação 5–44), cuja discussão está além do escopo deste livro (consulte Panton, 1996).
2. **Escoamento sem atrito** Cada escoamento envolve um certo atrito, independentemente de quão pequeno seja, e os *efeitos do atrito* podem ou não ser desprezíveis. A situação é complicada ainda mais pela quantidade de erro que pode ser tolerada. Em geral, os efeitos do atrito são desprezíveis para trechos curtos de escoamento com grandes seções transversais, especialmente em baixas velocidades de escoamento. Em geral, os efeitos do atrito são significativos em longas e estreitas passagens de escoamento, na região de esteira a jusante de um objeto, e nas *seções de escoameno divergente* como os difusores, devido a maior possibilidade de separação do escoamento das paredes nessas geometrias. Os efeitos do atrito também são significativos próximos das superfícies sólidas e, portanto, a equação de Bernoulli em geral se aplica ao longo de uma linha de corrente na região central do escoamento, mas não ao longo de uma linha de corrente próxima a uma superfície (Figura 5–31).

   Um componente que atrapalhe a estrutura de linhas de corrente do escoamento e que, portanto, cause mistura e escoamento reverso considerável, como uma entrada abrupta de um tubo ou uma válvula parcialmente fechada em uma seção de escoamento, pode tornar a equação de Bernoulli inaplicável.
3. **Nenhum trabalho de eixo** A equação de Bernoulli foi deduzida de um balanço de forças sobre uma partícula que se move ao longo de uma linha de corrente. Portanto, a equação de Bernoulli não se aplica a uma seção de escoamento que envolve uma bomba, turbina, ventilador ou qualquer outra máquina ou propulsor, uma vez que tais dispositivos destroem as linhas de corrente e desenvolvem troca de energia com as partículas de fluido. Quando a seção de escoamento considerada envolve qualquer um desses dispositivos, a equação da energia deve ser usada para levar em conta a entrada ou saída do

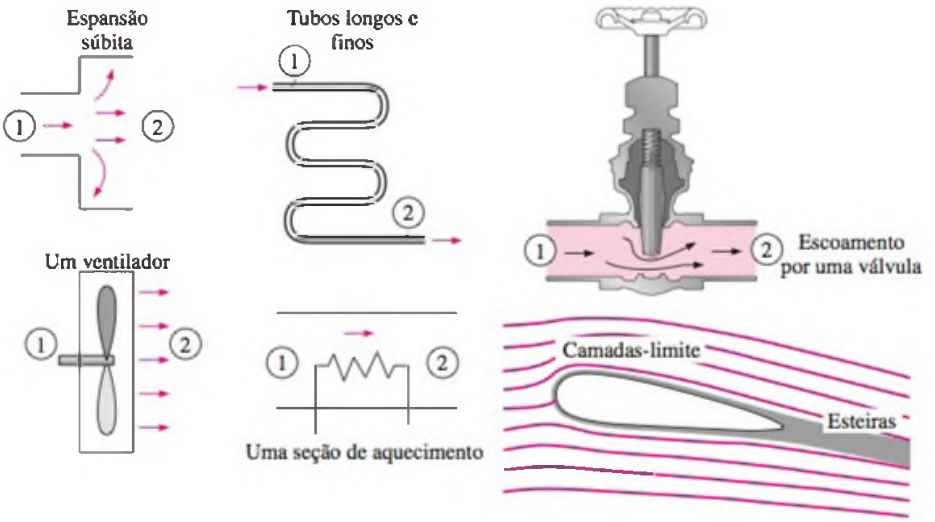


FIGURA 5–31
Os efeitos do atrito e os componentes que perturbam a estrutura de linhas de corrente do escoamento em uma seção do escoamento tornam inválida a equação de Bernoulli.

trabalho de eixo. Entretanto, a equação de Bernoulli ainda pode ser aplicada a uma seção de escoamento antes ou depois de uma máquina (considerando, obviamente, que outras restrições ao seu uso sejam satisfeitas). Em tais casos, a constante de Bernoulli apresenta diferentes valores a montante e a jusante do dispositivo.

4. **Escoamento incompressível** Uma das hipóteses utilizadas na dedução da equação de Bernoulli é que π = constante e, portanto, o escoamento é incompressível. Essa condição é satisfeita por líquidos e também por gases com números de Mach menores do que cerca de 0,3, uma vez que os efeitos da compressibilidade e, portanto, as variações de densidade dos gases, são desprezíveis em velocidades relativamente baixas como essas. Observe que há uma forma compressível da equação de Bernoulli (Equações 5–40 e 5–44).
5. **Nenhuma transferência de calor** A densidade de um gás é inversamente proporcional à temperatura e, portanto, a equação de Bernoulli não deve ser usada nas seções de escoamento que envolvem variação significativa de temperatura como as seções de aquecimento ou resfriamento.
6. **Escoamento ao longo de uma linha de corrente** A rigor, a equação de Bernoulli $P/\rho + V^2/2 + gz = C$ pode ser aplicada ao longo de uma linha de corrente, e o valor da constante C, em geral, é diferente para diferentes linhas de corrente. Mas quando uma região do escoamento é irrotacional e, portanto, não há *vorticidade* no campo de escoamento, o valor da constante C permanece igual para todas as linhas de corrente e, portanto, a equação de Bernoulli aplica-se também transversalmente às linhas de corrente (Figura 5–32). Assim, não precisamos nos preocupar com as linhas de corrente quando o escoamento é irrotacional e podemos aplicar a equação de Bernoulli entre dois pontos quaisquer da região de escoamento irrotacional (Capítulo 10).

Deduzimos a equação de Bernoulli considerando o escoamento bidimensional no plano xz por questões de simplicidade, mas a equação também é válida para o escoamento geral tridimensional, desde que ela seja aplicada ao longo da mesma linha de corrente. Devemos lembrar sempre as hipóteses utilizadas na dedução da equação de Bernoulli e verificar se não estão sendo violadas.

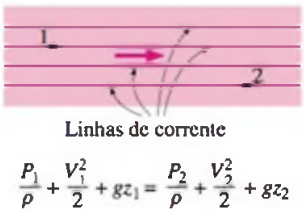


FIGURA 5–32
Quando o escoamento é irrotacional, a equação de Bernoulli torna-se aplicável entre dois pontos quaisquer ao longo do escoamento (e não apenas na mesma linha de corrente).

Linha Piezométrica (HGL) e Linha de Energia (EGL)

Com freqüência é conveniente representar o nível de energia mecânica graficamente usando *alturas* para facilitar a visualização dos diversos termos da equação de Bernoulli. Isso é feito dividindo cada termo da equação de Bernoulli por g para obter

$$\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=H=\text{constante} \qquad \text{(ao longo de uma linha de corrente)} \qquad \textbf{(5–48)}$$

Cada termo dessa equação tem a dimensão de comprimento e representa algum tipo de "carga" de um fluido em escoamento da seguinte maneira:

- $P/\rho g$ é a **carga da pressão**; ela representa a altura de uma coluna de fluido que produz a pressão estática P.
- $V^2/2g$ é a **carga da velocidade**; ela representa a elevação necessária para que um fluido atinja a velocidade V durante a queda livre sem atrito.
- z é a **carga da elevação**; ela representa a energia potencial do fluido.

Da mesma forma, H é a **carga total** do escoamento. Assim, a equação de Bernoulli pode ser expressa em termos de cargas como: *a soma das cargas da pressão, velocidade e elevação ao longo de uma linha de corrente é constante durante o escoamento em regime permanente, quando a compressibilidade e os efeitos de atrito são desprezíveis* (Figura 5–33).

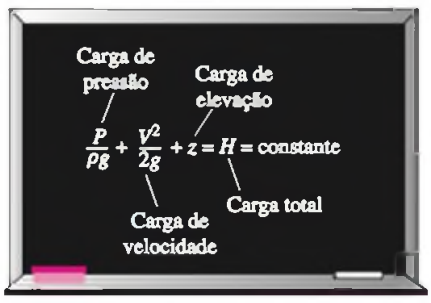


FIGURA 5–33
Uma forma alternativa da equação de Bernoulli é expressa em termos de cargas como: *a soma das cargas da pressão, velocidade e elevação é constante ao longo de uma linha de corrente.*

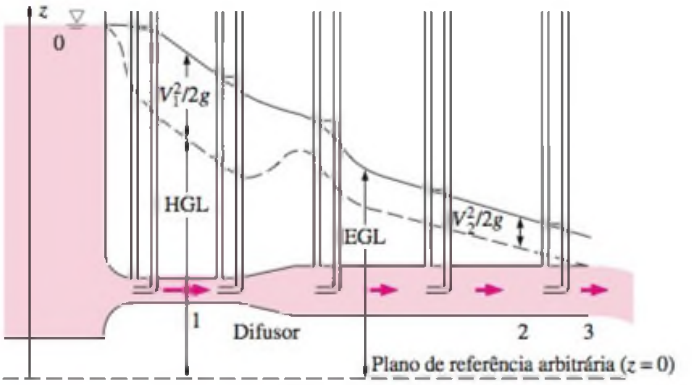


FIGURA 5–34
A *linha piezométrica* (HGL) e a *linha de energia* (EGL) para descarga livre de um reservatório através de um tubo horizontal com um difusor.

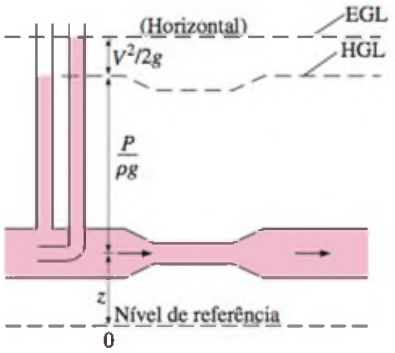


FIGURA 5–35
Em um escoamento do tipo Bernoulli idealizado, a EGL é horizontal e sua altura permanece constante. Mas esse não é o caso da HGL quando a velocidade de escoamento varia ao longo do escoamento.

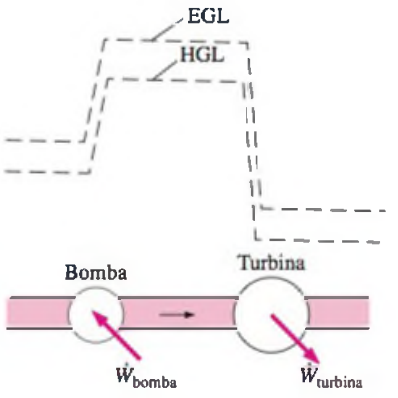


FIGURA 5–36
Um *salto abrupto* ocorre na EGL e HGL sempre que energia mecânica é adicionada ao fluido por uma bomba, e uma *queda abrupta* ocorre sempre que energia mecânica é removida do fluido por uma turbina.

Se um piezômetro (mede a pressão estática) é colocado em um tubo, como mostra a Figura 5–34, o líquido sobe a uma altura de $P/\rho g$ acima do centro do tubo. A *linha piezométrica* (HGL) é obtida fazendo isso em diversos locais ao longo do tubo e desenhando uma linha através dos níveis de líquido dos piezômetros. A distância vertical acima do centro do tubo é uma medida da pressão dentro do tubo. Da mesma forma, se um tubo de Pitot (que mede a pressão estática e dinâmica) for colocado em um tubo, o líquido sobe a uma altura de $P/\rho g + V^2/2g$ acima do centro do tubo ou a uma distância de $V^2/2g$ acima do HGL. A *linha de energia* (EGL) é obtida fazendo isso em vários locais ao longo do tubo e desenhando uma linha através dos níveis de líquido nos tubos de Pitot.

Observando que o fluido também tem carga de elevação z (a menos que o nível de referência seja tomado como a linha central do tubo), a HGL e a EGL podem ser definidas da seguinte maneira: a linha que representa a soma da pressão estática e as cargas da elevação, $P/\rho g + z$, é chamada de **linha piezométrica**. A linha que representa a carga total do fluido, $P/\rho g + V^2/2g + z$, é chamada de **linha de energia**. A diferença entre as alturas da EGL e da HGL é igual à carga dinâmica $V^2/2g$. Observamos o seguinte sobre a HGL e a EGL:

- Para *corpos em repouso* como reservatórios ou lagos, a EGL e a HGL coincidem com a superfície livre do líquido. A elevação da superfície livre z em tais casos representa a EGL e a HGL, uma vez que a velocidade é zero e a pressão estática (manométrica) é zero.
- A EGL está sempre a uma distância $V^2/2g$ acima da HGL. Essas duas linhas se aproximam à medida que a velocidade diminui e elas divergem à medida que a velocidade aumenta. A altura da HGL diminui à medida que a velocidade aumenta e vice-versa.
- Em um *escoamento do tipo Bernoulli idealizado,* a EGL é horizontal e sua altura permanece constante. Esse também seria o caso da HGL quando a velocidade de escoamento é constante (Figura 5–35).
- Para o escoamento de canal aberto, a HGL coincide com a superfície livre do líquido e a EGL está a uma distância $V^2/2g$ acima da superfície livre.
- Na *saída de um tubo*, a carga da pressão é zero (pressão atmosférica) e, portanto, a HGL coincide com a saída do tubo (localização 3 na Figura 5–34).
- A *perda de energia mecânica* devida aos efeitos do atrito (conversão em energia térmica) faz com que a EGL e a HGL se inclinem para baixo na direção do escoamento. A inclinação é uma medida da perda de carga no tubo (discutida com detalhes no Capítulo 8). Um componente que gera efeitos de atrito significativos, como uma válvula, causa uma queda repentina na EGL e HGL naquele local.
- Um *salto abrupto* ocorre na EGL e na HGL sempre que energia mecânica é adicionada ao fluido (por uma bomba, por exemplo). Da mesma forma, uma *queda brusca* ocorre na EGL e HGL sempre que energia mecânica é removida do fluido (por uma turbina, por exemplo), como mostra a Figura 5–36.

- A pressão (manométrica) de um fluido é zero nos locais onde a HGL *intercepta* o fluido. A pressão de uma seção de escoamento que fica acima da HGL é negativa e a pressão de uma seção que está abaixo da HGL é positiva (Figura 5–37). Portanto, um desenho exato de um sistema de tubos e da HGL pode ser usado para determinar as regiões nas quais a pressão do tubo é negativa (abaixo da pressão atmosférica).

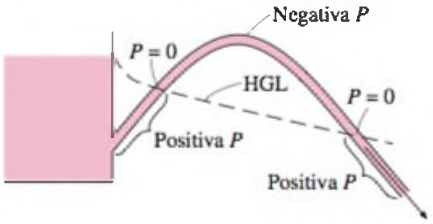


FIGURA 5–37
A pressão (manométrica) de um fluido é zero nos locais onde a HGL *intercepta* o fluido e a pressão é negativa (vácuo) em uma seção de escoamento que está acima da HGL.

A última observação nos permite evitar situações nas quais a pressão cai abaixo da pressão de vapor do líquido (o que causa a *cavitação* que foi discutida no Capítulo 2). É preciso considerar adequadamente a colocação de uma bomba de líquido para garantir que a pressão no lado de sucção não caia muito, particularmente em temperaturas elevadas, onde a pressão do vapor é mais alta do que em baixas temperaturas.

Agora examinaremos a Figura 5–34 com mais detalhes. No ponto 0 (na superfície do líquido), a EGL e a HGL são iguais à superfície do líquido, uma vez que não existe escoamento nesse ponto. A HGL diminui rapidamente à medida que o líquido acelera no tubo. Entretanto, a EGL diminui muito lentamente através da entrada bem arredondada do tubo. A EGL diminui continuamente ao longo da direção do escoamento devido ao atrito e a outras perdas irreversíveis no escoamento. A EGL não pode aumentar na direção do escoamento, a menos que a energia seja fornecida ao fluido. A HGL pode subir ou cair na direção do escoamento, mas nunca pode exceder a EGL. A HGL sobe na seção do difusor à medida que a velocidade diminui, e a pressão estática é recuperada em parte; a pressão total *não* é recuperada, porém, e a EGL diminui através do difusor. A diferença entre a EGL e a HGL é $V_1^2/2g$ no ponto 1, e $V_2^2/2g$ no ponto 2. Como $V_1 > V_2$, a diferença entre as duas linhas de carga é maior no ponto 1 do que no ponto 2. A inclinação para baixo das duas linhas de carga é maior para a seção de diâmetro menor do tubo, uma vez que a perda de carga por atrito é maior. Finalmente, a HGL diminui para a superfície do líquido na saída, uma vez que a pressão desse ponto é atmosférica. Entretanto, a EGL ainda é mais alta do que a HGL por $V_2^2/2g$, uma vez que $V_3 = V_2$ na saída.

5–5 ▪ APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Na Seção 5–4, discutimos os aspectos fundamentais da equação de Bernoulli. Nesta seção, mostraremos seu uso em uma ampla variedade de aplicações, por meio de exemplos.

EXEMPLO 5–5 Água Aspergida no Ar

A água escoa de uma mangueira ligada a uma tubulação de água à pressão manométrica de 400 kPa (Figura 5–38). Uma criança coloca o polegar para cobrir a maior parte da saída da mangueira, fazendo com que surja um fino jato de água à alta velocidade. Se a mangueira for mantida para cima, qual é a altura máxima que pode ser atingida pelo jato?

SOLUÇÃO A água de uma mangueira ligada à tubulação de água é aspergida no ar. A altura máxima à qual o jato d´água pode subir deve ser determinada.

Hipóteses **1** O escoamento que sai para o ar é em regime permanente, incompressível e irrotacional (de modo que a equação de Bernoulli se aplica). **2** A pressão da água na mangueira próxima à saída é igual à pressão na tubulação de água. **3** Os efeitos da tensão superficial são desprezíveis. **4** O atrito entre a água e o ar é desprezível. **5** As irreversibilidades que podem ocorrer na saída da mangueira devidas à expansão repentina são desprezíveis.

Propriedades Tomamos a densidade da água como 1000 kg/m^3.

Análise Este problema envolve a conversão entre si das energias de escoamento, cinética e potencial sem envolver bombas, turbinas e componentes que promovem desperdício com grandes perdas por atrito e, portanto, ele é adequado

FIGURA 5–38
Esquema do Exemplo 5–5.

ao uso da equação de Bernoulli. A altura da água será máxima sob as hipóteses enunciadas. A velocidade dentro da mangueira é relativamente baixa ($V_1 \cong 0$) e tomamos a saída da mangueira como o nível de referência ($z_1 = 0$). Na parte superior da trajetória da água $V_2 = 0$ e a pressão é atmosférica. Assim, a equação de Bernoulli pode ser simplificada para

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\nearrow^{0} + z_1\nearrow^{0} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}\nearrow^{0} + z_2 \quad \rightarrow \quad \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g} + z_2$$

Isolando z_2 e substituindo

$$z_2 = \frac{P_1 - P_{atm}}{\rho g} = \frac{P_{1,man}}{\rho g} = \frac{400\ \text{kPa}}{(1000\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)}\left(\frac{1000\ \text{N/m}^2}{1\ \text{kPa}}\right)\left(\frac{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right)$$
$$= \mathbf{40{,}8\ m}$$

Portanto, o jato d'água pode subir até 40,8 m na direção do céu neste caso.

Discussão O resultado obtido pela equação de Bernoulli representa o limite superior e deve ser interpretado adequadamente. Ele nos diz que a água não pode subir mais de 40,8 m e muito provavelmente a elevação será bem menor do que 40,8 m devido às perdas irreversíveis que desprezamos.

EXEMPLO 5–6 Descarga de Água de um Tanque Grande

Um tanque grande aberto para a atmosfera é preenchido com água até uma altura de 5 m da saída da torneira (Figura 5–39). Uma torneira próxima à parte inferior do taque é aberta, e a água escoa para fora da torneira de maneira suave. Determine a velocidade da água na saída.

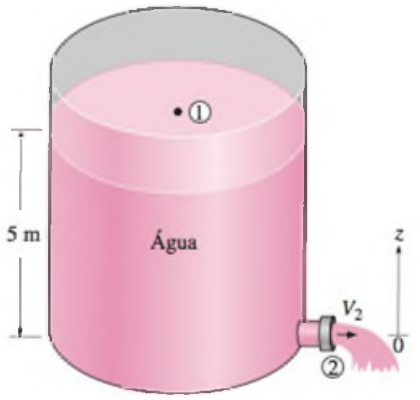


FIGURA 5–39
Esquema do Exemplo 5–6.

SOLUÇÃO Uma torneira próxima da parte inferior de um tanque é aberta. A velocidade de saída da água do tanque deve ser determinada.

Hipóteses **1** O escoamento é incompressível e irrotacional (exceto muito próximo às paredes). **2** A água drena de forma suficientemente lenta para que o escoamento possa ser aproximado como em regime permanente (na verdade, em regime quase permanente quando o tanque começa a drenar).

Análise Este problema envolve a conversão entre si das energias de escoamento, cinética e potencial sem envolver bombas, turbinas e componentes que promovem desperdício com grandes perdas por atrito e, portanto, ele é adequado ao uso da equação de Bernoulli. Consideramos o ponto 1 como estando na superfície livre da água de modo que $P_1 = P_{atm}$ (aberto para a atmosfera), $V_1 \cong 0$ (o tanque é grande com relação à saída), e $z_1 = 5$ m e $z_2 = 0$ (tomamos o nível de referência no centro da saída). Da mesma forma, $P_2 = P_{atm}$ (a água é descarregada na atmosfera). Assim, a equação de Bernoulli pode ser simplificada para

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\nearrow^{0} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\nearrow^{0} \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$

Isolando V_2 e substituindo

$$V_2 = \sqrt{2gz_1} = \sqrt{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(5\ \text{m})} = \mathbf{9{,}9\ m/s}$$

A relação $V = \sqrt{2gz}$ é chamada de **equação de Toricelli**.

Portanto, a água sai do tanque com velocidade inicial de 9,9 m/s. Essa é a mesma velocidade que se manifestaria se um sólido fosse solto a uma distância de 5 m na ausência de arrasto devido ao atrito com o ar. (Qual seria a velocidade se a torneira estivesse na parte inferior do tanque em vez de estar na lateral?)

Discussão Se o orifício fosse pontiagudo e não arredondado, o escoamento seria perturbado, e a velocidade seria menor do que 9,9 m/s, particularmente próximo às laterais. É preciso tomar cuidado ao tentar aplicar a equação de Bernoulli às situações nas quais expansões ou contrações abruptas ocorrem, uma vez que atrito e perturbações do escoamento em tais casos podem não ser desprezíveis.

EXEMPLO 5–7 Retirando Gasolina de um Tanque de Combustível com Sifão

Durante uma viagem à praia (P_{atm} = 1 atm = 101,3 kPa), um automóvel fica sem gasolina, e se torna necessário tirar com sifão a gasolina do automóvel de um bom samaritano (Figura 5–40). O sifão é uma mangueira com diâmetro pequeno, e para iniciar o bombeamento é preciso inserir um lado do sifão no tanque de gasolina cheio, encher a mangueira com gasolina por sucção e, em seguida, colocar o outro lado em uma lata de gasolina abaixo do nível do tanque de gasolina. A diferença de pressão entre o ponto 1 (na superfície livre de gasolina do tanque) e o ponto 2 (na saída do tubo) faz com que o líquido escoe da elevação mais alta para a mais baixa. O ponto 2 está localizado 0,75 m abaixo do ponto 1 neste caso, e o ponto 3 está localizado 2 m acima do ponto 1. O diâmetro do sifão é de 5 mm, e as perdas por atrito no sifão devem ser desprezadas. Determine (*a*) o tempo mínimo para retirar 4 L de gasolina do tanque para a lata e (*b*) a pressão no ponto 3. A densidade da gasolina é de 750 kg/m^3.

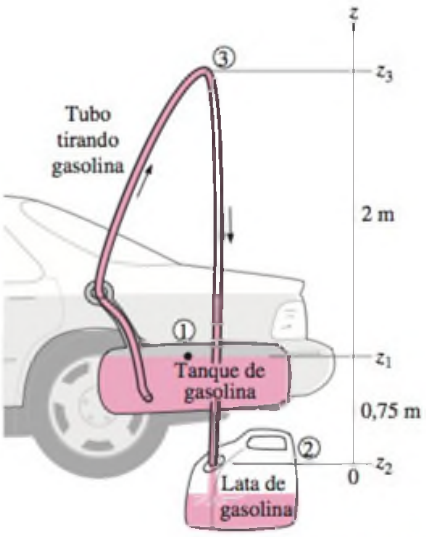


FIGURA 5–40
Esquema do Exemplo 5–7.

SOLUÇÃO A gasolina deve ser retirada do tanque com sifão. O tempo mínimo necessário para retirar 4 L de gasolina e a pressão no ponto mais alto do sistema devem ser determinados.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** Embora a equação de Bernoulli não seja válida em todo o tubo, por causa das perdas com atrito, nós empregamos a equação de Bernoulli de qualquer maneira para obter uma estimativa de melhor caso. **3** A variação no nível da superfície de gasolina dentro do tanque é desprezível comparada às elevações z_1 e z_2 durante o período de aplicação do sifão.

Propriedades A densidade da gasolina é dada com 750 kg/m^3.

Análise (a) Consideramos o ponto 1 na superfície livre da gasolina do tanque para que $P_1 = P_{atm}$ (aberto para a atmosfera), $V_1 \cong 0$ (o tanque é grande com relação ao diâmetro do tubo) e $z_2 = 0$ (o ponto 2 é tomado como o nível de referência). Da mesma forma, $P_2 = P_{atm}$ (descarga de gasolina na atmosfera). Assim, a equação de Bernoulli pode ser simplificada para

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}^{\,0} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2^{\,0} \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$

Isolando V_2 e substituindo

$$V_2 = \sqrt{2gz_1} = \sqrt{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}75\ \text{m})} = 3{,}84\ \text{m/s}$$

A área da seção transversal do tubo e a vazão da gasolina são

$$A = \pi D^2/4 = \pi(5 \times 10^{-3}\ \text{m})^2/4 = 1{,}96 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$$

$$\dot{V} = V_2 A = (3{,}84\ \text{m/s})(1{,}96 \times 10^{-5}\ \text{m}^2) = 7{,}53 \times 10^{-5}\ \text{m}^3\text{/s} = 0{,}0753\ \text{L/s}$$

Assim, o tempo necessário para tirar 4 L de gasolina torna-se

$$\Delta t = \frac{V}{\dot{V}} = \frac{4\ \text{L}}{0{,}0753\ \text{L/s}} = \mathbf{53{,}1\ s}$$

(*b*) A pressão no ponto 3 pode ser determinada escrevendo a equação de Bernoulli entre os pontos 2 e 3. Observando que $V_2 = V_3$ (conservação da massa), $z_2 = 0$, e $P_2 = P_{atm}$,

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2^{\,0} = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 \quad \rightarrow \quad \frac{P_{atm}}{\rho g} = \frac{P_3}{\rho g} + z_3$$

Isolando P_3 e substituindo

$$P_3 = P_{atm} - \rho g z_3$$

$$= 101{,}3\ \text{kPa} - (750\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(2{,}75\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{kPa}}{1000\ \text{N/m}^2}\right)$$

$$= \mathbf{81{,}1\ kPa}$$

Discussão O tempo para retirar a gasolina com sifão é determinado desprezando-se os efeitos do atrito e, portanto, esse é o *tempo mínimo* necessário. Na verdade, o tempo será maior do que 53,1 s por conta do atrito entre a gasolina e a superfície do tubo. Além disso, a pressão no ponto 3 está abaixo da pressão atmosférica. Se a diferença de elevação entre os pontos 1 e 3 for muito alta, a pressão no ponto 3 pode cair abaixo da pressão de vapor da gasolina na temperatura da gasolina, e parte desta pode evaporar (cavitar). Então, o vapor pode formar um bolsão na parte superior e interromper o escoamento da gasolina.

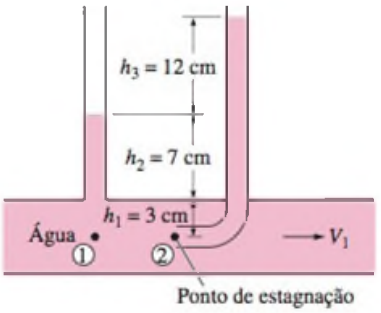


FIGURA 5–41
Esquema do Exemplo 5–8.

EXEMPLO 5–8 Medição da Velocidade por um Tubo de Pitot

Um piezômetro e um tubo de Pitot são colocados em um tubo de água horizontal, como mostra a Figura 5–41, para medir as pressões estática e de estagnação (estática + dinâmica). Para as alturas de coluna d´água indicadas, determine a velocidade no centro do tubo.

SOLUÇÃO As pressões estática e de estagnação em um tubo horizontal são medidas. A velocidade no centro do tubo deve ser determinada.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** Os pontos 1 e 2 estão suficientemente próximos para que a perda irreversível de energia entre eles seja desprezível e, portanto, podemos usar a equação de Bernoulli.

Análise Tomamos os pontos 1 e 2 ao longo do eixo central do tubo, com o ponto 1 diretamente abaixo do piezômetro e o ponto 2 na ponta do tubo de Pitot. Este é um escoamento em regime permanente com linhas de corrente retas e paralelas, e as pressões de manômetro nos pontos 1 e 2 podem ser expressas como

$$P_1 = \rho g(h_1 + h_2)$$

$$P_2 = \rho g(h_1 + h_2 + h_3)$$

Observando que o ponto 2 é um ponto de estagnação e, portanto, $V_2 = 0$ e $z_1 = z_2$, a aplicação da equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2 resulta em

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\cancel{V_2^2}^{\,0}}{2g} + \cancel{z_2} \quad \rightarrow \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g}$$

Substituindo as expressões para P_1 e P_2, temos

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = \frac{\rho g(h_1 + h_2 + h_3) - \rho g(h_1 + h_2)}{\rho g} = h_3$$

Isolando V_1 e substituindo

$$V_1 = \sqrt{2gh_3} = \sqrt{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}12\ \text{m})} = \mathbf{1{,}53\ m/s}$$

Discussão Observe que para determinar a velocidade do escoamento, tudo de que precisamos é medir a altura da coluna de excesso de fluido no tubo de Pitot.

EXEMPLO 5–9 A Elevação do Oceano em Virtude de um Furacão

Um furacão é uma tempestade tropical que se forma acima do oceano pelas baixas pressões atmosféricas. À medida que o furacão se aproxima da terra, vagas descomedidas (marés muito altas) o acompanham. Um furacão de classe 5 apresenta ventos acima de 155 mph, embora a velocidade do vento no centro do "olho" seja muito baixa.

A Figura 5–42 descreve um furacão deslocando-se sobre as vagas do oceano abaixo. A pressão atmosférica a 200 milhas do olho é equivalente a uma coluna com 30,0 polegadas de Hg (no ponto 1, em geral normal para o oceano) e os ventos são calmos. A pressão atmosférica do furacão no olho da tempestade é equivalente a uma coluna com 22,0 polegadas de Hg. Estime a vaga do oceano (*a*) no olho do furacão no ponto 3 e (*b*) no ponto 2, onde a velocidade do vento é de 155 mph. Considere a densidade da água do mar e do mercúrio, respectivamente, 64 lbm/pés^3 e 848 lbm/pés^3, e a densidade do ar à temperatura e pressão normal ao nível do mar 0,076 lbm/pés^3.

SOLUÇÃO Um furacão está se movendo sobre o oceano. A altura das vagas no oceano no olho e nas regiões de atividade do furacão deve ser determinada.

Hipóteses **1** O escoamento de ar dentro do furacão é em regime permanente, incompressível e irrotacional (de modo que é possível aplicar a equação de Bernoulli). (Certamente essa é uma hipótese bastante questionável para um escoamento altamente turbulento, mas isso é justificado na solução.) **2** O efeito da água que flutua no ar é desprezível.

Propriedades As densidades do ar em condições normais da água do mar e do mercúrio são dadas por 0,076 lbm/pé^3, 64 lbm/pés^3 e 848 lbm/pés^3, respectivamente.

Análise (*a*) A pressão atmosférica reduzida sobre a água faz com que a água se eleve. Assim, a pressão menor no ponto 2 com relação ao ponto 1 faz com que a água do oceano se eleve no ponto 2. O mesmo é válido no ponto 3, onde a velocidade do ar da tempestade é desprezível. A diferença de pressão dada em termos da altura da coluna de mercúrio pode ser expressa em termos da altura da coluna da água do mar por

$$\Delta P = (\rho g h)_{\text{Hg}} = (\rho g h)_{\text{am}} \rightarrow h_{\text{am}} = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{am}}} h_{\text{Hg}}$$

Então, a diferença de pressão entre os pontos 1 e 3 em termos da altura da coluna de água do mar torna-se

$$h_1 = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{am}}} h_{\text{Hg}} = \left(\frac{848 \text{ lbm/pés}^3}{64 \text{ lbm/pés}^3}\right)[(30 - 22) \text{ pol Hg}]\left(\frac{1 \text{ pé}}{12 \text{ pol}}\right) = \mathbf{8{,}83 \text{ pés}}$$

que é equivalente ao aumento do nível do mar devido à *tempestade* no *olho do furacão*, uma vez que a velocidade do vento nesse ponto é desprezível e não há efeitos dinâmicos.

(*b*) Para determinamos a elevação adicional da água do oceano no ponto 2 devido aos fortes ventos naquele ponto, escrevemos a equação de Bernoulli entre os pontos *A* e *B*, que estão acima dos pontos 2 e 3, respectivamente. Observando que $V_B \cong 0$ (a região do olho do furacão é relativamente calma) e que $z_A = z_B$ (os dois pontos estão na mesma linha horizontal), a equação de Bernoulli pode ser simplificada como

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + \cancel{z_A} = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\overset{0}{\cancel{\nearrow}} + \cancel{z_B} \rightarrow \frac{P_B - P_A}{\rho g} = \frac{V_A^2}{2g}$$

Substituindo

$$\frac{P_B - P_A}{\rho g} = \frac{V_A^2}{2g} = \frac{(155 \text{ mph})^2}{2(32{,}2 \text{ pés/s}^2)}\left(\frac{1{,}4667 \text{ pé/s}}{1 \text{ mph}}\right)^2 = 803 \text{ pés}$$

onde ρ é a densidade do ar no furacão. Observando que a densidade de um gás ideal a temperatura constante é proporcional à pressão absoluta, e que a densidade do ar à pressão atmosférica normal de 14,7 psia $\cong$ 30 polegadas de Hg é de 0,076 lbm/pé^3, a densidade do ar no furacão é

$$\rho_{\text{ar}} = \frac{P_{\text{ar}}}{P_{\text{atm ar}}} \rho_{\text{atm ar}} = \left(\frac{22 \text{ pol Hg}}{30 \text{ pol Hg}}\right)(0{,}076 \text{ lbm/pé}^3) = 0{,}056 \text{ lbm/pé}^3$$

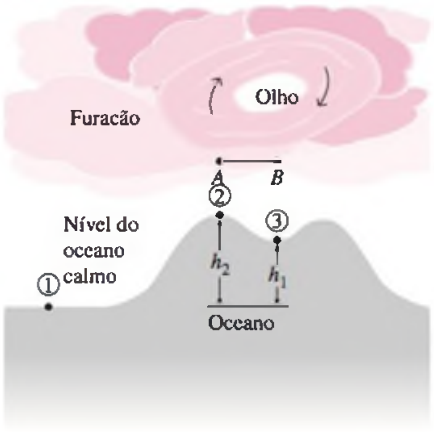


FIGURA 5–42
Esquema do Exemplo 5–9. A escala vertical está muito exagerada.

Usando a relação desenvolvida na parte (*a*), a altura da coluna de água do mar equivalente a 803 pés de altura da coluna de ar é determinada como

$$h_{din} = \frac{\rho_{ar}}{\rho_{am}} h_{ar} = \left(\frac{0{,}056 \text{ lbm/pé}^3}{64 \text{ lbm/pés}^3}\right)(803 \text{ pés}) = 0{,}70 \text{ pé}$$

Portanto, a pressão no ponto 2 é de 0,70 pé de coluna de água do mar mais baixa do que a pressão no ponto 3 em virtude das altas velocidades do vento, fazendo com que o oceano suba 0,70 pé. Assim, a elevação do nível do mar devido à tempestade no ponto 2 torna-se

$$h_2 = h_1 + h_{din} = 8{,}83 + 0{,}70 = \mathbf{9{,}53 \text{ pés}}$$

Discussão Este problema envolve escoamento altamente turbulento e quebra intensa das linhas de corrente e, portanto, a aplicabilidade da equação de Bernoulli na parte (*b*) é questionável. Além disso, o escoamento no olho da tempestade não é irrotacional, e a constante da equação de Bernoulli varia nas linhas de corrente (consulte o Capítulo 10). A análise de Bernoulli pode ser vista como o caso-limite ideal, e mostra que a elevação do nível do mar em virtude dos ventos de alta velocidade não pode ser maior do que 0,70 pé.

A potência do vento dos furacões não é a única razão dos danos causados às áreas costeiras. Inundações pelo oceâno e a erosão devido às excessivas marés são igualmente sérias, assim como as altas ondas geradas pela turbulência e energia da tempestade.

EXEMPLO 5–10 Equação de Bernoulli para Escoamento Compressível

Reduza a equação de Bernoulli quando os efeitos da compressibilidade não são desprezíveis para um gás ideal que passa por (*a*) um processo isotérmico e (*b*) um processo isoentrópico.

SOLUÇÃO A equação de Bernoulli do escoamento compressível deve ser obtida para um gás ideal para processos isotérmicos e isoentrópicos.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e os efeitos do atrito são desprezíveis. **2** O fluido é um gás ideal, de modo que a relação $P = \rho RT$ se aplica. **3** Os calores específicos são constantes de modo que P/ρ^k = constante durante um processo isoentrópico.

Análise (*a*) Quando os efeitos da compressibilidade são significativos e o escoamento não pode ser considerado incompressível, a equação de Bernoulli é dada pela Equação 5–40 como

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad \text{(ao longo de uma linha de corrente)} \qquad \textbf{(1)}$$

Os efeitos da compressibilidade podem ser adequadamente considerados expressando ρ em termos da pressão e, em seguida, fazendo a integração $\int dP/\rho$ na Equação 1. Mas isso exige uma relação entre P e ρ para o processo. Para a expansão ou compressão *isotérmica* de um gás ideal, a integral da Equação 1 pode ser feita facilmente observando que T = constante e substituindo $\rho = P/RT$. Isso resulta em

$$\int \frac{dP}{\rho} = \int \frac{dP}{P/RT} = RT \ln P$$

Substituindo na Equação 1, temos a relação desejada

$$\textit{Processo isotérmico:} \qquad \mathbf{RT \ln P + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}} \qquad \textbf{(2)}$$

(*b*) Um caso mais prático de escoamento compressível é o *escoamento isoentrópico dos gases ideais* através do equipamento que envolve escoamento de fluido em alta velocidade como bocais, difusores e as passagens entre as pás de

turbinas. O escoamento isoentrópico (ou seja, reversível e adiabático) aproxima o escoamento por esses dispositivos com relativa precisão, e é caracterizado pela relação $P/\rho^k = C$ = constante, onde k é a taxa de calor específico do gás. Isolando ρ em $P/\rho^k = C$, temos $\rho = C^{-1/k}P^{1/k}$. Fazendo a integração

$$\int \frac{dP}{\rho} = \int C^{1/k}P^{-1/k}\,dP = C^{1/k}\frac{P^{-1/k+1}}{-1/k+1} = \frac{P^{1/k}}{\rho}\frac{P^{-1/k+1}}{-1/k+1} = \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{P}{\rho} \qquad (3)$$

Substituindo a equação de Bernoulli para o escoamento em regime permanente, isoentrópico e compressível de um gás ideal torna-se

Escoamento isoentrópico: $$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad (4a)$$

ou

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \qquad (4b)$$

Uma situação prática comum envolve a aceleração de um gás a partir do repouso (condições de estagnação no estado 1) com variação desprezível da elevação. Nesse caso temos $z_1 = z_2$ e $V_1 = 0$. Observando que $\rho = P/RT$ para os gases ideais, que P/ρ^k = constante para o escoamento isoentrópico e que o número de Mach é definido como Ma = V/c, onde $c = \sqrt{kRT}$ é a velocidade local do som para os gases ideais, a Equação 4b se simplifica para

$$\frac{P_1}{P_2} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}_2^2\right]^{k/(k-1)} \qquad (4c)$$

onde o estado 1 é o estado de estagnação e o estado 2 é qualquer estado ao longo do escoamento.

Discussão É possível mostrar que os resultados obtidos usando as equações compressível e incompressível se desviam não mais do que 2% quando o número de Mach é menor do que 0,3. Portanto, o escoamento de um gás ideal pode ser considerado incompressível quando Ma $\leq$ 0,3. Para o ar atmosférico em condições normais, isso corresponde a uma velocidade de escoamento de aproximadamente 100 m/s ou 360 km/h, que abrange nosso intervalo de interesse.

5–6 • EQUAÇÃO GERAL DA ENERGIA

Uma das leis mais fundamentais da natureza é a **Primeira Lei da Termodinâmica**, também conhecida como **princípio da conservação de energia**, que oferece uma base sólida para o estudo das relações entre as diversas formas de energia e das interações de energia. Ela afirma que a *energia não pode ser criada nem destruída durante um processo; ela só pode mudar de forma.* Assim, todas as partes da energia devem ser levadas em conta durante um processo.

Uma pedra que cai de um penhasco, por exemplo, adquire velocidade como resultado da conversão de sua energia potencial em energia cinética (Figura 5–43). Os dados experimentais mostram que a diminuição da energia potencial é igual ao aumento da energia cinética quando a resistência do ar é desprezível, confirmando assim o princípio da conservação de energia. O princípio da conservação da energia também constitui a base da indústria da dieta: uma pessoa com entrada de energia maior (alimento) do que a saída de energia (exercício) ganhará peso (armazenará energia na forma de gordura), e uma pessoa com menor entrada de energia do que a saída perderá peso. A variação do conteúdo da energia de um sistema é igual à diferença entre a entrada e a saída de energia, e o princípio da conservação da energia de qualquer sistema pode ser expresso simplesmente como $E_e - E_s = \Delta E$.

A transferência de qualquer quantidade (como massa, momento e energia) é reconhecida *na fronteira* à medida que a quantidade *cruza a fronteira*. Uma quantidade *entra* em um sistema se cruzar a fronteira de fora para dentro, e *sai* do sistema se ela se mover na direção oposta. Uma quantidade que se move de um local para

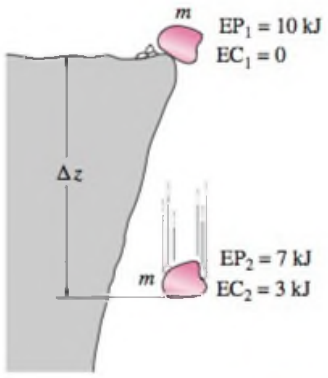


FIGURA 5–43
A energia não pode ser criada nem destruída durante um processo, ela só pode mudar de forma.

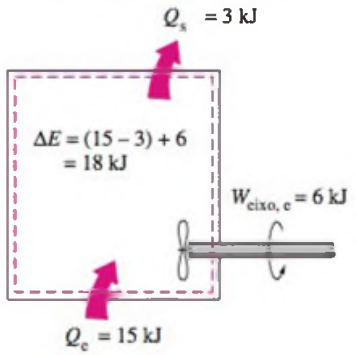


FIGURA 5–44
A variação da energia de um sistema durante um processo é igual ao trabalho *total* e à transferência de calor entre o sistema e sua vizinhança.

outro dentro de um sistema não é considerada uma quantidade transferida em uma análise, uma vez que ela não entra nem sai do sistema. Assim, é importante especificar o sistema e, portanto, identificar claramente suas fronteiras antes de executar uma análise de engenharia.

O conteúdo de energia de uma quantidade fixa de massa (um sistema fechado) pode ser mudado por dois mecanismos: a *transferência de calor Q* e a *transferência de trabalho W*. Assim, a conservação da energia para uma quantidade fixa de massa pode ser expressa na forma de taxa como (Figura 5–44)

$$\dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{tot e}} = \frac{dE_{\text{sis}}}{dt} \quad \text{ou} \quad \dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{tot e}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{sis}} \rho e\, dV \qquad \textbf{(5–49)}$$

onde $\dot{Q}_{\text{tot e}} = \dot{Q}_e - \dot{Q}_{\text{tot}}$ é a taxa total de transferência de calor para o sistema (negativa, se for do sistema), $\dot{W}_{\text{tot e}} = \dot{W}_e - \dot{W}_s$ é a entrada de potência total no sistema em todas as formas (negativa, se for saída de potência) e dE_{sis}/dt é a taxa de variação no tempo do conteúdo total de energia do sistema. O ponto sobre as letras quer dizer taxa de variação no tempo. Em sistemas simples compressíveis, a energia total consiste nas energias interna, cinética e potencial, e é expressa por unidade de massa como (consulte o Capítulo 2)

$$e = u + \text{ec} + \text{ep} = u + \frac{V^2}{2} + gz \qquad \textbf{(5–50)}$$

Observe que a energia é uma propriedade, e que seu valor não varia, a menos que o estado do sistema mude.

Transferência de Energia por Calor, *Q*

Na vida diária, quase sempre nos referimos às formas sensível e latente de energia interna como *calor* e falamos sobre o conteúdo de calor dos corpos. Cientificamente o nome mais correto para essas formas de energia é *energia térmica*. Nas substâncias de fase única, uma variação da energia térmica de dada massa resulta em uma variação de temperatura e, portanto, a temperatura é um bom representante da energia térmica. A energia térmica tende a se mover naturalmente na direção da diminuição da temperatura, e a transferência de energia térmica de um sistema para outro como resultado de uma diferença de temperatura é chamada de **transferência de calor**. Portanto, uma interação de energia é uma transferência de calor apenas se ela ocorrer por causa de uma diferença de temperatura. O aquecimento de uma bebida em lata em uma sala mais quente, por exemplo, se deve à transferência de calor (Figura 5–45). A taxa de variação da transferência de calor no tempo é chamada de **taxa de transferência de calor** e é indicada por $\dot{Q}$.

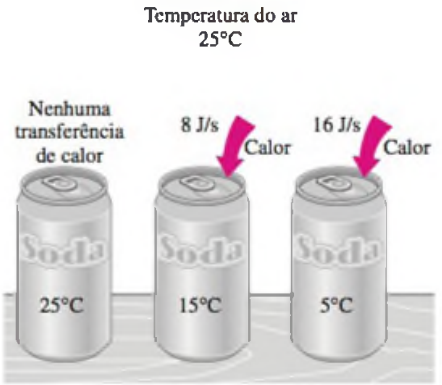


FIGURA 5–45
A diferença de temperatura é a força motriz da transferência de calor. Quanto maior for a diferença de temperatura, mais alta será a taxa de transferência de calor.

A direção da transferência de calor sempre é do corpo com temperatura mais alta para aquele com temperatura mais baixa. Uma vez estabelecida a igualdade de temperatura, a transferência de calor pára. Não pode haver nenhuma transferência de calor entre dois sistemas (ou entre um sistema e sua vizinhança) que estejam a mesma temperatura.

Um processo durante o qual não há transferência de calor é chamado de **processo adiabático**. Existem duas maneiras pelas quais um processo pode ser adiabático: ou o sistema está bem isolado para que apenas uma quantidade desprezível de calor passe através da fronteira do sistema, ou o sistema e a vizinhança estão a mesma temperatura e, portanto, não há força motriz (diferença de temperatura) para a transferência de calor. Um processo adiabático não deve ser confundido com um processo isotérmico. Embora não haja transferência de calor durante um processo adiabático, o conteúdo de energia e, portanto, a temperatura de um sistema ainda podem variar por outros meios como a transferência de trabalho.

Transferência de Energia por Trabalho, *W*

Uma interação de energia é **trabalho** se estiver associada a uma força que age por uma certa distância. Um pistão que sobe, um eixo giratório e um fio elétrico que cruza a fronteira de um sistema estão todos associados com interações de trabalho. A taxa de realizar trabalho com o tempo é chamada de **potência** e é representada

por $\dot{W}$. Os motores de automóveis e as turbinas hidráulicas a vapor e a gás produzem trabalho; os compressores, as bombas, os ventiladores e os misturadores consomem trabalho.

Os dispositivos que consomem trabalho transferem energia para o fluido e, portanto, aumentam a energia do fluido. Um ventilador em uma sala, por exemplo, mobiliza o ar e aumenta sua energia cinética. A energia elétrica que um ventilador consome é convertida primeiro em energia mecânica pelo seu motor que força o eixo das lâminas a girar. Essa energia mecânica é então transferida para o ar, como fica evidente pelo aumento da velocidade do ar. Essa transferência de energia para o ar nada tem a ver com a diferença de temperatura e, portanto, não pode ser transferência de calor. Portanto, ela deve ser trabalho. O ar descarregado pelo ventilador eventualmente pára e perde sua energia mecânica como resultado do atrito entre as partículas do ar com diferentes velocidades. Mas essa não é uma "perda" no sentido real da palavra; ela é apenas a conversão de energia mecânica em uma quantidade equivalente de energia térmica (que é de valor limitado justificando o termo *perda*) de acordo com o princípio da conservação de energia. Se um ventilador funcionar por um longo período em uma sala vedada, podemos sentir o acúmulo dessa energia térmica por uma elevação da temperatura do ar.

Um sistema pode envolver inúmeras formas de trabalho, e o trabalho total pode ser expresso como

$$W_{\text{total}} = W_{\text{eixo}} + W_{\text{pressão}} + W_{\text{viscosidade}} + W_{\text{outro}} \qquad \textbf{(5–51)}$$

onde W_{eixo} é o trabalho transmitido por um eixo giratório, $W_{\text{pressão}}$ é o trabalho realizado pelas forças de pressão sobre a superfície de controle, $W_{\text{viscosidade}}$ é o trabalho realizado pelos componentes normais e de cisalhamento das forças viscosas na superfície de controle e W_{outro} é o trabalho realizado por outras forças como elétrica, magnética e de tensão superficial, as quais são insignificantes nos sistemas compressíveis simples e não são consideradas neste texto. Tambem não consideramos $W_{\text{viscosidade}}$, uma vez que usualmente ele é pequeno em relação aos outros termos na análise de volume de controle. Mas é preciso lembrar de que o trabalho realizado pelas forças de cisalhamento à medida que as lâminas interagem com o fluido precisa ser considerado em uma análise refinada de turbomáquinas.

Trabalho de Eixo

Muitos sistemas de escoamento envolvem uma máquina como uma bomba, uma turbina, um ventilador ou um compressor, cujo eixo atravessa a superfície de controle, e a transferência de trabalho associada a todos esses dispositivos é chamada apenas de *trabalho de eixo* W_{eixo}. A potência transmitida por meio de um eixo giratório é proporcional ao torque do eixo T_{eixo} e é expressa por

$$\dot{W}_{\text{eixo}} = \omega \text{T}_{\text{eixo}} = 2\pi \dot{n} \text{T}_{\text{eixo}} \qquad \textbf{(5–52)}$$

onde ω é a velocidade angular do eixo em rad/s e $\dot{n}$ é definido como o número de revoluções do eixo por unidade de tempo, quase sempre expresso em rev/min ou rpm.

Trabalho Realizado por Forças de Pressão

Considere um gás que esteja sendo comprimido em um cilindro por um pistão como mostrado na Figura 5–46*a*. Quando o pistão se move uma distância diferencial *ds* para baixo sob influência da força de pressão *PA*, onde *A* é a área da seção transversal do pistão, o trabalho de fronteira realizado *no* sistema é $\delta W_{\text{fronteira}} = PA\ ds$. Dividindo ambos os lados dessa relação pelo intervalo diferencial de tempo *dt*, temos a taxa de variação no tempo do trabalho de fronteira (ou seja, *potência*)

$$\delta \dot{W}_{\text{pressão}} = \delta \dot{W}_{\text{fronteira}} = PAV_{\text{pistão}}$$

onde $V_{\text{pistão}} = ds/dt$ é a velocidade do pistão, que é a velocidade da fronteira móvel na face do pistão.

Agora considere uma quantidade material de fluido (um sistema) com forma arbitrária, que se move com o escoamento e pode se deformar sob a influência da

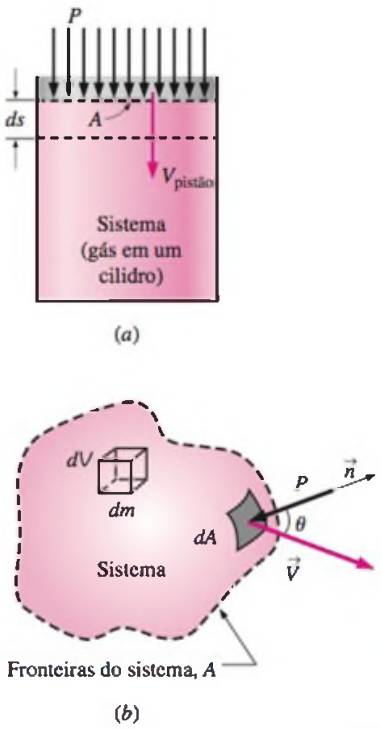


FIGURA 5–46
A força da pressão que age sobre (*a*) a fronteira móvel de um sistema em um cilindro com pistão, e (*b*) o diferencial de área da superfície de um sistema com forma arbitrária.

pressão, como mostra a Figura 5–46*b*. A pressão sempre atua para dentro e normal à superfície, e a força da pressão agindo sobre a área diferencial dA é $P\,dA$. Novamente observando que trabalho é força vezes distância e que a distância percorrida por unidade de tempo é a velocidade, a taxa de variação no tempo do trabalho realizado pelas forças de pressão sobre essa parte diferencial do sistema é

$$\delta \dot{W}_{\text{pressão}} = -P\,dA\,V_n = -P\,dA(\vec{V}\cdot\vec{n}) \tag{5–53}$$

uma vez que o componente normal da velocidade através da área diferencial dA é $V_n = V\cos\theta = \vec{V}\cdot\vec{n}$. Observe que $\vec{n}$ é a normal exterior de dA e, portanto, a quantidade $\vec{V}\cdot\vec{n}$ é positiva para a expansão e negativa para a compressão. O sinal negativo na Equação 5–53 garante que o trabalho realizado pelas forças de pressão é positivo quando seja realizado *no* sistema, e negativo quando realizado *pelo* sistema, o que está de acordo com nossa convenção de sinais. A taxa total de trabalho realizado pelas forças de pressão é obtida pela integração de $\delta\dot{W}_{\text{pressão}}$ ao longo de toda a superfície A

$$\dot{W}_{\text{pressão, tot e}} = -\int_A P(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA = -\int_A \frac{P}{\rho}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA \tag{5–54}$$

Sob essa perspectiva, a transferência de potência total pode ser expressa como

$$\dot{W}_{\text{tot e}} = \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} + \dot{W}_{\text{pressão, tot e}} = \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} - \int_A P(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA \tag{5–55}$$

Então, a forma da relação da conservação de energia em termos de taxa de variação no tempo de um sistema fechado torna-se

$$\dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} + \dot{W}_{\text{pressão, tot e}} = \frac{dE_{\text{sis}}}{dt} \tag{5–56}$$

Para obtermos uma relação para a conservação da energia de um *volume de controle*, aplicamos o teorema de transporte de Reynolds, substituindo B pela energia total E, e b pela energia total por unidade de massa e, que é $e = u + \text{ke} + \text{pe} = u + V^2/2 + gz$ (Figura 5–47). O resultado é

$$\frac{dE_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} e\rho\,dV + \int_{\text{SC}} e\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})A \tag{5–57}$$

Substituindo o lado esquerdo da Equação 5–56 na Equação 5–57, a forma geral da equação de energia que se aplica aos volumes de controle fixos, móveis ou deformáveis se torna

$$\dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} + \dot{W}_{\text{pressão, tot e}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} e\rho\,dV + \int_{\text{SC}} e\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\,dA \tag{5–58}$$

que pode ser enunciado como

$$\begin{pmatrix}\text{A taxa total de transferência}\\ \text{de energia para um VC por}\\ \text{transferência de calor de trabalho}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{A taxa de variação no}\\ \text{tempo do conteúdo de}\\ \text{energia no VC}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{A taxa de escoamento total da}\\ \text{energia para fora da superfície de}\\ \text{controle por escoamento de massa}\end{pmatrix}$$

Aqui $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{\text{SC}}$ é a velocidade do fluido com relação à superfície de controle, e o produto $\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\,dA$ representa a vazão em massa através do elemento de área dA para dentro ou para fora do volume de controle. Novamente, observando que $\vec{n}$ é a normal externa de dA, a quantidade $\vec{V}_r\cdot\vec{n}$ e, portanto, o escoamento de massa é positivo para a saída de escoamento e negativo para a entrada de escoamento.

Substituindo a integral de superfície pela taxa de variação no tempo do trabalho de pressão da Equação 5–54 na Equação 5–58, e combinando-a com a integral de superfície no lado direito temos

$$\dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} e\rho\,dV + \int_{\text{SC}}\left(\frac{P}{\rho}+e\right)\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\,dA \tag{5–59}$$

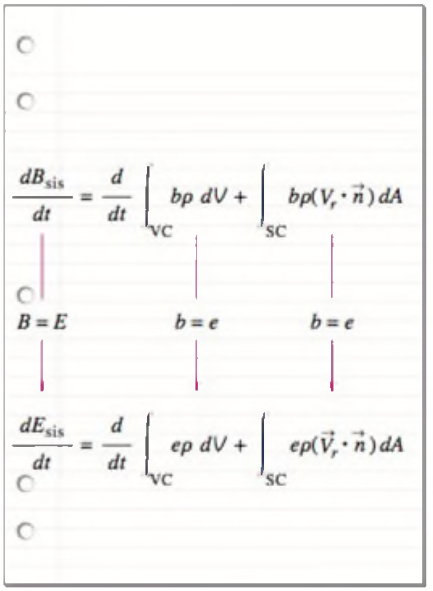


FIGURA 5–47
A equação da conservação da energia é obtida pela substituição de B no teorema de transporte de Reynolds pela energia E e de b por e.

Essa é uma forma muito conveniente de equação da energia, uma vez que o trabalho de pressão agora é combinado com a energia do fluido que atravessa a superfície de controle e não temos mais que lidar com o trabalho de pressão.

O termo $P/\rho = Pv = w_{esc}$ é o **trabalho de escoamento**, que é o trabalho para empurrar um fluido de ou para um volume de controle por unidade de massa. Observe que a velocidade do fluido em uma superfície sólida é igual à velocidade da superfície sólida devido à condição de não-escorregmento, e é zero para as superfícies imóveis. Como resultado, o trabalho de pressão ao longo de partes da superfície de controle que coincidem com as superfícies sólidas imóveis é zero. Assim, o trabalho de pressão para volumes de controle fixos pode existir apenas ao longo da parte imaginária da superfície de controle, onde o fluido entra e sai do volume de controle, ou seja, nas entradas e saídas.

Para um volume de controle fixo (nenhum movimento ou deformação do volume de controle), $\vec{V}_r = \vec{V}$ e a equação de energia Equação 5–59 torna-se

$$\textit{VC fixo:} \qquad \dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} e\rho\, dV + \int_{SC}\left(\frac{P}{\rho} + e\right)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA \qquad \textbf{(5–60)}$$

Essa equação não é uma forma conveniente para resolver problemas práticos de engenharia, por causa das integrais e, portanto, é desejável que ela seja reescrita em termos das velocidades médias e das taxas do escoamento de massa através das entradas e saídas. Se $P/\rho + e$ é quase uniforme através de uma entrada ou saída, podemos simplesmente tirá-lo para fora da integral. Observando que $\dot{m} = \int_{A_c} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c$ é a vazão de massa em uma seção transversal de uma entrada ou saída, a taxa de fluxo de energia para dentro ou para fora através da entrada ou saída pode ser aproximada por $\dot{m}(P/\rho + e)$. Então, a equação da energia torna-se (Figura 5–48)

$$\dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} e\rho\, dV + \sum_{s}\dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + e\right) - \sum_{e}\dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + e\right) \qquad \textbf{(5–61)}$$

onde $e = u + V^2/2 + gz$ (Equação 5–50) é a energia total por unidade de massa para o volume de controle e as correntes de escoamento. Assim

$$\dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} e\rho\, dV + \sum_{s}\dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{e}\dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right) \qquad \textbf{(5–62)}$$

ou

$$\dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} e\rho\, dV + \sum_{s}\dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{e}\dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) \qquad \textbf{(5–63)}$$

onde usamos a definição da entalpia $h = u + Pv = u + P/\rho$. As duas últimas equações são expressões bastante gerais de conservação da energia, mas seu uso ainda é limitado aos volumes de controle fixos, escoamento uniforme nas entradas e saídas, e trabalho devido a forças viscosas e a outros efeitos desprezíveis. O subscrito "tot e" quer dizer "entrada total" e, portanto, qualquer transferência de calor ou trabalho é positiva se for *para* o sistema e negativa se for *do* sistema.

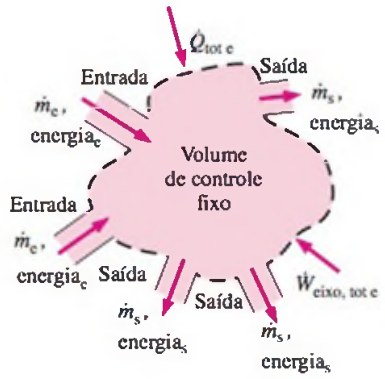


FIGURA 5–48
Em um típico problema de engenharia, o volume de controle pode conter muitas entradas e saídas; a energia escoa para dentro em cada entrada e escoa para fora em cada saída. A energia também entra no volume de controle através da transferência líquida de calor e do trabalho líquido de eixo.

5–7 ▪ ANÁLISE DE ENERGIA DE ESCOAMENTOS EM REGIME PERMANENTE

Para os escoamentos em regime permanente, a taxa de variação do conteúdo de energia do volume de controle no tempo é zero e a Equação 5–63 pode ser simplificada como

$$\dot{Q}_{\text{tot e}} + \dot{W}_{\text{eixo, tot e}} = \sum_{s}\dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{e}\dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) \qquad \textbf{(5–64)}$$

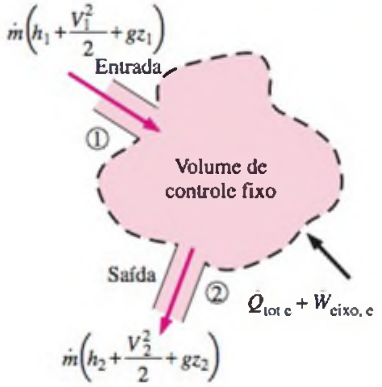


FIGURA 5–49
Um volume de controle com apenas uma entrada e uma saída e interações de energia.

Ela informa que *a taxa total de transferência de energia para um volume de controle por transferências de calor e trabalho durante escoamento em regime permanente é igual à diferença entre os fluxos em regime permanente de energia com massa para fora e para dentro.*

Muitos problemas práticos envolvem apenas uma entrada e uma saída (Figura 5–49). A vazão em massa desses **dispositivos de corrente simples** permanecem constantes e a Equação 5–64 se reduz

$$\dot{Q}_{\text{total e}} + \dot{W}_{\text{eixo, total e}} = \dot{m}\left(h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right) \qquad \textbf{(5–65)}$$

onde os subscritos 1 e 2 significam entrada e saída, respectivamente. A equação da energia para escoamento em regime permanente por unidades de massa é obtida pela divisão da Equação 5–65 pela vazão de massa $\dot{m}$,

$$q_{\text{tot e}} + w_{\text{eixo, tot e}} = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \qquad \textbf{(5–66)}$$

onde $q_{\text{tot e}} = \dot{Q}_{\text{tot e}}/\dot{m}$ é a transferência total de calor para o fluido por unidade de massa e $w_{\text{eixo, tot e}} = \dot{W}_{\text{eixo, tot e}}/\dot{m}$ é a entrada total de trabalho do eixo para o fluido por unidade de massa. Usando a definição da entalpia $h = u + P/\rho$ e reorganizando, a equação da energia para escoamento em regime permanente também pode ser expressa como

$$w_{\text{eixo, tot e}} + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + (u_2 - u_1 - q_{\text{tot e}}) \qquad \textbf{(5–67)}$$

onde u é a *energia interna*, P/ρ é a *energia de escoamento*, $V^2/2$ é a *energia cinética* e gz é a *energia potencial* do fluido, todos por unidade de massa. Essas relações são válidas para os escoamentos compressível e incompressível.

O lado esquerdo da Equação 5–67 representa a entrada de energia mecânica, enquanto os três primeiros termos do lado direito representam a saída de energia mecânica. Se o escoamento for ideal sem nenhuma irreversibilidade tal como o atrito, a energia mecânica total deve ser conservada, e o termo entre parênteses $(u_2 - u_1 - q_{\text{tot e}})$ deve ser igual a zero. Ou seja,

Escoamento ideal (nenhuma perda de energia mecânica): $$q_{\text{tot e}} = u_2 - u_1 \qquad \textbf{(5–68)}$$

Qualquer aumento de $u_2 - u_1$ acima de $q_{\text{tot e}}$ se deve à conversão irreversível de energia mecânica em energia térmica e, portanto, $u_2 - u_1 - q_{\text{tot e}}$ representa a perda de energia mecânica (Figura 5–50). Ou seja,

Perda de energia mecânica: $$e_{\text{mec, perda}} = u_2 - u_1 - q_{\text{tot e}} \qquad \textbf{(5–69)}$$

Para fluidos de fase única (um gás ou um líquido), temos $u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1)$ onde c_v é o calor específico a volume constante.

A equação da energia para escoamento em regime permanente por unidades de massa pode ser escrita como um balanço da **energia mecânica** como

$$e_{\text{mec, e}} = e_{\text{mec, s}} + e_{\text{mec, perda}} \qquad \textbf{(5–70)}$$

ou

$$w_{\text{eixo, tot e}} + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + e_{\text{mec, perda}} \qquad \textbf{(5–71)}$$

Observando que $w_{\text{eixo, tot e}} = w_{\text{eixo, e}} - w_{\text{eixo, s}} = w_{\text{bomba}} - w_{\text{turbina}}$, o balanço da energia mecânica pode ser escrito de forma mais explícita como

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + w_{\text{bomba}} = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{turbina}} + e_{\text{mec, perda}} \qquad \textbf{(5–72)}$$

onde w_{bomba} é a entrada de trabalho mecânico (devido à presença de uma bomba, ventilador, compressor etc.) e w_{turbina} é a saída de trabalho mecânico. Quando o escoamento é incompressível, tanto a pressão absoluta quanto a manométrica pode ser usada para P uma vez que P_{atm}/ρ apareceria em ambos os lados e seria cancelada.

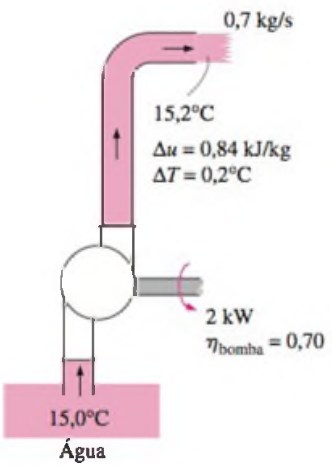


FIGURA 5–50
A energia mecânica perdida em um sistema com escoamento de fluido resulta em um aumento da energia interna do fluido e, portanto, em uma elevação na temperatura do fluido.

Multiplicando a Equação 5–72 pela vazão de massa $\dot{m}$ temos

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1\right)+\dot{W}_{\text{bomba}}=\dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho_2}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2\right)+\dot{W}_{\text{turbina}}+\dot{E}_{\text{mec, perda}} \qquad \textbf{(5–73)}$$

onde $\dot{W}_{\text{bomba}}$ é a entrada de potência de eixo através do eixo da bomba, $\dot{W}_{\text{turbina}}$ é a saída de potência de eixo através do eixo da turbina e $\dot{E}_{\text{mec, perda}}$ é a perda *total* de potência mecânica, que consiste nas perdas da bomba e da turbina, bem como nas perdas por atrito na rede da tubulação. Ou seja,

$$\dot{E}_{\text{mec, perda}}=\dot{E}_{\text{mec perda, bomba}}+\dot{E}_{\text{mec perda, turbina}}+\dot{E}_{\text{mec perda, tubulação}}$$

Por convenção, as perdas irreversíveis de bomba e turbina são tratadas separadamente das perdas irreversíveis devido a outros componentes do sistema de tubulação. Assim, a equação da energia pode ser expressa em sua forma mais comum em termos de cargas como (Figura 5–51).

$$\frac{P_1}{\rho_1 g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+h_{\text{bomba, }u}=\frac{P_2}{\rho_2 g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_{\text{turbina, }e}+h_L \qquad \textbf{(5–74)}$$

onde $h_{\text{bomba, }u}=\dfrac{w_{\text{bomba, }u}}{g}=\dfrac{\dot{W}_{\text{bomba, }u}}{\dot{m}g}=\dfrac{\eta_{\text{bomba}}\dot{W}_{\text{bomba}}}{\dot{m}g}$ é a *carga útil fornecida ao fluido pela bomba*. Devido às perdas irreversíveis na bomba, $h_{\text{bomba},u}$ é *menor* do que $\dot{W}_{\text{bomba}}/\dot{m}g$ pelo fator η_{bomba}. De forma semelhante, $h_{\text{turbina, }e}=\dfrac{w_{\text{turbina, }e}}{g}=\dfrac{\dot{W}_{\text{turbina, }e}}{\dot{m}g}=\dfrac{\dot{W}_{\text{turbina}}}{\eta_{\text{turbina}}\dot{m}g}$ é *a carga extraída do fluido pela turbina.* Devido a perdas irreversíveis na turbina, $h_{\text{turbina},e}$ é maior do que $\dot{W}_{\text{turbina}}/\dot{m}g$ pelo fator η_{turbina}. Finalmente, $h_L=\dfrac{e_{\text{mec perda, tubulação}}}{g}=\dfrac{\dot{E}_{\text{mec perda, tubulação}}}{\dot{m}g}$ é a *perda de carga* irreversível entre 1 e 2 em virtude de todos os outros componentes do sistema de tubulação além da bomba ou turbina. Observe que a perda de carga h_L representa as perdas de atrito associadas ao escoamento do fluido na tubulação e não inclui as perdas que ocorrem dentro da bomba ou turbina devido às ineficiências desses dispositivos — essas perdas são levadas em conta por η_{bomba} e η_{turbina}. A Equação 5–74 é ilustrada de forma esquemática na Figura 5–51.

A *carga da bomba* é zero se o sistema de tubulação não envolver uma bomba, um ventilador ou um compressor e a *carga da turbina* é zero se o sistema não envolver uma turbina. A *perda de carga* h_L também pode ser ignorada quando as perdas por atrito do sistema de tubulação forem desprezíveis comparadas a outros termos da Equação 5–74.

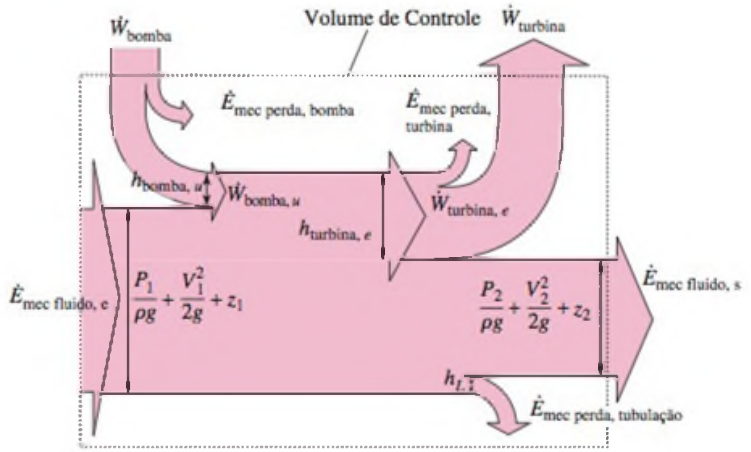


FIGURA 5–51
O gráfico do fluxo de energia mecânica de um sistema com escoamento de fluido que envolve uma bomba e uma turbina. As dimensões verticais mostram cada termo da energia expresso como uma altura de coluna equivalente do fluido, ou seja, *a carga*, correspondente a cada termo da Equação 5–74.

Caso Especial: Escoamento Incompressível sem Nenhum Dispositivo de Trabalho Mecânico e Atrito Desprezível

Quando as perdas da tubulação são desprezíveis, há dissipação desprezível de energia mecânica em energia térmica e, portanto, $h_L = e_{\text{mec perda, tubulação}}/g \cong 0$, como foi mostrado anteriormente no Exemplo 5–11. Da mesma forma, $h_{\text{bomba},u} = h_{\text{turbina},e} = 0$ quando não há nenhum dispositivo de trabalho mecânico como ventiladores, bombas ou turbinas. Assim, a Equação 5–74 se reduz a

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constante} \qquad \textbf{(5–75)}$$

que é a **equação de Bernoulli** derivada anteriormente usando a Segunda Lei de Newton do movimento.

Fator de Correção da Energia Cinética, α

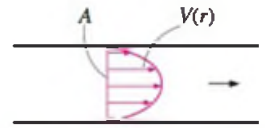
A velocidade média de escoamento $V_{\text{méd}}$ foi definida para que a relação $\rho V_{\text{méd}} A$ dê a vazão real de massa. Assim, não há um fator de correção para a vazão de massa. Entretanto, como Gaspard Coriolis (1792–1843) mostrou, a energia cinética de uma corrente de fluido obtida de $V^2/2$ não é igual à energia cinética real da corrente de fluido uma vez que o quadrado de uma soma não é igual à soma dos quadrados de seus componentes (Figura 5–52). Esse erro pode ser corrigido pela substituição dos termos da energia cinética $V^2/2$ na equação da energia por $\alpha V_{\text{méd}}^2/2$, onde α é o **fator de correção da energia cinética**. Usando as equações da variação da velocidade com a distância radial, é possível mostrar que o fator de correção é 2,0 para o escoamento de tubo laminar completamente desenvolvido, e varia entre 1,04 e 1,11 para o escoamento turbulento completamente desenvolvido em um tubo redondo.

Os fatores de correção da energia cinética quase sempre são ignorados (ou seja, α é igualado a 1) em uma análise elementar, uma vez que (1) a maioria dos escoamentos encontrados na prática são turbulentos, para os quais o fator de correção é próximo da unidade e (2) os termos da energia cinética quase sempre são pequenos com relação aos outros termos da equação da energia, e a sua multiplicação por um fator menor do que 2,0 não faz muita diferença. Além disso, quando a velocidade e, portanto, a energia cinética são altas, o escoamento torna-se turbulento. Entretanto, é preciso lembrar de que em algumas situações esses fatores *são* significativos, particularmente quando o escoamento for laminar. Assim, recomendamos que você sempre inclua o fator de correção da energia cinética ao analisar problemas de escoamento de fluidos. Quando os fatores de correção da energia cinética são incluídos, as equações de energia para *escoamento em regime permanente incompressível* (Equações 5–73 e 5–74) tornam-se

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right) + \dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) + \dot{W}_{\text{turbina}} + \dot{E}_{\text{mec, perda}} \qquad \textbf{(5–76)}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba},u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina},e} + h_L \qquad \textbf{(5–77)}$$

Se o escoamento na entrada ou saída é um escoamento de tubo turbulento e completamente desenvolvido, recomendamos o uso de $\alpha = 1{,}05$ como estimativa razoável do fator de correção. Isso leva a uma estimativa mais conservadora da perda de carga, e não é preciso muito esforço adicional para incluir α nas equações.



$\dot{m} = \rho V_{\text{méd}} A, \qquad \rho = \text{constante}$

$$K\dot{E}_{\text{red}} = \int \text{ke}\,\delta\dot{m} = \int_A \frac{1}{2} V^2(r)[\rho V(r)\, dA]$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int_A V^3(r)\, dA$$

$$K\dot{E}_{\text{méd}} = \frac{1}{2}\dot{m}V_{\text{méd}}^2 = \frac{1}{2}\rho A V_{\text{méd}}^3$$

$$\alpha = \frac{K\dot{E}_{\text{red}}}{K\dot{E}_{\text{méd}}} = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{V(r)}{V_{\text{méd}}}\right)^3 dA$$

FIGURA 5–52
A determinação do fator de *correção da energia cinética* usando a distribuição real da velocidade $V(r)$ e a velocidade média $V_{\text{méd}}$ em uma seção transversal.

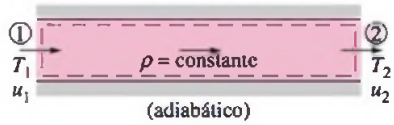


FIGURA 5–53
Esquema do Exemplo 5–11.

EXEMPLO 5–11 **Efeito do Atrito sobre a Temperatura do Fluido e Perda de Carga**

Mostre que durante o escoamento em regime permanente de um fluido incompressível em uma seção de escoamento adiabático (*a*) a temperatura permanece constante e não há perda de carga quando o atrito é ignorado e (*b*) a temperatura aumenta e alguma perda de carga ocorre quando os efeitos do atrito são considerados. Discuta se é possível que a temperatura do fluido diminua durante tal escoamento (Figura 5–53).

SOLUÇÃO O escoamento em regime permanente e incompressível através de uma seção adiabática é considerado. Os efeitos do atrito sobre a temperatura e a perda de calor devem ser determinados.

Hipóteses 1 O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** A seção do escoamento é adiabática e, portanto, não há transferência de calor, $q_{\text{tot e}} = 0$.

Análise A densidade de um fluido permanece constante durante o escoamento incompressível e a variação da entropia é

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Essa relação representa a variação da entropia do fluido por unidade de massa quando ele escoa através da seção de escoamento do estado 1 na entrada até o estado 2 na saída. A variação da entropia é causada por dois efeitos: (1) transferência de calor e (2) irreversibilidades. Assim, na ausência de transferência de calor, a variação da entropia é devida apenas às irreversibilidades, cujo efeito sempre é o aumento da entropia.

(*a*) A variação da entropia do fluido em uma seção de escoamento adiabático ($q_{\text{tot e}} = 0$) é zero quando o processo não envolve nenhuma irreversibilidade como o atrito e o agitamento e, portanto, para o escoamento reversível nós temos

Variação da temperatura: $$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = 0 \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1$$

Perda de energia mecânica:

$$e_{\text{mec perda, tubulação}} = u_2 - u_1 - q_{\text{tot e}} = c_v(T_2 - T_1) - q_{\text{tot e}} = 0$$

Perda de carga: $$h_L = e_{\text{mec perda, tubulação}}/g = 0$$

Assim, concluímos que quando a transferência de calor e os efeitos do atrito são desprezíveis (1) a temperatura do fluido permanece constante, (2) nenhuma energia mecânica é convertida em energia térmica e (3) não há nenhuma perda de carga irreversível.

(*b*) Quando irreversibilidades como o atrito são levadas em conta, a variação da entropia é positiva e, portanto, nós temos:

Variação da temperatura: $$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} > 0 \rightarrow T_2 > T_1$$

Perda de energia mecânica: $$e_{\text{mec perda, tubulação}} = u_2 - u_1 - q_{\text{tot e}} = c_v(T_2 - T_1) > 0$$

Perda de carga: $$h_L = e_{\text{mec perda, tubulação}}/g > 0$$

Assim, concluímos que quando o escoamento é adiabático e irreversível (1) a temperatura do fluido aumenta, (2) parte da energia mecânica é convertida em energia térmica e (3) ocorre uma certa perda de carga irreversível.

Discussão É impossível que a temperatura do fluido diminua durante o escoamento em regime permanente, incompressível e adiabático, uma vez que isso exigiria que a entropia de um sistema adiabático diminuísse, o que seria uma violação da Segunda Lei da Termodinâmica.

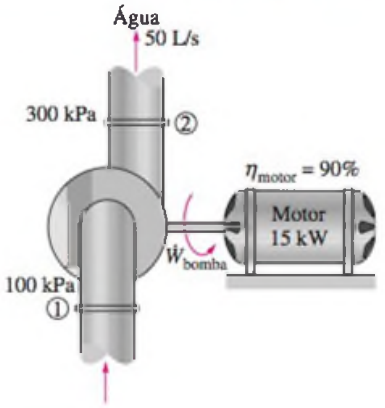


FIGURA 5–54
Esquema do Exemplo 5–12.

EXEMPLO 5–12 Potência de Bombeamento e Aquecimento por Atrito em uma Bomba

A bomba de um sistema de distribuição de água é alimentada por um motor elétrico de 15 kW cuja eficiência é de 90% (Figura 5–54). A vazão de água através da bomba é de 50 L/s. Os diâmetros dos tubos de entrada e saída são iguais, e a diferença de elevação através da bomba é desprezível. Se as pressões na entrada e na saída da bomba são medidas como 100 kPa e 300 kPa (absoluta), respectivamente, determine (*a*) a eficiência mecânica da bomba e (*b*) a elevação de temperatura da água à medida que ela escoa através da bomba devido à ineficiência mecânica.

SOLUÇÃO As pressões através de uma bomba são medidas. A eficiência mecânica da bomba e a elevação da temperatura da água devem ser determinadas.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** A bomba é movida por um motor externo de forma que o calor gerado pelo motor seja dissipado para a atmosfera. **3** A diferença de elevação entre a entrada e a saída da bomba é desprezível, $z_1 \cong z_2$. **4** Os diâmetros interno e externo são iguais e, portanto, as velocidades de entrada e saída e os fatores de correção da energia são iguais: $V_1 = V_2$ e $\alpha_1 = \alpha_2$.

Propriedades Tomamos a densidade da água como 1 kg/L = 1.000 kg/m^3 e seu calor específico como 4,18 kJ/kg · °C.

Análise (*a*) A vazão em massa da água através da bomba é

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (1\ \text{kg/L})(50\ \text{L/s}) = 50\ \text{kg/s}$$

O motor consome 15 kW de potência e tem eficiência de 90%. Assim, a potência mecânica (de eixo) que ele fornece à bomba é

$$\dot{W}_{\text{bomba, eixo}} = \eta_{\text{motor}} \dot{W}_{\text{elétrica}} = (0{,}90)(15\ \text{kW}) = 13{,}5\ \text{kW}$$

Para determinarmos a eficiência mecânica da bomba, precisamos conhecer o aumento da energia mecânica do fluido à medida que ele escoa através da bomba que é

$$\Delta \dot{E}_{\text{mec, perda}} = \dot{E}_{\text{mec, s}} - \dot{E}_{\text{mec, e}} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)$$

Simplificando e substituindo os valores dados, obtemos

$$\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}} = \dot{m}\left(\frac{P_2 - P_1}{\rho}\right) = (50\ \text{kg/s})\left(\frac{(300 - 100)\ \text{kPa}}{1000\ \text{kg/m}^3}\right)\left(\frac{1\ \text{kJ}}{1\ \text{kPa} \cdot \text{m}^3}\right) = 10\ \text{kW}$$

Assim, a eficiência mecânica da bomba torna-se

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba, }u}}{\dot{W}_{\text{bomba, eixo}}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{bomba, eixo}}} = \frac{10\ \text{kW}}{13{,}5\ \text{kW}} = \mathbf{0{,}741} \quad \text{ou} \quad \mathbf{74{,}1\%}$$

(*b*) Da potência mecânica de 13,5 kW fornecida pela bomba, apenas 10 kW são fornecidos ao fluido como energia mecânica. Os 3,5 kW restantes são convertidos em energia térmica devido aos efeitos do atrito, e essa energia mecânica "perdida" se manifesta como um efeito de aquecimento no fluido

$$\dot{E}_{\text{mec, perda}} = \dot{W}_{\text{bomba, eixo}} - \Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}} = 13{,}5 - 10 = 3{,}5\ \text{kW}$$

A elevação de temperatura da água devido a essa ineficiência mecânica é determinada pelo balanço da energia, $\dot{E}_{\text{mec, perda}} = \dot{m}(u_2 - u_1) = \dot{m}c\Delta T$. Isolando ΔT,

$$\Delta T = \frac{\dot{E}_{\text{mec, perda}}}{\dot{m}c} = \frac{3{,}5\ \text{kW}}{(50\ \text{kg/s})(4{,}18\ \text{kJ/kg} \cdot \text{°C})} = \mathbf{0{,}017°C}$$

Portanto, a água passará por uma elevação de temperatura de 0,017°C devido à ineficiência mecânica, que é muito pequena, à medida que escoa através da bomba.

Discussão Em uma aplicação real, a elevação de temperatura da água provavelmente será menor uma vez que parte do calor gerado será transferida para o invólucro da bomba e do invólucro para o ar vizinho. Se todo o motor da bomba fosse submerso em água, então o 1,5 kW dissipado para o ar devido à ineficiência do motor também seria transferido para a água circundante como calor. Isso faria com que a temperatura da água subisse mais.

EXEMPLO 5–13 Geração de Potência Hidrelétrica de uma Represa

Em uma usina hidrelétrica, 100 m³/s de água escoam de uma elevação de 120 m até uma turbina, onde a energia elétrica é gerada (Figura 5–55). A perda de carga irreversível total no sistema de tubulação do ponto 1 até o ponto 2 (excluindo a unidade da turbina) é determinada como 35 m. Se a eficiência geral da turbina/gerador for de 80%, estime a saída de potência elétrica.

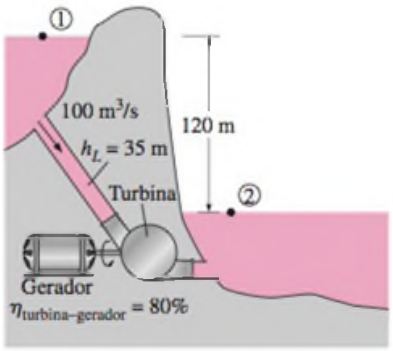


FIGURA 5–55
Esquema do Exemplo 5–13.

SOLUÇÃO A carga disponível, a vazão, a perda de carga e a eficiência de uma turbina hidrelétrica são dadas. A saída de potência elétrica deve ser determinada.
Hipóteses 1 O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** Os níveis de água da represa e do local de descarga permanecem constantes.
Propriedades Tomamos a densidade da água como 1000 kg/m³.
Análise A vazão de massa da água através da turbina é

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (1000 \text{ kg/m}^3)(100 \text{ m}^3/\text{s}) = 10^5 \text{ kg/s}$$

Tomamos o ponto 2 como o nível de referência e, portanto, $z_2 = 0$. Além disso, os pontos 1 e 2 são abertos para a atmosfera ($P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$) e as velocidades de escoamento são desprezíveis nos dois pontos ($V_1 = V_2 = 0$). Em seguida, a equação da energia para o escoamento em regime permanente e incompressível se reduz a

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, }u}^{\nearrow 0} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2^{\nearrow 0} + h_{\text{turbina, }e} + h_L \rightarrow$$

$$h_{\text{turbina, }e} = z_1 - h_L$$

Substituindo, a carga extraída da turbina e a potência correspondente da turbina são

$$h_{\text{turbina, }e} = z_1 - h_L = 120 - 35 = 85 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{\text{turbina, }e} = \dot{m} g h_{\text{turbina, }e} = (10^5 \text{ kg/s})(9{,}81 \text{ m/s}^2)(85 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}\right) = 83.400 \text{ kW}$$

Assim, uma unidade turbina-gerador perfeita geraria 83.400 kW de eletricidade dessa fonte. A energia elétrica gerada pela unidade real é

$$\dot{W}_{\text{elétrica}} = \eta_{\text{turbina–ger}} \dot{W}_{\text{turbina, }e} = (0{,}80)(83{,}4 \text{ MW}) = \mathbf{66{,}7 \text{ MW}}$$

Discussão Observe que a geração de potência aumentaria em quase 1 MW para cada melhora de 1% na eficiência da unidade turbina-gerador.

EXEMPLO 5–14 Seleção do Ventilador para Resfriamento do Ar de um Computador

Um ventilador deve ser selecionado para resfriar um gabinete de computador cujas dimensões são 12 cm × 40 cm × 40 cm (Figura 5–56). Metade do volume do gabinete deve ser preenchido com componentes e a outra metade será espaço com ar. Um orifício de 5 cm de diâmetro está disponível na parte traseira do gabinete para a instalação do ventilador que substituirá o ar nos espaços vazios do gabinete a cada segundo. Unidades combinadas ventilador-motor pequenas e de baixo consumo de energia estão disponíveis no mercado e sua eficiência é estimada em 30%. Determine (*a*) o consumo em watts da unidade ventilador-motor a ser comprada e (*b*) a diferença de pressão através do ventilador. Tome a densidade do ar como 1,20 kg/m³.

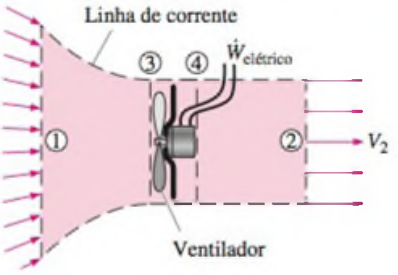


FIGURA 5–56
Esquema do Exemplo 5–14.

SOLUÇÃO Um ventilador deve resfriar um gabinete de computador substituindo completamente o ar interno uma vez a cada segundo. A potência do ventilador e a diferença de pressão devem ser determinadas.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** As perdas além daquelas devidas à ineficiência da unidade ventilador-motor são desprezíveis ($h_L = 0$). **3** O escoamento na saída é bastante uniforme, exceto próximo ao centro (devido à esteira do motor do ventilador), e o fator de correção da energia cinética na saída é de 1,10.

Propriedades A densidade do ar é dada como 1,20 kg/m³.

Análise (*a*) Observando que metade do volume do gabinete é ocupada pelos componentes, o volume de ar no gabinete do computador é

$$V = (\text{Fração vazia})(\text{Volume total do gabinete})$$
$$= 0{,}5(12\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 40\text{ cm}) = 9600\text{ cm}^3$$

Assim, as vazões de volume e massa do ar através do gabinete são

$$\dot{V} = \frac{V}{\Delta t} = \frac{9600\text{ cm}^3}{1\text{ s}} = 9600\text{ cm}^3/\text{s} = 9{,}6 \times 10^{-3}\text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (1{,}20\text{ kg/m}^3)(9{,}6 \times 10^{-3}\text{ m}^3/\text{s}) = 0{,}0115\text{ kg/s}$$

A área da seção transversal da abertura do gabinete e a velocidade média do ar através da saída são

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0{,}05\text{ m})^2}{4} = 1{,}96 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$

$$V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{9{,}6 \times 10^{-3}\text{ m}^3/\text{s}}{1{,}96 \times 10^{-3}\text{ m}^2} = 4{,}90\text{ m/s}$$

Desenhamos o volume de controle ao redor do ventilador, de forma que a entrada e a saída estejam à pressão atmosférica ($P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$), como mostra a Figura 5–56, e a seção da entrada 1 é grande e distante do ventilador, para que a velocidade de escoamento da seção de entrada seja desprezível ($V_1 \cong 0$). Observando que $z_1 = z_2$ e as perdas por atrito do escoamento foram desprezadas, as perdas mecânicas consistem apenas nas perdas do ventilador e a equação da energia (Equação 5–76) pode ser simplificada como

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1\frac{V_1^2}{2}^{\,0} + gz_1\right) + \dot{W}_{\text{vent}} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2\frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) + \dot{W}_{\text{turbina}}^{\,0} + \dot{E}_{\text{mec perda, vent}}$$

Isolando $\dot{W}_{\text{vent}} - \dot{E}_{\text{perda mec,vent}} = \dot{W}_{\text{vent},u}$ e substituindo

$$\dot{W}_{\text{vent},u} = \dot{m}\alpha_2\frac{V_2^2}{2} = (0{,}0115\text{ kg/s})(1{,}10)\frac{(4{,}90\text{ m/s})^2}{2}\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 0{,}152\text{ W}$$

Assim, a entrada de energia elétrica necessária no ventilador é determinada por

$$\dot{W}_{\text{elétrica}} = \frac{\dot{W}_{\text{vent},u}}{\eta_{\text{vent–motor}}} = \frac{0{,}152\text{ W}}{0{,}3} = \mathbf{0{,}506\text{ W}}$$

Portanto, um ventilador-motor com consumo nominal de meio watt é adequado para essa tarefa.

(*b*) Para determinarmos a diferença de pressão através da unidade do ventilador, consideramos os pontos 3 e 4 nos dois lados do ventilador em uma reta horizontal. Desta vez novamente $z_3 = z_4$ e $V_3 = V_4$, uma vez que o ventilador é uma seção transversal estreita, e a equação da energia se reduz a

$$\dot{m}\frac{P_3}{\rho} + \dot{W}_{\text{vent}} = \dot{m}\frac{P_4}{\rho} + \dot{E}_{\text{mec perda, vent}} \quad \rightarrow \quad \dot{W}_{\text{vent},u} = \dot{m}\frac{P_4 - P_3}{\rho}$$

Isolando $P_4 - P_3$ e substituindo

$$P_4 - P_3 = \frac{\rho\dot{W}_{\text{vent},u}}{\dot{m}} = \frac{(1{,}2\text{ kg/m}^3)(0{,}152\text{ W})}{0{,}0115\text{ kg/s}}\left(\frac{1\text{ Pa}\cdot\text{m}^3}{1\text{ Ws}}\right) = \mathbf{15{,}8\text{ Pa}}$$

Portanto, a elevação de pressão no ventilador é de 15,8 Pa.

Discussão A eficiência da unidade ventilador-motor é dada como 30%, o que significa que 30% da energia elétrica $\dot{W}_{\text{elétrica}}$ consumida pela unidade é convertida em energia mecânica útil, enquanto o restante (70%) se "perde" e é convertido em energia térmica. Além disso, um ventilador mais poderoso é necessário em um sistema real para superar as perdas por atrito dentro do gabinete do computador. Observe que se tivéssemos ignorado o fator de correção da energia cinética na saída, a energia elétrica necessária e a elevação de pressão teriam sido 10% menores neste caso (0,460 W e 14,4 Pa, respectivamente).

EXEMPLO 5–15 Perda de Carga e Potência Durante o Bombeamento da Água

A água é bombeada de um reservatório mais baixo até um reservatório mais alto por uma bomba que fornece 20 kW de potência mecânica útil para a água (Figura 5–57). A superfície livre do reservatório superior está 45 m acima da superfície do reservatório mais baixo. Se a vazão da água é medida como 0,03 m³/s, determine a perda de carga irreversível do sistema e a potência mecânica perdida durante esse processo.

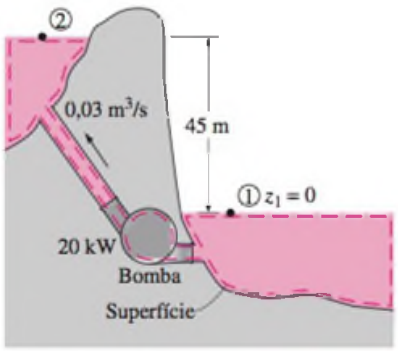


FIGURA 5–57
Esquema do Exemplo 5–15.

SOLUÇÃO A água é bombeada de um reservatório mais baixo para um reservatório mais alto. A perda de carga e potência associadas a esse processo devem ser determinadas.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** A diferença de elevação entre os reservatórios é constante.

Propriedades Tomamos a densidade da água como 1.000 kg/m³.

Análise A vazão de massa da água através do sistema é

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (1000\ \text{kg/m}^3)(0{,}03\ \text{m}^3/\text{s}) = 30\ \text{kg/s}$$

Selecionamos os pontos 1 e 2 das superfícies livres dos reservatórios inferior e superior, respectivamente, e tomamos a superfície do reservatório inferior como o nível de referência ($z_1 = 0$). Ambos os pontos estão abertos para a atmosfera ($P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$) e as velocidades em ambos os locais são desprezíveis ($V_1 = V_2 = 0$). Assim, a equação da energia do escoamento incompressível em regime permanente de um volume de controle entre 1 e 2 se reduz a

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2}^{\nearrow 0} + gz_1^{\nearrow 0}\right) + \dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2}^{\nearrow 0} + gz_2\right) + \dot{W}_{\text{turbina}}^{\nearrow 0} + \dot{E}_{\text{mec. perda}}$$

$$\dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{m}gz_2 + \dot{E}_{\text{mec. perda}} \quad \rightarrow \quad \dot{E}_{\text{mec. perda}} = \dot{W}_{\text{bomba}} - \dot{m}gz_2$$

Substituindo, a potência mecânica perdida e a perda de carga são determinadas por

$$\dot{E}_{\text{mec. perda}} = 20\ \text{kW} - (30\ \text{kg/s})(9{,}81\ \text{m/s}^2)(45\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{kW}}{1000\ \text{N} \cdot \text{m/s}}\right)$$

$$= \mathbf{6{,}76\ kW}$$

Observando que todas as perdas mecânicas devem-se às perdas por atrito na tubulação e, portanto, $\dot{E}_{\text{mec.perda}} = \dot{E}_{\text{mec.perda,tubulação}}$, a perda de carga irreversível é determinada por

$$h_L = \frac{\dot{E}_{\text{mec. perda, tubulação}}}{\dot{m}g} = \frac{6{,}76\ \text{kW}}{(30\ \text{kg/s})(9{,}81\ \text{m/s}^2)}\left(\frac{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right)\left(\frac{1000\ \text{N} \cdot \text{m/s}}{1\ \text{kW}}\right) = \mathbf{23{,}0\ m}$$

Discussão Os 6,76 kW de potência são usados para superar o atrito no sistema de tubulação. Observe que a bomba poderia elevar a água a outros 23 m se não houvesse perdas de carga irreversíveis no sistema. Nesse caso ideal, a bomba funcionaria como uma turbina quando a água pudesse escoar do reservatório superior para o reservatório inferior e extrairia 20 kW de potência da água.

RESUMO

Este capítulo aborda as equações de conservação de massa, de Bernoulli, e da conservação de energia e suas aplicações. A quantidade de massa que escoa através de uma seção transversal por unidade de tempo é chamada de *vazão de massa* e é expressa como

$$\dot{m} = \rho V A_c = \rho \dot{V}$$

onde ρ é a densidade, V é a velocidade média, $\dot{V}$ é a vazão do volume do fluido e A_c é a seção transversal normal à direção do escoamento. A relação de conservação da massa de um volume de controle é expressa por

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, dV + \int_{SC} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \sum_s \dot{m} - \sum_e \dot{m}$$

Ela informa que *a taxa de variação no tempo da massa dentro do volume de controle mais a vazão de massa total através da superfície de controle é igual a zero.*

Para dispositivos com escoamento em regime permanente, o princípio de conservação da massa é expresso por

Escoamento em regime permanente: $\sum_e \dot{m} = \sum_s \dot{m}$

Escoamento em regime permanente (corrente única):

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Escoamento em regime permanente, incompressível: $\sum_e \dot{V} = \sum_s \dot{V}$

Escoamento em regime permanente, incompressível (corrente única):

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2$$

A *energia mecânica* é a forma de energia associada à velocidade, elevação e pressão do fluido, e pode ser convertida completa e diretamente em trabalho mecânico por um dispositivo mecânico ideal. As eficiências dos diversos dispositivos são definidas por

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{eixo, e}}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba, u}}}{\dot{W}_{\text{bomba}}}$$

$$\eta_{\text{turbina}} = \frac{\dot{W}_{\text{eixo, s}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{turbina}}}{\dot{W}_{\text{turbina, e}}}$$

$$\eta_{\text{motor}} = \frac{\text{Saída de energia mecânica}}{\text{Entrada de potência elétrica}} = \frac{\dot{W}_{\text{eixo, s}}}{\dot{W}_{\text{elétrica, e}}}$$

$$\eta_{\text{gerador}} = \frac{\text{Saída de potência elétrica}}{\text{Entrada de potência mecânica}} = \frac{\dot{W}_{\text{elétrica, s}}}{\dot{W}_{\text{eixo, e}}}$$

$$\eta_{\text{bomba-motor}} = \eta_{\text{bomba}}\eta_{\text{motor}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{elétrica, e}}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba, u}}}{\dot{W}_{\text{elétrica, e}}}$$

$$\eta_{\text{turbina-ger}} = \eta_{\text{turbina}}\eta_{\text{gerador}} = \frac{\dot{W}_{\text{elétrica, s}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{elétrica, s}}}{\dot{W}_{\text{turbina, e}}}$$

A *equação de Bernoulli* é uma relação entre pressão, velocidade e elevação no escoamento em regime permanente e incompressível, e é expressa ao longo de uma linha de corrente e nas regiões nas quais as forças totais viscosas são desprezíveis por

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Ela também pode ser expressa entre dois pontos quaisquer em uma linha de corrente como

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

A equação de Bernoulli é uma expressão do balanço de energia mecânica e pode ser enunciada como: *a soma das energias cinética, potencial e de escoamento de uma partícula de fluido é constante ao longo de uma linha de corrente durante um escoamento em regime permanente quando os efeitos da compressibilidade e do atrito são desprezíveis.* Multiplicando a equação de Bernoulli pela densidade temos

$$P + \rho\frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{constante}$$

onde P é a *pressão estática* que representa a pressão real do fluido; $\rho V^2/2$ é a *pressão dinâmica,* que representa a elevação de pressão quando o movimento do fluido é interrompido, e ρgz é a *pressão hidrostática,* que representa os efeitos do peso do fluido sobre a pressão. A soma das pressões estática, dinâmica e hidrostática é chamada de *pressão total.* A equação de Bernoulli afirma que a *pressão total ao longo de uma linha de corrente é constante.* A soma das pressões estática e dinâmica é chamada de *pressão de estagnação,* a qual representa a pressão em um ponto no qual o fluido parou totalmente sem nenhum atrito. A equação de Bernoulli também pode ser representada em termos de "cargas", dividindo cada termo por g

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{constante}$$

onde $P/\rho g$ é a *carga da pressão*, que representa a altura de uma coluna de fluido que produz a pressão estática P; $V^2/2g$ é a *carga de velocidade* que representa a elevação necessária para que um fluido atinja a velocidade V durante a queda livre sem atrito e z é a *carga de elevação* que representa a energia potencial do fluido. Além disso, H é a *carga total* do escoamento. A linha que representa a soma da pressão estática e das cargas de elevação, $P/\rho g + z$, é chamada de *linha piezométrica* (HGL), e a linha que representa a carga total do fluido, $P/\rho g + V2/2g + z$, é chamada de *linha de energia* (EGL).

A *equação de conservação da energia* do escoamento em regime permanente e incompressível pode ser expressa como

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, u}} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, e}} + h_L$$

onde

$$h_{\text{bomba, }u} = \frac{w_{\text{bomba, }u}}{g} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba, }u}}{\dot{m}g} = \frac{\eta_{\text{bomba}}\dot{W}_{\text{bomba}}}{\dot{m}g}$$

$$h_{\text{turbina, }e} = \frac{w_{\text{turbina, }e}}{g} = \frac{\dot{W}_{\text{turbina, }e}}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_{\text{turbina}}}{\eta_{\text{turbina}}\dot{m}g}$$

$$h_L = \frac{e_{\text{mec. perda, tubulação}}}{g} = \frac{\dot{E}_{\text{mec. perda, tubulação}}}{\dot{m}g}$$

$$e_{\text{mec. perda}} = u_2 - u_1 - q_{\text{tot e}}$$

As equações de conservação de massa, de Bernoulli e da energia são três das relações mais fundamentais da mecânica dos fluidos, e elas serão muito utilizadas nos próximos capítulos. No Capítulo 6, ou a equação de Bernoulli ou a equação de conservação da energia serão usadas juntamente com as equações de conservação de massa e momento para determinar as forças e os torques que atuam sobre os sistemas de fluidos. Nos Capítulos 8 e 14, as equações de conservação de massa e energia serão usadas para determinar os requisitos da potência de bombeamento em sistemas de fluidos e no projeto e análise da turbomaquinaria. Nos Capítulos 12 e 13, a equação de conservação de energia também será usada até certo ponto na análise do escoamento compressível e do escoamento de canal aberto.

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. C. T. Crowe, J. A. Roberson e D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*, 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
2. R. C. Dorf, ed. chefe. *The Engineering Handbook*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
3. B. R. Munson, D. F. Young e T. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4. ed. Nova Iorque: Wiley, 2002.
4. R. L. Panton. *Incompressible Flow*, 2. ed. Nova Iorque: Wiley, 1996.
5. M. C. Potter e D. C. Wiggert. *Mechanics of Fluids*, 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
6. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.

PROBLEMAS*

Conservação de Massa

5–1C Cite quatro quantidades físicas que são conservadas e duas quantidades que não são conservadas durante um processo.

5–2C Defina as vazões de massa e de volume. Como elas estão relacionadas entre si?

5–3C A quantidade de massa que entra em um volume de controle precisa ser igual à massa que sai durante um processo com escoamento em regime permanente?

5–4C Quando o escoamento através de um volume de controle é em regime permanente?

5–5C Considere um dispositivo com uma entrada e uma saída. Se as vazões em volume na entrada e na saída são iguais, o escoamento através desse dispositivo é necessariamente em regime permanente? Por quê?

5–6 Ar entra em um bocal de forma constante a 2,21 kg/m³ e 30 m/s e sai a 0,762 kg/m³ e 180 m/s. Se a área de entrada do bocal é de 80 cm², determine (*a*) a vazão em massa através do bocal e (*b*) a área de saída do bocal.

Respostas: (a) 0,530 kg/s, *(b)* 38,7 cm²

5–7 Um secador de cabelos é basicamente um duto com diâmetro constante no qual são colocadas algumas camadas de resistores elétricos. Um ventilador pequeno empurra o ar para dentro e o força a passar através dos resistores, onde ele é aquecido. Se a densidade do ar é de 1,20 kg/m³ na entrada e de 1,05 kg/m³ na saída, determine o aumento percentual na velocidade do ar quando ele escoa através do secador.

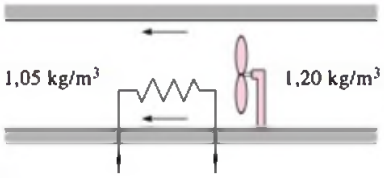


FIGURA P5–7

5–8 Um tanque rígido de 1 m³ contém inicialmente ar, cuja densidade é 1,18 kg/m³. O tanque é conectado a uma linha fornecedora de alta pressão por meio de uma válvula. A válvula é aberta e o ar pode entrar no tanque até que a densidade do ar no tanque se eleve a 7,20 kg/m³. Determine a massa do ar que entrou no tanque. *Resposta:* 6,02 kg

5–9 O ventilador do banheiro de um prédio tem uma vazão de volume de 30 L/s e funciona continuamente. Se a densidade do ar interno é de 1,20 kg/m³, determine a massa do ar que é expelida ou que sai em um dia.

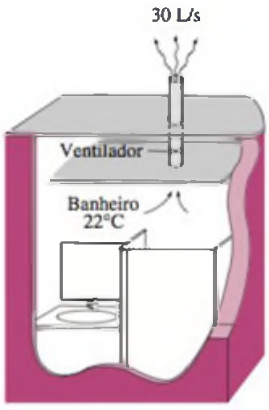


FIGURA P5–9

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

5–10 Um computador pessoal deve ser resfriado por um ventilador cuja vazão é de 0,34 m³/min. Determine a vazão de massa do ar através do ventilador a uma elevação de 3.400 m, onde a densidade do ar é de 0,7 kg/m³. Da mesma forma, se a velocidade média do ar não exceder os 110 m/min, determine o diâmetro do gabinete do ventilador.

Respostas: 0,238 kg/min, 0,063 m

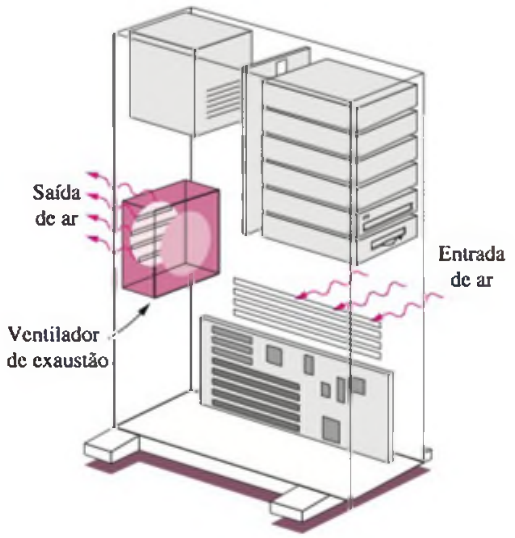


FIGURA P5–10

5–11 Uma sala para fumantes deve acomodar 15 pessoas que fumam bastante. Os requisitos mínimos de ar fresco para salas de fumantes são especificados como 30 L/s por pessoa (ASHRAE, Standard 62, 1989). Determine a vazão mínima necessária de ar fresco que precisa ser fornecida à sala e o diâmetro do duto se a velocidade do ar não exceder os 8 m/s.

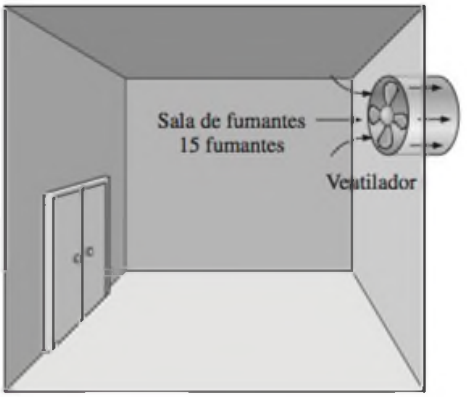


FIGURA P5–11

5–12 Os requisitos mínimos de ar fresco de um prédio residencial são especificados como 0,35 de troca de ar por hora (ASHRAE, Standard 62, 1989). Ou seja, 35% de todo o ar contido em uma residência deve ser substituído por ar externo fresco a cada hora. Se a necessidade de ventilação de uma residência com 2,7 m de altura e 200 m² deve ser satisfeita completamente por um ventilador, determine a capacidade de escoamento em L/min do ventilador que precisa ser instalado. Determine também o diâmetro do duto se a velocidade do ar não exceder os 6 m/s.

Energia e Eficiência Mecânicas

5–13C O que é energia mecânica? Em que ela difere da energia térmica? Quais são as formas de energia mecânica de uma corrente de fluido?

5–14C O que é eficiência mecânica? O que significa uma eficiência mecânica de 100% para uma turbina hidráulica?

5–15C Como é definida a eficiência combinada bomba-motor de um sistema de bomba e motor? A eficiência combinada da bomba-motor pode ser maior do que a eficiência individual da bomba ou do motor?

5–16C Defina eficiência de turbina, eficiência de gerador e eficiência combinada de turbina-gerador.

5–17 Considere um rio que corre na direção de um lago a velocidade média de 3 m/s e vazão de 500 m³/s em um local 90 m acima da superfície do lago. Determine a energia mecânica total da água do rio por unidade de massa e o potencial de geração de energia do rio inteiro naquele local.

Resposta: 444 MW

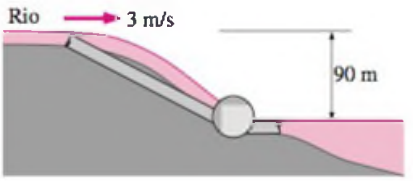


FIGURA P5–17

5–18 A energia elétrica deve ser gerada pela instalação de uma turbina gerador-hidráulica em um local 70 m abaixo da superfície livre de um grande reservatório de água que pode fornecer água a uma vazão de 1500 kg/s de forma constante. Se a geração de potência mecânica da turbina é 800 kW e a geração de potência elétrica é 750 kW, determine a eficiência da turbina e a eficiência combinada do gerador-turbina dessa instalação. Despreze as perdas nos tubos.

5–19 Em determinado local, o vento sopra em regime permanente a 12 m/s. Determine a energia mecânica do ar por unidade de massa e o potencial de geração de potência de uma turbina de vento com lâminas de 50 m de diâmetro naquele local. Determine também a geração real de potência elétrica, considerando uma eficiência geral de 30%. Considere a densidade do ar 1,25 kg/m³.

5–20 Reconsidere o Problema 5–19. Usando o aplicativo EES (ou outro), investigue o efeito da velocidade do vento e o diâmetro de abrangência da lâmina sobre a geração de potência eólica. Faça a velocidade variar de 5 m/s a 20 m/s em incrementos de 5 m/s, e o diâmetro variar de 20 m a 80 m em incrementos de 20 m. Tabule os resultados e discuta seu significado.

5–21 A água é bombeada de um lago para um tanque de armazenamento 20 m acima a uma vazão de 70 L/s e consome 20,4 kW de energia elétrica. Desprezando as perdas por atrito nos tubos e todas as variações da energia cinética, determine (*a*) a eficiência geral da unidade bomba-motor e (*b*) a diferença de pressão entre a entrada e a saída da bomba.

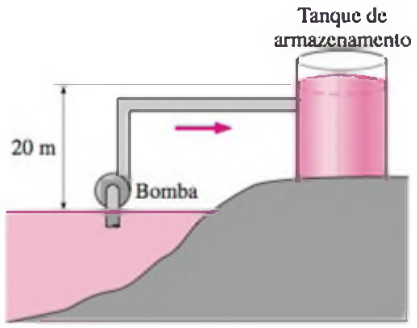


FIGURA P5–21

Equação de Bernoulli

5–22C O que é aceleração na direção da linha de corrente? Em que ela difere da aceleração normal? Uma partícula de fluido pode acelerar em um escoamento em regime permanente?

5–23C Expresse a equação de Bernoulli de três maneiras diferentes usando (*a*) as energias, (*b*) as pressões e (*c*) as cargas.

5–24C Quais são as três hipóteses principais usadas na dedução da equação de Bernoulli?

5–25C Defina pressão estática, dinâmica e hidrostática. Sob quais condições a soma é constante para uma corrente de escoamento?

5–26C O que é pressão de estagnação? Explique como ela pode ser medida.

5–27C Defina a carga de pressão, a carga de velocidade e a carga de elevação para uma corrente de fluido e expresse-as para uma corrente de fluido cuja pressão é P, a velocidade é V e a elevação é z.

5–28C O que é linha piezométrica? Em que ela difere da linha de energia? Sob quais condições ambas as linhas coincidem com a superfície livre de um líquido?

5–29C Como a localização da linha piezométrica é determinada no escoamento de canal aberto? Como ela é determinada na saída de um cano que descarrega na atmosfera?

5–30C O nível de água de um tanque no telhado de um prédio está 20 m acima do solo. Uma mangueira vai da parte inferior do tanque até o solo. O final da mangueira tem um bocal, que aponta diretamente para cima. Qual é a altura máxima até a qual a água poderia subir? Quais fatores reduziriam essa altura?

5–31C Em determinada aplicação, um sifão deve passar sobre uma parede alta. A água ou o óleo com gravidade específica de 0,8 pode passar sobre uma parede mais alta? Por quê?

5–32C Explique como e por que um sifão funciona. Alguém propõe passar com sifão água fria sobre uma parede com 7 m de altura. Isso é possível? Explique.

5–33C Uma aluna usa um sifão para passar água sobre uma parede com 8,5 m de altura no nível do mar. Em seguida, ele sobe no pico do Monte Shasta (elevação de 4.390 m, P_{atm} = 58,5 kPa) e tenta realizar a mesma experiência. Comente suas perspectivas de sucesso.

5–34C Um manômetro de vidro com óleo como fluido de trabalho foi conectado a um duto de ar como mostra a Figura P5–34C. O óleo do manômetro se moverá como na Figura P5–34C*a* ou *b*? Explique. Qual seria sua resposta se a direção do escoamento fosse invertida?

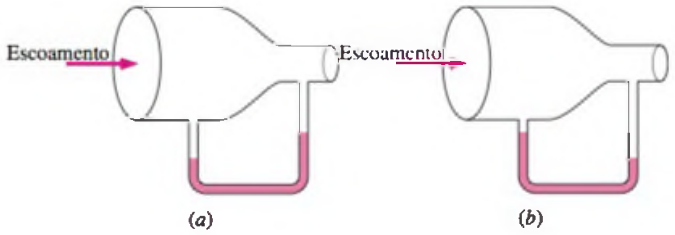


FIGURA P5–34C

5–35C A velocidade de um fluido que escoa em um tubo deve ser medida por dois manômetros de mercúrio do tipo Pitot diferentes, mostrados na Figura P5–35C. Você esperaria a mesma velocidade para o escoamento da água nos dois manômetros? Caso contrário, qual seria a opção mais exata? Explique. Qual seria sua resposta se ar escoasse no tubo em vez da água?

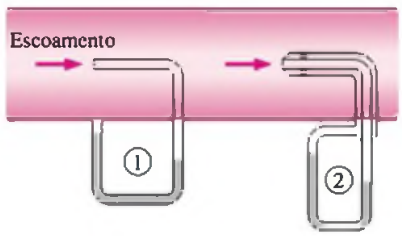


FIGURA P5–35C

5–36 Em climas frios, os tubos de água podem congelar e estourar se não forem tomadas medidas preventivas. Nesse caso, a parte exposta de um tubo no solo se rompe, e a água sobe até 34 m. Estime a pressão manométrica da água no tubo. Siga as suas hipóteses e discuta se a pressão real é maior ou menor do que o valor que você previu.

5–37 Uma sonda estática de Pitot é usada para medir a velocidade de um avião que voa a 3000 m. Se a leitura da pressão diferencial for de 3 kPa, determine a velocidade do avião.

5–38 Ao viajar em uma estrada suja, a parte inferior de um carro atinge uma pedra e um pequeno furo aparece na parte inferior do tanque de gasolina. Se altura da gasolina no tanque for de 30 cm, determine a velocidade inicial da gasolina no orifício. Discuta como a velocidade mudará com o tempo e como o escoamento será afetado se a tampa do tanque estiver hermeticamente fechada.

Resposta: 2,43 m/s

5–39 Um piezômetro e um tubo de Pitot são colocados em uma tubulação de água horizontal com 3 cm de diâmetro, e a altura das colunas d'água são medidas como 20 cm no piezômetro e 35 cm no tubo de Pitot (ambos medidos da superfície superior do tubo). Determine a velocidade no centro do tubo.

5–40 O diâmetro de um tanque de água cilíndrico é D_o e sua altura é H. O tanque é enchido com água e está aberto para a atmosfera. Um orifício de diâmetro D com uma entrada uniforme (ou seja, sem perdas) é aberto na parte inferior. Desenvolva uma relação para o tempo necessário para que o tanque (*a*) esvazie até a metade e (*b*) esvazie completamente.

5–41 Um tanque pressurizado de água tem um orifício de 10 cm de diâmetro na parte inferior, onde a água é descarregada para a atmosfera. O nível da água está 3 m acima da saída. A

pressão do ar do tanque acima do nível da água é de 300 kPa (absoluta) enquanto a pressão atmosférica é de 100 kPa. Desprezando os efeitos do atrito, determine a vazão de descarga inicial da água do tanque.

Resposta: 0,168 m^3/s

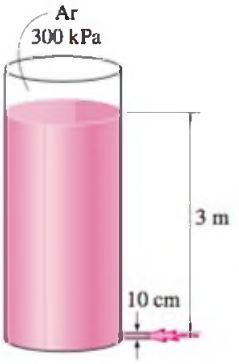


FIGURA P5–41

5–42 Reconsidere o Problema 5–41. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito da altura da água do tanque sobre a velocidade de descarga. Faça a altura da água variar de 0 a 5 m em incrementos de 0,5 m. Tabule e represente graficamente os resultados.

5–43 A água entra em um tanque com diâmetro D_T de forma constante a uma vazão de massa de $\dot{m}_e$. Um orifício na parte inferior com diâmetro D_o permite que a água escape. O orifício tem uma entrada arredondada, de modo que as perdas por atrito são desprezíveis. Se o tanque está inicialmente vazio, (*a*) determine a altura máxima que a água atingirá no tanque e (*b*) obtenha uma relação para a altura da água z como função do tempo.

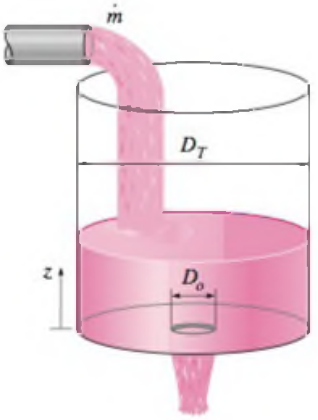


FIGURA P5–43

5–44 Um avião voa a uma altitude de 12.000 m. Determine a pressão manométrica no ponto de estagnação no nariz do avião se a velocidade for de 200 km/h. Como você solucionaria este problema para uma velocidade de 1050 km/h? Explique.

5–45 A velocidade do ar no duto de um sistema de aquecimento deve ser medida por uma sonda estática de Pitot inserida no duto paralelamente ao escoamento. Se a altura diferencial entre as colunas d´água conectadas às duas saídas da sonda é de 2,4 cm, determine (*a*) a velocidade de escoamento e (*b*) a elevação da pressão na ponta da sonda. A temperatura e pressão do ar no duto são de 45°C e 98 kPa, respectivamente.

5–46 A água em uma piscina acima do solo com 10 m de diâmetro e 2 m de altura deve ser esvaziada destampando um tubo horizontal com 3 cm de diâmetro e 25 m de comprimento anexado à parte inferior da piscina. Determine a vazão máxima de descarga da água através do tubo. Explique também por que a vazão real será menor.

5–47 Reconsidere o Problema 5–46. Determine em quanto tempo a piscina será esvaziada completamente.

Resposta: 19,7 h

5–48 Reconsidere o Problema 5–47. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito do diâmetro do tubo de descarga sobre o tempo necessário para esvaziar completamente a piscina. Faça o diâmetro variar de 1 cm a 10 cm em incrementos de 1 cm. Tabule e represente graficamente os resultados.

5–49 Ar a 110 kPa e 50°C escoa para cima através de um duto inclinado com 6 cm de diâmetro a uma vazão de 45 L/s. O diâmetro do duto é reduzido para 4 cm por meio de um redutor. A variação de pressão através do redutor é medida por um manômetro de água. A diferença de elevação entre os dois pontos do tubo onde os dois braços do manômetro estão ligados é de 0,20 m. Determine a altura diferencial entre os níveis de fluido dos dois braços do manômetro.

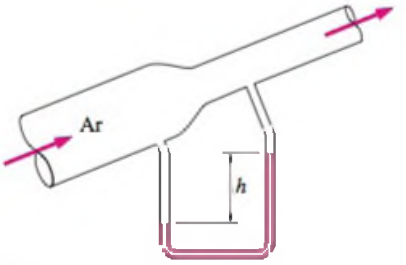


FIGURA P5–49

5–50 A pressão manométrica da água nos reservatórios de uma cidade em determinado local é de 400 kPa. Determine se esse reservatório pode fornecer água para vizinhança que está 50 m acima desse local.

5–51 Uma bomba manual de bicicleta pode ser usada como um atomizador para gerar uma névoa fina de tinta ou pesticida forçando o ar a uma alta velocidade através de um pequeno orifício e colocando um tubo curto entre o reservatório de líquido e o jato de ar a alta velocidade cuja baixa pressão move o líquido para cima através do tubo. Em tal atomizador, o diâmetro do orifício é de 0,3 cm, a distância vertical entre o nível do líquido do tubo e o orifício é de 10 cm, e a perfuração (diâmetro) e o movimento da bomba de ar são de 5 cm e 20 cm, respectivamente. Se as condições atmosféricas são de 20°C e 95 kPa, determine a velocidade mínima com a qual o pistão deve se mover no cilindro durante o bombeamento para iniciar o efeito de atomização. O reservatório de líquido é aberto para a atmosfera.

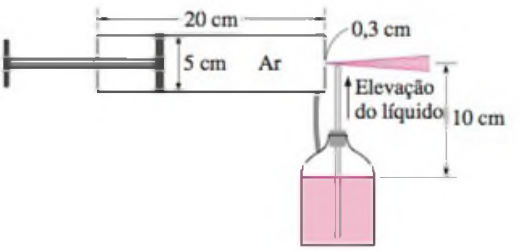


FIGURA P5–51

5–52 O nível da água em um tanque é de 20 m acima do solo. Uma mangueira está conectada à parte inferior do tanque, e o bocal no final da mangueira aponta diretamente para cima. A tampa do tanque é hermética e a pressão manométrica do ar acima da superfície da água é de 2 atm. O sistema está no nível do mar. Determine a altura máxima até a qual a corrente de água pode chegar.

Resposta: 40,7 m

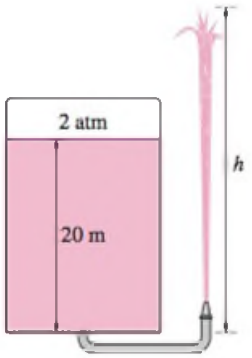


FIGURA P5–52

5–53 Uma sonda estática de Pitot conectada a um manômetro de água é usada para medir a velocidade do ar. Se a deflexão (a distância vertical entre os níveis de fluido nos dois braços) for de 7,3 cm, determine a velocidade do ar. Considere a densidade do ar como 1,25 kg/m^3.

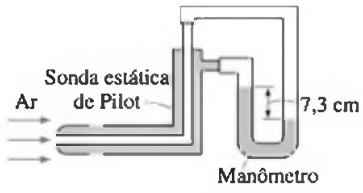


FIGURA P5–53

5–54 Em uma usina hidrelétrica, a água entra nos bocais da turbina a 700 kPa absoluta com baixa velocidade. Se as saídas do bocal são expostas à pressão atmosférica de 100 kPa, determine a velocidade máxima com a qual a água pode ser acelerada pelos bocais antes de atingir as lâminas da turbina.

Equação da Energia

5–55C Considere o escoamento adiabático em regime permanente de um fluido incompressível. A temperatura do fluido pode diminuir durante o escoamento? Explique.

5–56C Considere o escoamento adiabático em regime permanente de um fluido incompressível. Se a temperatura do fluido permanecer constante durante o escoamento, é correto dizer que os efeitos do atrito são desprezíveis?

5–57C O que é perda de carga irreversível? Como ela se relaciona à perda de energia mecânica?

5–58C O que é carga de bomba útil? Como ela se relaciona à entrada de potência na bomba?

5–59C Qual é o fator de correção da energia cinética? Ele é significativo?

5–60C O nível da água de um tanque é de 20 m acima do solo. Uma mangueira está conectada à parte inferior do tanque, e o bocal no final da mangueira aponta diretamente para cima. Observa-se que a corrente de água do bocal se eleva 25 m acima do solo. Explique o que pode fazer com que a água da mangueira se eleve acima do nível do tanque.

5–61 A água subterrânea deve ser bombeada por uma bomba submersa de 3 kW e eficiência de 70% para uma piscina cuja superfície livre está 30 m acima do nível da água subterrânea. O diâmetro do tubo é de 7 cm no lado da entrada e 5 cm no lado da descarga. Determine (*a*) a vazão máxima da água e (*b*) a diferença de pressão através da bomba. Suponha que a diferença de elevação entre a entrada e a saída da bomba e o efeito dos fatores de correção da energia cinética sejam desprezíveis.

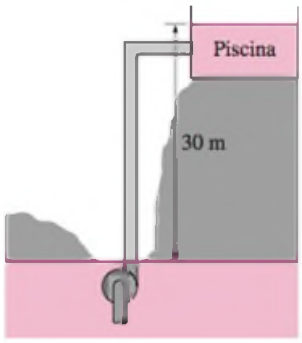


FIGURA P5–61

5–62 Reconsidere o Problema 5–61. Determine a vazão da água e a diferença de pressão através da bomba se a perda de carga irreversível do sistema de tubulação for de 5 m.

5–63 Um ventilador deve ser selecionado para ventilar um banheiro cujas dimensões são de 2 m × 3 m × 3 m. A velocidade do ar não deve exceder 8 m/s para minimizar o ruído e a vibração. A eficiência combinada da unidade ventilador-motor pode ser considerada 50%. Se o ventilador deve substituir todo o volume do ar em 10 min, determine (*a*) a voltagem da unidade ventilador-motor a ser comprada, (*b*) o diâmetro do gabinete do ventilador e (*c*) a diferença de pressão através do ventilador. Considere a densidade do ar como 1,25 kg/m^3 e despreze o efeito dos fatores de correção da energia cinética.

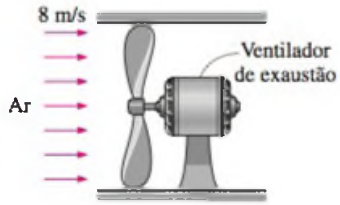


FIGURA P5–63

5–64 A água está sendo bombeada de um grande lago para um reservatório 25 m acima a uma vazão de 25 L/s por uma bomba de 10 kW (eixo). Se a perda de carga irreversível do sistema de tubulação for de 7 m, determine a eficiência mecânica da bomba.

Resposta: 78,5%

5–65 Reconsidere o Problema 5–64. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito da perda de carga irreversível sobre a eficiência mecânica da bomba. Faça a perda de carga variar de 0 a 15 m em incrementos de 1 m. Represente graficamente e discuta os resultados.

5–66 Uma bomba de 7 hp (eixo) é usada para elevar a água até 15 m de altura. Se a eficiência mecânica da bomba for de 82%, determine a vazão de volume máxima da água.

5–67 A água escoa a uma vazão de 0,035 m^3/s em um tubo horizontal cujo diâmetro é reduzido de 15 cm para 8 cm por um redutor. Se a pressão no eixo central for medida como 470 kPa e 440 kPa antes e depois do redutor, respectivamente, determine a perda de carga irreversível no redutor. Considere os fatores de correção da energia cinética como 1,05.
Resposta: 0,68 m

5–68 O nível da água em um tanque é de 20 m acima do solo. Uma mangueira está conectada à parte inferior do tanque, e o bocal no final da mangueira aponta diretamente para cima. O tanque está no nível do mar e a superfície da água é aberta para a atmosfera. Na tubulação que vai do tanque até o bocal há uma bomba que aumenta a pressão da água. Se o jato de água subir até uma altura de 27 m do solo, determine a elevação mínima de pressão fornecida pela bomba para tubulação d'água.

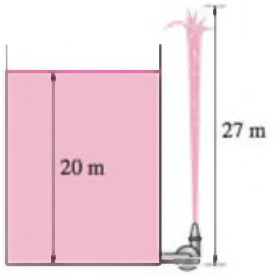


FIGURA P5–68

5–69 Uma turbina hidráulica tem 85 m de carga disponível a uma vazão de 0,25 m^3/s, e sua eficiência geral de turbina-gerador é de 78%. Determine a energia elétrica resultante dessa turbina.

5–70 A demanda de energia elétrica em geral é muito mais alta durante o dia do que à noite, e as empresas de fornecimento de energia vendem a energia elétrica noturna com preços muito mais baixos para incentivar os consumidores a usar a capacidade de geração de energia disponível, e evitar a construção de usinas novas e caras que serão usadas apenas durante pouco tempo nos períodos de pico. As empresas de serviços públicos também estão dispostas a comprar a energia elétrica produzida durante o dia de empresas privadas a um preço alto.

Suponhamos que uma empresa de serviços públicos venda a energia elétrica por \$0,03/kWh à noite e esteja disposta a pagar \$0,08/kWh pela energia elétrica produzida durante o dia. Para aproveitar essa oportunidade, um empresário está pensando em construir um grande reservatório 40 m acima do nível de um lago, bombeando a água do lago para o reservatório à noite utilizando energia elétrica barata e deixando a água escoar do reservatório para o lago durante o dia, produzindo potência enquanto a bomba a motor opera como um gerador à turbina durante o escoamento inverso. A análise preliminar mostra que uma vazão de água de 2 m^3/s pode ser usada em qualquer direção, e que a perda de carga irreversível do sistema de tubulação é de 4 m. As eficiências combinadas de bomba-motor e turbina-gerador devem ser de 75% cada uma. Considerando que o sistema opera por 10 h em cada um dos modos de bomba e turbina durante um dia típico, determine a receita potencial que esse sistema de bomba e turbina pode gerar por ano.

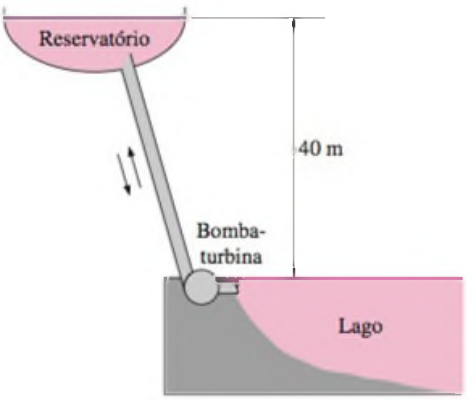


FIGURA P5–70

5–71 A água escoa a uma vazão de 20 L/s através de um tubo horizontal cujo diâmetro, constante, é de 3 cm. A queda de pressão através de uma válvula do tubo é medida como 2 kPa. Determine a perda de carga irreversível da válvula, e a potência de bombeamento útil necessária para superar a queda de pressão resultante. *Respostas:* 0,204 m, 40 W

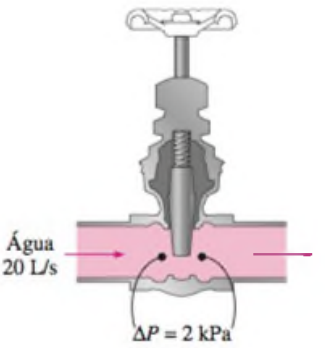


FIGURA P5–71

5–72 Um tanque grande inicialmente está preenchido com água até 2 m acima do centro de um orifício com diâmetro de 10 cm e ponta afiada. A superfície da água do tanque é aberta para a atmosfera e o orifício drena para a atmosfera. Se a perda de carga irreversível total no sistema for 0,3 m, determine a velocidade da descarga inicial de água do tanque. Considere o fator de correção da energia cinética no orifício como 1,2.

5–73 A água entra em uma turbina hidráulica por meio de um tubo com 30 cm de diâmetro a uma vazão de 0,6 m^3/s e sai através de um tubo com 25 cm de diâmetro. A queda de pressão na turbina é medida por um manômetro de mercúrio como 1,2 m. Para uma eficiência combinada de turbina-gerador de 83%, determine o resultado total de potência elétrica. Despreze o efeito dos fatores de correção da energia cinética.

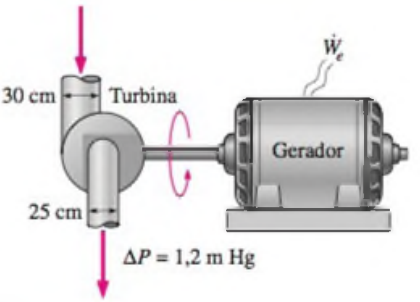


FIGURA P5–73

5–74 O perfil de velocidade do escoamento turbulento em um tubo circular é aproximado por $u(r) = u_{máx}(1 - r/R)^{1/n}$, onde $n = 7$. Determine o fator de correção da energia cinética para esse escoamento. *Resposta:* 1,06

5–75 Uma bomba de óleo consome 35 kW de energia elétrica enquanto bombeia óleo com $\rho = 860$ kg/m^3 a uma vazão de 0,1 m^3/s. Os diâmetros de entrada e saída do tubo são 8 cm e 12 cm, respectivamente. Se a elevação da pressão do óleo na bomba for medida como 400 kPa e a eficiência do motor for de 90%, determine a eficiência mecânica da bomba. Considere o fator de correção da energia cinética como 1,05.

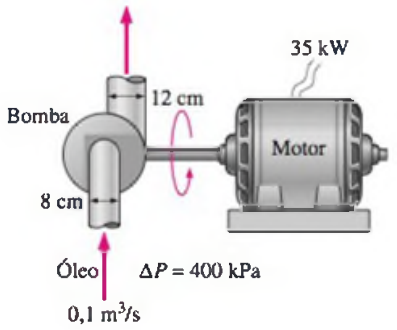


FIGURA P5–75

5–76 Uma embarcação de combate a incêndios deve trabalhar nas áreas costeiras retirando água do mar com uma densidade de 1030 kg/m^3 por meio de um tubo com 20 cm de diâmetro a uma vazão de 0,1 m^3/s e descarregando-a por meio do bocal de uma mangueira com diâmetro de saída de 5 cm. A perda de carga irreversível total do sistema é de 3 m, e a posição do bocal está 4 m acima do nível do mar. Para uma eficiência de bomba de 70%, determine a entrada necessária de potência de eixo na bomba e a velocidade de descarga da água.
Respostas: 201 kW; 50,9 m/s

FIGURA P5–76

Problemas de Revisão

5–77 Um tanque com diâmetro $D_0 = 10$ m inicialmente está cheio com água até 2 m acima do centro de uma válvula com diâmetro $D = 10$ cm próxima à parte inferior. A superfície do tanque está aberta para a atmosfera e o tanque é drenado por meio de um tubo com comprimento de $L = 100$ m conectado à válvula. O fator de atrito do tubo é dado por $f = 0{,}015$ e a velocidade de descarga é expressa por $V = \sqrt{\dfrac{2gz}{1.5 + fL/D}}$, onde z é a altura da água acima do centro da válvula. Determine (*a*) a velocidade inicial de descarga do tanque e (*b*) o tempo necessário para esvaziar o tanque. O tanque pode ser considerado vazio quando o nível da água cai até o centro da válvula.

5–78 Água subterrânea está sendo bombeada para uma piscina cuja seção transversal tem 3 m × 4 m enquanto a água é descarregada através de um orifício com 5 cm de diâmetro à velocidade média constante de 5 m/s. Se o nível da água na piscina subir a uma vazão de 1,5 cm/min, determine a vazão com a qual a água é fornecida para a piscina em m^3/s.

5–79 A velocidade de um líquido que escoa em um tubo circular de raio R varia de zero na parede até o máximo no centro do tubo. A distribuição da velocidade no tubo pode ser representada por $V(r)$, onde r é a distância radial a partir do centro do tubo. Com base na definição da vazão de massa $\dot{m}$, obtenha uma relação para a velocidade média em termos de $V(r)$, R e r.

5–80 Ar a 4,18 kg/m^3 entra em um bocal que tem relação entre área de entrada e saída de 2:1 com uma velocidade de 120 m/s e sai com uma velocidade de 380 m/s. Determine a densidade do ar na saída.
Resposta: 2,64 kg/m^3

5–81 O ar de uma sala de hospital com 6 m × 5 m × 4 m deve ser totalmente substituído por ar-condicionado a cada 20 min. Se a velocidade média do ar no duto de ar circular que leva até a sala não deve exceder 5 m/s, determine o diâmetro mínimo do duto.

5–82 Um tanque pressurizado de água com 2 m de diâmetro tem um orifício com 10 cm de diâmetro na parte inferior, onde a água é descarregada para a atmosfera. Inicialmente o nível da água está 3 m acima da saída. A pressão do ar no tanque acima do nível da água é mantida a 450 kPa absoluta e a pressão atmosférica é de 100 kPa. Desprezando os efeitos do atrito, determine (*a*) o tempo necessário para que metade da água do tanque seja descarregada e (*b*) o nível da água no tanque após 10 s.

5–83 O ar escoa através de um tubo a uma vazão de 200 L/s. O tubo consiste em duas seções com diâmetros de 20 cm e 10 cm com uma seção de redução suave que as conecta. A diferença de pressão entre as duas seções do tubo é medida por um manômetro de água. Desprezando os efeitos do atrito, determine a altura diferencial da água entre as duas seções do tubo. Considere a densidade do ar 1,20 kg/m^3.
Resposta: 3,7 cm

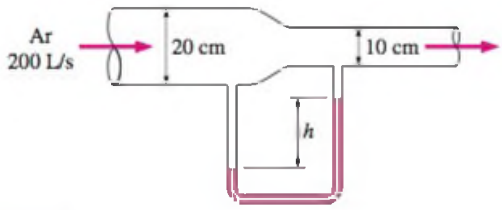


FIGURA P5–83

5–84 Ar a 100 kPa e 25°C escoa em um duto horizontal de seção transversal variável. A coluna d'água do manômetro que mede a diferença entre duas seções tem um deslocamento vertical de 8 cm. Se a velocidade da primeira seção é baixa e o atrito é desprezível, determine a velocidade na segunda seção. Da mesma forma, se a leitura do manômetro tem um erro possível de ±2 mm, faça uma análise de erro para estimar o intervalo de validade da velocidade encontrada.

5–85 Um tanque muito grande contém ar a 102 kPa em um local onde o ar atmosférico está a 100 kPa e 20°C. Agora uma torneira com 2 cm é aberta. Determine a vazão máxima do ar através do orifício. Qual seria sua resposta se o ar fosse descarregado através de um tubo de 2 m de comprimento e 4 cm de diâmetro com um bocal de 2 cm de diâmetro? Você resolveria o problema da mesma forma se a pressão no tanque de armazenamento fosse 300 kPa?

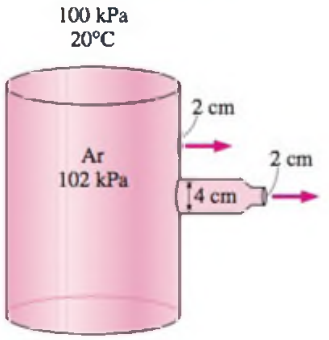


FIGURA P5–85

5–86 A água escoa através de um medidor Venturi cujo diâmetro é de 7 cm na parte da entrada e de 4 cm na garganta. A pressão é medida como 430 kPa na entrada e 120 kPa na garganta. Desprezando os efeitos do atrito, determine a vazão da água. *Resposta:* 0,538 m^3/s

5–87 Um túnel de vento consome ar atmosférico a 20°C e 101,3 kPa por um grande ventilador localizado próximo à saída do túnel. Se a velocidade do ar no túnel é de 80 m/s, determine a pressão do túnel.

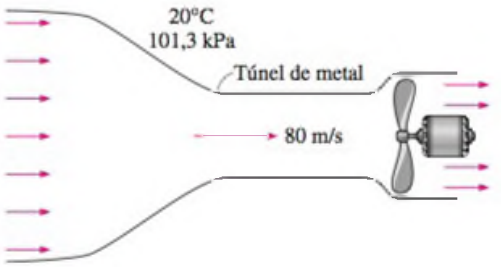


FIGURA P5–87

5–88 A água escoa a uma vazão de 0,025 m^3/s em um tubo horizontal cujo diâmetro aumenta de 6 cm a 11 cm por uma seção de alargamento. Se a perda de carga na seção de alargamento é de 0,45 m e o fator de correção da energia cinética na entrada e na saída é de 1,05, determine a variação da pressão.

5–89 Um tanque grande com 2 m de altura é preenchido inicialmente com água. A superfície da água do tanque é aberta para a atmosfera, e um orifício com 10 cm de diâmetro e borda afiada na parte inferior drena para a atmosfera por meio de um tubo horizontal com 100 m de comprimento. Se a perda de carga irreversível total do sistema é determinada como 1,5 m, determine a velocidade inicial da água do tanque. Despreze o efeito dos fatores de correção da energia cinética. *Resposta:* 3,13 m/s

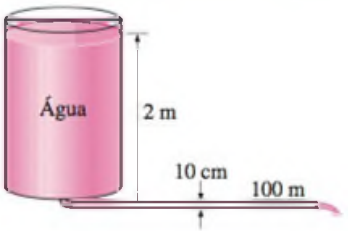


FIGURA P5–89

5–90 EES Reconsidere o Problema 5–89. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito da altura do tanque sobre a velocidade da descarga inicial da água do tanque completamente cheio. Deixe a altura do tanque variar de 1 m a 25 m em incrementos de 1 m, e considere a perda de carga irreversível como constante. Tabule e represente graficamente os resultados.

5–91 Reconsidere o Problema 5–89. Para drenar o tanque mais rapidamente, uma bomba é instalada próximo à saída do tanque. Determine a entrada de carga necessária na bomba para estabelecer uma velocidade média da água de 6 m/s quando o tanque estiver cheio.

Problemas de Projeto e Ensaio

5–92 Usando um balde grande cujo volume é conhecido e medindo o tempo necessário para preencher o balde com água por meio de uma mangueira de jardim, determine a vazão em massa e a velocidade média da água através da mangueira.

5–93 Sua empresa está montando uma experiência que envolve a medição da vazão do ar em um duto, e você precisa fornecer a instrumentação necessária. Pesquise as técnicas e dispositivos disponíveis para a medição da vazão do ar, discuta as vantagens e desvantagens de cada técnica e faça uma recomendação.

5–94 Projetos auxiliados por computador, o uso de materiais melhores e as técnicas de manufatura aperfeiçoadas resultaram em um aumento incrível da eficiência de bombas, turbinas e motores elétricos. Entre em contato com vários fabricantes de bombas, turbinas e motores e obtenha informações sobre a eficiência de seus produtos. Em geral, como a eficiência varia com a potência nominal desses dispositivos?

5–95 Usando uma bomba manual de bicicleta para gerar jato de ar, uma lata de refrigerante como reservatório de água e um canudinho como tubo, projete e construa um atomizador. Estude os efeitos dos diversos parâmetros como comprimento do tubo, diâmetro do orifício de saída e velocidade de bombeamento sobre o desempenho.

5–96 Usando um canudinho flexível e uma régua, explique como você mediria a velocidade de escoamento da água de um rio.

5–97 A potência gerada por uma turbina de vento é proporcional ao cubo da velocidade do vento. Inspirado pela aceleração de um fluido em um bocal, alguém propõe a instalação de um gabinete de redutor para capturar a energia do vento de uma área maior e acelerá-lo antes que ele atinja as lâminas de uma turbina, como mostra a Figura P5–97. Avalie se a modificação proposta deve receber atenção no projeto de novas turbinas de vento.

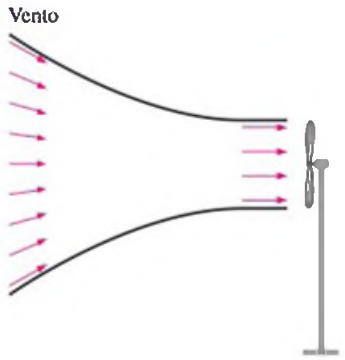


FIGURA P5–97

Equação de momento permanente: $$\sum \vec{F} = \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_e \beta \dot{m} \vec{V} \qquad (6\text{–}25)$$

onde tiramos o subscrito "méd" da velocidade média. A Equação 6–25 afirma que *a força total que age sobre o volume de controle durante o escoamento em regime permanente é igual à diferença entre as taxas de escoamentos do momento de entrada e saída.* Essa afirmação é ilustrada na Figura 6–16. Ela também pode ser expressa para qualquer direção, uma vez que a Equação 6–25 é uma equação vetorial.

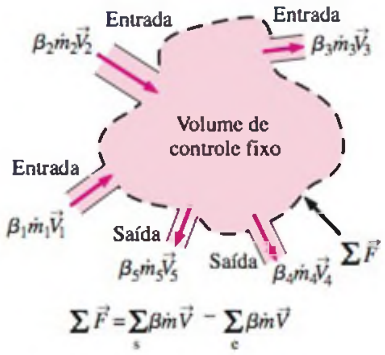


FIGURA 6–16
O perfil de velocidade em uma seção transversal de um tubo no qual o escoamento é totalmente desenvolvido e laminar.

Escoamento em Regime Permanente com uma Entrada e uma Saída

Muitos problemas práticos envolvem apenas uma entrada e uma saída (Figura 6–17). A vazão em massa para tais **sistemas de corrente única** permanece constante e a Equação 6–25 se reduz a

Uma entrada e uma saída: $$\sum \vec{F} = \dot{m}(\beta_2 \vec{V}_2 - \beta_1 \vec{V}_1) \qquad (6\text{–}26)$$

onde adotamos a convenção usual de que o subscrito 1 denota entrada e o subscrito 2, saída, e $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ indicam as velocidades *médias* através da entrada e saída, respectivamente.

Enfatizamos novamente que todas as relações anteriores são equações *vetoriais* e, portanto, todas as adições e subtrações são adições e subtrações *vetoriais*. Lembre-se de que a subtração de um vetor é equivalente à sua adição após reverter a direção (Figura 6–18). Além disso, ao escrevermos a equação do momento ao longo de uma coordenada especificada (como o eixo x), usamos as projeções dos vetores naquele eixo. Por exemplo, a Equação 6–26 pode ser escrita, ao longo da coordenada x, como

Ao longo da coordenada x: $$\sum F_x = \dot{m}(\beta_2 V_{2,x} - \beta_1 V_{1,x}) \qquad (6\text{–}27)$$

onde ΣF_x é a soma vetorial das componentes x das forças e $V_{2,x}$ e $V_{1,x}$ são as componentes x das velocidades de saída e entrada da corrente do fluido, respectivamente. As componentes de força ou velocidade na direção x positiva são quantidades positivas e aquelas na direção x negativa são quantidades negativas. Além disso, é boa prática tomar a direção das forças desconhecidas nas direções positivas (a menos que o problema seja muito direto). Um valor negativo obtido para uma força desconhecida indica que a direção considerada está errada e deve ser revertida.

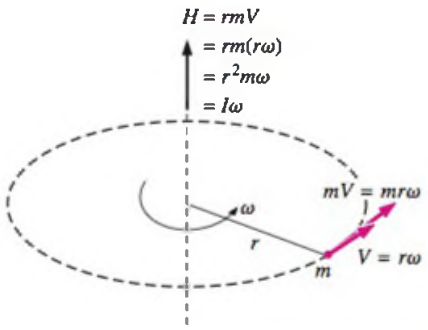


FIGURA 6–17
Um volume de controle com apenas uma entrada e uma saída.

Escoamento sem Forças Externas

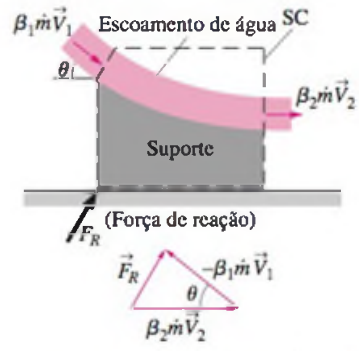
Uma situação interessante surge quando não há forças externas como peso, pressão e forças de reação agindo sobre o corpo na direção do movimento — uma situação comum no caso de veículos espaciais e satélites. Para um volume de controle com várias entradas e saídas, a Equação 6–21 neste caso se reduz a

Nenhuma força externa: $$0 = \frac{d(m\vec{V})_{VC}}{dt} + \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_e \beta \dot{m} \vec{V} \qquad (6\text{–}28)$$

Essa é uma expressão do princípio de conservação do momento, o qual pode ser enunciado como *na ausência de forças externas, a taxa de variação do momento de um volume de controle é igual à diferença entre as taxas de escoamento do momento de entrada e saída.*

Quando a massa m do volume de controle permanece quase constante, o primeiro termo da Equação 6–28 torna-se simplesmente a massa vezes a aceleração, uma vez que

$$\frac{d(m\vec{V})_{VC}}{dt} = m_{VC}\frac{d\vec{V}_{VC}}{dt} = (m\vec{a})_{VC}$$



Observação: $\vec{V}_2 \neq \vec{V}_1$ mesmo que $|\vec{V}_2| = |\vec{V}_1|$

FIGURA 6–18
A determinação pela adição de vetores da força de reação no suporte causada por uma alteração da direção da água.

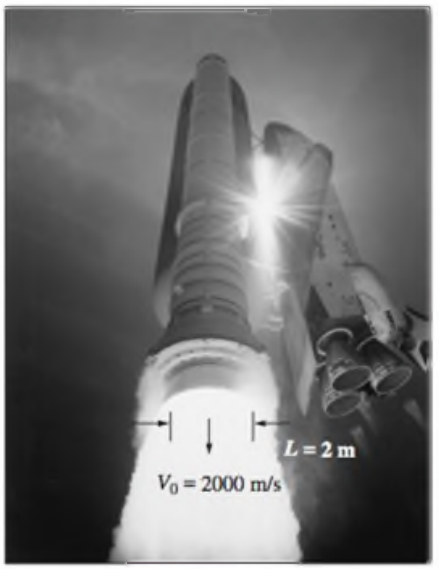


FIGURA 6–19
O empuxo necessário para lançar o ônibus espacial é gerado pelos motores do foguete como resultado da variação do momento do combustível à medida que eles são acelerados de cerca de zero até uma velocidade de saída de aproximadamente 2000 m/s após a combustão. *Nasa*.

Assim, o volume de controle neste caso pode ser tratado como um corpo sólido, com uma força resultante ou **empuxo** de

$$\textit{Empuxo:} \qquad \vec{F}_{\text{vol}} = m_{\text{vol}}\vec{a} = \sum_{e} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{s} \beta \dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(6–29)}$$

agindo sobre o corpo. Essa abordagem pode ser usada para determinar a aceleração linear dos veículos espaciais quando um foguete é lançado (Figura 6–19).

EXEMPLO 6–2 A Força para Manter um Cotovelo Defletor no Lugar

Um cotovelo redutor é usado para defletir de 30° o escoamento de água a uma taxa de 14 kg/s em um tubo horizontal ao mesmo tempo que o acelera (Figura 6–20). O cotovelo descarrega água na atmosfera. A área de seção transversal do cotovelo é de 113 cm² na entrada e 7 cm² na saída. A diferença de elevação entre os centros da saída e da entrada é de 30 cm. O peso do cotovelo e da água que há nele são considerados desprezíveis. Determine (*a*) a pressão manométrica no centro da entrada do cotovelo e (*b*) a força de ancoragem necessária para manter o cotovelo no lugar.

SOLUÇÃO Um cotovelo redutor deflete a água para cima e a descarrega na atmosfera. A pressão na entrada do cotovelo e a força necessária para manter o cotovelo no lugar devem ser determinadas.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente e o efeito do atrito é desprezível. **2** O peso do cotovelo e da água que há nele são desprezíveis. **3** A água é descarregada na atmosfera e, portanto, a pressão manométrica na saída é zero. **4** O escoamento é turbulento e completamente desenvolvido na entrada e na saída do volume de controle e tomamos o fator de correção do fluxo do momento como $\beta = 1{,}03$.

Propriedades Consideramos a densidade da água como 1000 kg/m³.

Análise (*a*) Consideramos o cotovelo como o volume de controle e designamos a entrada por 1 e a saída por 2. Também assumimos as coordenadas *x* e *z* como mostradas. A equação de continuidade desse sistema com escoamento em regime permanente, com uma entrada e uma saída é $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = 14$ kg/s. Observando que $\dot{m} = \rho AV$, as velocidades de entrada e saída da água são

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{14 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(0{,}0113 \text{ m}^2)} = 1{,}24 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{14 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(7 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 20{,}0 \text{ m/s}$$

Utilizamos a equação de Bernoulli (Capítulo 5) como uma primeira aproximação para calcular a pressão. No Capítulo 8 aprenderemos a considerar as perdas por atrito ao longo das paredes. Tomando o centro da seção transversal da entrada como o nível de referência ($z_1 = 0$) e observando que $P_2 = P_{\text{atm}}$, a equação de Bernoulli para uma linha de corrente que passa através do centro do cotovelo é expressa como

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho g\left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + z_2 - z_1\right)$$

$$P_1 - P_{\text{atm}} = (1000 \text{ kg/m}^3)(9{,}81 \text{ m/s}^2) \times \left(\frac{(20 \text{ m/s})^2 - (1{,}24 \text{ m/s})^2}{2(9{,}81 \text{ m/s}^2)} + 0{,}3 - 0\right)\left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$P_{1,\text{man}} = 202{,}2 \text{ kN/m}^2 = \mathbf{202{,}2 \text{ kPa}} \quad \text{(manométrica)}$$

(*b*) A equação do momento do escoamento unidimensional permanente é

$$\sum \vec{F} = \sum_{s} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{e} \beta \dot{m}\vec{V}$$

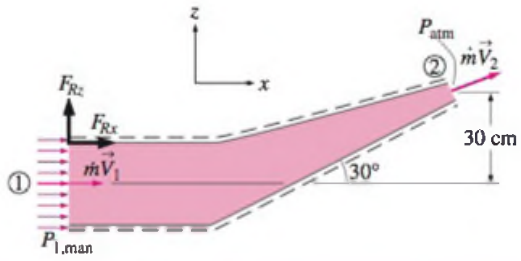


FIGURA 6–20
Esquema do Exemplo 6–2.

Sejam F_{Rx} e F_{Rz} suponhamos que as componentes x e z da força de ancoragem do cotovelo e suponhamos que elas estejam na direção positiva. Também usamos a pressão manométrica, uma vez que a pressão atmosférica age em toda a superfície de controle. Assim, as equações do momento ao longo dos eixos x e z tornam-se

$$F_{Rx} + P_{1,\text{man}}A_1 = \beta\dot{m}V_2\cos\theta - \beta\dot{m}V_1$$
$$F_{Rz} = \beta\dot{m}V_2\,\text{sen}\,\theta$$

Isolando F_{Rx} e F_{Rz} e substituindo os valores dados

$$F_{Rx} = \beta\dot{m}(V_2\cos\theta - V_1) - P_{1,\text{man}}A_1$$
$$= 1{,}03(14\text{ kg/s})[(20\cos 30° - 1{,}24)\text{ m/s}]\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$
$$- (202{,}200\text{ N/m}^2)(0{,}0113\text{ m}^2)$$
$$= 232 - 2285 = \mathbf{-2053\text{ N}}$$

$$F_{Rz} = \beta\dot{m}V_2\,\text{sen}\,\theta = (1{,}03)(14\text{ kg/s})(20\,\text{sen}\,30°\text{ m/s})\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = \mathbf{144\text{ N}}$$

O resultado negativo de F_{Rx} indica que a direção suposta estava errada e deve ser revertida. Portanto, F_{Rx} age na direção x negativa.

Discussão Existe uma distribuição de pressão diferente de zero ao longo das paredes internas do cotovelo, mas como o volume de controle está fora do cotovelo, essas pressões não aparecem em nossa análise. O valor real de $P_{1,\text{man}}$ será mais alto do que aquele calculado aqui, por conta das perdas por atrito e outras perdas no cotovelo.

EXEMPLO 6–3 Força para Manter um Cotovelo de Reversão no Lugar

O cotovelo defletor do Exemplo 6–2 é substituído por um cotovelo de reversão para que o fluido faça uma volta de 180° antes de ser descarregado, como mostra a Figura 6–21. A diferença de elevação entre os centros das seções de entrada e saída ainda é de 0,3 m. Determine a força de ancoragem necessária para manter o cotovelo no lugar.

SOLUÇÃO As velocidades de entrada e saída e a pressão na entrada do cotovelo permanecem iguais, mas a componente vertical da força de ancoragem na conexão do cotovelo com o tubo é zero neste caso ($F_{Rz} = 0$), uma vez que não há outra força ou fluxo de momento na direção vertical (estamos desprezando o peso do cotovelo e da água). A componente horizontal da força de ancoragem é determinada com a equação de momento escrita na direção x. Observando que a velocidade de saída é negativa, uma vez que ela está na direção x negativa, temos

$$F_{Rx} + P_{1,\text{man}}A_1 = \beta_2\dot{m}(-V_2) - \beta_1\dot{m}V_1 = -\beta\dot{m}(V_2 + V_1)$$

Isolando F_{Rx} e substituindo os valores conhecidos

$$F_{Rx} = -\beta\dot{m}(V_2 + V_1) - P_{1,\text{man}}A_1$$
$$= -(1{,}03)(14\text{ kg/s})[(20 + 1{,}24)\text{ m/s}]\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) - (202{,}200\text{ N/m}^2)(0{,}0113\text{ m}^2)$$
$$= -306 - 2285 = \mathbf{-2591\text{ N}}$$

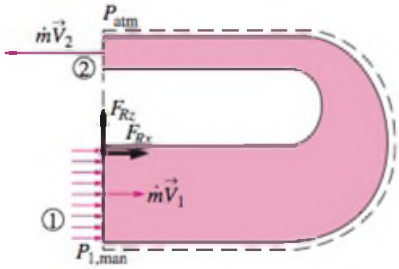


FIGURA 6–21
Esquema do Exemplo 6-3.

Portanto, a força horizontal no flange é de 2.591 N agindo na direção x negativa (o cotovelo está tentando separar-se do tubo). Essa força é equivalente ao peso de cerca de 260 kg de massa e, portanto, os conectores (como os parafusos) usados devem ser suficientemente resistentes para suportar essa força.

Discussão A força de reação na direção x é maior do que aquela no Exemplo 6–2, uma vez que as paredes viram a água de um ângulo muito maior. Se o cotovelo de inversão for substituído por um bocal reto (como aquele usado pelos bombeiros) de forma que a água seja descarregada na direção x positiva, a equação do momento na direção x torna-se

$$F_{Rx} + P_{1,\text{man}}A_1 = \beta \dot{m} V_2 - \beta \dot{m} V_1 \quad \rightarrow \quad F_{Rx} = \beta \dot{m}(V_2 - V_1) - P_{1,\text{man}}A_1$$

uma vez que V_1 e V_2 estão ambos na direção x positiva. Isso mostra a importância do uso do sinal correto (positivo se a direção for positiva e negativo na direção oposta) nas velocidades e forças.

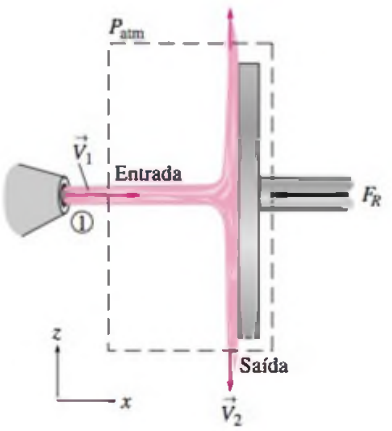


FIGURA 6–22
Esquema do Exemplo 6-4.

EXEMPLO 6–4 Jato de Água Que Atinge uma Placa Fixa

A água é acelerada por um bocal a uma velocidade média de 20 m/s e atinge uma placa vertical fixa à taxa de 10 kg/s com uma velocidade normal de 20 m/s (Figura 6–22). Após o choque, a corrente de água se espalha em todas as direções do plano da placa. Determine a força necessária para evitar que a placa se movimente horizontalmente devido à corrente de água.

SOLUÇÃO Um jato de água atinge uma placa fixa vertical perpendicularmente. A força necessária para manter a placa no lugar deve ser determinada.

Hipóteses **1** O escoamento da água na saída do bocal é estacionário. **2** A água se espalha nas direções normais à direção de abordagem do jato de água. **3** O jato de água é exposto à atmosfera e, portanto, a pressão do jato de água e a água espalhada que sai do volume de controle estão à pressão atmosférica, que é desconsiderada uma vez que age em todo o sistema. **4** As forças verticais e os fluxos de momento não são considerados, pois não têm efeito sobre a força de reação horizontal. **5** O efeito do fator de correção do fluxo de momento é desprezível e, portanto, $\beta \cong 1$.

Análise Nós desenhamos o volume de controle desse problema de forma que ele contenha toda a placa e corte o jato de água e a barra de suporte normalmente. A equação do momento para o escoamento unidimensional estacionário permanente é dada por

$$\sum \vec{F} = \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_e \beta \dot{m} \vec{V}$$

Escrevendo essa equação para este problema ao longo da direção x (sem esquecer o sinal negativo para as forças e velocidades da direção x negativa) e observando que $V_{1,x} = V_1$ e $V_{2,x} = 0$ temos

$$-F_R = 0 - \beta \dot{m} \vec{V}_1$$

Substituindo os valores dados

$$F_R = \beta \dot{m} \vec{V}_1 = (1)(10 \text{ kg/s})(20 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = \mathbf{200 \text{ N}}$$

Assim, o suporte deve aplicar uma força horizontal de 200 N (equivalente ao peso de uma massa de cerca de 20 kg) na direção x negativa (a direção oposta ao jato de água) para manter a placa no lugar.

Discussão A placa absorve o total do momento do jato de água, uma vez que o momento na direção x na saída do volume de controle é zero. Se o volume de controle fosse desenhado ao longo da interface entre a água e a placa, haveria forças de pressão adicionais (desconhecidas) na análise. Cortando o volume de controle através do suporte, evitamos lidar com essa complexidade adicional. Esse é um exemplo de uma opção "sensata" para o volume de controle.

EXEMPLO 6–5 Geração de Energia e Carga de Vento de uma Turbina Eólica

Um gerador eólico de energia com abrangência de lâmina de 30 pés de diâmetro tem uma velocidade de início de fornecimento de energia (velocidade mínima para a geração de energia) de 7 mph, e nessa velocidade a turbina gera 0,4 kW de energia elétrica (Figura 6–23). Determine (*a*) a eficiência da unidade turbina eólica/gerador e (*b*) a força horizontal exercida pelo vento sobre o mastro de suporte da turbina eólica. Qual o efeito de dobrar a velocidade do vento para 14 mph sobre a geração de energia e a força exercida? Suponha que a eficiência permaneça igual e que a densidade do ar seja de 0,076 lbm/pés^3.

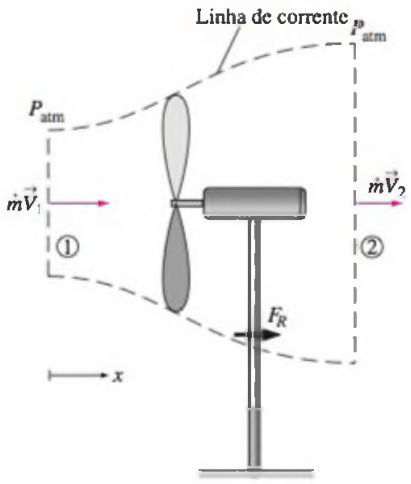


FIGURA 6–23
Esquema do Exemplo 6-5.

SOLUÇÃO A geração de energia e a carga de uma turbina eólica devem ser analisadas. A eficiência e a força exercida sobre o mastro devem ser determinadas e os efeitos de dobrar a velocidade do vento devem ser investigados.

Hipóteses **1** O escoamento do vento é permanente e incompressível. **2** A eficiência da turbina/gerador não depende da velocidade do vento. **3** Os efeitos do atrito são desprezíveis e, portanto, nenhuma energia cinética de entrada é convertida em energia térmica. **4** A velocidade média do ar através da turbina eólica é igual à velocidade do vento (na verdade, ela é consideravelmente menor — veja a discussão após o exemplo). **5** O escoamento do vento é uniforme e, portanto, o fator de correção do fluxo do momento é $\beta \cong 1$.

Propriedades A densidade do ar é dada como 0,076 lbm/pés^3.

Análise A energia cinética é uma forma mecânica de energia e, portanto, ela pode ser convertida totalmente em trabalho. Assim, o potencial de gerar energia do vento é proporcional à sua energia cinética, que é $V^2/2$ por unidade de massa e, portanto, a potência máxima é $\dot{m}V^2/2$ para uma dada vazão em massa:

$$V_1 = (7\ \text{mph})\left(\frac{1{,}4667\ \text{pé/s}}{1\ \text{mph}}\right) = 10{,}27\ \text{pés/s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_1 V_1 \frac{\pi D^2}{4} = (0{,}076\ \text{lbm/pé}^3)(10{,}27\ \text{pés/s})\frac{\pi(30\ \text{pés})^2}{4} = 551{,}7\ \text{lbm/s}$$

$$\dot{W}_{\text{máx}} = \dot{m}\text{ke}_1 = \dot{m}\frac{V_1^2}{2}$$

$$= (551{,}7\ \text{lbm/s})\frac{(10{,}27\ \text{pés/s})^2}{2}\left(\frac{1\ \text{lbf}}{32{,}2\ \text{lbm}\cdot\text{pés/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{kW}}{737{,}56\ \text{lbf}\cdot\text{pés/s}}\right)$$

$$= 1{,}225\ \text{kW}$$

Assim, a potência disponível para a turbina eólica é 1,225 kW à velocidade do vento de 7 mph. A eficiência da turbina/gerador torna-se

$$\eta_{\text{turbina eólica}} = \frac{\dot{W}_{\text{eixo}}}{\dot{W}_{\text{máx}}} = \frac{0{,}4\ \text{kW}}{1{,}225\ \text{kW}} = \mathbf{0{,}327} \qquad (\text{ou } \mathbf{32{,}7\%})$$

(*b*) Os efeitos de atrito são supostos como desprezíveis e, assim, a parte da energia cinética de entrada não convertida em energia elétrica sai da turbina eólica como energia cinética de saída. Observando que a vazão em massa permanece constante, a velocidade de saída é determinada por

$$\dot{m}\text{ke}_2 = \dot{m}\text{ke}_1(1 - \eta_{\text{turbina eólica}}) \quad \rightarrow \quad \dot{m}\frac{V_2^2}{2} = \dot{m}\frac{V_1^2}{2}(1 - \eta_{\text{turbina eólica}})$$

ou

$$V_2 = V_1\sqrt{1 - \eta_{\text{turbina eólica}}} = (10{,}27\ \text{pés/s})\sqrt{1 - 0{,}327} = 8{,}43\ \text{pés/s}$$

Nós desenhamos um volume de controle ao redor da turbina eólica para que o vento seja normal à superfície de controle na entrada e na saída e para que toda a superfície de controle esteja à pressão atmosférica. A equação do momento para o escoamento unidimensional em regime permanente é dada por

$$\sum \vec{F} = \sum_s \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_e \beta\dot{m}\vec{V}$$

Escrevendo essa equação ao longo da direção x e observando que $\beta = 1$, $V_{1,x} = V_1$, e $V_{2,x} = V_2$ temos

$$F_R = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

Substituindo os valores conhecidos temos

$$F_R = \dot{m}(V_2 - V_1) = (551{,}7 \text{ lbm/s})(8{,}43 - 10{,}27 \text{ pés/s})\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32{,}2 \text{ lbm} \cdot \text{pés/s}^2}\right)$$

$$= -31{,}5 \text{ lbf}$$

O sinal negativo indica que a força de reação age na direção x negativa como era esperado. Assim, a força exercida pelo vento sobre o mastro torna-se $F_{mast} = -F_R =$ **31,5 lbf.**

A potência gerada é proporcional a V^3, uma vez que a vazão em massa é proporcional a V e a energia cinética é proporcional a V^2. Dessa forma, dobrando a velocidade do vento para 14 mph, aumentamos a geração de potência por um fator de $2^3 = 8$ para $0{,}4 \times 8 = 3{,}2$ kW. A força exercida pelo vento sobre o mastro de suporte é proporcional a V^2. Quando dobramos a velocidade do vento para 14 mph, aumentamos a força do vento por um fator de $2^2 = 4$, para $31{,}5 \times 4 = 126$ lbf.

Discussão Para termos uma idéia melhor da operação dos dispositivos com hélices ou turbinas como helicópteros, turbinas eólicas, turbinas hidráulicas e motores turbofan, reconsideramos a turbina eólica e desenhamos duas linhas de corrente, como mostra a Figura 6–24. (No caso de dispositivos que consomem potência como um ventilador e um helicóptero, as linhas de corrente convergem em vez de divergirem, uma vez que a velocidade de saída será mais alta e, portanto, a área de saída será menor.) É possível considerar que as linhas de corrente superior e inferior formam um "duto imaginário" para o escoamento do ar através da turbina. As seções 1 e 2 estão suficientemente distantes da turbina para que $P_1 = P_2 = P_{atm}$. A equação do momento desse grande volume de controle entre as seções 1 e 2 foi obtida como

$$F_R = \dot{m}(V_2 - V_1) \qquad (1)$$

O volume de controle menor entre as seções 3 e 4 inclui a turbina e $A_3 = A_4 = A$ e $V_3 = V_4$, já que é tão fino. A turbina é um dispositivo que causa uma variação da pressão e, portanto, as pressões P_3 e P_4 são diferentes. A equação de momento aplicada ao volume de controle menor resulta em

$$F_R + P_3A - P_4A = 0 \quad \rightarrow \quad F_R = (P_4 - P_3)A \qquad (2)$$

A equação de Bernoulli não se aplica entre as seções 1 e 2, uma vez que o caminho cruza uma turbina, mas se aplica separadamente entre as seções 1 e 3 e as seções 4 e 2:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 \quad \text{e} \quad \frac{P_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} + z_4 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Somando essas duas equações e observando que $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$, $V_3 = V_4$, e $P_1 = P_2 = P_{atm}$, temos

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = \frac{P_4 - P_3}{\rho} \qquad (3)$$

Substituindo $\dot{m} = \rho AV_3$ na Equação 1 e, em seguida, combinando-a com as Equações 2 e 3, temos

$$V_3 = \frac{V_1 + V_2}{2} \qquad (4)$$

Assim, concluímos que *a velocidade média de um fluido através de uma turbina é a média aritmética das velocidades da corrente a montante e a jusante.* Obviamente, a validade desse resultado é limitada pela aplicabilidade da equação de Bernoulli.

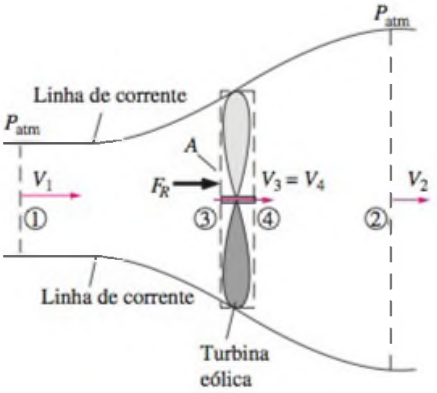


FIGURA 6–24
Os volumes de controle grande e pequeno para a análise de uma turbina eólica limitados acima e abaixo por linhas de corrente.

Agora, de volta à turbina eólica. A velocidade através da turbina pode ser expressa como $V_3 = V_1(1 - a)$, onde $a < 1$ já que $V_3 < V_1$. Combinando essa expressão com a Equação 4, temos $V_2 = V_1(1 - 2a)$. Além disso, a vazão em massa através da turbina torna-se $\dot{m} = \rho A V_3 = \rho A V_1(1 - a)$. Quando os efeitos e as perdas por atrito são desprezados, a potência gerada por uma turbina eólica é simplesmente a diferença entre as energias cinética de entrada e de saída:

$$\dot{W} = \dot{m}(ec_1 - ec_2) = \frac{\dot{m}(V_1^2 - V_2^2)}{2} = \frac{\rho A V_1(1 - a)[V_1^2 - V_1^2(1 - 2a)^2]}{2}$$

$$= 2\rho A V_1^3 a(1 - a)^2$$

Dividindo isso pela potência disponível do vento $\dot{W}_{máx} = \dot{m}V_1^2/2$, temos a eficiência da turbina eólica em termos de a,

$$\eta_{\text{turbina eólica}} = \frac{\dot{W}}{\dot{W}_{máx}} = \frac{2\rho A V_1^3 a(1 - a)^2}{(\rho A V_1)V_1^2/2}$$

O valor de a que maximiza a eficiência é determinado impondo que a derivada $\eta_{\text{turbina eólica}}$ com relação a a seja igual a zero e determinando a. Isso resulta em $a = 1/3$. Substituindo esse valor na relação de eficiência que acabamos de apresentar, temos $\eta_{\text{turbina eólica}} = 16/27 = 0{,}593$, que é o limite superior da eficiência das turbinas eólicas e hélices. Isso é conhecido como **limite de Betz**. A eficiência das turbinas eólicas reais é de cerca de metade desse valor ideal.

EXEMPLO 6–6 Reposicionamento de um Satélite

Um satélite em órbita tem massa de $m_{sat} = 5000$ kg e velocidade constante V_0. Para alterar sua órbita, um foguete acoplado descarrega $m_f = 100$ kg de gases da reação do combustível sólido, a uma velocidade de $V_f = 3000$ m/s com relação ao satélite, na direção oposta a V_0 (Figura 6–25). A taxa de descarga do combustível é constante por 2 s. Determine (*a*) a aceleração do satélite durante esse período de 2 s, (*b*) a variação da velocidade do satélite durante esse período e (*c*) o empuxo exercido sobre o satélite.

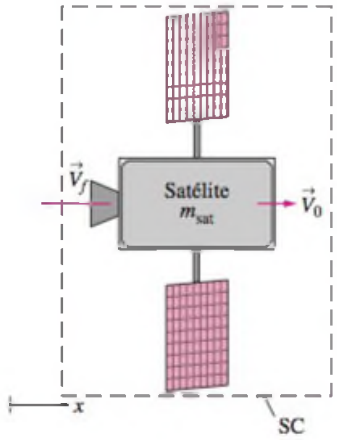


FIGURA 6–25
Esquema do Exemplo 6–6.

SOLUÇÃO O foguete de um satélite é disparado na direção oposta ao movimento. A aceleração, a variação na velocidade e o empuxo devem ser determinados.

Hipóteses **1** O escoamento dos gases de combustão é permanente e unidimensional durante o período do lançamento. **2** Não há forças externas agindo sobre o satélite e o efeito da força da pressão no bocal de saída é desprezível. **3** A massa do combustível descarregado é desprezível com relação à massa do satélite e, portanto, o satélite pode ser tratado como um corpo sólido com massa constante. **4** O bocal é bem projetado para que o efeito do fator de correção do fluxo do momento seja desprezível e, portanto, $\beta \cong 1$.

Análise (*a*) Selecionamos um referencial no qual o volume de controle se move com o satélite. Então, as velocidades das correntes de fluido tornam-se simplesmente suas velocidades com relação ao corpo em movimento. Tomamos a direção do movimento do satélite como a direção positiva ao longo do eixo x. Não há forças externas agindo sobre o satélite e sua massa é quase constante. Assim, o satélite pode ser tratado como um corpo sólido com massa constante e a equação do momento neste caso é simplesmente a Equação 6–28,

$$0 = \frac{d(m\vec{V})_{VC}}{dt} + \sum_s \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_e \beta \dot{m}\vec{V} \quad \rightarrow \quad m_{sat}\frac{d\vec{V}_{sat}}{dt} = -\dot{m}_f\vec{V}_f$$

Observando que o movimento está em uma linha reta e que os gases descarregados se movem na direção x negativa, podemos escrever a equação do momento usando módulos como

$$m_{sat}\frac{dV_{sat}}{dt} = \dot{m}_f V_f \quad \rightarrow \quad \frac{dV_{sat}}{dt} = \frac{\dot{m}_f}{m_{sat}}V_f = \frac{m_f/\Delta t}{m_{sat}}V_f$$

Substituindo, a aceleração do satélite durante os dois primeiros segundos é determinada por

$$a_{sat} = \frac{dV_{sat}}{dt} = \frac{m_f/\Delta t}{m_{sat}} V_f = \frac{(100 \text{ kg})/(2 \text{ s})}{5000 \text{ kg}} (3000 \text{ m/s}) = \mathbf{30 \text{ m/s}^2}$$

(*b*) Conhecendo a aceleração, que é constante, a variação da velocidade do satélite durante os dois primeiros segundos é determinada pela definição da aceleração $a_{sat} = dV_{sat}/dt$ como

$$dV_{sat} = a_{sat}\, dt \quad \rightarrow \quad \Delta V_{sat} = a_{sat}\, \Delta t = (30 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s}) = \mathbf{60 \text{ m/s}}$$

(*c*) Da Equação 6–29, o empuxo exercido sobre o satélite é

$$F_{sat} = 0 - \dot{m}_f(-V_f) = -(100/2 \text{ kg/s})(-3000 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = \mathbf{150 \text{ kN}}$$

Discussão Observe que se esse satélite estivesse acoplado a algum lugar, ele exerceria uma força de 150 kN (equivalente ao peso de 15 toneladas de massa) em seu suporte. Isso pode ser verificado tomando o satélite como o sistema e aplicando a equação do momento.

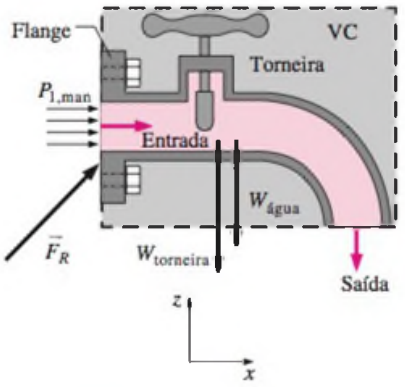


FIGURA 6–26
O volume de controle do Exemplo 6–7 com todas as forças exibidas; a pressão manométrica é utilizada por questões de conveniência.

EXEMPLO 6–7 Força Total sobre o Flange

A água escoa a uma taxa de 18,5 gal/min através de uma torneira com flange e registro parcialmente fechado (Figura 6–26). O diâmetro interno do tubo no local do flange é de 0,780 pol (= 0,0650 pés) e a pressão medida naquele local é de 13,0 psig. O peso total do conjunto da torneira mais a água dentro dela é de 12,8 lbf. Calcule a força total sobre o flange.

SOLUÇÃO O escoamento de água através de uma torneira com flange é considerado. A força total que age sobre o flange deve ser calculada.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente e incompressível. **2** O escoamento na entrada e na saída é turbulento e completamente desenvolvido para que o fator de correção do fluxo de momento seja de cerca de 1,03. **3** O diâmetro do tubo na saída da torneira é igual àquele do flange.

Propriedades A densidade da água à temperatura ambiente é de 62,3 lbm/pés^3.

Análise Escolhemos a torneira e sua vizinhança imediata como o volume de controle, como é mostrado na Figura 6–26 juntamente com todas as forças que agem sobre ela. Essas forças incluem o peso da água e o peso do conjunto da torneira, a força da pressão manométrica da entrada sobre o volume de controle, e a força total do flange sobre o volume de controle, que chamamos de $\vec{F}_R$. Usamos a pressão manométrica por questões de conveniência, uma vez que a pressão manométrica no resto da superfície de controle é zero (pressão atmosférica). Observe que a pressão através da saída do volume de controle também é atmosférica; supondo que o escoamento seja incompressível, assim, a pressão manométrica também é zero em toda a saída.

Agora, aplicamos as leis de conservação no volume de controle. A conservação da massa é trivial aqui, uma vez que há apenas uma entrada e uma saída, ou seja, a vazão em massa para dentro do volume de controle é igual à vazão em massa para fora do volume de controle. Da mesma forma, as velocidades médias dos escoamentos de saída e entrada são idênticas, uma vez que o diâmetro interno é constante e que a água é incompressível, e são determinadas por

$$V_2 = V_1 = V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{18{,}5 \text{ gal/min}}{\pi(0{,}065 \text{ pé})^2/4}\left(\frac{0{,}1337 \text{ pé}^3}{1 \text{ gal}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 12{,}42 \text{ pés/s}$$

Da mesma forma,

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (62{,}3 \text{ lbm/pés}^3)(18{,}5 \text{ gal/min})\left(\frac{0{,}1337 \text{ pé}^3}{1 \text{ gal}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 2{,}568 \text{ lbm/s}$$

A seguir, aplicamos a equação do momento para o escoamento constante

$$\sum \vec{F} = \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_c \beta \dot{m} \vec{V}$$

Sejam F_{Rx} e F_{Rz} as componentes x e z da força que atua sobre o flange e suponhamos que elas estejam nas direções positivas. O módulo da velocidade na direção x é $+V_1$ na entrada, mas é zero na saída. O módulo da velocidade na direção z é zero na entrada, mas $-V_2$ na saída. Da mesma forma, o peso do conjunto da torneira e da água dentro dela age na direção $-z$ como uma força de corpo. Nenhuma pressão ou força viscosa age sobre o volume de controle escolhido na direção z.

As equações de momento ao longo das direções x e z tornam-se

$$F_{Rx} + P_{1,\,man} A_1 = 0 - \dot{m}(+V_1)$$
$$F_{Rz} - W_{\text{torneira}} - W_{\text{água}} = \dot{m}(-V_2) - 0$$

Isolando F_{Rx} e F_{Rz} e substituindo os valores dados

$$F_{Rx} = -\dot{m}V_1 - P_{1,\,man}A_1$$
$$= -(2{,}568\ \text{lbm/s})(12{,}42\ \text{pés/s})\left(\frac{1\ \text{lbf}}{32{,}2\ \text{lbm} \cdot \text{pés/s}^2}\right) - (13\ \text{lbf/pol}^2)\frac{\pi(0{,}780\ \text{pol})^2}{4}$$
$$= -7{,}20\ \text{lbf}$$
$$F_{Rz} = -\dot{m}V_2 + W_{\text{torneira}-\text{água}}$$
$$= -(2{,}568\ \text{lbm/s})(12{,}42\ \text{pés/s})\left(\frac{1\ \text{lbf}}{32{,}2\ \text{lbm} \cdot \text{pés/s}^2}\right) + 12{,}8\ \text{lbf} = 11{,}8\ \text{lbf}$$

Assim, a força do flange sobre o volume de controle pode ser expressa na forma vetorial como

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Rz}\vec{k} = -7{,}20\vec{i} + 11{,}8\vec{k} \quad \text{lbf}$$

Da terceira lei de Newton, a força que o conjunto da torneira exerce sobre o flange é a oposta de $\vec{F}_R$,

$$\vec{F}_{\text{torneira no flange}} = -\vec{F}_R = \mathbf{7{,}20\vec{i} - 11{,}8\vec{k}} \quad \text{lbf}$$

Discussão O conjunto da torneira empurra o flange para a direita e para baixo e isso está de acordo com nossa intuição. A água exerce uma pressão alta na entrada, mas a pressão da saída é atmosférica. Além disso, o momento da água na entrada na direção x se perde na virada, causando uma força adicional à direita sobre as paredes do tubo. O conjunto da torneira pesa muito mais do que o efeito do momento da água, de modo que esperamos que a força seja para baixo. Observe que o rótulo das forças, como "torneira sobre o flange", esclarece a direção da força.

6–5 ▪ REVISÃO DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO E DO MOMENTO ANGULAR

O movimento de um corpo rígido pode ser considerado a combinação do movimento translacional de seu centro de massa e do movimento rotacional ao redor de seu centro de massa. O movimento translacional pode ser analisado usando a equação do momento, a Equação 6–16. Agora, discutimos o movimento rotacional — um movimento durante o qual todos os pontos do corpo se movem em círculos ao redor do eixo de rotação. O movimento rotacional é descrito por quantidades angulares como a distância angular θ, a velocidade angular ω e a aceleração angular α.

A quantidade de rotação de um ponto em um corpo é expressa em termos do ângulo θ varrido por um segmento de retas de comprimento r que conecta o ponto

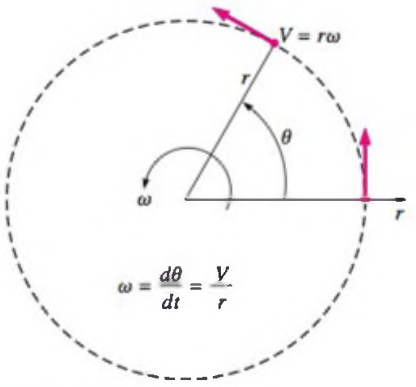


FIGURA 6–27
As relações entre a distância angular θ, a velocidade angular ω e a velocidade linear V.

ao eixo de rotação e é perpendicular ao eixo. O ângulo θ é expresso em radianos (rad), que é o comprimento do arco correspondente a θ, em um círculo de raio unitário. Observando que o comprimento da circunferência de raio r é $2\pi r$, a distância angular percorrida por qualquer ponto em um corpo rígido durante uma rotação completa é 2π rad. A distância física percorrida por um ponto em sua trajetória circular é $l = \theta r$, onde r é a distância normal do ponto ao eixo de rotação e θ é a distância angular em rad. Observe que 1 rad corresponde a $360/(2\pi) \cong 57{,}3°$.

A velocidade angular ω é a distância angular percorrida por unidade de tempo e a aceleração angular a é a taxa de variação da velocidade angular. Elas são expressas como (Figura 6–27),

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(l/r)}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dl}{dt} = \frac{V}{r} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{dV}{dt} = \frac{a_t}{r} \tag{6–30}$$

ou

$$V = r\omega \quad \text{e} \quad a_t = r\alpha \tag{6–31}$$

onde V é a velocidade linear e a_t é a aceleração linear na direção tangencial para um ponto localizado a uma distância r do eixo de rotação. Observe que ω e α são iguais para todos os pontos de um corpo rígido em rotação, mas que V e a_t não são (elas são proporcionais a r).

A segunda lei de Newton exige que haja uma força atuando na direção tangencial para causar a aceleração angular. A intensidade do efeito de rotação, chamada *momento* ou *torque*, é proporcional ao módulo da força e à sua distância ao eixo de rotação. A distância perpendicular do eixo de rotação até a reta de ação da força é chamada de *braço do momento*, e o torque M que age sobre um ponto de massa m a uma distância normal r do eixo de rotação é expresso como

$$M = rF_t = rma_t = mr^2\alpha \tag{6–32}$$

O torque total que atua sobre um corpo rígido em rotação ao redor de um eixo pode ser determinado pela integração dos torques que agem sobre massas infinitesimais dm em todo o corpo e resultam em

$$\textit{Torque:} \qquad M = \int_{\text{massa}} r^2\alpha\, dm = \left[\int_{\text{massa}} r^2\, dm\right]\alpha = I\alpha \tag{6–33}$$

onde I é o *momento de inércia* do corpo em relação ao eixo de rotação, que é uma medida da inércia de um corpo contra a rotação. A relação $M = I\alpha$ é o equivalente da segunda lei de Newton, com o torque substituindo a força, o momento de inércia substituindo a massa, e a aceleração angular substituindo a aceleração linear (Figura 6–28). Observe que, ao contrário da massa, a inércia rotacional de um corpo também depende da distribuição da massa do corpo com relação ao eixo de rotação. Assim, um corpo cuja massa está concentrada ao redor de seu eixo de rotação tem uma resistência pequena à aceleração angular, enquanto um corpo cuja massa está concentrada em sua periferia tem uma resistência maior à aceleração angular. Um volante é um bom exemplo deste último.

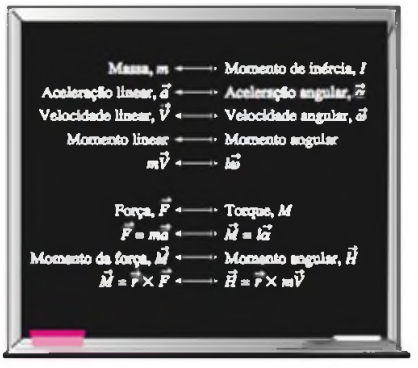


FIGURA 6–28
A analogia entre as quantidades linear e angular correspondentes.

O momento de um corpo de massa m com velocidade V é mV, e a direção do momento é idêntica à direção da velocidade. Observando que o torque de uma força é igual ao produto da força pela distância normal, **o momento angular** de um ponto de massa m com relação a um eixo pode ser expresso como $H = rmV = r^2m\omega$, onde r é a distância normal do eixo de rotação até a reta de ação do vetor do momento (Figura 6–29). Assim, o momento angular total de um corpo rígido rotativo pode ser determinado pela integração como

$$\textit{Momento angular:} \qquad H = \int_{\text{massa}} r^2\omega\, dm = \left[\int_{\text{massa}} r^2\, dm\right]\omega = I\omega \tag{6–34}$$

onde novamente I é o *momento de inércia* do corpo em relação ao eixo de rotação. Isso também pode ser expresso na forma vetorial como

$$\vec{H} = I\vec{\omega} \tag{6–35}$$

Observe que a velocidade angular $\vec{\omega}$ é igual em cada ponto de um corpo rígido.

A segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, foi expressa em termos da taxa de variação do momento na Equação 6–1 como $\vec{F} = d(m\vec{V})/dt$. Da mesma forma, o equivalente à segunda lei de Newton para corpos em rotação $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ é expresso na Equação 6–2 em termos da taxa de variação do momento angular como

Equação do momento angular:
$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt} \qquad (6\text{–}36)$$

onde $\vec{M}$ é o torque total aplicado ao corpo em relação ao eixo de rotação.

A velocidade angular de máquinas em rotação em geral é expressa em rpm (número de revoluções por minuto) e indicada por $\dot{n}$. Observando que a velocidade é a distância percorrida por unidade de tempo e a distância angular percorrida durante cada revolução é 2π, a velocidade angular de máquinas em rotação é $\omega = 2\pi\dot{n}$ rad/min ou

Velocidade angular versus rpm:
$$\omega = \frac{2\pi\dot{n}}{60} \quad \text{(rad/s)} \qquad (6\text{–}37)$$

Considere uma força constante F agindo na direção tangencial à superfície externa de um eixo de raio r girando a $\dot{n}$ rpm. Observando que o trabalho W é a força vezes a distância, e que a potência $\dot{W}$ é o trabalho realizado por unidade de tempo e, portanto, a força vezes a velocidade, temos $\dot{W}_{\text{eixo}} = FV = Fr\omega = M\omega$. Portanto, a potência transmitida por um eixo em rotação a $\dot{n}$ rpm sob a influência de um torque aplicado M é (Figura 6–30)

Potência do eixo:
$$\dot{W}_{\text{eixo}} = \omega M = 2\pi\dot{n}M \quad \text{(W)} \qquad (6\text{–}38)$$

A energia cinética de um corpo de massa m durante o movimento translacional é $EC = \frac{1}{2}mV^2$. Observando que $V = r\omega$, a energia cinética rotacional de um corpo de massa m a uma distância r do eixo de rotação é $EC = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$. A energia cinética rotacional total de um corpo rígido em rotação ao redor de um eixo pode ser determinada pela integração das energias cinéticas rotacionais de massas infinitesimais dm em todo o corpo resultando em

Energia cinética rotacional:
$$EC_r = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (6\text{–}39)$$

onde novamente I é o momento de inércia do corpo e ω é a velocidade angular.

Durante o movimento rotacional, a direção da velocidade varia mesmo quando seu módulo permanece constante. A velocidade é uma quantidade vetorial e, portanto, uma variação na direção constitui uma variação da velocidade com o tempo e, portanto, uma aceleração. Isso é chamado de **aceleração centrípeta**. Seu módulo é

$$a_r = \frac{V^2}{r} = r\omega^2$$

A aceleração centrípeta é direcionada para o eixo de rotação (direção oposta à aceleração radial) e, portanto, a aceleração radial é negativa. Observando que a aceleração é um múltiplo constante da força, a aceleração centrípeta é o resultado de uma força que age sobre o corpo na direção da rotação do eixo, conhecida como a **força centrípeta**, cuja intensidade é $F_r = mV^2/r$. As acelerações tangencial e radial são perpendiculares entre si (uma vez que as direções radial e tangencial são perpendiculares), e a aceleração linear total é determinada pela sua soma vetorial, $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$. Para um corpo que gira com velocidade angular constante, a única aceleração é a centrípeta. A força que provoca a aceleração centrípeta não produz torque, uma vez que sua reta de ação cruza o eixo de rotação.

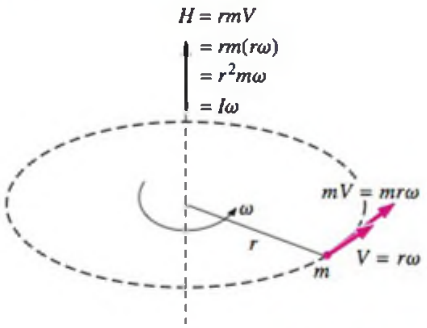


FIGURA 6–29
O momento angular do ponto de massa m girando com velocidade angular ω à distância r do eixo de rotação.

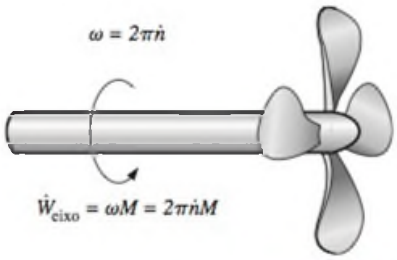


FIGURA 6–30
As relações entre a velocidade angular, rpm e a potência transmitida através de um eixo.

6–6 • EQUAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

A equação do momento discutida na Seção 6–4 é útil para determinar a relação entre o momento das correntes de escoamento e as forças resultantes. Muitos pro-

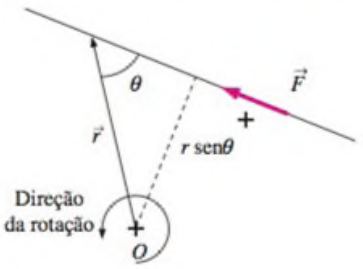


FIGURA 6–31
O momento de uma força $\vec{F}$ com relação a um ponto O é o produto vetorial do vetor de posição $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

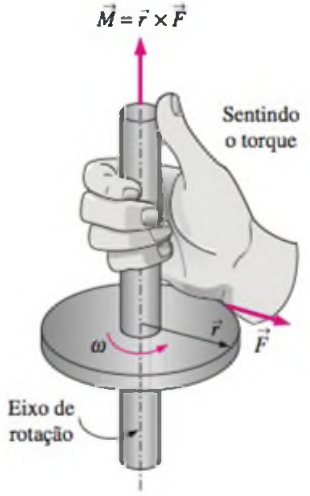


FIGURA 6–32
A determinação da direção do torque pela regra da mão direita.

blemas de engenharia envolvem o momento do momento linear das correntes de escoamento e os efeitos rotacionais causados por elas. Tais problemas são melhor analisados pela *equação do momento angular*, também chamada de *equação do momento do momento*. Uma classe importante de dispositivos de fluido, chamada *turbo de máquinas*, que inclui as bombas centrífugas, as turbinas e os ventiladores, é analisada pela equação do momento angular.

O *momento de uma força* $\vec{F}$ com relação a um ponto O é o produto vetorial (Figura 6–31)

Momento de uma força: $$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \textbf{(6–40)}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor de posição do ponto O até qualquer ponto na reta de ação de $\vec{F}$. O produto vetorial de dois vetores é um vetor cuja reta de ação é normal ao plano que contém os vetores multiplicados ($\vec{r}$ e $\vec{F}$ neste caso) e cujo módulo é

Módulo do momento de uma força: $$M = Fr \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(6–41)}$$

onde θ é o ângulo entre as retas de ação dos vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$. Assim, o módulo do torque em relação ao ponto O é igual à intensidade da força multiplicada pela distância normal da reta de ação da força até o ponto O. O sentido do vetor torque $\vec{M}$ é determinado pela regra da mão direita: quando os dedos da mão direita estão curvados na direção na qual a força tende a causar rotação, o polegar aponta para a direção do vetor torque (Figura 6–32). Observe que uma força cuja reta de ação passe através do ponto O produz torque zero em relação ao ponto O.

Substituindo o vetor $\vec{F}$ na Equação 6–40 pelo vetor momento $m\vec{V}$, obtemos que o *momento do momento*, também chamado de *momento angular*, em relação a um ponto O é

Momento do momento: $$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V} \qquad \textbf{(6–42)}$$

Assim, $\vec{r} \times \vec{V}$ representa o momento angular por unidade de massa, e o momento angular de uma massa infinitesimal $dm = \rho\, dV$ é $d\vec{H} = (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV$. Em seguida, o momento angular de um sistema é determinado pela integração como

Momento do momento (sistema): $$\vec{H}_{sis} = \int_{sis} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV \qquad \textbf{(6–43)}$$

A taxa de variação do momento do momento é

Taxa de variação do momento do momento: $$\frac{d\vec{H}_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{sis} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV \qquad \textbf{(6–44)}$$

A equação do momento angular de um sistema foi expressa na Equação 6–2 como

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{H}_{sis}}{dt} \qquad \textbf{(6–45)}$$

onde $\sum \vec{M} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$ é o torque total aplicado ao sistema, que é a soma vetorial dos momentos de todas as forças que agem sobre o sistema e $d\vec{H}_{sis}/dt$ é a taxa de variação do momento angular do sistema. A Equação 6–45 afirma que *a taxa de variação do momento angular de um sistema é igual ao torque total que age sobre o sistema.* Essa equação é válida para uma quantidade fixa de massa e um referencial inercial, ou seja, um referencial que seja fixo ou se mova com velocidade constante em uma trajetória retilínea.

A formulação geral da equação do momento angular para volume de controle é obtida tomando de $b = \vec{r} \times \vec{V}$ e, portanto, $B = \vec{H}$ no teorema de transporte geral de Reynolds. Isso resulta em (Figura 6–33)

$$\frac{dH_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6–46)}$$

Da Equação 6–45, o lado esquerdo dessa equação é igual a $\Sigma \vec{M}$. Substituindo, a equação do momento angular para um volume de controle geral (fixo ou móvel, forma fixa ou distorcida) é obtida como

$$\textit{Geral:} \qquad \sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6–47)}$$

que pode ser enunciada como

$$\begin{pmatrix}\text{A soma de todos}\\ \text{os torques externos}\\ \text{agindo em um VC}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{A taxa de variação no}\\ \text{tempo do momento}\\ \text{angular do conteúdo de VC}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{A taxa total de momento}\\ \text{angular para fora da}\\ \text{superfície de controle por}\\ \text{escoamento de massa}\end{pmatrix}$$

Novamente, $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{SC}$ é a velocidade do fluido com relação à superfície de controle (para utilização nos cálculos da vazão em massa em todos os locais onde o fluido cruza a superfície de controle) e $\vec{V}$ é a velocidade do fluido vista de um referencial fixo. O produto $\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$ representa a vazão em massa através de dA para dentro ou para fora do volume de controle, dependendo do sinal.

Para um volume de controle fixo (nenhum movimento ou deformação do volume de controle), $\vec{V}_r = \vec{V}$ e a equação do momento angular torna-se

$$\textit{VC fixo:} \qquad \sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6–48)}$$

Além disso, observe que as forças que agem sobre o volume de controle consistem em *forças de corpo* que agem através de todo o corpo do volume de controle, como a gravidade, e em *forças de superfície* que agem nos pontos de contato da superfície de controle, como a pressão e as forças de reação. O torque total consiste nos momentos dessas forças, bem como nos torques aplicados ao volume de controle.

Casos Especiais

Durante o *escoamento em regime permanente*, o momento angular dentro do volume de controle permanece constante e, portanto, a taxa de variação no tempo do momento angular do conteúdo do volume de controle é zero. Assim

$$\textit{Escoamento em regime permanente:} \qquad \sum \vec{M} = \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6–49)}$$

Em muitas aplicações práticas, o fluido atravessa a fronteira do volume de controle em um número determinado de entradas e saídas, e é conveniente substituir a integral de superfície por uma expressão algébrica escrita em termos das propriedades médias nas áreas das seções transversais nas quais o fluido entra ou sai do volume de controle. Em tais casos, a taxa de escoamento do momento angular pode ser expressa como a diferença entre os momentos angulares das correntes de saída e entrada. Além disso, em muitos casos o braço do momento $\vec{r}$ é constante ao longo da entrada ou da saída (como nas turbomáquinas com escoamento radial) ou é grande comparado ao diâmetro do tubo de entrada ou saída (como nos aspersores rotativos de jardim). Em tais casos, o valor *médio* de $\vec{r}$ é usado em toda a área de seção transversal da entrada ou saída. Em seguida, uma forma aproximada da equação do momento angular em termos das propriedades médias nas entradas e saídas torna-se

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \sum_s \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_e \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(6–50)}$$

Você deve estar se perguntando por que não introduzimos um fator de correção na Equação 6–50, como fizemos para a conservação da energia (Capítulo 5) e para a conservação do momento linear (Seção 6–4). O motivo é que tal fator de correção

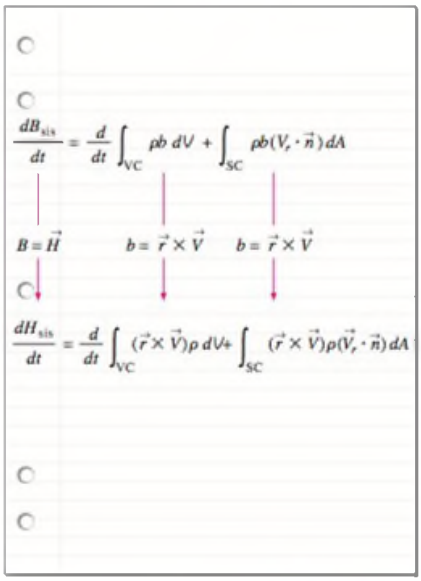


FIGURA 6–33
A equação do momento angular é obtida pela substituição de B no teorema de transporte de Reynolds pelo momento angular $\vec{H}$, e pela substituição de b pelo momento angular por unidade de massa $\vec{r} \times \vec{V}$.

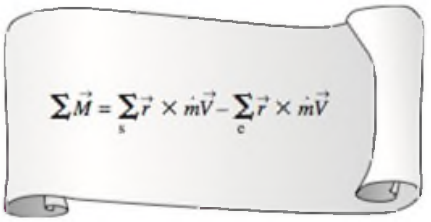


FIGURA 6–34
O torque total que age sobre um volume de controle durante o escoamento em regime permanente é igual à diferença entre os escoamentos do momento angular de saída e de entrada.

variaria de um problema para outro dependendo da geometria, por causa do produto vetorial entre $\vec{r}$ e $\dot{m}\vec{V}$. Assim, embora possamos calcular facilmente um fator de correção para o fluxo da energia cinética e um fator de correção para o fluxo do momento no escoamento de tubo desenvolvido que pode ser aplicado a diversos problemas, não podemos fazer o mesmo para o momento angular. Felizmente, em muitos problemas de interesse prático para a engenharia, o erro associado ao uso de valores médios de raio e velocidade é pequeno, e a aproximação da Equação 6–50 é razoável.

Se o escoamento for *estacionário,* a Equação 6–50 pode ser mais reduzida ainda para (Figura 6–34)

$$\textit{Escoamento em regime permanente:}\quad \sum \vec{M} = \sum_s \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_e \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(6–51)}$$

Ela afirma que *o torque total que age sobre o volume de controle durante o escoamento em regime permanente é igual à diferença entre as taxas de escoamento do momento angular de entrada e de saída.* Esse enunciado também pode ser expresso para qualquer direção especificada.

Em muitos problemas, todas as forças e momentos significativos do escoamento estão no mesmo plano e, portanto, todos provocarão no mesmo plano e em relação ao mesmo eixo. Em tais casos a Equação 6–51 pode ser expressa na forma escalar como

$$\sum M = \sum_s r\dot{m}V - \sum_e r\dot{m}V \qquad \textbf{(6–52)}$$

onde r representa a distância média normal entre o ponto em relação ao qual os torques são tomados e a reta de ação da força ou velocidade, desde que a convenção de sinais dos momentos seja observada. Ou seja, todos os torques na direção anti-horária são positivos, e todos os momentos na direção horária são negativos.

Escoamento sem Torques Externos

Quando não são aplicados torques externos, a Equação 6–50 do momento angular 6-50 é reduzida a

$$\textit{Nenhum torque externo:}\quad 0 = \frac{d\vec{H}_{VC}}{dt} + \sum_s \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_e \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(6–53)}$$

Essa é uma expressão do princípio da conservação do momento angular, a qual pode ser enunciada como *na ausência de torques externos, a taxa de variação do momento angular de um volume de controle é igual à diferença entre os fluxos do momento angular de entrada e de saída.*

Quando o momento de inércia I do volume de controle permanece constante, o primeiro termo da última equação torna-se simplesmente o momento de inércia vezes a aceleração angular, $I\vec{\alpha}$. Assim, o volume de controle neste caso pode ser tratado como um corpo sólido com um torque total de

$$\vec{M}_{\text{corpo}} = I_{\text{corpo}}\vec{\alpha} = \sum_e (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) - \sum_s (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) \qquad \textbf{(6–54)}$$

(devido à variação do momento angular) agindo sobre ele. Essa abordagem pode ser usada para determinar a aceleração angular dos veículos e naves espaciais, quando um foguete é disparado em uma direção diferente daquela do movimento.

Dispositivos com Escoamento Radial

Muitos dispositivos com escoamento rotativo como as bombas centrífugas e os ventiladores envolvem o escoamento na direção radial normal ao eixo de rotação e são chamados de *dispositivos com escoamento radial*. Em uma bomba centrífuga, por exemplo, o fluido entra no dispositivo na direção axial através da entrada do rotor, gira para fora à medida que escoa através das passagens entre as lâminas do rotor, e é descarregado na direção tangencial, como mostra a Figura 6–35. Os dispositivos

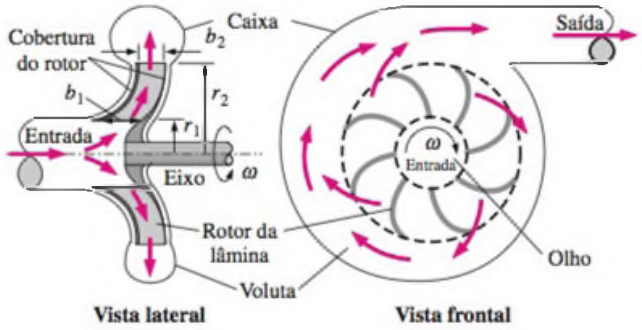


FIGURA 6–35
Vistas lateral e frontal de uma bomba centrífuga típica.

com escoamento axial são analisados facilmente usando a equação do momento linear. Mas os dispositivos com escoamento radial envolvem grandes variações do momento angular do fluido e são melhor analisados com o auxílio da equação do momento angular.

Para analisar a bomba centrífuga, selecionamos a região anular que inclui a seção do rotor como o volume de controle, como mostra a Figura 6–36. Observe que, em geral, a velocidade média de escoamento tem as componentes normal e tangencial tanto na entrada quanto na saída da seção do impulsor. Quando o eixo gira a uma velocidade angular ω, as pás do impulsor têm uma velocidade tangencial ωr_1 na entrada e ωr_2 na saída. No escoamento em regime permanente incompressível, a equação de conservação da massa pode ser escrita como

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} \quad \rightarrow \quad (2\pi r_1 b_1)V_{1,n} = (2\pi r_2 b_2)V_{2,n} \tag{6–55}$$

onde b_1 e b_2 são as larguras do escoamento na entrada, onde $r = r_1$ e na saída onde $r = r_2$, respectivamente. (Observe que a área de seção transversal circunferencial reais é um pouco menor do que $2\pi rb$, uma vez que a espessura da lâmina não é zero.) Então, as componentes médias normais $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$ da velocidade absoluta podem ser expressas em termos da vazão $\dot{V}$ como

$$V_{1,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_1 b_1} \quad \text{e} \quad V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2} \tag{6–56}$$

As componentes da velocidade normal $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$, bem como a pressão que age sobre as áreas circunferenciais interna e externa, passam através do centro do eixo e, portanto, não contribuem para o torque com relação à origem. Assim, apenas as componentes da velocidade tangencial contribuem para o torque; e a aplicação da equação do momento angular $\sum M = \sum_s \dot{r}mV - \sum_e \dot{r}mV$ para o volume de controle resulta em

$$T_{\text{eixo}} = \dot{m}(r_2 V_{2,t} - r_1 V_{1,t}) \tag{6–57}$$

que é conhecida como a **fórmula da turbina de Euler**. Quando os ângulos α_1 e α_2 entre a direção das velocidades do escoamento absoluto e a direção radial são conhecidos, torna-se

$$T_{\text{eixo}} = \dot{m}(r_2 V_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - r_1 V_1 \operatorname{sen} \alpha_1) \tag{6–58}$$

No caso idealizado da velocidade tangencial do fluido ser igual à velocidade angular da lâmina tanto na entrada quanto na saída, temos $V_{1,t} = \omega r_1$ e $V_{2,t} = \omega r_2$, e o torque torna-se

$$T_{\text{eixo, ideal}} = \dot{m}\omega(r_2^2 - r_1^2) \tag{6–59}$$

onde $\omega = 2\pi\dot{n}$ é a velocidade angular das pás. Quando o torque é conhecido, a potência do eixo pode ser determinada com $\dot{W}_{\text{eixo}} = \omega T_{\text{eixo}} = 2\pi\dot{n}T_{\text{eixo}}$.

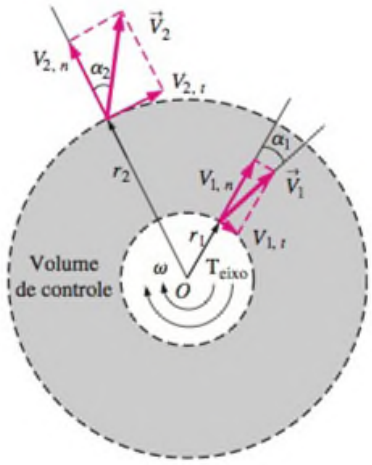


FIGURA 6–36
Um volume de controle anular que inclui a seção do impulsor de uma bomba centrífuga.

EXEMPLO 6–8 **Torque de Flexão Agindo na Base de um Tubo de Água**

A água subterrânea é bombeada até uma altura suficiente através de um tubo com 10 cm de diâmetro que consiste em uma seção vertical com 2 m de comprimento e horizontal de 1 m de comprimento, como mostra a Figura 6–37. A água é descarregada para o ar atmosférico a uma velocidade média de 3 m/s e a massa da seção do tubo horizontal quando preenchido com água é de 12 kg por metro linear. O tubo é ancorado no solo por uma base de concreto. Determine o momento de flexão que age na base do tubo (ponto A) e o comprimento necessário da seção horizontal que tornaria nulo o torque do ponto A.

SOLUÇÃO A água é bombeada através de uma seção da tubulação. O torque que age na base e o comprimento necessário da seção horizontal para tornar esse torque nulo devem ser determinados.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente. **2** A água é descarregada na atmosfera e, portanto, a pressão manométrica na saída é zero. **3** O diâmetro do tubo é pequeno comparado ao braço do momento e, portanto, usamos os valores médios do raio e da velocidade na saída.

Propriedades Assumimos a densidade da água como 1000 kg/m^3.

Análise Consideramos todo o tubo em forma de L como o volume de controle e designamos a entrada por **1** e a saída por **2**. Também tomamos as coordenadas x e z como mostrado. O volume de controle e o referencial são fixos.

A equação de conservação da massa desse sistema com escoamento em regime permanente, uma entrada e uma saída é $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$ e $V_1 = V_2 = V$ uma vez que A_c = constante. A vazão em massa e o peso da seção horizontal do tubo são

$$\dot{m} = \rho A_c V = (1000 \text{ kg/m}^3)[\pi(0{,}10 \text{ m})^2/4](3 \text{ m/s}) = 23{,}56 \text{ kg/s}$$

$$W = mg = (12 \text{ kg/m})(1 \text{ m})(9{,}81 \text{ m/s}^2)\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 117{,}7 \text{ N}$$

Para determinarmos o torque que age sobre o tubo no ponto A, precisamos do torque de todas as forças e as vazões em momento do momento com relação àquele ponto. Esse é um problema de escoamento em regime permanente e todas as forças e todos os torques dos escoamentos angulares estão no mesmo plano. Assim, a equação do momento angular neste caso pode ser expressa como

$$\sum M = \sum_s r\dot{m}V - \sum_e r\dot{m}V$$

onde r é o braço médio do momento, V é a velocidade média, todos os torques na direção anti-horária são positivos e todos os torques na direção horária são negativos.

O diagrama de corpo livre do tubo em forma de L é dado na Figura 6–37. Observando que os momentos de todas as forças e as vazões em momentos do escoamento que passam através do ponto A são nulas, a única força que resulta

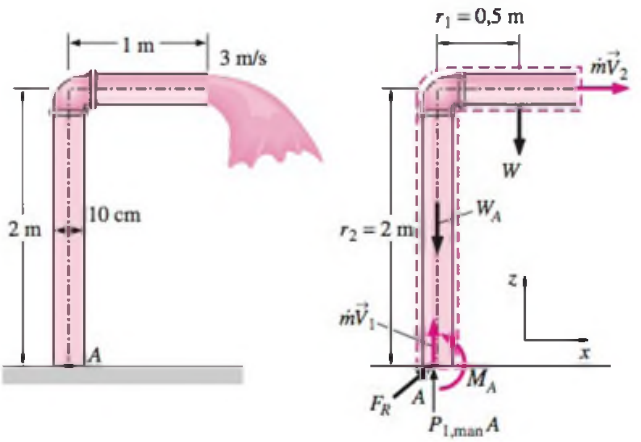


FIGURA 6–37
Esquema do Exemplo 6–8 e o diagrama do corpo livre.

em um torque em relação ao ponto A é o peso W da seção horizontal do tubo, e a única vazão em momento do escoamento que resulta em um torque é a corrente de saída (ambos são negativos uma vez que ambos os torques estão na direção horária). Assim, a equação do momento angular em relação ao ponto A torna-se

$$M_A - r_1 W = -r_2 \dot{m} V_2$$

Solucionando M_A e substituindo temos

$$\begin{aligned} M_A &= r_1 W - r_2 \dot{m} V_2 \\ &= (0{,}5\ \text{m})(118\ \text{N}) - (2\ \text{m})(23{,}56\ \text{kg/s})(3\ \text{m/s})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) \\ &= \mathbf{-82{,}5\ N \cdot m} \end{aligned}$$

O sinal negativo indica que a direção suposta para M_A está errada e deve ser invertida. Assim, um momento de 82,5 N · m age na base do tubo na direção horária. Ou seja, a base de concreto deve aplicar um momento de 82,5 N · m à base do tubo na direção horária para contrabalançar o excesso de momento causado pela corrente de saída.

O peso do tubo horizontal é $w = W/L = 117{,}7$ N por m linear. Assim, o peso para um comprimento de L m é Lw, com um braço de momento $r_1 = L/2$. Definindo $M_A = 0$ e substituindo, o comprimento L do tubo horizontal que fará com que o torque na base do tubo desapareça é determinado por

$$0 = r_1 W - r_2 \dot{m} V_2 \quad \rightarrow \quad 0 = (L/2) L w - r_2 \dot{m} V_2$$

ou

$$L = \sqrt{\frac{2 r_2 \dot{m} V_2}{w}} = \sqrt{\frac{2(2\ \text{m})(23{,}56\ \text{kg/s})(3\ \text{m/s})}{117{,}7\ \text{N/m}}\left(\frac{\text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)} = \mathbf{1{,}55\ m}$$

Discussão Observe que o peso do tubo e o momento da corrente de saída causam torques opostos no ponto A. Este exemplo mostra a importância de levar em conta os momentos angulares nas correntes de escoamento ao executar uma análise dinâmica e avaliar as tensões sobre os materiais do tubo em seções transversais críticas.

EXEMPLO 6–9 Geração de Potência de um Sistema de Aspersores

Um aspersor de jardim grande com quatro braços idênticos deve ser convertido em uma turbina para gerar energia elétrica, anexando um gerador ao cabeçote rotativo, como mostra a Figura 6–38. A água entra no aspersor pela base, ao longo do eixo de rotação, a uma taxa de 20 L/s e sai dos bocais na direção tangencial. O aspersor gira a uma taxa de 300 rpm em um plano horizontal. O diâmetro de cada jato é de 1 cm, e a distância normal entre o eixo de rotação e o centro de cada bocal é de 0,6 m. Estime a energia elétrica produzida.

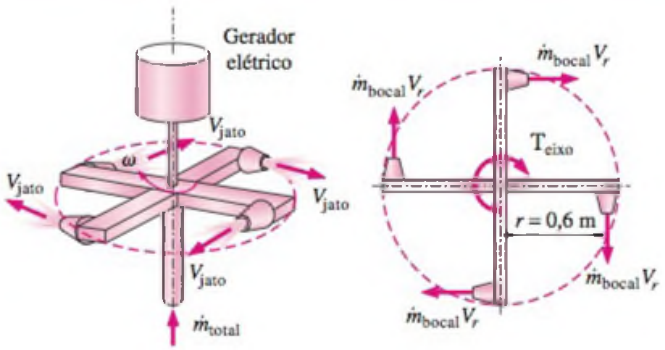


FIGURA 6–38
Esquema do Exemplo 6–9 e diagrama do corpo livre.

SOLUÇÃO Um aspersor de quatro braços é usado para gerar energia elétrica. Para uma taxa de escoamento e uma velocidade rotacional especificadas, a potência produzida deve ser determinada.

Hipóteses **1** O escoamento em regime permanente é ciclicamente estacionário (ou seja, em regime permanente com relação a um referencial que gira com o cabeçote do aspersor). **2** A água é descarregada para a atmosfera e, portanto, a pressão manométrica na saída do bocal é zero. **3** As perdas do gerador e o arrasto do ar das componentes rotativas são desprezados. **4** O diâmetro do bocal é pequeno comparado ao braço do momento e, portanto, usamos valores médios de raio e velocidade na saída.

Propriedades Tomamos a densidade da água como 1000 kg/m^3 = 1 kg/L.

Análise Tomamos o disco que inclui os braços do aspersor como o volume de controle, que é um volume de controle fixo.

A equação de conservação da massa desse sistema com escoamento em regime permanente é $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_{total}$. Observando que os quatro bocais são idênticos, temos $\dot{m}_{bocal} = \dot{m}_{total}/4$ ou $\dot{V}_{bocal} = \dot{V}_{total}/4$, uma vez que a densidade da água é constante. A velocidade de saída do jato médio com relação ao bocal é

$$V_{jato} = \frac{\dot{V}_{bocal}}{A_{jato}} = \frac{5 \text{ L/s}}{[\pi(0{,}01 \text{ m})^2/4]}\left(\frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}}\right) = 63{,}66 \text{ m/s}$$

As velocidades angular e tangencial dos bocais são

$$\omega = 2\pi\dot{n} = 2\pi(300 \text{ rev/min})\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 31{,}42 \text{ rad/s}$$

$$V_{bocal} = r\omega = (0{,}6 \text{ m})(31{,}42 \text{ rad/s}) = 18{,}85 \text{ m/s}$$

Ou seja, a água do bocal também se move à velocidade de 18,85 m/s na direção oposta quando é descarregada. Assim, a velocidade média do jato de água em relação ao volume de controle (ou com relação a um local fixo na Terra) torna-se

$$V_r = V_{jato} - V_{bocal} = 63{,}66 - 18{,}85 = 44{,}81 \text{ m/s}$$

Observando que esse é um problema de escoamento em regime permanente e que todas as forças de momento dos escoamentos estão no mesmo plano, a equação do momento angular pode ser aproximada por $\sum M = \sum_s r\dot{m}V - \sum_e r\dot{m}V$, onde r é o braço do momento, todos os torques na direção anti-horária são positivos e todos os torques na direção horária são negativos.

O diagrama do corpo livre do disco que contém os braços do aspersor é dado na Figura 6–38. Observe que os momentos de todas as forças e os escoamentos do momento da quantidade de movimento que passam através do eixo de rotação são nulos. O momento escoa pelos jatos de água que saem dos bocais produzindo um torque na direção horária e o efeito do gerador sobre o volume de controle também é um torque na direção horária (e, portanto, ambos são negativos). Assim, a equação do momento angular com relação ao eixo de rotação torna-se

$$-T_{eixo} = -4r\dot{m}_{bocal}V_r \qquad \text{ou} \qquad T_{eixo} = r\dot{m}_{total}V_r$$

Substituindo, o torque transmitido através do eixo é determinado por

$$T_{eixo} = r\dot{m}_{total}V_r = (0{,}6 \text{ m})(20 \text{ kg/s})(44{,}81 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 537{,}7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

uma vez que $\dot{m}_{total} = \rho\dot{V}_{total}$ = (1 kg/L)(20 L/s) = 20 kg/s.

Então, a energia gerada torna-se

$$\dot{W} = 2\pi\dot{n}T_{eixo} = \omega T_{eixo} = (31{,}42 \text{ rad/s})(537{,}7 \text{ N} \cdot \text{m})\left(\frac{1 \text{ kW}}{1000 \text{ N} \cdot \text{m/s}}\right) = \mathbf{16{,}9 \text{ kW}}$$

Portanto, essa turbina tipo aspersor tem o potencial de produzir 16, 9 kW de potência.

Discussão Para colocarmos o resultado obtido em perspectiva, consideramos dois casos limites. No primeiro, o aspersor fica preso e, portanto, a velocidade angular é zero. O torque desenvolvido será máximo nesse caso, uma vez que $V_{bocal} = 0$ e, portanto, $V_r = V_{jato} = 63{,}66$ m/s, resultando em $T_{eixo,\,máx} = 764$ N · m. Mas a potência gerada será nula, uma vez que o eixo não gira.

No segundo caso limite, o eixo é desconectado do gerador (e, portanto, o torque e a geração de potência são nulos) e o eixo acelera até atingir uma velocidade de equilíbrio. Tomando $T_{eixo} = 0$ na equação do momento angular, temos $V_r = 0$ e, portanto, $V_{jato} = V_{bocal} = 63{,}66$ m/s. A velocidade angular correspondente do aspersor é

$$\dot{n} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V_{bocal}}{2\pi r} = \frac{63{,}66 \text{ m/s}}{2\pi(0{,}6 \text{ m})}\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = 1013 \text{ rpm}$$

Nessa rpm, a velocidade do jato será zero com relação a um observador na Terra (ou com relação ao volume de controle em forma de disco, fixo, selecionado).

A variação da potência produzida com velocidade angular é mostrada na Figura 6–39. Observe que a potência produzida aumenta quando a rpm aumenta, atinge um máximo (em cerca de 500 rpm neste caso) e, em seguida, diminui. A potência real produzida será menor do que essa devido à ineficiência do gerador (Capítulo 5).

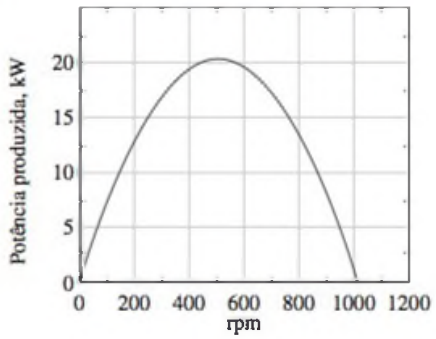


FIGURA 6–39
A variação de potência produzida com a velocidade angular.

RESUMO

Este capítulo trata principalmente da conservação do momento para os volumes de controle finitos. As forças que agem sobre o volume de controle consistem em *forças* que agem em todo o corpo do volume de controle (como as forças da gravidade, elétrica e magnética) e as *forças de superfície* que agem sobre a superfície de controle (como as forças de pressão e as forças de reação nos pontos de contato). A soma de todas as forças que agem sobre o volume de controle em determinado instante é representada por $\sum \vec{F}$ e é expressa como

$$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{força total}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{gravidade}}}_{\text{força}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{pressão}} + \sum \vec{F}_{\text{viscosidade}} + \sum \vec{F}_{\text{outras}}}_{\text{força de superfície}}$$

A segunda lei de Newton pode ser enunciada como *a soma de todas as forças externas que agem sobre um sistema é igual à taxa de variação no tempo do momento linear do sistema.* Fazendo $b = \vec{V}$ e, portanto, $B = m\vec{V}$ no teorema de transporte de Reynolds e utilizando a segunda lei de Newton temos a *equação do momento linear* de um volume de controle como

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\vec{V}\, dV + \int_{SC} \rho\vec{V}(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

Isso se reduz aos seguintes casos especiais:

Escoamento em regime permanente: $\sum \vec{F} = \int_{SC} \rho\vec{V}(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$

Escoamento em regime não permanente (forma algébrica):

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\vec{V}\, dV + \sum_s \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_e \beta\dot{m}\vec{V}$$

Escoamento em regime permanente (forma algébrica):

$$\sum \vec{F} = \sum_s \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_e \beta\dot{m}\vec{V}$$

Nenhuma força externa: $0 = \dfrac{d(m\vec{V})_{VC}}{dt} + \sum_s \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_e \beta\dot{m}\vec{V}$

onde β é o fator de correção do fluxo de momento. Um volume de controle cuja massa m permanece constante pode ser tratado como um corpo sólido, com uma força total ou empuxo de $\vec{F}_{vol} = m_{vol}\vec{a} = \sum_e \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_s \beta\dot{m}\vec{V}$ agindo sobre ele.

A segunda lei de Newton também pode ser enunciada como *a taxa de variação do momento angular de um sistema é igual ao torque total que age sobre o sistema.* Tomando $b = \vec{r} \times \vec{V}$ e, portanto, $B = \vec{H}$ no teorema de transporte geral de Reynolds temos a *equação do momento angular* como

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

Isso se reduz aos seguintes casos especiais:

Escoamento em regime permanente:

$$\sum \vec{M} = \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

Escoamento em regime não permanente (forma algébrica):

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \sum_s \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_e \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Escoamento em regime permanente e uniforme:

$$\sum \vec{M} = \sum_s \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_e \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Forma escalar para uma direção:

$$\sum M = \sum_s r\dot{m}V - \sum_e r\dot{m}V$$

Nenhum momento externo:

$$0 = \frac{d\vec{H}_{VC}}{dt} + \sum_s \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_e \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Um volume de controle cujo momento de inércia I permanece constante pode ser tratado como um corpo sólido, com um torque total de

$$\vec{M}_{vol} = I_{vol}\vec{\alpha} = \sum_e \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_s \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

agindo sobre ele. Essa relação pode ser usada para determinar a aceleração angular da nave espacial quando um foguete é lançado.

As equações dos momentos linear e angular são de importância fundamental para a análise de turbomáquinas e serão muito usadas no Capítulo 14.

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. C. T. Crowe, J. A. Roberson e D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*, 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
2. R. W. Fox e A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: Wiley, 1999.
3. P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. San Diego, CA: Academic Press, 1990.
4. B. R. Munson, D. F. Young e T. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4. ed. Nova Iorque: Wiley, 2002.

PROBLEMAS*

Lei de Newton e Conservação do Momento

6–1C Enuncie a primeira, a segunda e a terceira leis de Newton.

6–2C O momento é um vetor? Em caso afirmativo, para qual direção ele aponta?

6–3C Enuncie o princípio da conservação do momento. O que é possível dizer sobre o momento de um corpo se a força total que age sobre ele é nula?

6–4C Expresse a segunda lei do movimento de Newton para pás rotativas. O que é possível dizer sobre a velocidade angular e o momento angular de um corpo não rígido em rotação de massa constante, se o torque total que age sobre ele é nulo?

6–5C Considere dois corpos rígidos com mesma massa e velocidade angular. Você acha que esses dois corpos devem ter o mesmo momento angular? Explique.

Equação do Momento Linear

6–6C Explique a importância do teorema de transporte de Reynolds na mecânica dos fluidos e descreva como a equação do momento linear é obtida a partir dele.

6–7C Descreva as forças de corpo e as forças de superfície e explique como a força resultante que age sobre o volume de controle é determinada. O peso do fluido é uma força de corpo ou uma força de superfície? E a pressão?

6–8C Como as forças de superfície surgem na análise do momento de um volume de controle? Como é possível minimizar o número de forças de superfície expostas durante a análise?

6–9C Qual a importância do fator de correção do fluxo do momento na análise do momento dos sistemas de escoamento? Para qual tipo de escoamento ele é significativo e deve ser considerado na análise: escoamento laminar, escoamento turbulento ou escoamento de jato?

6–10C Escreva a equação do momento do escoamento unidimensional estacionário para o caso de ausência de força externa e explique o significado físico de seus termos.

6–11C Na aplicação da equação do momento, explique por que em geral podemos desprezar a pressão atmosférica e trabalhar apenas com pressões manométricas.

6–12C Dois bombeiros estão combatendo um incêndio com mangueiras e bocais de água idênticos, exceto que um segura a mangueira em linha reta para que a água saia do bocal na mesma direção em que entra, enquanto o outro a segura para trás para que a água faça um movimento em U antes de ser descarregada. Qual bombeiro sofrerá maior força de reação?

6–13C Um foguete no espaço (nenhum atrito ou resistência ao movimento) pode expelir gases a uma certa velocidade alta V em relação a si mesmo. V é o limite superior para a velocidade final do foguete?

6–14C Descreva por que um helicóptero flutua no ar em termos do momento e do escoamento de ar.

FIGURA P6–14C

6–15C Para flutuar no alto de uma montanha, um helicóptero precisa de mais, menos ou da mesma potência que precisaria para flutuar no nível do mar? Explique.

6–16C Em determinado local, um helicóptero exige mais energia no verão ou no inverno para atingir um desempenho especificado? Explique.

6–17C Um jato d'água horizontal de um bocal com seção transversal de saída constante atinge normalmente uma placa plana vertical e fixa. Determinada força F é necessária para manter a placa contra a corrente d'água. Se a velocidade da água dobrar, a força necessária para segurar a placa também dobrará? Explique.

6–18C Um jato d'água horizontal a velocidade constante de um bocal fixo é imposto normalmente a uma placa plana vertical que é mantida em um trilho quase sem atrito. À medida que o jato d'água atinge a placa, ele começa a se mover devido à força da água. A aceleração da placa permanecerá constante ou variará? Explique.

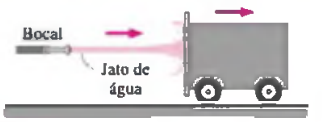


FIGURA P6–18C

6–19C Um jato d'água horizontal a velocidade constante V de um bocal fixo é imposto normalmente a uma placa plana vertical que é mantida em um trilho quase sem atrito. À medida que o jato d'água atinge a placa, ele começa a se mover devido à força da água. Qual é a velocidade mais alta que pode ser atingida pela placa? Explique.

6–20 Mostre que a força exercida por um jato de líquido em um bocal fixo quando ele sai com uma velocidade V é proporcional a V^2 ou, alternativamente, a $\dot{m}^2$.

6–21 Um jato d'água horizontal com velocidade constante V é imposto normalmente a uma placa plana vertical e se espalha nas laterais no plano vertical. A placa se move na direção da entrada do jato d'água com velocidade $\frac{1}{2}V$. Se uma força F é necessária para manter a placa fixa, quanta força é necessária para mover a placa na direção do jato d'água?

FIGURA P6–21

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

6–22 Um cotovelo de 90° é usado para direcionar o escoamento da água a uma taxa de 25 kg/s em um tubo horizontal para cima. O diâmetro de todo o cotovelo é de 10 cm. O cotovelo descarrega água na atmosfera e, portanto, a pressão na saída é a pressão atmosférica local. A diferença de elevação entre os centros da saída e da entrada do cotovelo é de 35 cm. O peso do cotovelo e da água que há nele são desprezíveis. Determine (*a*) a pressão manométrica no centro da entrada do cotovelo e (*b*) a força de ancoragem necessária para manter o cotovelo no lugar. Tome o fator de correção do fluxo do momento como 1,03.

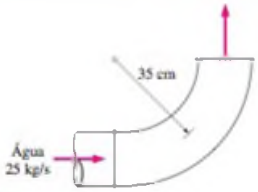


FIGURA P6–22

6–23 Repita o Problema 6–22 para o caso de outro cotovelo (idêntico) anexado ao cotovelo existente, para que o fluido faça uma volta em U. *Respostas: (a) 6,87 kPa, (b) 218 N*

6–24 Um cotovelo redutor é usado para defletir o escoamento da água a uma taxa de 30 kg/s em um tubo horizontal para cima de um ângulo $\theta = 45°$ da direção do escoamento enquanto a acelera. O cotovelo descarrega água na atmosfera. A área da seção transversal do cotovelo é de 150 cm^2 na entrada e 25 cm^2 na saída. A diferença de elevação entre os centros da saída e da entrada é de 40 cm. A massa do cotovelo e da água que há nele é de 50 kg. Determine a força de ancoragem necessária para manter o cotovelo no lugar. Tome o fator de correção do fluxo do momento como 1,03.

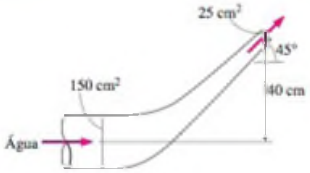


FIGURA P6–24

6–25 Repita o Problema 6–24 para o caso de $\theta = 110°$.

6–26 A água acelerada por um bocal até 15 m/s atinge a superfície traseira vertical de um carrinho que se move horizontalmente a uma velocidade constante de 5 m/s na direção do escoamento. A vazão em massa da água é de 25 kg/s. Após o choque, a corrente de água se espalha em todas as direções no plano da superfície traseira. (*a*) Determine a força que precisa ser aplicada aos freios do carrinho para evitar que ele acelere. (*b*) Se essa força fosse usada para gerar potência em vez de ser desperdiçada nos freios, determine a quantidade máxima de potência que poderia ser gerada. *Respostas: (a) 250 N, (b) 1,25 kW*

FIGURA P6–26

6–27 Reconsidere o Problema 6–26. Se a massa do carrinho for 300 kg e os freios falharem, determine a aceleração do carrinho quando a água atingi-lo pela primeira vez. Suponha que a massa da água que molha a superfície traseira seja desprezível.

6–28 Um jato d'água horizontal com 5 cm de diâmetro e velocidade de 18 m/s é imposto normalmente a uma placa vertical de massa de 1000 kg. A placa é mantida em um trilho quase sem atrito e inicialmente está fixa. Quando o jato atinge a placa, esta começa a se mover na direção do jato. A água sempre se espalha no plano da placa que se afasta. Determine (*a*) a aceleração da placa quando o jato a atinge (tempo = 0), (*b*) o tempo necessário para que a placa atinja uma velocidade de 9 m/s e (*c*) a velocidade da placa 20 s após o jato atingir a placa pela primeira vez. Suponha que a velocidade do jato com relação à placa permaneça constante.

6–29 A água que escoa em um tubo com 30 cm de diâmetro a 5 m/s e 300 kPa de pressão manométrica entra em uma seção redutora de 90°, a qual se conecta a um tubo vertical com 15 cm de diâmetro. A entrada da curva está 50 cm acima da saída. Desprezando os efeitos do atrito e gravitacionais, determine a força resultante exercida sobre o redutor pela água. Tome o fator de correção do fluxo do momento como 1,04.

6–30 As grandes turbinas eólicas disponíveis comercialmente incluem diâmetros de até 100 m e geram mais de 3 MW de energia elétrica em condições ótimas de projeto. Considere uma turbina eólica com envergadura de lâmina de 90 m sujeita a ventos constantes de 25 km/h. Se a eficiência combinada de turbina e gerador da turbina eólica for de 32%, determine (*a*) a potência gerada pela turbina e (*b*) a força horizontal exercida pelo vento sobre o mastro de suporte da turbina. Tome a densidade do ar como 1,25 kg/m^3 e despreze os efeitos do atrito.

FIGURA P6–30

6–31 Os bombeiros seguram um bocal na ponta de uma mangueira enquanto tentam apagar um incêndio. Se o diâmetro de saída do bocal é de 6 cm e a taxa de escoamento da água é de 5 m^3/min, determine (*a*) a velocidade média de saída da água e (*b*) a força de resistência horizontal necessária para que os bombeiros segurem o bocal. *Respostas: (a) 29,5 m/s, (b) 2,457 N*

FIGURA P6–36

6–32 Um jato d'água horizontal com 5 cm de diâmetro e velocidade de 30 m/s atinge uma placa plana que se move na mesma direção do jato à velocidade de 10 m/s. A água se espalha em todas as direções do plano da placa. Quanta força a corrente d'água exerce sobre a placa?

6–33 Reconsidere o Problema 6–32. Usando o EES (ou outro software) investigue o efeito da velocidade da placa sobre a força exercida na placa. Faça a velocidade da placa variar de 0 a 30 m/s em incrementos de 3 m/s. Tabule e represente graficamente os resultados.

6–34 Um helicóptero sem carga de massa 10.000 kg flutua ao nível do mar enquanto é carregado. No modo de flutuação sem carga, as pás giram a 400 rpm. As pás horizontais acima do helicóptero fazem com que uma massa de ar de 15 m de diâmetro se mova para baixo a uma velocidade média proporcional à velocidade rotacional geral da lâmina (rpm). Uma carga de 15.000 kg é carregada no helicóptero e o helicóptero se eleva lentamente.

Determine (*a*) a inversão da vazão de ar volumétrico que o helicóptero gera durante a flutuação sem carga e a entrada de potência necessária e (*b*) a rpm das pás do helicóptero para flutuar com a carga de 15.000 kg e a entrada de potência necessária. Tome a densidade do ar atmosférico 1,18 kg/m³. Suponha que o ar se aproxime das pás pelo alto através de uma área grande com velocidade desprezível, e que o ar seja forçado pelas pás a se mover para baixo com velocidade uniforme através de um cilindro imaginário cuja base é a área de envergadura da pá.

FIGURA P6–34

6–35 Reconsidere o helicóptero do Problema 6–34, exceto que ele flutua no alto de uma montanha de 3000 m de altitude na qual a densidade do ar é 0,79 kg/m³. Observando que as pás do helicóptero descarregado devem girar a 400 rpm para flutuar no nível do mar, determine a velocidade rotacional da pá para flutuar a uma altitude maior. Determine também o aumento percentual da entrada de potência necessária para flutuar a uma altitude de 3000 m em relação àquela necessária para flutuar no nível do mar. *Respostas:* 489 rpm, 22%

6–36 Uma comporta basculante, que controla a taxa de escoamento de um canal simplesmente levantando ou abaixando uma placa vertical, normalmente é usada em sistemas de irrigação. Uma força é exercida sobre a comporta devido à diferença entre as alturas da água y_1 e y_2 e as velocidades de escoamento V_1 e V_2 a jusante e a montante da comporta, respectivamente. Desprezando as forças de cisalhamento da parede nas superfícies do canal, deduza relações para V_1, V_2 e para a força que age em uma comporta basculante com largura w durante um escoamento em regime permanente e uniforme.

Resposta: $F_R = \dot{m}(V_1 - V_2) + \dfrac{w}{2}\rho g(y_1^2 - y_2^2)$

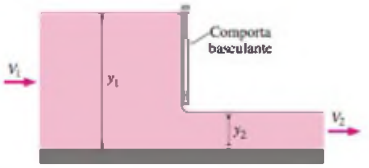


FIGURA P6–36

6–37 A água entra em uma bomba centrífuga de forma axialmente à pressão atmosférica, a uma taxa de 0,12 m³/s e a uma velocidade de 7 m/s, e sai na direção normal ao longo da carcaça da bomba, como mostra a Figura P6–37. Determine a força que age sobre o eixo (que também é a força que age sobre o rolamento do eixo) na direção axial.

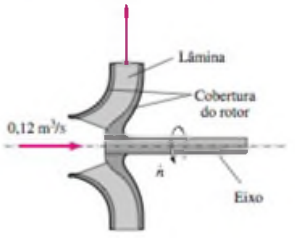


FIGURA P6–37

Equação do Momento Angular

6–38C Como a equação do momento angular é obtida das equações de transporte de Reynolds?

6–39C Expresse a equação do momento angular em regime não permanente na forma vetorial para um volume de controle que tem um momento constante de inércia I, nenhum torque aplicado, uma corrente de escoamento uniforme de saída com velocidade $\vec{V}$, e vazão em massa $\dot{m}$.

6–40C Expresse a equação do momento angular na forma escalar com relação a um eixo especificado de rotação para um volume de controle fixo para escoamento em regime permanente e uniforme.

6–41 A água escoa através de um tubo com 12 cm de diâmetro que consiste em uma seção vertical com 3 m de comprimento e horizontal com 2 cm de diâmetro com um cotovelo de 90° na saída para forçar a água a ser descarregada para baixo na direção vertical, como mostra a Figura P6–41. A água é descarregada no ar atmosférico a uma velocidade de 4 m/s e a massa da seção do tubo quando preenchido com água é de 15 kg por metro linear. Determine o torque que age na intersecção das seções vertical e horizontal do tubo (ponto *A*). Qual seria sua resposta se o escoamento fosse descarregado para cima em vez de para baixo?

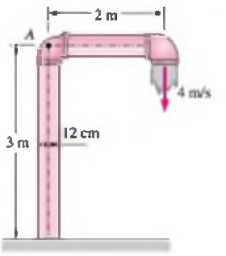


FIGURA P6–41

6–42 Um aspersor de jardim com três braços idênticos é usado para molhar um jardim, girando em um plano horizontal pelo impulso causado pelo escoamento da água. A água entra no aspersor ao longo do eixo de rotação a uma taxa de 40 L/s e sai dos bocais de 1,2 cm de diâmetro na direção tangencial. O rolamento aplica um torque retardador de $T_0 = 50$ N · m devido ao atrito das velocidades operacionais previstas. Para uma distância normal de 40 cm entre o eixo de rotação e o centro dos bocais, determine a velocidade angular do eixo do aspersor.

6–43 As turbinas de Pelton normalmente são usadas nas usinas hidrelétricas para gerar energia elétrica. Nessas turbinas, um jato à alta velocidade de V_j é aplicado sobre as pás, forçando a roda a girar. As pás revertem a direção do jato, e o jato sai da pá fazendo um ângulo β com a direção do jato, como mostra a Figura P6–43. Mostre que a potência produzida por uma turbina de Pelton com raio r girando de forma estacionária a uma velocidade angular ω é $\dot{W}_{eixo} = \rho\omega r\dot{V}(V_j - \omega r)(1 - \cos\beta)$, onde ρ é a densidade e $\dot{V}$ é a taxa de escoamento de volume do fluido. Obtenha o valor numérico para $\rho = 1000$ kg/m³, $r = 2$ m, $\dot{V} = 10$ m³/s, $\dot{n} = 150$ rpm, $\beta = 160°$, e $V_j = 50$ m/s.

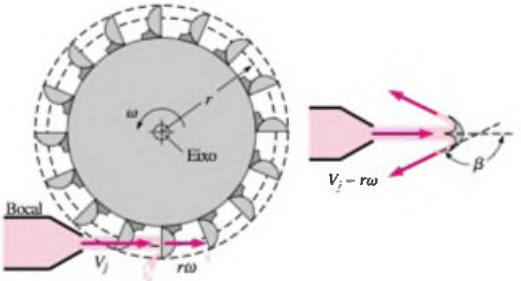


FIGURA P6–43

6–44 Reconsidere o Problema 6–43. A turbina terá a eficiência máxima quando $\beta = 180°$, mas isso não é prático. Investigue o efeito de β sobre a geração de potência, permitindo que ele varie de 0° a 180°. Você acha que estamos perdendo uma grande parte da potência usando pás com um β de 160°?

6–45 O rotor de um ventilador centrífugo tem raio de 15 cm e lâmina com largura de 6,1 cm na entrada, e um raio de 30 cm e uma lâmina com largura de 3,4 cm na saída. O ventilador fornece ar atmosférico a 20°C e 95 kPa. Desprezando as perdas e considerando que as componentes tangenciais da velocidade do ar na entrada e saída sejam iguais à velocidade do rotor nas respectivas localizações, determine a vazão em volume quando a velocidade rotacional do eixo é de 800 rpm e o consumo de energia do ventilador é de 120 W. Determine também as componentes normais da velocidade na entrada e na saída do rotor.

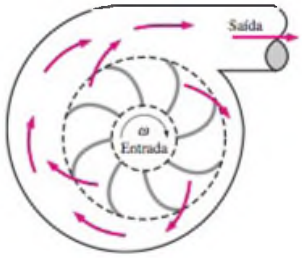


FIGURA P6–45

6–46 Considere um ventilador centrífugo que tem raio de 20 cm e lâmina com largura de 8,2 cm na entrada do impulsor, e um raio de 45 cm e uma pá com largura de 5,6 cm na saída. O ventilador fornece ar a uma taxa de 0,70 m³/s a velocidade rotacional de 700 rpm. Considerando que o ar entra no impulsor na direção radial e sai com um ângulo de 50° na direção radial, determine o consumo mínimo de potência do ventilador. Tome a densidade do ar como 1,25 kg/m³.

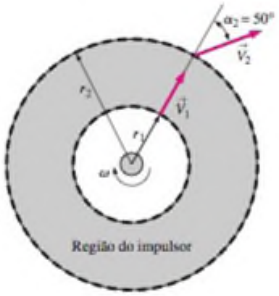


FIGURA P6–46

6–47 Reconsidere o Problema 6–46. Para a taxa de escoamento especificada, investigue o efeito do ângulo de descarga α_2 sobre os requisitos mínimos de entrada de potência. Considere que o ar entre no impulsor na direção radial ($\alpha_1 = 0°$) e varie α_2 de 0° a 85° em incrementos de 5°. Faça o gráfico da variação da entrada de potência versus α_2 e discuta seus resultados.

6–48 O impulsor de uma bomba centrífuga tem diâmetros interno e externo de 13 cm e 30 cm, respectivamente e uma taxa de escoamento de 0,15 m³/s a uma velocidade rotacional de 1200 rpm. A largura da pá do impulsor é 8 cm na entrada e 3,5 cm na saída. Se a água entra no impulsor na direção radial e sai a um ângulo de 60° da direção radial, determine o requisito mínimo de potência da bomba.

Problemas de Revisão

6–49 A água escoa e é descarregada de uma seção de tubo em U, como mostra a Figura P6–49. No flange (1), a pressão absoluta total é 200 kPa e 30 kg/s escoam para dentro do tubo. No flange (2), a pressão total é 150 kPa. No local (3), 8 kg/s de água são descarregados para a atmosfera, que está a 100 kPa. Determine as forças totais x e z nos dois flanges que conectam o tubo. Discuta o significado da força da gravidade para este problema. Tome o fator de correção do fluxo do momento como 1,03.

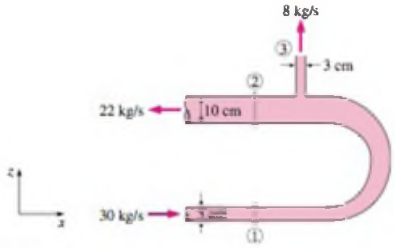


FIGURA P6–49

6–50 A Figura P6-50 mostra um tripé segurando um bocal que direciona uma corrente de água com 5 cm de diâmetro de uma mangueira. A massa do bocal é de 10 kg quando está cheio com água. O tripé é classificado para fornecer 1800 N de força de sustentação. Um bombeiro está em pé a 60 cm atrás do bocal e é atingido por ele quando o tripé cai e solta o bocal. Você foi contratado para reconstituir o acidente e, após testar o tripé, determinou que à medida que a taxa de escoamento da água aumentou, ele caiu a 1800 N. Em seu relatório final você deve declarar que a velocidade da água e a taxa de escoamento sejam consistentes com a falha e a velocidade do bocal quando ele atingiu o bombeiro. *Respostas:* 30,3 m/s; 0,0595 m³/s; 14,7 m/s

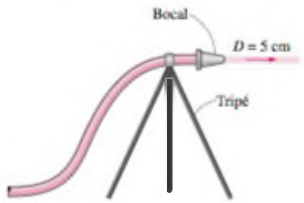


FIGURA P6–50

6–51 Considere um avião com um motor a jato anexado à seção da cauda que expele gases de combustão a uma taxa de 18 kg/s com uma velocidade de $V = 250$ m/s com relação ao avião. Durante a aterrissagem, um reversor de empuxo (que serve como freio para o avião e facilita a aterrissagem em uma pista curta) é abaixado na trajetória do jato de exaustão, o qual deflete a exaustão traseira de 160°. Determine (*a*) o empuxo (força para a frente) que o motor produz antes da inserção do reversor de empuxo e (*b*) a força de frenagem produzida após o reversor de empuxo ser empregado.

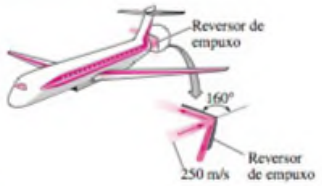


FIGURA P6–51

6–52 Reconsidere o Problema 6–60. Usando o EES (ou outro software), investigue o efeito do ângulo do reversor de empuxo sobre a força de frenagem exercida sobre o avião. Faça o ângulo do reversor variar de 0° (nenhuma reversão) até 180° (reversão total) em incrementos de 10°. Tabule e represente graficamente seus resultados e tire conclusões.

6–53 Um jato d'água horizontal com 5 cm de diâmetro e velocidade de 30 m/s atinge uma placa plana fixa vertical. A água se espalha em todas as direções no plano da placa. Qual a força necessária para manter a placa contra a corrente d'água?

6–54 Um jato d'água horizontal com 5 cm de diâmetro e velocidade de 30 m/s atinge a ponta de um cone horizontal, o

qual deflete a água a 45° de sua direção original. Qual a força necessária para manter o cone contra a corrente d'água?

6–55 Uma patinadora de 60 kg está em pé sobre o gelo com patins (atrito desprezível). Ela segura uma mangueira flexível (essencialmente sem peso) que direciona uma corrente de água com 2 cm de diâmetro e paralela a seus patins. A velocidade da água na saída da mangueira é 10 m/s. Se inicialmente estiver parada, determine (*a*) a velocidade da patinadora e a distância que percorrerá em 5 s e (*b*) quanto tempo levará para ela se mover 5 m e a velocidade naquele momento. *Respostas:* (*a*) 2,62 m/s; 6,54 m; (*b*) 4,4 s; 2,3 m/s

FIGURA P6–55

6–56 Indiana Jones precisa subir em um prédio de 10 m de altura. Existe uma mangueira grande cheia com água pressurizada pendurada no alto do prédio. Ele constrói uma plataforma quadrada e monta quatro bocais com 5 cm de diâmetro que apontam para baixo em cada canto. Conectando os ramais da mangueira, um jato d'água com velocidade de 15 m/s pode ser produzido de cada bocal. Jones, a plataforma e os bocais têm uma massa combinada de 150 kg. Determine (*a*) a velocidade mínima do jato d'água necessária para elevar o sistema, (*b*) quanto tempo é preciso para que o sistema se eleve a 10 m quando a velocidade do jato d'água for de 15 m/s e a velocidade da plataforma naquele momento e (*c*) até onde o momento elevará Jones se ele fechar a água no momento em que a plataforma atingir 10 m acima do solo. Quanto tempo ele tem para pular da plataforma para o teto? *Respostas:* (*a*) 13,7 m/s, (*b*) 3,2 s, (*c*) 2,1 m; 1,3 s

FIGURA P6–56

6–57 Um soldado salta de um avião e abre o pára-quedas quando sua velocidade atinge a velocidade terminal V_T. O pára-quedas diminui sua velocidade até a velocidade de aterrissagem de V_F. Após o uso do pára-quedas, a resistência do ar é proporcional à velocidade ao quadrado (ou seja, $F = kV^2$). O soldado, o pára-quedas e as ferragens têm massa total m. Mostre que $k = mg/V_F^2$ e desenvolva uma relação para a velocidade do soldado depois que ele abre o pára-quedas no instante $t = 0$.

Resposta: $V = V_F \dfrac{V_T + V_F + (V_T - V_F)e^{-2gt/V_F}}{V_T + V_F - (V_T - V_F)e^{-2gt/V_F}}$

FIGURA P6–57

6–58 Um jato d'água horizontal, com taxa de escoamento $\dot{V}$ e área de seção transversal A, movimenta um carrinho coberto de massa m_c ao longo de uma trajetória nivelada e quase sem atrito. O jato entra em um orifício na parte traseira do carrinho e toda a água que entra no carrinho é retida, aumentando a massa do sistema. A velocidade relativa entre o jato de velocidade constante V_j e o carrinho de velocidade variável V é $V_j - V$. Se o carrinho inicialmente estiver vazio e em repouso quando a ação do jato se inicia, desenvolva uma relação (a forma integral é aceitável) para a velocidade do carrinho *versus* o tempo.

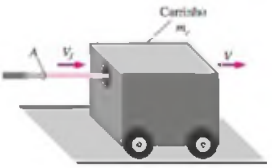


FIGURA P6–58

6–59 Trilhos de guia vertical quase sem atrito mantêm uma placa de massa m_p em posição horizontal, de forma que ela possa deslizar livremente na direção vertical. Um bocal direciona uma corrente de água de área A contra a parte inferior da placa. O jato d'água se espalha no plano da placa, aplicando uma força para cima contra a placa. A vazão da água $\dot{m}$ (kg/s) pode ser controlada. Considere que as distâncias sejam curtas, para que a velocidade do jato que se eleva possa ser considerada constante com a altura. (*a*) Determine a vazão em massa mínima $\dot{m}_{mín}$ necessária para apenas levitar a placa e obter uma relação para a velocidade de estado estacionário da placa que se move para cima para $\dot{m} > \dot{m}_{mín}$ (*b*) No instante $t = 0$, a placa está em repouso e o jato d'água com $m\,\dot{m} > \dot{m}_{mín}$ é repentinamente ligado. Aplique um balanço de força à placa e obtenha a integral que relaciona a velocidade ao tempo (não resolva).

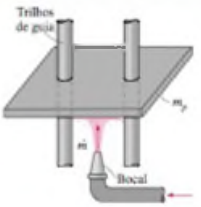


FIGURA P6–59

6–60 A água entra em uma bomba de escoamento mista axialmente a uma taxa de 0,2 m³/s e a uma velocidade de 5 m/s, e é descarregada para a atmosfera a um ângulo de 60° da horizontal, como mostra a Figura P6–60. Se a área de escoamento de descarga for a metade da área de entrada, determine a força que age sobre o eixo na direção axial.

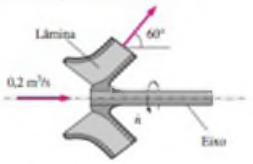


FIGURA P6–60

CAPÍTULO

7

ANÁLISE DIMENSIONAL E MODELAGEM

Neste capítulo revisamos os conceitos de *dimensões* e *unidades*. Em seguida, revisamos o princípio fundamental da *homogeneidade dimensional* e mostramos como ele se aplica às equações para *adimensionalizá-las* e identificar *grupos adimensionais*. Discutimos o conceito da *similaridade* entre um *modelo* e um *protótipo*. Também descrevemos uma ferramenta poderosa para engenheiros e cientistas chamada *análise dimensional*, na qual a combinação das variáveis dimensionais, variáveis adimensionais e constantes dimensionais em *parâmetros adimensionais* reduz o número de parâmetros independentes necessários para um problema. Apresentamos um método passo a passo para obter esses parâmetros adimensionais, chamado de *método das variáveis repetidas*, que se baseia exclusivamente nas dimensões das variáveis e constantes. Por fim, aplicamos essa técnica a diversos problemas práticos para ilustrar sua utilidade e limitações.

OBJETIVOS

Ao terminar de ler este capítulo você deve ser capaz de:

- Desenvolver uma melhor compreensão das dimensões, unidades e homogeneidade dimensional das equações
- Entender os inúmeros benefícios da análise dimensional
- Saber como usar o método de repetição das variáveis para identificar parâmetros adimensionais
- Entender o conceito da similaridade dinâmica e como aplicá-lo à modelagem experimental

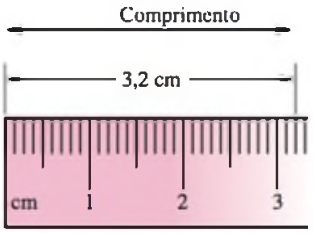


FIGURA 7–1
Uma *dimensão* é uma medida de uma quantidade física sem os valores numéricos, enquanto uma *unidade* é uma forma de atribuir um número à dimensão. Por exemplo, o comprimento é uma dimensão, mas centímetro é uma unidade.

7–1 • DIMENSÕES E UNIDADES

Uma **dimensão** é uma medida de uma quantidade física (sem valores numéricos), enquanto uma **unidade** é uma forma de atribuir um *número* àquela dimensão. Por exemplo, o comprimento é uma dimensão que é medida em unidades como mícron (μm), pés (pés), centímetros (cm), metros (m), quilômetros (km) etc. (Figura 7–1). Existem sete **dimensões primárias** (também chamadas de **dimensões fundamentais** ou **básicas**) — massa, comprimento, tempo, temperatura, corrente elétrica, quantidade de luz e quantidade de matéria.

Todas as dimensões não primárias podem ser formadas por alguma combinação das sete dimensões primárias.

Por exemplo, a força tem as mesmas dimensões da massa vezes a aceleração (de acordo com a Segunda Lei de Newton). Assim, em termos de dimensões primárias

$$\textit{Dimensões de força:}\ \{\text{Força}\} = \left\{\text{Massa}\ \frac{\text{Comprimento}}{\text{Tempo}^2}\right\} = \{\text{mL/t}^2\} \qquad (7\text{–}1)$$

onde os colchetes indicam "as dimensões de" e as abreviações são tiradas da Tabela 7–1. Preste atenção, pois alguns autores preferem força em vez de massa como dimensão primária — nós não adotamos essa prática.

TABELA 7–1

As dimensões primárias e suas unidades SI e inglesas

Dimensão	Símbolo*	Unidades SI	Unidade inglesa
Massa	m	kg (quilograma)	lbm (libra-massa)
Comprimento	L	m (metro)	pé
Tempo†	t	s (segundo)	s (segundo)
Temperatura	T	K (kelvin)	R (rankine)
Corrente elétrica	I	A (ampére)	A (ampére)
Quantidade de luz	C	cd (candela)	cd (candela)
Quantidade de matéria	N	mol (mol)	mol (mol)

* Colocamos os símbolos das variáveis em itálico, mas não os símbolos das dimensões.
† Observe que alguns autores usam o símbolo T para a dimensão de tempo e o símbolo θ para a dimensão de temperatura. Não seguimos essa convenção para evitar confusão entre tempo e temperatura.

FIGURA 7–2
O "water strider" é um inseto que pode caminhar sobre as águas devido à tensão superficial.
© *Dennis Drenner/Visuals Unlimited.*

EXEMPLO 7–1 **Dimensões Primárias da Tensão Superficial**

Um engenheiro estuda o modo como alguns insetos podem caminhar sobre a água (Figura 7–2). Uma propriedade dos fluidos importante para esse problema é a tensão superficial (σ_s), que tem dimensões de força por unidade de comprimento. Escreva as dimensões da tensão superficial em termos de dimensões primárias.

SOLUÇÃO As dimensões primárias da tensão superficial devem ser determinadas.

Análise Da Equação 7–1, a força tem dimensões de massa vezes aceleração, ou $\{\text{mL/t}^2\}$. Assim

Dimensões de tensão superficial:

$$\{\sigma_s\} = \left\{\frac{\text{Força}}{\text{Comprimento}}\right\} = \left\{\frac{\text{m} \cdot \text{L/t}^2}{\text{L}}\right\} = \{\text{m/t}^2\} \qquad (1)$$

Discussão A utilidade de expressar as dimensões de uma variável ou constante em termos das dimensões primárias ficará mais clara na discussão sobre o método de variáveis repetidas na Seção 7–4.

7–2 ▪ HOMOGENEIDADE DIMENSIONAL

Todos já ouvimos o velho ditado: não é possível somar maçãs e laranjas (Figura 7–3). Isso, na verdade, é uma expressão simplificada de uma lei matemática mais global e fundamental para as equações, a **lei da homogeneidade dimensional** enunciada como

Todo termo aditivo de uma equação deve ter as mesmas dimensões.

Considere, por exemplo, a variação na energia total de um sistema fechado compressível simples de um estado e/ou tempo (1) para outro (2) como ilustra a Figura 7–4. A variação na energia total do sistema (ΔE) é dada por

Variação da energia total de um sistema: $$\Delta E = \Delta U + \Delta EC + \Delta EP \qquad (7\text{–}2)$$

onde E tem três componentes: energia interna (U), energia cinética (EC) e energia potencial (EP). Esses componentes podem ser escritos em termos da massa do sistema (m); quantidades mensuráveis e propriedades termodinâmicas em cada um dos dois estados, tais como a velocidade (V), elevação (z) e energia interna específica (u) e a constante de aceleração gravitacional conhecida (g),

$$\Delta U = m(u_2 - u_1) \qquad \Delta EC = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) \qquad \Delta EP = mg(z_2 - z_1) \qquad (7\text{–}3)$$

é facil verificar que o lado esquerdo da Equação 7–2 e que todos os termos aditivos do lado direito da Equação 7–2 têm as mesmas dimensões–energia. Usando as definições da Equação 7–3 escrevemos as dimensões primárias de cada termo

$$\{\Delta E\} = \{\text{Energia}\} = \{\text{Força} \cdot \text{Comprimento}\} \rightarrow \{\Delta E\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta U\} = \left\{\text{Massa}\,\frac{\text{Energia}}{\text{Massa}}\right\} = \{\text{Energia}\} \rightarrow \{\Delta U\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta EC\} = \left\{\text{Massa}\,\frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}\right\} \rightarrow \{\Delta EC\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta EP\} = \left\{\text{Massa}\,\frac{\text{Comprimento}}{\text{Tempo}^2}\,\text{Comprimento}\right\} \rightarrow \{\Delta EP\} = \{mL^2/t^2\}$$

Se em algum estágio de uma análise nos encontrarmos em uma situação na qual dois termos aditivos de uma equação tiverem dimensões *diferentes*, isso é uma indicação clara de que cometemos um erro em algum estágio anterior da análise (Figura 7–5). Além da homogeneidade dimensional, os cálculos são válidos apenas quando as *unidades* também são homogêneas em cada termo aditivo. Por exemplo, as unidades de energia dos termos acima podem ser J, N · m, ou kg · m^2/s^2, sendo que todas são equivalentes. Suponhamos, porém, que kJ fosse usado no lugar de J para um dos termos. Esse termo estaria deslocado por um fator de 1.000 comparado aos outros termos. É sensato escrever *todas* as unidades quando se executam cálculos matemáticos, para evitar esses erros.

EXEMPLO 7–2 Homogeneidade Dimensional da Equação de Bernoulli

Provavelmente a equação mais conhecida (e mais mal utilizada) na mecânica de fluidos é a equação de Bernoulli (Figura 7–6), discutida no Capítulo 5. A forma padrão da equação de Bernoulli para o escoamento irrotacional e de um fluido incompressível é

Equação de Bernoulli: $$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C \qquad (1)$$

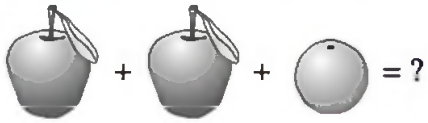


FIGURA 7–3
Não é possível somar maçãs e laranjas!

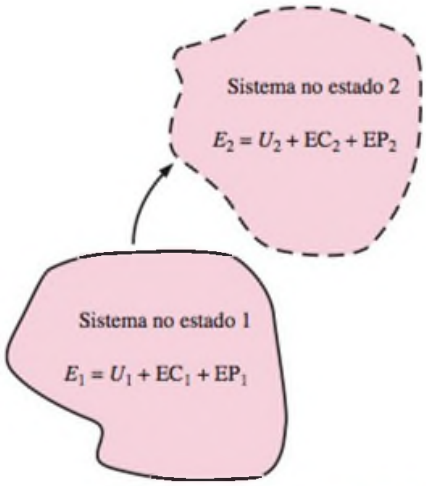


FIGURA 7–4
A energia total de um sistema no estado 1 e no estado 2.

FIGURA 7–5
Uma equação que não é dimensionalmente homogênea é indicação segura.

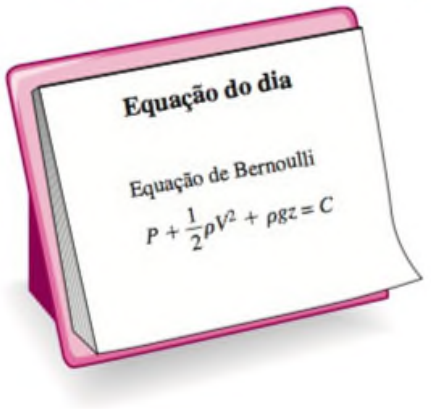


FIGURA 7–6
A equação de Bernoulli é um bom exemplo de uma equação *dimensionalmente homogênea*. Todos os termos aditivos, incluindo a constante, têm as *mesmas* dimensões, a saber, aquela da pressão. Em termos de dimensões primárias, cada termo tem as dimensões $\{m/(t^2L)\}$.

(*a*) Verifique se cada termo aditivo da equação de Bernoulli tem as mesmas dimensões. (*b*) Quais são as dimensões da constante *C*?

SOLUÇÃO Devemos verificar se as dimensões primária de cada termo aditivo da Equação 1 são iguais e devemos determinar as dimensões da constante *C*.

Análise (*a*) Cada termo é escrito em termos de dimensões primárias como

$$\{P\} = \{\text{Pressão}\} = \left\{\frac{\text{Força}}{\text{Área}}\right\} = \left\{\text{Massa}\,\frac{\text{Comprimento}}{\text{Tempo}^2}\,\frac{1}{\text{Comprimento}^2}\right\} = \left\{\frac{m}{t^2L}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\rho V^2\right\} = \left\{\frac{\text{Massa}}{\text{Volume}}\left(\frac{\text{Comprimento}}{\text{Tempo}}\right)^2\right\} = \left\{\frac{\text{Massa} \times \text{Comprimento}^2}{\text{Comprimento}^3 \times \text{Tempo}^2}\right\} = \left\{\frac{m}{t^2L}\right\}$$

$$\{\rho g z\} = \left\{\frac{\text{Massa}}{\text{Volume}}\,\frac{\text{Comprimento}}{\text{Tempo}^2}\,\text{Comprimento}\right\} = \left\{\frac{\text{Massa} \times \text{Comprimento}^2}{\text{Comprimento}^3 \times \text{Tempo}^2}\right\} = \left\{\frac{m}{t^2L}\right\}$$

De fato, **todos os três termos aditivos têm as mesmas dimensões.**

(*b*) Pela lei da homogeneidade dimensional, a constante deve ter as mesmas dimensões dos outros termos aditivos da equação. Assim

Dimensões primárias da constante de Bernoulli: $\{C\} = \left\{\frac{m}{t^2L}\right\}$

Discussão Se as dimensões de qualquer um dos termos fosse diferente das outras, isso indicaria que um erro foi cometido em alguma parte da análise.

Adimensionalização das Equações

A lei da homogeneidade dimensional garante que cada termo aditivo de uma equação tem as mesmas dimensões. Portanto, se dividirmos cada termo da equação por uma coleção de variáveis e constantes cujo produto tem aquelas mesmas dimensões, a equação se transforma em uma equação **adimensional** (Figura 7–7). Se, além disso, os termos adimensionais da equação forem da ordem de unidade, a equação é chamada de **normalizada**. A normalização é, portanto, mais restritiva do que a adimensionalização, embora os dois termos às vezes sejam usados (incorretamente) com o mesmo significado.

Cada termo de uma equação adimensional não tem dimensão.

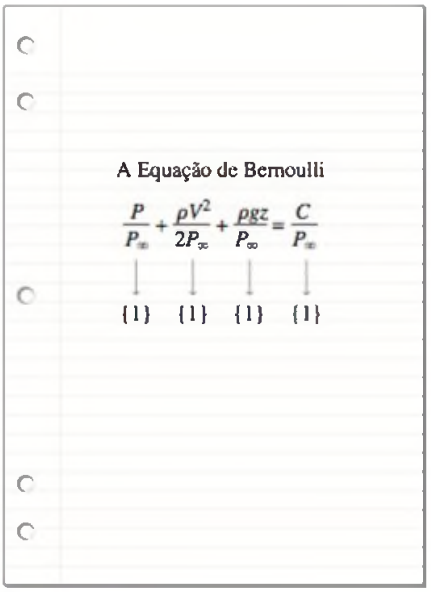


FIGURA 7–7
Uma forma *adimensionalizada* da equação de Bernoulli é formada pela divisão de cada termo aditivo por uma pressão (aqui usamos P_∞). Cada termo resultante *é adimensional* (dimensões de {1}).

No processo de adimensionalização de uma equação de movimento, os **parâmetros adimensionais** quase sempre aparecem — o nome da maioria deles é uma homenagem a um cientista ou engenheiro notável (por exemplo, número de Reynolds ou número de Froude). Esse processo é chamado por alguns autores de **análise inspecional**.

Como um exemplo simples, considere a equação do movimento que descreve a elevação z de um objeto que cai pela ação da gravidade através do vácuo (sem arrasto de ar), como na Figura 7–8. A posição inicial do objeto é z_0 e sua velocidade inicial é w_0 na direção z. Da física básica temos

Equação do movimento: $$\frac{d^2z}{dt^2} = -g \qquad (7\text{–}4)$$

As **variáveis dimensionais** são definidas como quantidades dimensionais que mudam ou variam no problema. Para a equação diferencial simples dada na Equação 7–4, existem duas variáveis dimensionais: z (dimensão de comprimento) e t (dimensão de tempo). As **variáveis adimensionais** (ou **adimensional**) são definidas como quantidades que mudam ou variam no problema, mas não têm dimensões. Um exemplo é o ângulo de rotação, medido em graus ou radianos, que são unidades adimensionais. A constante gravitacional g, embora dimensional, permanece constante e é chamada de **constante dimensional**. Duas constantes dimensionais adicionais são relevantes para este problema em particular, a posição inicial z_0 e a

velocidade vertical inicial w_0. Embora as constantes dimensionais possam mudar de um problema para outro, elas são fixas para determinado problema e, portanto, se distinguem das variáveis dimensionais. Utilizamos o termo **parâmetros** para o conjunto combinado de variáveis dimensionais, variáveis adimensionais e constantes dimensionais do problema.

A Equação 7–4 é resolvida facilmente integrando duas vezes e aplicando as condições iniciais. O resultado é uma expressão para a elevação z em um instante t:

Resultado dimensional:
$$z = z_0 + w_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \textbf{(7–5)}$$

A constante $\frac{1}{2}$ e o expoente 2 da Equação 7–5 são resultados dimensionais da integração. Tais constantes são chamadas de **constantes puras**. Outros exemplos comuns de constantes puras são π e e.

Para adimensionalizarmos a Equação 7–4 precisamos selecionar **parâmetros de escala**, com base nas dimensões primárias contidas na equação original. Nos problemas de escoamento de fluido geralmente há pelo menos *três* parâmetros de escala, por exemplo, L, V, e $P_0 - P_\infty$ (Figura 7–9), uma vez que há pelo menos três dimensões primárias no problema geral (por exemplo, massa, comprimento e tempo). No caso do objeto em queda discutido aqui, existem apenas duas dimensões primárias, comprimento e tempo e, portanto, estamos limitados à seleção de apenas *dois* parâmetros de escala. Temos algumas opções na seleção dos parâmetros de escala, uma vez que temos três constantes dimensionais disponíveis g, z_0 e w_0. Selecionamos z_0 e w_0. Você está convidado a repetir a análise com g e z_0 e/ou com g e w_0. Com esses dois parâmetros de escala selecionados, nós adimensionalizamos as variáveis dimensionais z e t. A primeira etapa é listar as dimensões primárias de *todas* as variáveis e constantes dimensionais do problema,

Dimensões primárias de todos os parâmetros:

$$\{z\} = \{\mathrm{L}\} \qquad \{t\} = \{\mathrm{t}\} \qquad \{z_0\} = \{\mathrm{L}\} \qquad \{w_0\} = \{\mathrm{L/t}\} \qquad \{g\} = \{\mathrm{L/t^2}\}$$

A segunda etapa é usar nossos dois parâmetros de escala para adimensionalizar z e t (por inspeção) em variáveis adimensionais z^* e t^*

Variáveis adimensionalizadas:
$$z^* = \frac{z}{z_0} \qquad t^* = \frac{w_0 t}{z_0} \qquad \textbf{(7–6)}$$

A substituição da Equação 7–6 na Equação 7–4 resulta em

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2(z_0 z^*)}{d(z_0 t^*/w_0)^2} = \frac{w_0^2}{z_0}\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -g \quad \rightarrow \quad \frac{w_0^2}{g z_0}\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -1 \qquad \textbf{(7–7)}$$

que é a equação adimensional desejada. O agrupamento das constantes dimensionais na Equação 7–7 é o quadrado de um **parâmetro adimensional** conhecido ou **grupo adimensional** chamado de **número de Froude**,

Número de Froude:
$$\mathrm{Fr} = \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}} \qquad \textbf{(7–8)}$$

O número de Froude também aparece como um parâmetro adimensional nos escoamentos de superfície livre (Capítulo 13), e pode ser visto como a relação entre a força inercial e a força gravitacional (Figura 7–10). Você deve observar que em alguns livros mais antigos, Fr é definido como o *quadrado* do parâmetro mostrado na Equação 7–8. A substituição da Equação 7–8 na Equação 7–7 resulta em

Equação do movimento adimensionalizada:
$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{\mathrm{Fr}^2} \qquad \textbf{(7–9)}$$

Na forma adimensional, apenas um parâmetros permanece, a saber o número de Froude. A Equação 7–9 é resolvida facilmente integrando duas vezes e aplicando as condições iniciais. O resultado é uma expressão para a elevação z^* adimensional em qualquer instante t^* adimensional:

Resultado adimensional:
$$z^* = 1 + t^* - \frac{1}{2\mathrm{Fr}^2} t^{*2} \qquad \textbf{(7–10)}$$

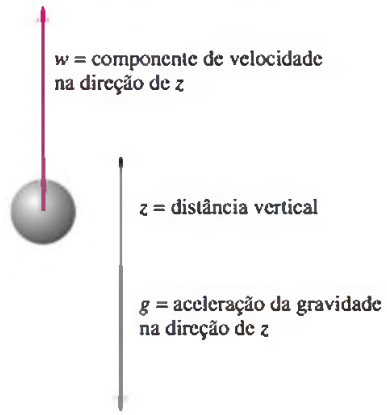


FIGURA 7–8
A queda de um objeto no vácuo. A velocidade vertical é positiva e para cima e, assim, $w < 0$ para um objeto em queda.

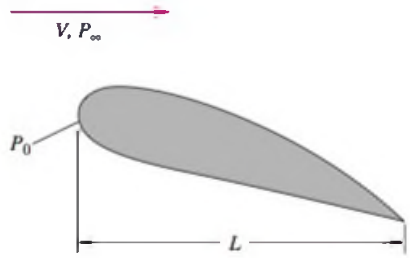


FIGURA 7–9
Em um problema de escoamento de fluido típico, os parâmetros de escala em geral incluem um comprimento característico L, uma velocidade característica V e uma diferença de pressão de referência $P_0 - P_\infty$. Outros parâmetros e propriedades de fluido como a densidade, viscosidade e aceleração gravitacional também entram no problema.

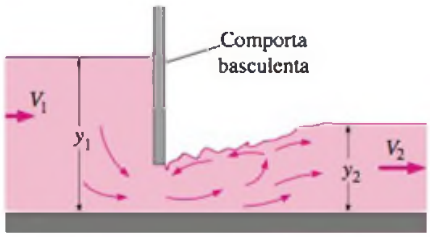


FIGURA 7–10
O *número de Froude* é importante nos escoamentos com superfície livre como o escoamento em canais abertos. Esta figura mostra o escoamento através de uma comporta basculante. O número de Froude a jusante da comporta é $\mathrm{Fr}_1 = V_1/\sqrt{g y_1}$, e é $\mathrm{Fr}_2 = V_2/\sqrt{g y_2}$ a montante da comporta.

As relações entre os parâmetros-chave do problema são idenificados.

O número de parâmetros em uma equação adimensional é menor do que o número de parâmetros no espaço original.

FIGURA 7–11
As duas principais vantagens da adimensionalização de uma equação.

A comparação das Equações 7–5 e 7–10 revela que elas são equivalentes. De fato, para praticar, substitua as Equações 7–6 e 7–8 na Equação 7–5 para verificar a Equação 7–10.

Parece que utilizamos muita álgebra extra para obter o mesmo resultado final. *Então, qual é a vantagem de adimensionalizar a equação?* Antes de respondermos a essa pergunta, observamos que as vantagens não são tão claras neste exemplo simples, porque podemos integrar analiticamente a equação diferencial do movimento. Em problemas mais complicados, a equação diferencial (ou mais geralmente o *conjunto* de equações diferenciais) *não pode* ser analiticamente integrada, e os engenheiros devem integrar a equação numericamente, ou criar e realizar experiências físicas para obter os resultados necessários, e ambas as opções incorrem em tempo e despesas consideráveis. Em tais casos, os parâmetros adimensionais gerados pela adimensionalização das equações são extremamente úteis e podem economizar esforço e despesas consideráveis a longo prazo.

Existem duas grandes vantagens na adimensionalização (Figura 7–11). Em primeiro lugar, ela *aumenta nossa visão das relações entre os parâmetros-chave*. A Equação 7–8 revela, por exemplo, que dobrar w_0 surte o mesmo efeito de diminuir z_0 por um fator de 4. Em segundo lugar, *ela reduz o número de parâmetros do problema*. Por exemplo, o problema original contém uma variável dependente, z; uma variável independente, t e *três* constantes dimensionais adicionais g, w_0 e z_0. O problema adimensionalizado contém um parâmetro dependente z^*; um parâmetro independente t^*; e apenas *um* parâmetro adicional, o número de Froude adimensional, Fr. O número de parâmetros adicionais foi reduzido de três para um! O Exemplo 7–3 ilustra ainda mais as vantagens da adimensionalização.

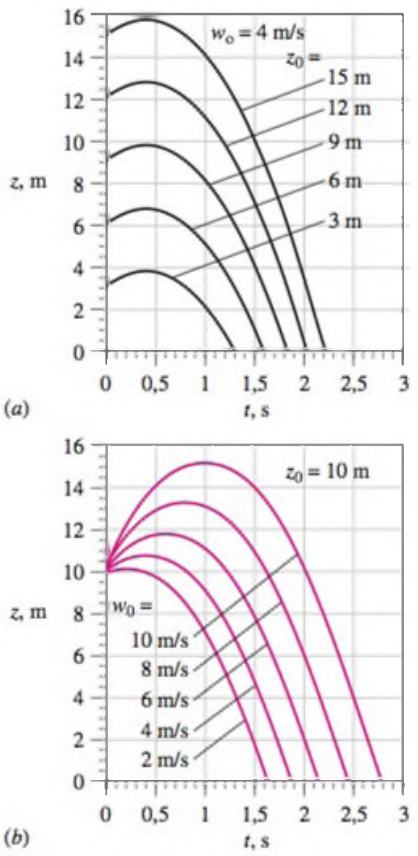


FIGURA 7–12
Trajetórias de uma bola de aço caindo no vácuo: (*a*) w_0 fixo em 4 m/s e (*b*) z_0 fixo em 10 m (Exemplo 7–3).

EXEMPLO 7–3 Ilustração das Vantagens da Adimensionalização

A classe de física do seu irmão mais novo que está no ensino médio realiza experiências em um tubo vertical grande cujo interior é mantido em condições de vácuo. Os alunos podem liberar por controle uma bola de aço de altura inicial z_0 entre 0 e 15 m (medidos a partir da parte inferior do tubo) e com velocidade vertical inicial w_0 entre 0 e 10 m/s. Um computador ligado a uma rede de fotossensores ao longo do tubo permite que os alunos tracem a trajetória da bola de aço (altura z representada como função do tempo t) para cada teste. Os alunos não estão familiarizados com a análise dimensional ou técnicas da adimensionalização e, portanto, realizam várias experiências de "força bruta" para determinar como a trajetória é afetada pelas condições iniciais z_0 e w_0. Primeiro, eles mantêm w_0 fixo em 4 m/s e realizam experiências com cinco valores diferentes de z_0: 3, 6, 9, 12 e 15 m. Os resultados experimentais são mostrados na Figura 7–12*a*. A seguir, eles mantêm z_0 fixo em 10 m e realizam experiências com cinco valores diferentes de w_0: 2, 4, 6, 8 e 10 m. Esses resultados são mostrados na Figura 7–12*b*. Naquela noite, seu irmão mostra a você os dados e os gráficos da trajetória e diz que eles pretendem realizar outras experiências com valores diferentes para z_0 e w_0. Você explica que, primeiro adimensionalizando os dados, o problema pode ser reduzido a apenas *um* parâmetro e que não são necessárias outras experiências. Prepare gráficos adimencionais para provar isso e discuta.

SOLUÇÃO Gráficos adimensionais devem ser gerados para todos os dados de trajetória disponíveis. Especificamente, devemos traçar z^* como função de t^*.

Hipótese O interior do tubo está sujeito a pressão de vácuo suficientemente forte para que o arrasto aerodinâmico sobre a bola seja desprezível.

Propriedades A constante gravitacional é 9,81 m/s^2.

Análise A Equação 7–4 é válida para este problema, assim como a adimensionalização que resultou na Equação 7–9. Como já discutimos antes, este problema combina três dos parâmetros dimensionais originais (g, z_0 e w_0) em um único parâmetro adimensional, o número de Froude. Após a conversão para as variáveis adimensionais da Equação 7–6, as dez trajetórias da Figura 7–12*a* e *b* são

traçadas no formato adimensional da Figura 7–13. Está claro que todas as trajetórias pertencem à mesma família, com o número de Froude como o único parâmetro restante. Fr^2 varia de cerca de 0,041 a cerca de 1,0 nessas experiências. Se algumas outras experiências tiverem que ser realizadas, elas devem incluir combinações de z_0 e w_0 que produzam números de Froude fora desse intervalo. Um grande número de experiências adicionais não seria necessário, uma vez que todas as trajetórias pertenceriam à mesma família daquelas mostradas na Figura 7–13.

Discussão Com números de Froude baixos, as forças gravitacionais são muito maiores do que as forças inerciais, e a bola cai até o chão em um período relativamente curto. Por outro lado, com valores grandes de Fr as forças inerciais dominam inicialmente e a bola sobe até uma distância significativa antes de cair; é preciso muito mais tempo para que a bola atinja o solo. Obviamente, os alunos não podem ajustar a constante gravitacional, mas se pudessem, o método da força bruta exigiria muitas outras experiências para documentar o efeito de g. Se eles fizessem primeiro a adimensionalização, os gráficos da trajetória adimensional já obtidos e mostrados na Figura 7–13 seriam válidos para *qualquer* valor de g; nenhuma outra experiência seria necessária, a menos que Fr estivesse fora do intervalo de valores testados.

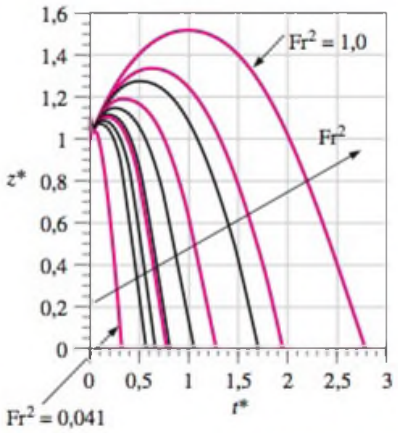


FIGURA 7–13
As trajetórias de uma bola de aço que cai no vácuo. Os dados da Figura 7–12*a* e *b* são adimensionalizados e combinados em um gráfico.

Se você ainda não estiver convencido de que a adimensionalização das equações e parâmetros tem muitas vantagens, considere o seguinte: para documentar de forma razoável as trajetórias do Exemplo 7–3 para o intervalo de todos os três parâmetros dimensionais g, z_0 e w_0, o método da força bruta exigiria vários (digamos um mínimo de quatro) gráficos adicionais como os da Figura 7–12*a* para valores diversos (níveis) de w_0, além de vários *conjuntos* adicionais desses gráficos para um intervalo de g. Um conjunto de dados completo para os três parâmetros com cinco níveis de cada parâmetro exigiria $5^3 = 125$ experiências! A adimensionalização reduz o número de parâmetros de 3 para 1 — total de apenas $5^1 = 5$ experiências são necessárias para a mesma resolução. (Para cinco níveis, apenas cinco trajetórias adimensionais como aquelas da Figura 7–13 são necessárias, com valores cuidadosamente escolhidos de Fr.)

Outra vantagem da adimensionalização é que a extrapolação para valores não testados de um ou mais dos parâmetros dimensionais é possível. Por exemplo, os dados do Exemplo 7–3 foram tirados com apenas um valor da aceleração gravitacional. Suponhamos que você queira extrapolar esses dados para um valor diferente de g. O Exemplo 7–4 mostra como isso é realizado facilmente por meio dos dados adimensionais.

EXEMPLO 7–4 A Extrapolação de Dados Adimensionalizados

A constante gravitacional na superfície da Lua é apenas um sexto daquela da Terra. Um astronauta na Lua joga uma bola de beisebol a uma velocidade inicial de 21,0 m/s a um ângulo de 5° acima do horizonte e a 2,0 m acima da superfície da Lua (Figura 7–14). (*a*) Usando os dados adimensionais do Exemplo 7–3 mostrados na Figura 7–13, faça uma previsão de quanto tempo será necessário para que a bola de beisebol caia no chão. (*b*) Faça um cálculo exato e compare o resultado desse cálculo com aquele da parte (*a*).

SOLUÇÃO Dados experimentais obtidos na Terra devem ser usados para prever o tempo necessário para que uma bola de beisebol caia no solo na Lua.

Hipótese **1** A velocidade horizontal da bola de beisebol é irrelevante. **2** A superfície da Lua é perfeitamente plana próxima ao astronauta. **3** Não há arrasto aerodinâmico sobre a bola, uma vez que não há atmosfera na Lua. **4** A gravidade da Lua é um sexto daquela da Terra.

Propriedades A constante gravitacional na Lua é $g_{lua} \cong 9{,}81/6 = 1{,}63\ m/s^2$.

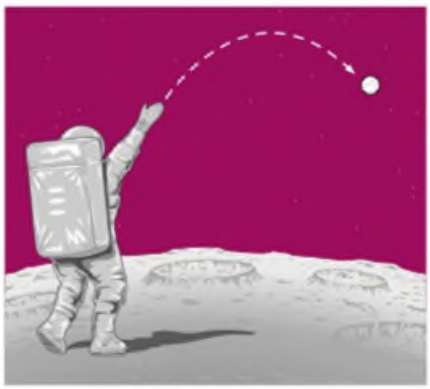


FIGURA 7–14
Jogando uma bola de beisebol na Lua (Exemplo 7–4).

Análise (*a*) O número de Froude é calculado com base no valor de g_{lua} e no componente vertical da velocidade inicial

$$w_0 = (21{,}0 \text{ m/s}) \operatorname{sen}(5°) = 1{,}830 \text{ m/s}$$

o qual

$$\text{Fr}^2 = \frac{w_0^2}{g_{lua} z_0} = \frac{(1{,}830 \text{ m/s})^2}{(1{,}63 \text{ m/s}^2)(2{,}0 \text{ m})} = 1{,}03$$

Esse valor de Fr^2 é aproximadamente igual ao maior valor mostrado na Figura 7–13. Assim, em termos de variáveis adimensionais, a bola de beisebol atinge o solo a $t^* \equiv 2{,}75$, como determinado pela Figura 7–13. Convertendo novamente para variáveis dimensionais usando a Equação 7–6,

Tempo estimado para atingir o solo: $$t = \frac{t^* z_0}{w_0} = \frac{2{,}75(2{,}0 \text{ m})}{1{,}830 \text{ m/s}} = \mathbf{3{,}01 \text{ s}}$$

(*b*) Um cálculo exato é obtido fazendo z igual a zero na Equação 7–5 e resolvendo para o tempo t (usando a fórmula quadrática),

Tempo estimado para atingir o solo:

$$t = \frac{w_0 + \sqrt{w_0^2 + 2 z_0 g}}{g}$$

$$= \frac{1{,}830 \text{ m/s} + \sqrt{(1{,}830 \text{ m/s})^2 + 2(2{,}0 \text{ m})(1{,}63 \text{ m/s}^2)}}{1{,}63 \text{ m/s}^2} = \mathbf{3{,}05 \text{ s}}$$

Discussão Se o número de Froude tivesse ficado entre duas das trajetórias da Figura 7–13, a interpolação teria sido necessária. Como alguns dos números são exatos até apenas dois algarismos significativos, a pequena diferença entre os resultados da parte (*a*) e da parte (*b*) não é motivo de preocupação. O resultado final é $t = 3{,}0$ s até dois algarismos significativos.

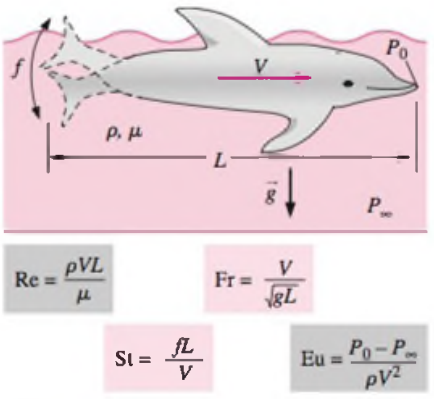


FIGURA 7–15
Em um problema geral de escoamento de fluido em regime não permanente com uma superfície livre, os parâmetros de escala incluem um comprimento característico L, uma velocidade característica V, uma frequência característica f e uma diferença de pressão de referência $P_0 - P_\infty$. A adimensionalização das equações diferenciais do escoamento de fluido produz quatro parâmetros sem dimensão: o número de Reynolds, o número de Froude, o número de Strouhal e o número de Euler (consulte o Capítulo 10).

As equações diferenciais do movimento para o escoamento de fluidos serão deduzidas e discutidas no Capítulo 9. No Capítulo 10 você encontrará uma análise semelhante àquela apresentada aqui, mas aplicada a equações diferenciais para o escoamento dos fluidos. Acontece que o número de Froude também aparece naquela análise, assim como três outros parâmetros adimensionais importantes — o número de Reynolds, o número de Euler e o número de Strouhal (Figura 7–15).

7–3 • ANÁLISE DIMENSIONAL E SIMILARIDADE

A adimensionalização de uma equação pela análise inspecional é útil apenas quando se sabe a equação com a qual é preciso começar. Entretanto, em muitos casos na engenharia da vida real, as equações não são conhecidas ou são muito difíceis de serem solucionadas. Quase sempre a *experimentação* é o único método para obter informações confiáveis. Na maioria das experiências, para economizar tempo e dinheiro, são executados testes em um **modelo** em escala geométrica, em vez de um **protótipo** em escala natural. Em tais casos, é preciso tomar cuidado para mudar adequadamente a escala dos resultados. Apresentamos aqui uma técnica poderosa chamada **análise dimensional**. Embora seja tipicamente ensinada na mecânica dos fluidos, a análise dimensional é útil para *todas* as disciplinas, particularmente quando é preciso projetar e realizar experiências. Você é incentivado a utilizar essa poderosa ferramenta também em outros assuntos e não apenas na mecânica dos fluidos. As três finalidades primárias da análise dimensional são

- Gerar parâmetros adimensionais que ajudam no projeto das experiências (físicas e/ou numéricas) e no relatório dos resultados experimentais

- Obter as leis de escala para que o desempenho do protótipo possa ser previsto com o desempenho do modelo
- Prever (às vezes) as tendências das relações entre os parâmetros

Antes de discutirmos a *técnica* da análise dimensional, primeiro explicaremos o *conceito* básico da análise dimensional — o princípio da **similaridade**. Existem três condições necessárias para a similaridade completa entre um modelo e um protótipo. A primeira condição é a **similaridade geométrica** — o modelo deve ter a mesma forma do protótipo, mas pode ser escalonado com algum fator de escala constante. A segunda condição é a **similaridade cinemática**, que significa que a velocidade em determinado ponto de escoamento do modelo deve ser proporcional (por um fator de escala constante) à velocidade no ponto correspondente de escoamento do protótipo (Figura 7–16). Especificamente, para a similaridade cinemática a velocidade nos pontos correspondentes deve ser proporcional em módulo e deve apontar na mesma direção relativa. Você pode ver a similaridade geométrica como a equivalência em *escala de comprimento* e a similaridade cinemática como a equivalência em *escala de tempo*. *A similaridade geométrica é um pré-requisito para a similaridade cinemática.* O fator de escala de velocidade pode ser menor do que, igual a ou maior do que um, assim como o fator de escala geométrica. Na Figura 7–16, por exemplo, o fator de escala geométrica é menor do que um (modelo menor do que o protótipo), mas a escala de velocidade é maior do que um (as velocidades ao redor do modelo são maiores do que aquelas ao redor do protótipo). Você deve se lembrar, do Capítulo 4, que as linhas de corrente são fenômenos cinemáticos. Assim, o padrão da linha de corrente do escoamento do modelo é uma cópia em escala geométrica do padrão de escoamento do protótipo quando a similaridade cinemática é atingida.

A terceira e mais restritiva condição de similaridade é a **similaridade dinâmica**. A similaridade dinâmica é atingida quando todas as *forças* de escoamento do modelo são proporcionais, por um fator constante, às forças correspondentes de escoamento do protótipo (equivalência de *escala de força*). Assim como na similaridade geométrica e cinemática, o fator de escala das forças pode ser menor do que, igual a ou maior do que um. Na Figura 7–16, por exemplo, o fator de escala de força é menor do que um, uma vez que a força sobre o prédio-modelo é menor do que no protótipo. *A similaridade cinemática é uma condição necessária, mas insuficiente para a similaridade dinâmica.* Portanto, é possível para um escoamento de modelo e um escoamento de protótipo atingir ambas, a similaridade geométrica e cinemática, e não atingir a similaridade dinâmica. Todas as três condições de similaridade existem para garantir a similaridade completa.

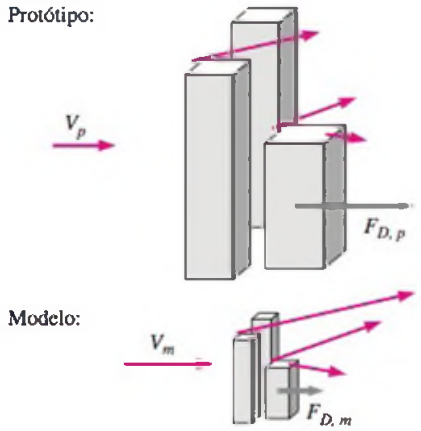


FIGURA 7–16
A *similaridade cinemática* é atingida quando, em todos os locais, a velocidade do escoamento do modelo é proporcional àquela nos locais correspondentes do escoamento do protótipo e aponta na mesma direção.

Em um campo de escoamento geral, a similaridade completa entre um modelo e um protótipo é atingida apenas quando há similaridade geométrica, cinemática e dinâmica.

Façamos a letra grega Pi (Π) indicar um parâmetro adimensional. Provavelmente você está familiarizado com um Π, o número de Froude, Fr. Em um problema de análise dimensional geral existe um Π que chamamos de Π **dependente**, denotado por Π_1. O parâmetro Π_1 em geral é uma função de vários outros Π's, os quais chamamos de Π's **independentes**. A relação funcional é

Relação funcional entre Π*'s*: $$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_k) \qquad (7\text{–}11)$$

onde k é o número total de Π's.

Considere uma experiência na qual um modelo em escala é testado para simular um protótipo de escoamento. Para garantir a similaridade completa entre o modelo e o protótipo, cada Π independente do modelo (subscrito m) deve ser idêntico ao Π independente correspondente do protótipo (sobrescrito p), ou seja, $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$, $\Pi_{3,m} = \Pi_{3,p}$, $\ldots$, $\Pi_{k,m} = \Pi_{k,p}$.

Para garantir a similaridade completa, o modelo e o protótipo devem ser geometricamente similares e todos os grupos Π independentes devem coincidir no modelo e no protótipo.

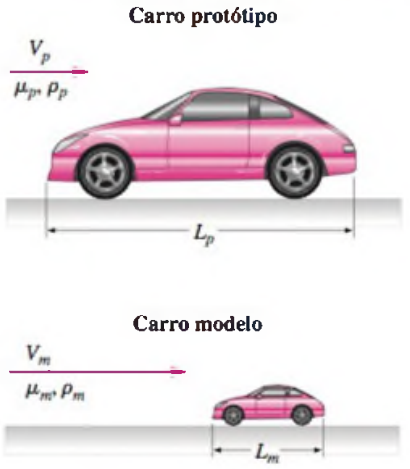
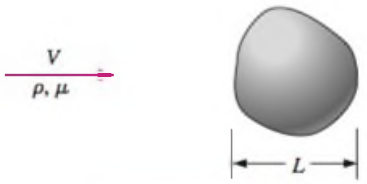


FIGURA 7–17
A *similaridade geométrica* entre um automóvel protótipo de comprimento L_p e um automóvel modelo de comprimento L_m.



$$\text{Re} = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

FIGURA 7–18
O *número de Reynolds* Re é formado pela razão entre densidade, velocidade característica e comprimento característico e a viscosidade. Como alternativa, essa é a razão entre a velocidade característica e o comprimento e a *viscosidade cinemática*, definida por $\nu = \mu/\rho$.

Nessas condições, o Π *dependente* do modelo ($\Pi_{1,m}$) certamente também é igual ao Π dependente do protótipo ($\Pi_{1,p}$). Matematicamente, escrevemos uma afirmação condicional para atingir a similaridade.

$$\text{Se} \quad \Pi_{2,m} = \Pi_{2,p} \quad \text{e} \quad \Pi_{3,m} = \Pi_{3,p} \ldots \quad \text{e} \quad \Pi_{k,m} = \Pi_{k,p},$$
$$\text{então} \quad \Pi_{1,m} = \Pi_{1,p} \qquad (7\text{–}12)$$

Considere, por exemplo, o projeto de um novo automóvel esporte, cuja aerodinâmica deva ser testada em um túnel de vento. Para economizar dinheiro, é desejável testar um modelo em escala geométrica menor que o automóvel em vez de usar um protótipo completo dele (Figura 7–17). No caso do arrasto aerodinâmico em um automóvel, se o escoamento for aproximado como incompressível, existem apenas dois Π's no problema

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \quad \text{onde} \quad \Pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 L^2} \quad \text{e} \quad \Pi_2 = \frac{\rho VL}{\mu} \qquad (7\text{–}13)$$

O procedimento utilizado para gerar esses Π's é discutido na Seção 7–4. Na Equação 7–13, F_D é a intensidade do arrasto aerodinâmico do automóvel, ρ é a densidade do ar, V é a velocidade do automóvel (ou a velocidade do ar no túnel de vento), L é o comprimento do automóvel e μ é a viscosidade do ar. Π_1 é uma forma não padronizada do coeficiente de arrasto e Π_2 é o **número de Reynolds**, Re. Você descobrirá que muitos problemas da mecânica dos fluidos envolvem um número de Reynolds (Figura 7–18).

O número de Reynolds é o parâmetro adimensional mais conhecido e útil de toda a mecânica dos fluidos.

No problema em questão existe apenas um Π independente, e a Equação 7–12 garante que se os Π's independentes coincidirem (os números de Reynolds coincidem: $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$), os Π's dependentes também coincidirão ($\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$). Isso permite aos engenheiros medirem o arrasto aerodinâmico do automóvel modelo e, em seguida, usar esse valor para prever o arrasto aerodinâmico no automóvel protótipo.

EXEMPLO 7–5 Similaridade entre Automóveis Modelo e Protótipo

O arrasto aerodinâmico de um novo automóvel esporte deve ser previsto a uma velocidade de 50,0 mi/h em ar com temperatura de 25°C. Os engenheiros automotivos criaram um modelo em escala um para cinco do automóvel para testá-lo em um túnel de vento. É inverno e o túnel de vento está localizado em um prédio sem aquecimento. A temperatura do ar no túnel de vento é de apenas 5°C. Determine a velocidade do vento que os engenheiros devem colocar no túnel de vento para atingir a similaridade entre o modelo e o protótipo.

Solução Nós devemos utilizar o conceito da similaridade para determinar a velocidade do túnel de vento.
Hipótese **1** A compressibilidade do ar é desprezível (a validade dessa aproximação será discutida posteriormente). **2** As paredes do túnel de vento estão suficientemente distantes para não interferir no arrasto aerodinâmico do automóvel modelo. **3** O modelo é geometricamente similar ao protótipo. **4** O túnel de vento tem uma esteira móvel para simular o solo sob o automóvel, como mostra a Figura 7–19. (A esteira móvel é necessária para atingir a similaridade cinemática em qualquer parte do escoamento, particularmente sob o automóvel.)
Propriedades Para o ar à pressão atmosférica e $T = 25°C$, $\rho = 1{,}184$ kg/m^3 e $\mu = 1{,}849 \times 10^{-5}$ kg/m · s. Da mesma forma, a $T = 5°C$, $\rho = 1{,}269$ kg/m^3 e $\mu = 1{,}754 \times 10^{-5}$ kg/m · s.
Análise Como só existe um Π independente neste problema, a equação da similaridade (Equação 7–12) é válida se $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$, onde Π_2 é dado pela Equação 7–13 e podemos chamá-lo de número de Reynolds. Assim, escrevemos

$$\Pi_{2,m} = \mathrm{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \Pi_{2,p} = \mathrm{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

que pode ser resolvida para a velocidade desconhecida do túnel de vento para os testes do modelo, V_m,

$$V_m = V_p\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{L_p}{L_m}\right)$$

$$= (50{,}0\ \text{mi/h})\left(\frac{1{,}754 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}}{1{,}849 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}}\right)\left(\frac{1{,}184\ \text{kg/m}^3}{1{,}269\ \text{kg/m}^3}\right)(5) = \mathbf{221\ mi/h}$$

Dessa forma, para garantir a similaridade, o túnel de vento deve funcionar a 221 mi/h (até três algarismos significativos). Observe que não tínhamos o comprimento real de nenhum dos automóveis, mas a razão entre L_p e L_m é conhecida, porque o protótipo é cinco vezes maior do que o modelo em escala. Quando os parâmetros dimensionais são reorganizados como relações adimensionais (como foi feito aqui), o sistema de unidades é irrelevante. Como as unidades de cada numerador cancelam aquelas de cada denominador, nenhuma conversão de unidade é necessária.

Discussão Essa velocidade é bastante alta (cerca de 100 m/s) e o túnel de vento talvez não possa funcionar àquela velocidade. Além disso, a aproximação incompressível pode ser um problema nessa velocidade tão alta (nós discutiremos isso com mais detalhes no Exemplo 7–8).

Depois que estivermos convencidos que a similaridade completa foi atingida entre o escoamento do modelo de testes e do protótipo, a Equação 7–12 pode ser usada novamente para prever o desempenho do protótipo com base nas medições do desempenho do modelo. Isso é ilustrado no Exemplo 7–6.

EXEMPLO 7–6 Previsão da Força de Arrasto Aerodinâmico sobre o Automóvel Protótipo

Este exemplo é uma continuação do Exemplo 7–5. Suponhamos que os engenheiros façam o túnel de vento funcionar a 221 mi/h para atingir a similaridade entre o modelo e o protótipo. A força de arrasto aerodinâmica sobre o automóvel modelo é medida com um **balanço de arrasto** (Figura 7–19). Várias leituras de arrasto são registradas e a força de arrasto média sobre o modelo é de 21,2 lbf. Faça uma previsão da força de arrasto aerodinâmico sobre o protótipo (a 50 mi/h e 25°C).

SOLUÇÃO Por causa da similaridade, pode ser feita uma mudança de escala nos resultados para prever a força de arrasto aerodinâmico sobre o protótipo.

Análise A equação da similaridade (Equação 7–12) mostra que como $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$, então $\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$, onde Π_1 é dado para este problema pela Equação 7–13. Assim, escrevemos

$$\Pi_{1,m} = \frac{F_{D,m}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \Pi_{1,p} = \frac{F_{D,p}}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

que pode ser resolvida para a força de arrasto aerodinâmico desconhecida sobre o automóvel protótipo, $F_{D,p}$

$$F_{D,p} = F_{D,m}\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2$$

$$= (21{,}2\ \text{lbf})\left(\frac{1{,}184\ \text{kg/m}^3}{1{,}269\ \text{kg/m}^3}\right)\left(\frac{50{,}0\ \text{mi/h}}{221\ \text{mi/h}}\right)^2(5)^2 = \mathbf{25{,}3\ lbf}$$

Discussão Organizando os parâmetros dimensionais como relações adimensionais, as unidades se cancelam, embora sejam uma combinação entre unidades SI e inglesas. Como a velocidade e o comprimento estão elevados ao quadrado

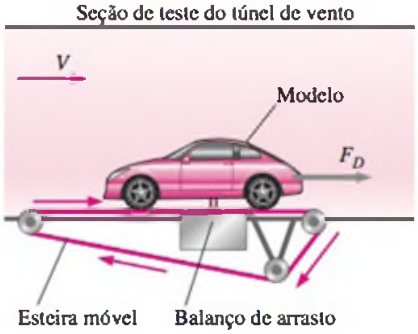


FIGURA 7–19
Um *balanço de arrasto* é um dispositivo usado em um túnel de vento para medir o arrasto aerodinâmico de um corpo. Ao testar modelos de automóveis, quase sempre uma *esteira móvel* é adicionada ao piso do túnel de vento para simular o solo em movimento (em relação ao referencial do automóvel).

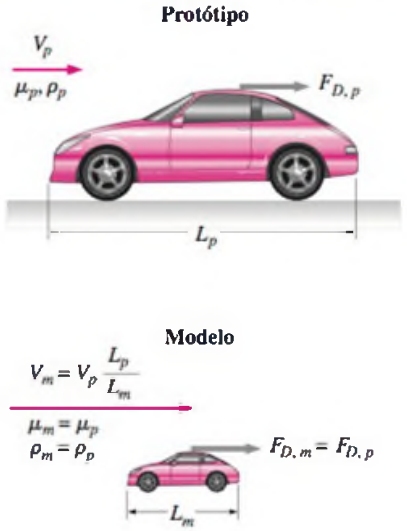


FIGURA 7–20
Para o caso especial do ar no túnel de vento e o do ar que escoa sobre o protótipo terem as mesmas propriedades ($\rho_m = \rho_p$, $\mu_m = \mu_p$), e sob condições de similaridade ($V_m = V_p L_p / L_m$), a força de arrasto aerodinâmico sobre o protótipo é igual àquela que age sobre o modelo em escala. Se os dois fluidos *não* tiverem as mesmas propriedades, as duas forças de arrasto *não* são necessariamente iguais, mesmo sob condições dinamicamente similares.

na equação para Π_1, a velocidade mais alta no túnel de vento quase compensa o tamanho menor do modelo, e a força de arrasto do modelo é quase igual àquela do protótipo. Na verdade, se a densidade e a viscosidade do ar no túnel de vento fossem *idênticas* àquelas do ar que escoa sobre o protótipo, as duas forças de arrasto também seriam idênticas (Figura 7–20).

O poder do uso da análise dimensional e da similaridade para suplementar a análise experimental é melhor ilustrado pelo fato de que os valores reais dos parâmetros dimensionais (densidade, velocidade etc.) são irrelevantes. Desde que os Π's independentes correspondentes sejam iguais entre si, a similaridade é atingida — *mesmo que sejam usados fluidos diferentes*. Isso explica porque o desempenho de um automóvel ou avião pode ser simulado em um túnel de água, e porque o desempenho de um submarino pode ser simulado em um túnel de vento (Figura 7–21). Suponhamos, por exemplo, que os engenheiros dos Exemplos 7–5 e 7–6 usem um túnel de água em vez de um túnel de vento para testar seu modelo em escala um para cinco. Usando as propriedades da água à temperatura ambiente (suposto 20°C), a velocidade do túnel de água necessária para atingir a similaridade é facilmente calculada por

$$V_m = V_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{L_p}{L_m}\right)$$

$$= (50{,}0 \text{ mi/h})\left(\frac{1{,}002 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}}{1{,}849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}}\right)\left(\frac{1{,}184 \text{ kg/m}^3}{998{,}0 \text{ kg/m}^3}\right)(5) = 16{,}1 \text{ mi/h}$$

Como podemos ver, uma vantagem de um túnel de água é que a velocidade necessária no túnel de água é muito mais baixa do que aquela necessária quando se usa um túnel de vento com o modelo de mesmo tamanho.

FIGURA 7–21
A similaridade pode ser atingida mesmo quando o fluido do modelo é diferente do fluido do protótipo. Aqui, um modelo de submarino é testado em um túnel de vento.
Courtesia do NASA Langley Research Center.

7–4 • O MÉTODO DAS VARIÁVEIS REPETIDAS E O TEOREMA PI DE BUCKINGHAM

Já vimos vários exemplos da utilidade e do poder da análise dimensional. Agora, estamos prontos para aprender a *gerar* os parâmetros adimensionais, ou seja, os Π's. Existem vários métodos que foram desenvolvidos com essa finalidade, mas o mais conhecido (e simples) é o **método das variáveis repetidas**, popularizado por Edgar Buckingham (1867-1940). O método foi publicado pelo cientista russo Dimitri Riabouchinsky (1882–1962) em 1911. Nós podemos imaginar esse método como um procedimento passo a passo ou uma "receita" para obter parâmetros adimensionais. Existem seis etapas, listadas concisamente na Figura 7–22, e com mais detalhes na Tabela 7–2. Essas etapas são explicadas ainda com mais detalhes ao tratarmos vários exemplos de problemas.

Assim como acontece com a maioria dos procedimentos novos, a melhor maneira de aprender é pelo exemplo e prática. Como um primeiro exemplo simples, considere uma bola que cai no vácuo, como discutido na Seção 7–2. Vamos imaginar que não sabemos que a Equação 7–4 é apropriada para este problema, e que não conhecemos muito da física envolvida nos objetos que caem. Na verdade, suponhamos que tudo o que sabemos é que a elevação instantânea de z para a bola deve ser uma função do tempo t, da velocidade vertical inicial w_0, da elevação inicial z_0 e da constante gravitacional g (Figura 7–23). A beleza da análise dimensional é que só precisamos conhecer as dimensões primárias de cada uma dessas quantidades. Ao passarmos por cada etapa do método das variáveis repetidas, explicaremos algumas sutilezas da técnica com mais detalhes usando a bola que cai como um exemplo.

Passo 1

Existem cinco parâmetros (variáveis dimensionais, variáveis adimensionais e constantes dimensionais) neste problema; $n = 5$. Eles estão listados na forma funcional,

TABELA 7–2

Uma descrição detalhada das seis etapas envolvidas no método das variáveis repetidas*

Passo 1 Liste os parâmetros (variáveis dimensionais, variáveis adimensionais e constantes dimensionais) e conte-os. Seja n o número total dos parâmetros do problema, incluindo a variável dependente. Certifique-se de que todos os parâmetros independentes listados são verdadeiramente independentes dos outros, ou seja, não podem ser expressos em termos deles. (Por exemplo, não inclua o raio r e a área $A = \pi r^2$, já que r e A *não* são independentes.)

Passo 2 Liste as dimensões primárias de cada um dos n parâmetros.

Passo 3 Descubra a **redução** j. Como primeira tentativa, faça j igual ao número de dimensões primárias representadas no problema. O número esperado de Π's (k) é igual a n menos j, de acordo com o **teorema Pi de Buckingham**,

O teorema Pi de Buckingham: $k = n - j$ (7–14)

Se neste passo ou durante um passo subseqüente, a análise não funcionar, verifique se você incluiu parâmetros no passo 1. Caso contrário, volte e *reduza j em um* e tente novamente.

Passo 4 Selecione j **parâmetros repetidos** que serão usados para construir cada Π. Como os parâmetros repetidos podem aparecer em cada Π, verifique se os selecionou de forma *sensata* (Tabela 7–3).

Passo 5 Gere os Π's um de cada vez agrupando os j parâmetros repetidos com um dos parâmetros restantes, forçando o produto a ser adimensional. Dessa forma, construa todos os k Π's. Por convenção, o primeiro Π, designado por Π_1, é o Π *dependente* (aquele do lado esquerdo da lista). Manipule os Π's conforme necessário para atingir os grupos adimensionais usuais (Tabela 7–5).

Passo 6 Verifique se todos os Π's são realmente adimensionais. Escreva a relação funcional final na forma da Equação 7–11.

* Este é um método passo a passo para encontrar os grupos adimensionais Π ao fazer uma análise dimensional.

com a variável dependente listada como função das variáveis e constantes independentes:

Lista de parâmetros relevantes: $z = f(t, w_0, z_0, g)$ $n = 5$

Passo 2

As dimensões primárias de cada parâmetro estão listadas aqui. Recomendamos que cada dimensão seja escrita com expoentes, uma vez que isso ajuda na álgebra que virá a seguir.

z	t	w_0	z_0	g
$\{L^1\}$	$\{t^1\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1t^{-2}\}$

Passo 3

Como primeira opção, j é tomado como 2, o número de dimensões primárias representadas no problema (L e t).

Redução: $j = 2$

Se esse valor de j estiver correto, o número de Π's previstos pelo teorema Pi de Buckingham é

Número de Π's esperados: $k = n - j = 5 - 2 = 3$

O método das variáveis repetidas

Passo 1: Liste os parâmetros do problema e corte seu número total, n.

Passo 2: Liste as dimensões primárias de cada um dos n parâmetros.

Passo 3: Tome a *redução j* como o número de dimensões primárias. Calcule k, o número esperado de Π's, $k = n - j$.

Passo 4: Escolha j *parâmetros repetidos.*

Passo 5: Construir k Π's e se manipule conforme o necessário.

Passo 6: Escreva a relação funcional final e verifique seus cálculos.

FIGURA 7–22
Um resumo conciso das seis etapas envolvidas no *método das variáveis repetidas.*

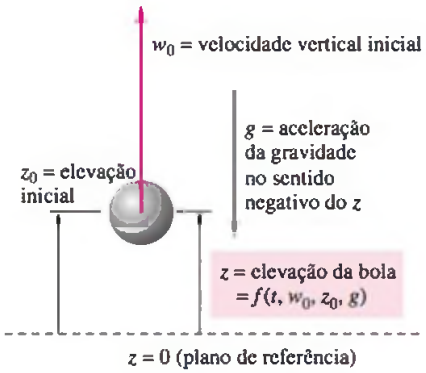


FIGURA 7–23
Configuração para a análise dimensional de uma bola que cai no vácuo. A elevação z é uma função do tempo t, da velocidade vertical inicial w_0, da elevação inicial z_0 e da constante gravitacional g.

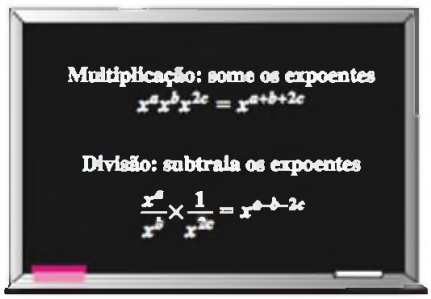


FIGURA 7–24
As regras matemáticas para somar e subtrair expoentes durante a multiplicação e divisão, respectivamente.

FIGURA 7–25
É sensato selecionar parâmetros *comuns* como parâmetros repetidos, uma vez que eles aparecem em cada um de seus grupos Π adimensionais.

$\{\Pi_1\} = \{m^0L^0t^0T^0I^0C^0N^0\} = \{1\}$

$\{\Pi_2\} = \{m^0L^0t^0T^0I^0C^0N^0\} = \{1\}$

.
.
.

$\{\Pi_k\} = \{m^0L^0t^0T^0I^0C^0N^0\} = \{1\}$

FIGURA 7–26
Os grupos Π que resultam do método das variáveis repetidas certamente são adimensionais porque nós *forçamos* o expoente geral de todas as sete dimensões primárias a ser zero.

Passo 4

Precisamos escolher dois parâmetros repetidos, uma vez que $j = 2$. Como às vezes essa é a parte mais difícil (ou pelo menos a mais misteriosa) do método das variáveis repetidas, várias orientações sobre a escolha dos parâmetros repetidos são listadas na Tabela 7–3.

De acordo com as orientações da Tabela 7–3, a opção mais sensata para os dois parâmetros repetidos é w_0 e z_0.

Parâmetros repetidos: w_0 e z_0

Passo 5

Agora combinamos esses parâmetros repetidos em produtos com cada um dos parâmetros restantes, um de cada vez, para criar os Π's. O primeiro Π é sempre o Π *dependente* e é formado com a variável dependente z.

Π dependente:
$$\Pi_1 = z w_0^{a_1} z_0^{b_1} \tag{7–15}$$

onde a_1 e b_1 são expoentes constantes que precisam ser determinados. Aplicamos as dimensões primárias da etapa 2 à Equação 7–15 e *forçamos* o Π a ser adimensional, impondo que o expoente de cada dimensão primária seja zero:

Dimensões de Π_1:
$$\{\Pi_1\} = \{L^0t^0\} = \{z w_0^{a_1} z_0^{b_1}\} = \{L^1(L^1t^{-1})^{a_1}L^{b_1}\}$$

Como as dimensões primárias são por definição independentes entre si, equacionamos os expoentes de cada dimensão primária de forma independente para encontrar os expoentes a_1 e b_1 (Figura 7–24).

Tempo: $\{t^0\} = \{t^{-a_1}\}$ $\quad 0 = -a_1 \quad a_1 = 0$

Comprimento: $\{L^0\} = \{L^1L^{a_1}L^{b_1}\}$ $\quad 0 = 1 + a_1 + b_1 \quad b_1 = -1 - a_1 \quad b_1 = -1$

Assim, a Equação 7–15 torna-se

$$\Pi_1 = \frac{z}{z_0} \tag{7–16}$$

De modo semelhante, criamos o primeiro Π independente (Π_2) combinando os parâmetros repetidos com a variável independente t.

Primeiro Π independente:
$$\Pi_2 = t w_0^{a_2} z_0^{b_2}$$

Dimensões de Π_2:
$$\{\Pi_2\} = \{L^0t^0\} = \{t w_0^{a_2} z_0^{b_2}\} = \{t(L^1t^{-1})^{a_2}L^{b_2}\}$$

Equacionando os expoentes,

Tempo: $\{t^0\} = \{t^1t^{-a_2}\}$ $\quad 0 = 1 - a_2 \quad a_2 = 1$

Comprimento: $\{L^0\} = \{L^{a_2}L^{b_2}\}$ $\quad 0 = a_2 + b_2 \quad b_2 = -a_2 \quad b_2 = -1$

Dimensões de Π_2:

$$\Pi_2 = \frac{w_0 t}{z_0} \tag{7–17}$$

Finalmente criamos o segundo Π independente (Π_3) combinando os parâmetros repetidos com g e *forçando* o Π a ser adimensional (Figura 7–26).

Segundo Π independente:
$$\Pi_3 = g w_0^{a_3} z_0^{b_3}$$

Dimensões de Π_3:
$$\{\Pi_3\} = \{L^0t^0\} = \{g w_0^{a_3} z_0^{b_3}\} = \{L^1t^{-2}(L^1t^{-1})^{a_3}L^{b_3}\}$$

TABELA 7–3

Procedimentos para escolher os parâmetros repetidos no passo 4 do método das variáveis repetidas*

Procedimento	Comentários e Aplicação no Problema Atual
1. Nunca escolha a variável *dependente*. Caso contrário, ela pode aparecer em todos os Π's, o que não é desejável.	Neste problema não podemos escolher z, mas devemos escolher entre os quatro parâmetros restantes. Assim devemos selecionar dois dos seguintes parâmeros: t, w_0, z_0 e g.
2. Os parâmetros repetidos selecionados não devem *por si mesmos* formar um grupo adimensional. caso contrário, seria impossível gerar o restante dos Π's.	No problema atual, quaisquer dois parâmetros independentes seriam válidos de acordo com esta orientação. Entretanto, para fins ilustrativos, suponhamos que escolhemos três em vez de dois parâmetros repetidos. Não poderíamos, por exemplo, selecionar t, w_0, z_0, porque, eles sozinhos podem formar um $\Pi(tw_0/z_0)$.
3. Os parâmetros repetidos selecionados devem representar *todas* as dimensões primárias do problema.	Suponhamos, por exemplo, que houvesse *três* dimensões primárias (m, L e t) e que *dois* pariametros repetidos tenham sido escolhidos. Você não poderia escolher digamos um comprimento e um tempo, uma vez que a dimensão primária massa não estaria representada nas dimensões dos parâmetros repetidos. Uma opção apropriada seria uma densidade e um tempo, os quais juntos representam todas as três dimensões primárias do problema.
4. Nunca escolha parâmetros que já são adimensionais. Eles já são Π's por sim mesmos.	Suponhamos que o ângulo θ fosse um dos parâmetros independentes. Não poderíamos ter escolhido θ como parâmetro repetido, uma vez que os ângulos são adimensionais (radianos e grau são unidades sem dimensões). Nesse caso, um Π's já é conhecido: θ.
5. Nunca escolha dois parâmetros com as *mesmas* dimensões ou com dimensões que diferem por apenas um expoente.	Neste problema, dois dos parâmetros, z e z_0, têm as mesmas dimensões (comprimento). Não podemos escolher estes dois parâmetros. (Observe que a variável dependente z já foi eliminada pela orientação 1.) Suponhamos que um parâmetro tenha dimensões de comprimento e que outro parâmetro tenha dimensões de volume. Na análise dimensional, o volume contém apenas uma dimensão primária (comprimento) e *não é dimensionlmente distinto do comprimento* — não podemos escolher ambos os parâmetros.
6. Sempre que possível, selecione contantes dimensionais em vez de variável dimensionais para que apena um Π contenha a varável dimensional.	Se escolhermos o tempo t como parâmetro repetido neste problema, ele apareceria em todos os três Π's. Embora isso não esteja *errado*, não seria sensato, pois sabemos que em última análise queremos uma altura adimensional como função de um tempo adimensional e outro parâmetro adimensional. Dos quatro parâmetros originais independentes, isso nos deixa w_0, z_0 e g.
7. Escolha parâmetros comuns, já que eles podem aparecer em cada um dos Π's.	Em problemas de escoamento de fluidos geralmente ecolhemos um comprimento, uma velocidade e uma massa ou densidade (Figura 7–25). Não é sensato escolher parâmetros menos comuns como viscosidade μ ou tensão superficial σ_s, uma vez que em geral não queremos que μ e σ_s apareçam em cada um dos dos Π's. Neste problema w_0 e z_0 são opções mais sensatas do que g.
8. Sempre que possível, escolha parâmetros simples em vez de parâmetros complexos.	É melhor escolher parâmetros com apenas uma ou duas dimensões básicas (por exemplo, um comprimento, um tempo, uma massa ou uma velocidade) em vez de parâmetros que são compostos por várias dimensões básicas (por exemplo, uma energia ou uma pressão).

*Estes procedimentos, embora não sejam infalíveis, ajudam você a escolher parâmetros repetidos que em geral levam aos grupos Π's adimensionais usuais com esforço mínimo.

Equacionando os expoentes,

Tempo: $\{t^0\} = \{t^{-2}t^{-a_3}\}$ $\quad 0 = -2 - a_3$ $\quad a_3 = -2$

Comprimento: $\{L^0\} = \{L^1L^{a_3}L^{b_3}\}$ $\quad 0 = 1 + a_3 + b_3$ $\quad b_3 = -1 - a_3$ $\quad b_3 = 1$

FIGURA 7–27
Os parâmetros adimensionais usuais geralmente recebem o nome de um cientista ou engenheiro notável.

Portanto, Π_3 é

$$\Pi_3 = \frac{gz_0}{w_0^2} \tag{7–18}$$

Todos os três Π's foram encontrados, mas neste ponto é prudente examiná-los para ver se é necessária alguma manipulação. Vemos imediatamente que Π_1 e Π_2 são iguais às variáveis adimensionais z^* e t^* definidas pela Equação 7–6 — nenhuma manipulação é necessária para estes. Entretanto, reconhecemos que o terceiro Π deve ser elevado à potência de $-\frac{1}{2}$ para ter a mesma forma de um parâmetro adimensional usual, a saber o número de Froude da Equação 7–8:

Π_3 *modificado*:
$$\Pi_{3,\text{ modificado}} = \left(\frac{gz_0}{w_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{w_0}{\sqrt{gz_0}} = \text{Fr} \tag{7–19}$$

Tal manipulação quase sempre é necessária para colocar os Π's na forma usual adequada. O Π da Equação 7–18 não está *errado*, e certamente não há vantagem matemática da Equação 7–19 com relação à Equação 7–18. Em vez disso, gostamos de dizer que a Equação 7–19 é mais "socialmente aceitável" do que a Equação 7–18, uma vez que esse é um parâmetro adimensionais usual, que normalmente é utilizado na literatura. A Tabela 7–4 relaciona alguns procedimentos para a manipulação de seus grupos Π's adimensionais em parâmetros adimensionais usuais.

A Tabela 7–5 lista alguns parâmetros adimensionais usuais, e a maioria deles tem nomes de cientistas ou engenheiros notáveis (Figura 7–27 e o quadro Aplicação em Foco na página 249). Essa lista não é, de forma alguma, completa. Sempre que possível, você deve manipular seus Π's para convertê-los em parâmetros adimensionais estabelecidos.

TABELA 7–4

Procedimentos para a manipulação dos Π's resultantes dos métodos das variáveis repetidas.*

Procedimento	Comentários e Aplicação neste Problema
1. Podemos impor um expoente constante (sem dimensão) a um Π ou executar uma operação funcional em Π.	Podemos elevar um Π a qualquer expoente n (mudando-o para Π^n) sem variar a estatura adimensional do Π.Por exemplo, neste problema nós impusemos um expoente $-\frac{1}{2}$ a Π_3. Da mesma forma, podemos executar a operação funcional sen(Π), exp(Π) etc. sem influenciar as dimensões do Π.
2. Podemos multiplicar um Π por uma constante adimensional.	Às vezes, os fatores adimensionais $\frac{1}{2}$, 2, 4 etc. são incluídos em um Π por conveniência. Isso é perfeitamente correto, uma vez que tais fatores não influenciam as dimensões de Π.
3. Podemos formar um produto (quociente) de qualquer Π com qualquer outro Π do problema para substituir um dos Π's.	Poderíamos sbstituir Π_3 por $\Pi_3\Pi_1$, Π_3/Π_2 etc. Às vezes tal manipulação é necessária para converter nosso Π em um Π usual. Em muitos casos, o Π usual teria sido produzido se tivéssemos escolhido parâmetros repetidos diferentes.
4. Podemos usar qualquer um dos procedimentos 1 a 3 em conjunto.	Em geral, podemos substituir qualquer Π por algum novo como $A\Pi_3^B$ sen(Π_1^C), onde A, B e C são constantes puras
5. Podemos substituir um parâmetro dimensional no Π por outros parâmetros de mesmas dimensões.	Por exemplo, Π pode conter o quadrado de um comprimento ou o cubo de um comprimento, no qual podemos substituir uma área ou volume conhecidos, respectivamente, para fazer que Π coincida com as convenções estabelecidas.

* Estes procedimentos são úteis no passo 5 do método de variáveis repetidas e são listados para ajudá-lo a converter seus grupos Π's adimensionais em parâmetros adimensionais padrão, muitos dos quais estão listados na Tabela 7–5.

Passo 6

Devemos verificar novamente se os Π's são mesmo adimensionais (Figura 7–28). Você pode verificar isso por conta própria neste exemplo. Finalmente estamos prontos para escrever a relação funcional entre os parâmetros adimensionais. Combinando as Equações 7–16, 7–17 e 7–19 na forma da Equação 7–11,

Relações entre os Π's: $$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \quad \rightarrow \quad \frac{z}{z_0} = f\left(\frac{w_0 t}{z_0}, \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}}\right)$$

Ou, em termos das variáveis adimensionais z^* e t^* definidas anteriormente pela Equação 7–6 e da definição do número de Froude

Resultado final da análise dimensional: $$z^* = f(t^*, \text{Fr}) \tag{7–20}$$

É bom comparar o resultado da análise dimensional, Equação 7–20, com o resultado analítico exato, Equação 7–10. O método das variáveis repetidas prevê adequadamente a relação funcional entre os grupos adimensionais. Entretanto,

O método das variáveis repetidas não pode prever a forma matemática exata da equação.

Essa é uma limitação fundamental da análise dimensional e do método das variáveis repetidas. Para alguns problemas simples, porém, a forma da equação *pode* ser prevista a menos de uma constante desconhecida, como ilustra o Exemplo 7–7.

FIGURA 7–28
É sempre prudente fazer uma rápida verificação dos seus cálculos.

TABELA 7–5

Alguns parâmetros adimensionais ou Π's usuais encontrados na mecânica dos fluidos e transferência de calor*

Nome	Definição	Razão de Significância
Número de Arquimedes	$\text{Ar} = \frac{\rho_s g L^3}{\mu^2}(\rho_s - \rho)$	$\frac{\text{Força gravitacional}}{\text{Força viscosa}}$
Razão de aspecto	$\text{AR} = \frac{L}{W}$ ou $\frac{L}{D}$	$\frac{\text{Comprimento}}{\text{Largura}}$ ou $\frac{\text{Comprimento}}{\text{Diâmetro}}$
Número de Biot	$\text{Bi} = \frac{hL}{k}$	$\frac{\text{Resistência térmica de superfície}}{\text{Resistência térmica interna}}$
Número de Bond	$\text{Bo} = \frac{g(\rho_f - \rho_v)L^2}{\sigma_s}$	$\frac{\text{Força gravitacional}}{\text{Força de tensão superficial}}$
Número de cavitação	$\text{Ca (às vezes } \sigma_c) = \frac{P - P_v}{\rho V^2}$ $\left(\text{às vezes } \frac{2(P - P_v)}{\rho V^2}\right)$	$\frac{\text{Pressão} - \text{Pressão de vapor}}{\text{Pressão inercial}}$
Fator de atrito de Darcy	$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$	$\frac{\text{Força de atrito na parede}}{\text{Força inercial}}$
Coeficiente de arrasto	$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$	$\frac{\text{Força de arrasto}}{\text{Força dinâmica}}$
Número de Eckert	$\text{Ec} = \frac{V^2}{c_p T}$	$\frac{\text{Energia cinética}}{\text{Entalpia}}$
Número de Euler	$\text{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2}\left(\text{às vezes } \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}\right)$	$\frac{\text{Diferença de pressão}}{\text{Pressão dinâmica}}$
Fator de atrito de Fanning	$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho V^2}$	$\frac{\text{Força de atrito na parede}}{\text{Força inercial}}$

(Continua)

TABELA 7–5 (Continuação)

Nome	Definição	Razão de Significância
Número de Fourier	$\text{Fo (às vezes } \tau) = \frac{\alpha t}{L^2}$	$\frac{\text{Tempo físico}}{\text{Tempo de difusão térmica}}$
Número de Froude	$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \left(\text{às vezes } \frac{V^2}{gL}\right)$	$\frac{\text{Força inercial}}{\text{Força gravitacional}}$
Número de Grashof	$\text{Gr} = \frac{g\beta\lvert\Delta T\rvert L^3\rho^2}{\mu^2}$	$\frac{\text{Força de flutuação}}{\text{Força viscosa}}$
Número de Jakob	$\text{Ja} = \frac{c_p(T - T_{sat})}{h_{fg}}$	$\frac{\text{Energia}}{\text{Energia latente}}$
Número Knudsen	$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L}$	$\frac{\text{Comprimento médio do trajeto livre}}{\text{Comprimento característico}}$
Número Lewis	$\text{Le} = \frac{k}{\rho c_p D_{AB}} = \frac{\alpha}{D_{AB}}$	$\frac{\text{Difusão térmica}}{\text{Difusão}}$
Coeficiente de sustentação	$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$	$\frac{\text{Força de sustentação}}{\text{Força dinâmica}}$
Número de Mach	$\text{Ma (às vezes } M) = \frac{V}{c}$	$\frac{\text{Velocidade do escoamento}}{\text{Velocidade do som}}$
Número de Nusselt	$\text{Nu} = \frac{Lh}{k}$	$\frac{\text{Transferência de calor por convecção}}{\text{Transferência de calor por condução}}$
Número de Peclet	$\text{Pe} = \frac{\rho L V c_p}{k} = \frac{LV}{\alpha}$	$\frac{\text{Transferência de calor}}{\text{Transferência de calor por convecção}}$
Número de Power	$N_P = \frac{\dot{W}}{\rho D^5 \omega^3}$	$\frac{\text{Potência}}{\text{Inércia de rotação}}$
Número de Prandtl	$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$	$\frac{\text{Difusão viscosa}}{\text{Difusão térmica}}$
Coeficiente de pressão	$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2}$	$\frac{\text{Diferença de pressão estática}}{\text{Pressão dinâmica}}$
Número de Rayleigh	$\text{Ra} = \frac{g\beta\lvert\Delta T\rvert L^3\rho^2 c_p}{k\mu}$	$\frac{\text{Força de flutuação}}{\text{Força viscosa}}$
Número de Reynolds	$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$	$\frac{\text{Força inercial}}{\text{Força viscosa}}$
Número de Richardson	$\text{Ri} = \frac{L^5 g\,\Delta\rho}{\rho \dot{V}^2}$	$\frac{\text{Força de flutuação}}{\text{Força inercial}}$
Número de Schmidt	$\text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{\nu}{D_{AB}}$	$\frac{\text{Difusão viscosa}}{\text{Difusão de espécies}}$
Número de Sherwood	$\text{Sh} = \frac{VL}{D_{AB}}$	$\frac{\text{Difusão de massa total}}{\text{Difusão de espécies}}$
Região de calores específicos	$k \text{ (às vezes } \gamma) = \frac{c_p}{c_v}$	$\frac{\text{Entalpia}}{\text{Energia interna}}$
Número de Stanton	$\text{St} = \frac{h}{\rho c_p V}$	$\frac{\text{Transferência de calor}}{\text{Capacidade térmica}}$
Número de Stokes	$\text{Stk (às vezes St)} = \frac{\rho_p D_p^2 V}{18\mu L}$	$\frac{\text{Tempo de relaxamento da partícula}}{\text{Tempo característico de escoamento}}$
Número de Strouhal	$\text{St (às vezes S ou Sr)} = \frac{fL}{V}$	$\frac{\text{Tempo característico de escoamento}}{\text{Período de oscilação}}$

(Continua)

TABELA 7–5 (Continuação)

Nome	Definição	Razão de Significância
Número de Weber	$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma_s}$	$\frac{\text{Força inercial}}{\text{Força de tensão superficial}}$

* A é uma área característica, D é um diâmetro característico, f é uma freqüência característica (Hz), L é um comprimento característico, t é um tempo característico, T é uma temperatura (absoluta) característica, V é uma velocidade característica, W é uma largura característica, W é uma potência característica, ω é uma velocidade angular característica (rad/s). Os outros parâmetros e propriedades dos fluidos desses Π's incluem: c = velocidade do som, c_p, c_v = calores específicos, D_p = diâmetro da partícula, D_{AB} = coeficiente de difusão da espécie, h = coeficiente de transferência de calor por convecção, h_{fg} = calor latente de evaporação, k = condutividade térmica, P = pressão, T_{sat} = temperatura de saturação, = vazão em volume, α = difusão térmica, β = coeficiente de expansão térmica, λ = comprimento médio da trajetória livre, μ = viscosidade, ν = viscosidade cinemática, ρ = densidade do fluido, ρ_f = densidade do líquido, ρ_p = densidade de partícula, ρ_s = densidade do sólido, ρ_v = densidade do vapor, σ_s = tensão superficial e τ_w = tensão de cisalhamento ao longo da parede.

DESTAQUE HISTÓRICO ■ Pessoas Homenageadas pelos Parâmetros Adimensionais

Autor Convidado: Glenn Brown, Universidade do Estado de Oklahoma

Muito usados, os números adimensionais receberam nomes por conveniência e para homenagear pessoas que contribuíram para o desenvolvimento da ciência e da engenharia. Em muitos casos, o nome em questão não é da primeira pessoa que definiu o número, mas em geral aquela que utilizou o parâmetro ou um parâmetro semelhante em seu trabalho. A seguir temos uma lista de algumas dessas pessoas, mas não de todas. Lembre-se também de que alguns números podem ter mais de um nome.

Arquimedes (287–212 AC) Matemático grego que definiu a força de flutuação.

Biot, Jean-Baptiste (1774–1862) Matemático francês que realizou um trabalho pioneiro em calor, eletricidade e elasticidade. Ele também ajudou a medir o arco do meridiano como parte do desenvolvimento do sistema métrico.

Darcy, Henry P. G. (1803–1858) Engenheiro francês que fez experiências extensas de escoamento em tubos e os primeiros testes quantificáveis de filtragem.

Eckert, Ernst R. G. (1904–2004) Engenheiro alemão americano e aluno de Schmidt que realizou os primeiros trabalhos na área de transferência de calor na camada limite.

Euler, Leonhard (1797–1783) Matemático suíço e colega de Daniel Bernoulli que formulou as equações de movimento dos fluidos e introduziu o conceito da máquina centrífuga.

Fanning, John T. (1837–1911) Engenheiro americano e autor de livros que publicou em 1877 uma forma modificada da equação de Weisbach com uma tabela de valores de resistência calculados com base nos dados de Darcy.

Fourier, Jean B. J. (1768–1830) Matemático francês, pioneiro no trabalho de transferência de calor e em diversos outros tópicos.

Froude, William (1810–1879) Engenheiro inglês que desenvolveu métodos de modelagem naval e a transferência da resistência de onda e de camada limite do modelo ao protótipo.

Grashof, Franz (1826–1893) Engenheiro e educador alemão conhecido como autor prolífico, editor, revisor e produtor de publicações.

Jakob, Max (1879–1955) Médico e engenheiro alemão-americano e autor de livros que realizou trabalho pioneiro em transferência de calor.

Knudsen, Martin (1871–1949) Médico holandês que ajudou a desenvolver a teoria cinética dos gases.

Lewis, Warren K. (1882–1975) Engenheiro americano que pesquisou a destilação, a extração e reações em leitos fluidizados.

Mach, Ernst (1838–1916) Físico austríaco que descobriu que os corpos com velocidade acima da velocidade do som alteram drasticamente as propriedades do fluido. Suas idéias tiveram grande influência sobre o pensamento do século 20, tanto em física quanto em filosofia, e influenciaram o desenvolvimento da teoria da relatividade de Einstein.

Nusselt, Wilhelm (1882–1957) Engenheiro alemão que aplicou pela primeira vez a teoria da similaridade à transferência de calor.

Peclet, Jean C. E. (1793–1857) Educador francês, médico e pesquisador industrial.

Prandtl, Ludwig (1875–1953) Engenheiro alemão que desenvolveu a teoria da camada limite e é considerado o fundados da mecânica dos fluidos moderna.

Lord Raleigh, John W. Strutt (1842–1919) Cientista inglês que investigou a similaridade dinâmica, a cavitação e o colapso das bolhas.

Reynolds, Osborne (1842–1912) Engenheiro inglês que investigou o escoamento em tubos e desenvolveu equações para escoamento de fluido viscoso com base nas velocidades médias.

Richardson, Lewis F. (1881–1953) Matemático, físico e psicólogo inglês que foi pioneiro na aplicação da mecânica dos fluidos à modelagem da turbulência atmosférica.

Schmidt, Ernst (1892–1975) Cientista alemão e pioneiro no campo da transferência de calor e massa. Ele foi o primeiro a medir o campo de velocidade e de temperatura em uma camada limite com convecção livre.

Sherwood, Thomas K. (1903–1976) Engenheiro e educador americano. Ele pesquisou a transferência de massa e sua interação com o escoamento, as reações químicas e as operações do processo industrial.

Stanton, Thomas E. (1865–1931) Engenheiro inglês e aluno de Reynolds que contribuiu para várias áreas do escoamento de fluidos.

Stokes, George G. (1819–1903) Cientista irlandês que desenvolveu equações de movimento viscoso e difusão.

Strouhal, Vincenz (1850–1922) Físico tcheco que mostrou que o período das oscilações de um fio está relacionado à velocidade do ar que passa por ele.

Weber, Moritz (1871–1951) Professor alemão que aplicou a análise da similaridade aos escoamentos capilares.

FIGURA 7–29
A pressão dentro de uma bolha de sabão é maior do que a pressão que cerca a bolha de sabão devido à tensão superficial da película de sabão.

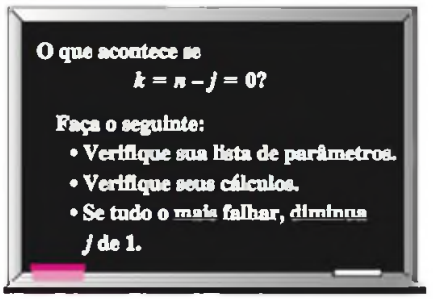


FIGURA 7–30
Se o método das variáveis repetidas indica zero Π's, nós cometemos um erro ou precisamos reduzir j em 1 e começar novamente.

EXEMPLO 7–7 Pressão em uma Bolha de Sabão

Algumas crianças estão brincando com bolhas de sabão e você fica curioso quanto à relação entre o raio da bolha de sabão e a pressão dentro da bolha de sabão (Figura 7–29). Você considera que a pressão dentro da bolha de sabão deve ser maior do que a pressão atmosférica, e que a película da bolha de sabão está sob tensão, assim como a superfície de um balão. Você também sabe que a propriedade da tensão superficial deve ser importante neste problema. Sem saber mais nada de física, você resolve abordar o problema usando a análise dimensional. Estabeleça uma relação entre a diferença de pressão $\Delta P = P_{interna} - P_{externa}$, o raio R da bolha de sabão e a tensão superficial σ_s da película de sabão.

SOLUÇÃO A diferença de pressão entre o interior de uma bolha de sabão e o ar exterior deve ser analisada pelo método das variáveis repetidas.

Hipótese **1** A bolha de sabão é neutralmente flutuante no ar, e a gravidade não é importante. **2** Nenhuma outra variável ou constante é importante neste problema.

Análise O método passo a passo das variáveis repetidas é empregado.

Passo 1 Existem três variáveis e constantes neste problema; $n = 3$. Eles estão listados na forma funcional, com a variável dependente escrita como função das variáveis independentes e constantes:

Lista de parâmetros relevantes: $\Delta P = f(R, \sigma_s)$ $\quad n = 3$

Passo 2 As dimensões primárias de cada parâmetro estão listadas. As dimensões da tensão superficial são obtidas do Exemplo 7–1, e as da pressão do Exemplo 7–2.

ΔP	R	σ_s
$\{m^1L^{-1}t^{-2}\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1t^{-2}\}$

Passo 3 Como primeira tentativa, j é definido como 3, o número de dimensões primárias representadas no problema (m, L e t).

Redução (primeira opção): $j = 3$

Se esse valor de j estiver correto, o número esperado de Π's é $k = n - j = 3 - 3 = 0$. Mas como podemos ter zero Π's? Obviamente alguma coisa não está certa (Figura 7–30). Em momentos como esse, precisamos primeiro voltar e ter certeza de que não estamos nos esquecendo de alguma variável ou constante importante para o problema. Como estamos certos de que a diferença de pressão só deve depender do raio da bolha de sabão e da tensão superficial, reduzimos o valor de j em um,

Redução (segunda tentativa): $j = 2$

Se esse valor de j estiver correto, $k = n - j = 3 - 2 = 1$. Assim, esperamos *um* Π que é fisicamente mais realista do que zero Π's.

Passo 4 Precisamos selecionar dois parâmetros repetidos, uma vez que $j = 2$. Seguindo os procedimentos da Tabela 7–3, nossas únicas opções são R e σ_s, uma vez que ΔP é a variável dependente.

Passo 5 Combinamos esses parâmetros repetidos em um produto com a variável dependente ΔP para criar o Π dependente

Π *dependente*: $\Pi_1 = \Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1}$ **(1)**

Aplicamos as dimensões primárias do Passo 2 à Equação 1 e forçamos o Π a ser adimensional.

Dimensões de Π_1:

$$\{\Pi_1\} = \{m^0L^0t^0\} = \{\Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1}\} = \{(m^1L^{-1}t^{-2})L^{a_1}(m^1t^{-2})^{b_1}\}$$

Equacionamos os expoentes de cada dimensão primária para encontrar a_1 e b_1:

Tempo: $\{t^0\} = \{t^{-2}t^{-2b_1}\}$ $\quad 0 = -2 - 2b_1$ $\quad b_1 = -1$

Massa: $\{m^0\} = \{m^1m^{b_1}\}$ $\quad 0 = 1 + b_1$ $\quad b_1 = -1$

Comprimento: $\{L^0\} = \{L^{-1}L^{a_1}\}$ $\quad 0 = -1 + a_1$ $\quad a_1 = 1$

Felizmente, os dois primeiros resultados concordam entre si e a Equação 1 torna-se

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_s} \qquad (2)$$

Da Tabela 7–5, o parâmetro adimensional usual mais semelhante à Equação 2 é o **número de Weber**, definido como uma pressão (ρV^2) vezes um comprimento dividido pela tensão superficial. Não há necessidade de manipular esse Π ainda mais.

Passo 6 Escrevemos a relação funcional final. No caso em questão, existe apenas um Π que não é função de *nada*. Isso só é possível se Π for constante. Colocando a Equação 2 na forma funcional da Equação 7–11,

Relação entre Π*'s:*

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_s} = \mathbf{f}(\text{nada}) = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \Delta P = \text{constante}\,\frac{\sigma_s}{R} \qquad (3)$$

Discussão Este é um exemplo de como às vezes podemos prever *tendências* com a análise dimensional, mesmo sem saber muita coisa sobre a física do problema. Por exemplo, sabemos do nosso resultado que se o raio da bolha de sabão dobrar, a diferença de pressão diminui por um fator 2. Da mesma forma, se o valor da tensão superficial dobrar, ΔP aumenta por um fator 2. A análise dimensional não pode prever o valor da constante da Equação 3. Outras análises (ou *uma* experiência) revelam que a constante é igual a 4 (Capítulo 2).

EXEMPLO 7–8 Elevação em uma Asa

Alguns engenheiros aeronáuticos estão projetando um avião e desejam prever a força de sustentação produzida pelo seu novo projeto de asa (Figura 7–31). O comprimento da corda L_c da asa é 1,12 m, e sua **área projetada** A (a área vista do alto quando a asa está a um ângulo de ataque zero) é 10,7 m^2. O protótipo deve voar a V = 52,0 m/s, próximo ao solo, onde T = 25°C. Eles constroem um modelo em escala de um para dez da asa para testá-la em um túnel de vento pressurizado. O túnel de vento pode ser pressurizado até um máximo de 5 atm. Em que velocidade e pressão eles devem fazer funcionar o túnel de vento para atingir a similaridade dinâmica?

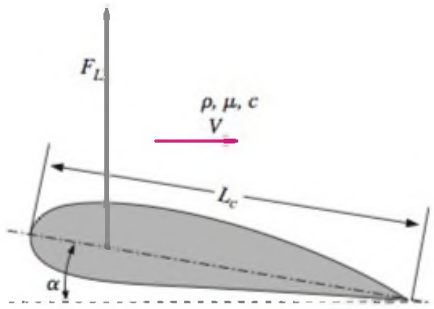


FIGURA 7–31
Força de sustentação em uma asa com comprimento de corda L_c a um ângulo de ataque α em um escoamento com velocidade de corrente livre de V com densidade ρ, viscosidade μ e velocidade do som c. O ângulo de ataque α é medido em relação à direção do escoamento de corrente livre.

SOLUÇÃO Devemos determinar a velocidade e a pressão nas quais o túnel de vento deve funcionar para atingir a similaridade dinâmica.

Hipótese 1 A asa protótipo voa através do ar à pressão atmosférica padrão. **2** O modelo é geometricamente similar ao protótipo.

Análise Em primeiro lugar, o método passo a passo das variáveis repetidas é empregado para obter os parâmetros adimensionais. Em seguida, os Π's dependentes do protótipo e do modelo são comparados.

Passo 1 Existem sete parâmetros (variáveis e constantes) neste problema; $n = 7$. Eles estão listados na forma funcional, com a variável dependente escrita como função dos parâmetros independentes:

Lista de parâmetros relevantes: $F_L = f(V, L_c, \rho, \mu, c, \alpha)$ $\quad n = 7$

onde F_L é a força de sustentação da asa, V é a velocidade do fluido, L_c é o comprimento da corda, ρ é a densidade do fluido, μ é a viscosidade do fluido, c é a velocidade do som no fluido e α é o ângulo de ataque da asa.

FIGURA 7–32
Com frequência, quando aplicamos o método das variáveis repetidas, a parte mais difícil do procedimento é escolher os parâmetros repetidos. Com a prática, porém, você aprenderá a selecionar esses parâmetros de forma sensata.

Passo 2 As dimensões primárias de cada parâmetro estão listadas; o ângulo α não tem dimensão:

F_L	V	L_c	ρ	μ	c	α
$\{m^1L^1t^{-2}\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{1\}$

Passo 3 Como primeira tentativa, tomamos j como 3, o número de dimensões primárias representadas no problema (m, L e t).

Redução: $j = 3$

Se esse valor de j estiver correto, o número esperado de Π's é $k = n - j = 7 - 3 = 4$.

Passo 4 Nós precisamos escolher três parâmetros repetidos, uma vez que $j = 3$. De acordo com os procedimentos da Tabela 7–3, não podemos escolher a variável dependente F_L. Nem podemos escolher α, uma vez que ele já não tem dimensão. Não podemos escolher V e c pois suas dimensões são idênticas. Não seria desejável fazer como que μ apareça em todos os Π's. A melhor opção de parâmetros repetidos é, portanto, V, L_c e ρ ou c, L_c, e ρ. Destes, a última é a melhor opção, pois a velocidade do som aparece apenas em um dos parâmetros adimensionais usuais da Tabela 7–5, enquanto a escala de velocidade é mais "comum" e aparece em diversos dos parâmetros (Figura 7–32).

Parâmetros repetidos: V, L_c, e ρ

Passo 5 O Π dependente é gerado:

$$\Pi_1 = F_L V^{a_1} L_c^{b_1} \rho^{c_1} \quad \rightarrow \quad \{\Pi_1\} = \{(m^1L^1t^{-2})(L^1t^{-1})^{a_1}(L^1)^{b_1}(m^1L^{-3})^{c_1}\}$$

Os expoentes são calculados forçando o Π a ser adimensional (a álgebra não é mostrada). Obtemos $a_1 = -2$, $b_1 = -2$ e $c_1 = -1$. Assim, o Π dependente é

$$\Pi_1 = \frac{F_L}{\rho V^2 L_c^2}$$

Da Tabela 7–5, o parâmetro adimensional usual mais semelhante ao nosso Π_1 é o **coeficiente de sustentação**, definido em termos da área projetada A, e não do quadrado do comprimento da corda, e com um fator no denominador. Assim, podemos manipular esse Π de acordo com as orientações listadas na Tabela 7–4 como a seguir:

Π_1 *modificado*: $\Pi_{1,\text{ modificado}} = \dfrac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \text{coeficiente de sustentação} = C_L$

Da mesma forma, o primeiro Π independente é gerado.

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} L_c^{b_2} \rho^{c_2} \quad \rightarrow \quad \{\Pi_2\} = \{(m^1L^{-1}t^{-1})(L^1t^{-1})^{a_2}(L^1)^{b_2}(m^1L^{-3})^{c_2}\}$$

de onde $a_2 = -1$, $b_2 = -1$ e $c_2 = -1$, e, portanto,

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V L_c}$$

Reconhecemos esse Π como o inverso do número de Reynolds. Desse modo, após a inversão

Π_2 *modificado*: $\Pi_{2,\text{ modificado}} = \dfrac{\rho V L_c}{\mu} = \text{número de Reynolds} = \text{Re}$

O terceiro Π é formado com a velocidade do som, e os detalhes você deve fazer por conta própria. O resultado é

$$\Pi_3 = \frac{V}{c} = \text{número de Mach} = \text{Ma}$$

Finalmente, como o ângulo de ataque α já é adimensional, esse é um grupo de Π adimensional por si só (Figura 7–33). Tente fazer as contas; você descobrirá que todos os expoentes são zero e, portanto,

$$\Pi_4 = \alpha = \text{ângulo de ataque}$$

Passo 6 Escrevemos a relação funcional final como

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = f(\text{Re}, \text{Ma}, \alpha) \qquad (1)$$

Para atingir a similaridade dinâmica, a Equação 7–12 exige que todos os três parâmetros adimensionais dependentes na Equação 1 coincidam entre o modelo e o protótipo. Embora seja trivial fazer que o ângulo de ataque coincida, não é tão simples fazer com que o número de Reynolds e o número de Mach coincidam simultaneamente. Por exemplo, se o túnel de vento funcionasse à mesma temperatura e pressão do protótipo, de forma que ρ, μ, e c do ar que escoa sobre o modelo fosse igual ρ, μ, e c do ar que escoa sobre o protótipo, a similaridade do número de Reynolds seria atingida ajustando a velocidade do ar no túnel de vento dez vezes a velocidade do ar no protótipo (uma vez que o modelo está na escala dez para um). Mas, nesse caso, os números de Mach seriam diferentes por um fator 10. A 25°C, c é aproximadamente 346 m/s e o número de Mach do protótipo de asa de avião é Ma_p = 52,0/346 = 0,150 — subsônico. Na velocidade necessária no túnel de vento, Ma_m seria 1,50 — supersônico! Sem dúvida isso é inaceitável, uma vez que a física do escoamento varia dramaticamente das condições subsônicas para as supersônicas. No outro extremo, se igualássemos os números de Mach, o número de Reynolds do modelo seria dez vezes menor.

O que devemos fazer? Uma regra comum é que para os números de Mach menores do que cerca de 0,3, como felizmente é o caso aqui, os efeitos da compressibilidade são praticamente desprezíveis. Assim, não é preciso coincidir exatamente o número de Mach. Em vez disso, já que Ma_m é mantido abaixo de cerca de 0,3, a similaridade dinâmica aproximada pode ser atingida pela coincidência do número de Reynolds. Agora o problema muda para como coincidir o Re e manter um número de Mach baixo. É nesse ponto que entra o recurso de pressurização do túnel de vento. A temperatura constante, a densidade é proporcional à pressão, enquanto a viscosidade e velocidade do som são funções muito fracas da pressão. Se a pressão do túnel de vento pudesse ser bombeada até dez atm, poderíamos executar o teste do modelo na mesma velocidade do protótipo e atingir uma coincidência quase perfeita para Re e Ma. Entretanto, na pressão máxima no túnel de vento de 5 atm, a velocidade necessária no túnel de vento seria o dobro da do protótipo, ou 104 m/s. O número de Mach do modelo no túnel de vento, portanto, seria Ma_m = 104/346 = 0,301 — aproximadamente no limite da incompressibilidade, de acordo com nossa regra prática. Em resumo, o túnel de vento deveria funcionar a aproximadamente **100 m/s, 6 atm** e **25°C.**

Discussão Este exemplo ilustra uma das limitações (frustrantes) da análise dimensional: *em um teste de modelo nem sempre é possível coincidir todos os* Π*'s dependentes simultaneamente.* É preciso fazer concessões nas quais apenas os Π'*s* mais importantes são igualados. Em muitas situações práticas da mecânica dos fluidos, o número de Reynolds não é crítico para a similaridade dinâmica, desde que o Re seja suficientemente alto. Se o número de Mach do protótipo fosse significativamente maior do que cerca de 0,3, nós deveríamos igualar precisamente o número de Mach em vez do número de Reynolds, para garantir resultados razoáveis. Além disso, se um gás diferente fosse usado para testar o modelo, também precisaríamos igualar a razão de calor específico (k), uma vez que o comportamento do escoamento compressível depende fortemente de k (Capítulo 12). Discutiremos esses problemas de teste de modelo com mais detalhes na Seção 7–5.

Voltamos aos Exemplos 7–5 e 7–6. Lembra-se que a velocidade do ar no automóvel protótipo é de 50,0 mi/h, e que a velocidade no túnel de vento é 224 mi/h. A 25°C, isso corresponde a um número de Mach do protótipo de Ma_p = 0,065 e a 5°C o número de Mach do túnel de vento é 0,29 — na fronteira do limite incompressível. *A posteriori,* percebemos que deveríamos ter incluído a velocidade do som em nossa análise dimensional, o que teria gerado o número de Mach como um Π adicional. Outra forma de igualar o número de Reynolds e manter o número de Mach baixo seria usar um *líquido* como a água, pois os líquidos são quase incompressíveis, mesmo a velocidades relativamente altas.

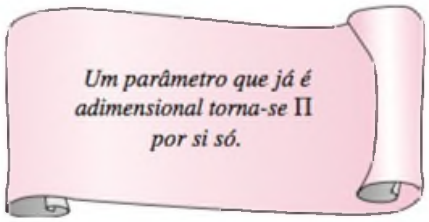


FIGURA 7–33
Um parâmetro adimensional (como um ângulo) já é um Π adimensional por si só — nós conhecemos esse Π sem realizar outros cálculos.

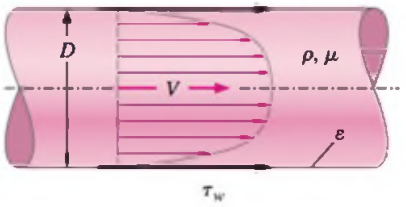


FIGURA 7–34
O atrito na parede interna de um tubo. A tensão de cisalhamento τ_w sobre as paredes do tubo é uma função da velocidade média do fluido V, da altura média da rugosidade da parede ε, da densidade do fluido ρ, da viscosidade do fluido μ e do diâmetro interno do tubo D.

EXEMPLO 7–9 Atrito em um Tubo

Considere o escoamento de um fluido incompressível de densidade ρ e viscosidade μ através de uma seção longa e horizontal de um tubo redondo com diâmetro D. O perfil de velocidade é representado na Figura 7–34; V é a velocidade média na seção transversal do tubo, que, por conservação de massa, permanece constante em todo o tubo. Para um tubo muito longo, o escoamento finalmente torna-se **completamente desenvolvido**, o que significa que o perfil de velocidade também permanece uniforme ao longo do tubo. Devido às forças de atrito entre o fluido e a parede do tubo, existe uma tensão de cisalhamento τ_w na parede interna do tubo de acordo com a representação esquemática. A tensão de cisalhamento também é constante na região totalmente desenvolvida do tubo. Consideremos uma certa altura média constante para a rugosidade ε ao longo da parede interna do tubo. Na verdade, o único parâmetro que *não* é constante em todo o comprimento do tubo é a pressão, a qual deve diminuir (linearmente) ao longo do tubo para "empurrar" o fluido através do tubo e superar o atrito. Desenvolva uma relação adimensional entre a tensão de cisalhamento τ_w e os outros parâmetros do problema.

SOLUÇÃO Devemos gerar uma relação adimensional entre a tensão de cisalhamento e os outros parâmetros.

Hipótese **1** O escoamento é completamente desenvolvido. **2** O fluido é incompressível. **3** Nenhum outro parâmetro é significativo para o problema.

Análise O método passo a passo das variáveis repetidas é empregado para obter os parâmetros adimensionais.

Passo 1 Existem seis variáveis e constantes neste problema; $n = 6$. Elas estão listadas na forma funcional, com a variável dependente listada como função das variáveis e constantes independentes:

Lista de parâmetros relevantes: $\tau_w = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D)$ $\quad n = 6$

Passo 2 As dimensões primárias de cada parâmetro estão listadas. Observe que a tensão de cisalhamento é uma força por unidade de área e, portanto, tem as mesmas dimensões da pressão.

τ_w	V	ε	ρ	μ	D
$\{m^1L^{-1}t^{-2}\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$	$\{L^1\}$

Passo 3 Como primeira tentativa, j é definido como 3, o número de dimensões primárias representadas no problema (m, L e t).

Redução: $\quad j = 3$

Se esse valor de j estiver correto, o número esperado de Π's é $k = n - j = 6 - 3 = 3$.

Passo 4 Nós escolhemos três parâmetros repetidos, uma vez que $j = 3$. De acordo com as orientações da Tabela 7–3, não podemos escolher a variável dependente τ_w. Não podemos escolher ε e D, pois suas dimensões são idênticas, e não seria desejável ter μ ou ε aparecendo em todos os Π's. A melhor opção de parâmetros repetidos é, portanto, V, D, e ρ.

Parâmetros repetidos: $\quad V, D, \text{e } \rho$

Passo 5 O Π dependente é gerado:

$$\Pi_1 = \tau_w V^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} \quad \rightarrow \quad \{\Pi_1\} = \{(m^1L^{-1}t^{-2})(L^1t^{-1})^{a_1}(L^1)^{b_1}(m^1L^{-3})^{c_1}\}$$

de onde $a_1 = -2$, $b_1 = 0$ e $c_1 = -1$. Assim, o Π dependente é

$$\Pi_1 = \frac{\tau_w}{\rho V^2}$$

Da Tabela 7–5, o parâmetro adimensional usual mais semelhante a esse Π_1 é o **fator de atrito de Darcy**, definido com um fator 8 no numerador (Figura 7–35).

Assim, podemos manipular esse Π de acordo com os procedimentos listados na Tabela 7–4 como a seguir:

Π_1 *modificado*: $\Pi_{1,\text{modificado}} = \dfrac{8\tau_w}{\rho V^2} = \text{fator de atrito de Darcy} = f$

Da mesma forma, dois Π's independentes são gerados, e seus detalhes ficam a cargo do leitor:

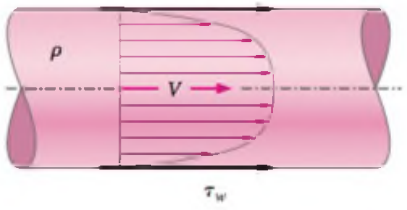
$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2} \quad \rightarrow \quad \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{número de Reynolds} = \text{Re}$$

$$\Pi_3 = \varepsilon V^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3} \quad \rightarrow \quad \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \text{taxa de rugosidade}$$

Passo 6 Escrevemos a relação funcional final como

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \qquad (1)$$

Discussão O resultado se aplica ao escoamento de tubo completamente desenvolvido laminar e turbulento; acontece, porém, que o segundo Π independente (taxa de rugosidade ε/D) não é tão importante no escoamento laminar quanto no escoamento turbulento no tubo. Esse problema apresenta uma conexão interessante entre a similaridade geométrica e a análise dimensional. É preciso igualar ε/D, uma vez que esse é um Π independente do problema. Sob uma perspectiva diferente, pensando na rugosidade como uma propriedade geométrica, é preciso igualar ε/D para garantir a *similaridade geométrica* entre os dois tubos.



Fator de atrito de Darcy: $f = \dfrac{8\tau_w}{\rho V^2}$

Fator de atrito de Fanning: $C_f = \dfrac{2\tau_w}{\rho V^2}$

FIGURA 7–35
Embora o *fator de atrito de Darcy* para escoamentos de tubo seja mais comum, você deve testar uma alternativa, o fator de atrito menos comum chamado *fator de atrito de Fanning*. A relação entre os dois é $f = 4C_f$.

Para verificarmos a validade da Equação 1 do Exemplo 7–9, usamos a **dinâmica de fluidos computacional (CFD)** para prever os perfis de velocidade e os valores da tensão de cisalhamento das paredes para dois escoamentos fisicamente diferentes em tubos diferentes, mas que são dinamicamente semelhantes:

- ***Ar*** a 300 K escoando a uma velocidade média de 14,5 pés/s através de um tubo com diâmetro interno de 1,00 pé e altura média da rugosidade de 0,0010 pé.
- ***Água*** a 300 K escoando a uma velocidade média de 3,09 m/s através de um tubo com diâmetro interno de 0,0300 m e altura média da rugosidade de 0,030 mm.

Claramente os dois tubos são geometricamente semelhantes, uma vez que ambos são tubos redondos. Eles têm a mesma taxa de rugosidade média ($\varepsilon/D = 0{,}0010$ em ambos os casos). Nós escolhemos cuidadosamente os valores da velocidade média e do diâmetro para que os dois escoamentos também sejam *dinamicamente* semelhantes. Especificamente, o outro Π independente (o número de Reynolds) também coincide nos dois escoamentos.

$$\text{Re}_{ar} = \frac{\rho_{ar} V_{ar} D_{ar}}{\mu_{ar}} = \frac{(1{,}225\ \text{kg/m}^3)(14{,}5\ \text{pés/s})(1{,}00\ \text{pé})}{1{,}789 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} \left(\frac{0{,}3048\ \text{m}}{\text{pé}}\right)^2 = 9{,}22 \times 10^4$$

onde as propriedades do fluido são aquelas incorporadas ao código CFD e

$$\text{Re}_{\text{água}} = \frac{\rho_{\text{água}} V_{\text{água}} D_{\text{água}}}{\mu_{\text{água}}} = \frac{(998{,}2\ \text{kg/m}^3)(3{,}09\ \text{m/s})(0{,}0300\ \text{m})}{0{,}001003\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 9{,}22 \times 10^4$$

Assim, de acordo coma Equação 7–12, esperamos que os Π's *dependentes* devam coincidir também nos dois escoamentos. Geramos uma malha computacional para cada um dos dois escoamentos e usamos um código CFD comercial para gerar o perfil de velocidade, por meio do qual a tensão de cisalhamento é calculada. Os perfis de velocidade médios no tempo, turbulentos e completamente desenvolvidos, próximos às extremidades de ambos os tubos são comparados. Embora os tubos

TABELA 7–6

Comparação entre a tensão de cisalhamento de parede e a tensão de cisalhamento de parede adimensionalizada para o escoamento completamente desenvolvido através de um tubo de ar e através de um tubo de água como prevê a DFC*

Parâmetro	Escoamento de Ar	Escoamento de Água
Tensão de cisalhamento de parede	$\tau_{w,\,ar} = 0{,}0557\ \text{N/m}^2$	$\tau_{w,\,water} = 22{,}2\ \text{N/m}^2$
Tensão de cisalhamento de parede adimensional (fator de atrito de Darcy)	$f_{ar} = \dfrac{8\tau_{w,\,ar}}{\rho_{ar} V_{ar}^2} = 0{,}0186$	$f_{água} = \dfrac{8\tau_{w,\,água}}{\rho_{água} V_{água}^2} = 0{,}0186$

*Dados obtidos com o FLUENT usando o modelo padrão de turbulência k-ε com funções de parede.

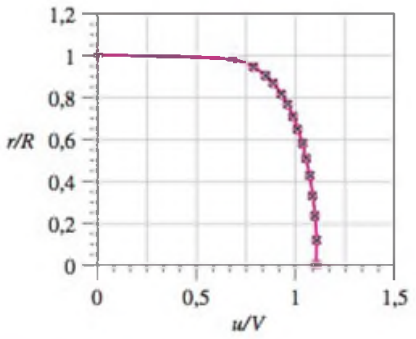


FIGURA 7–36
Perfis de velocidade axial normalizada para escoamento completamente desenvolvido através de um tubo como prevê a CFD; os perfis de ar (círculos) e água (cruzes) são mostrados no mesmo gráfico.

tenham diâmetros diferentes e os fluidos sejam bastante diferentes, as formas do perfil de velocidade são bastante semelhantes. Na verdade, quando traçamos o gráfico da velocidade axial *normalizada* (u/V) como função do raio *normalizado* (r/R), descobrimos que os dois perfis ficam um sobre o outro (Figura 7–36).

A tensão de cisalhamento da parede também é calculada com os resultados da CFD de cada escoamento, e uma comparação entre eles é mostrada na Tabela 7–6. Existem vários motivos pelos quais a tensão de cisalhamento no tubo de água constitui ordens de grandeza maior do que aquela do tubo de ar. A água é 800 vezes mais densa do que o ar e mais de 50 vezes mais viscosa. Além disso, a tensão de cisalhamento é proporcional ao *gradiente* de velocidade, e o diâmetro do tubo de água é menor do que um décimo daquele do tubo de ar, levando a gradientes de velocidade maiores. Entretanto, em termos da tensão de cisalhamento de parede *adimensionalizado*, f, a Tabela 7–6 mostra que os resultados são idênticos, devido à semelhança dinâmica entre os dois escoamentos. Observe que embora os valores sejam registrados até três algarismos significativos, a confiabilidade dos modelos de turbulência na CFD é exata no máximo até dois algarismos significativos (Capítulo 15).

7–5 ▪ TESTES EXPERIMENTAIS E SEMELHANÇA INCOMPLETA

Uma das aplicações mais úteis da análise dimensional está no projeto de experiências físicas e/ou numéricas, e no relatório dos resultados dessas experiências. Nesta seção discutimos ambas aplicações, e destacamos situações nas quais a semelhança dinâmica completa não pode ser atingida.

Configuração de uma Experiência e Correlação dos Dados Experimentais

Como um exemplo genérico, considere um problema no qual existem cinco parâmetros originais (um deles é o parâmetro *dependente*). Um conjunto completo de experiência (chamado matriz de teste de **fatorial completo**) é realizado pelo teste de todas as combinações possíveis de vários níveis de cada um dos quatro parâmetros independentes. Um teste fatorial completo com cinco níveis de cada um dos quatro parâmetros independentes exigiria $5^4 = 625$ experiências. Embora as técnicas de projeto experimental (matrizes de teste de **fatorial fracional**; Montgomery, 1996) possam reduzir significativamente o tamanho da matriz de teste, o número de experiências necessárias ainda seria grande. Entretanto, considerando que as três dimensões primárias estão representadas no problema, podemos reduzir o número de parâmetros de cinco para dois ($k = 5 - 3 = 2$ grupos de Π adimensionais) e o número de parâmetros *independentes* de quatro para um. Assim, para a mesma resolução (cinco níveis testados para cada parâmetro independente), nós precisaríamos realizar um total de apenas $5^1 = 5$ experiências. Não é preciso ser um

gênio para perceber que a substituição de 625 experiências por 5 experiências é econômica. Você pode ver por que é mais sensato executar uma análise dimensional *antes* de realizar uma experiência.

Continuando nossa discussão desse exemplo genérico (um problema com dois Π's), depois que as experiências estão concluídas, traçamos o parâmetro dependente adimensional (Π_1) como uma função do parâmetro independente adimensional (Π_2) como na Figura 7–37. Em seguida, determinamos a forma funcional da relação, realizando uma **análise de regressão** nos dados. Com sorte, os dados podem se correlacionar linearmente. Caso contrário, podemos tentar uma regressão linear nas coordenadas log-linear ou log-log, um ajuste da curva polinomial etc. para estabelecer uma relação aproximada entre os dois Π's. Consulte Homan (2001) para obter os detalhes sobre as técnicas de ajuste de curvas.

Se houver mais de dois Π's no problema (por exemplo, um problema com três ou quatro Π's), precisamos configurar uma matriz de teste para determinar a relação entre os Π's dependentes e os Π's independentes. Em muitos casos descobrimos que um ou mais de Π's dependentes têm efeitos desprezíveis e podem ser removidos da lista de parâmetros adimensionais necessários.

Como vimos (Exemplo 7–7), a análise dimensional às vezes produz apenas *um* Π. Em um problema de um Π, conhecemos a forma da relação entre os parâmetros originais a menos de alguma constante desconhecida. Em tal caso, apenas *uma* experiência é necessária para determinar aquela constante.

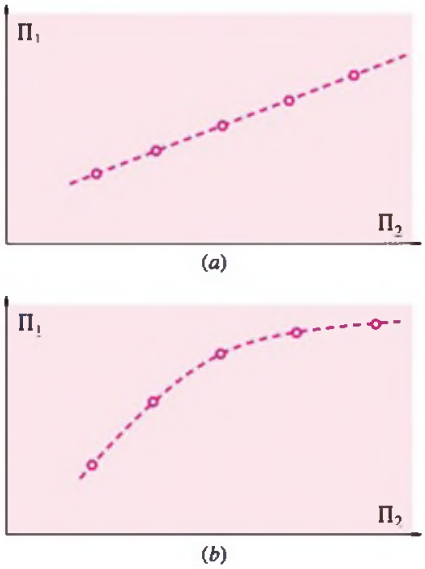


FIGURA 7–37
Para um problema com dois Π's, traçamos o parâmetro dependente adimensional (Π_1) como função do parâmetro independente adimensional (Π_2). O gráfico resultante pode ser (*a*) linear ou (*b*) não linear. Em ambos os casos, as técnicas de regressão e ajuste de curva estão disponíveis para determinar a relação entre os Π's.

Semelhança Incompleta

Mostramos vários exemplos nos quais os grupos Π's adimensionais são facilmente obtidos com papel e lápis através do uso direto do método das variáveis repetidas. Na verdade, após prática suficiente, você deveria ser capaz de obter os Π's com facilidade — às vezes "de cabeça ou no verso de um envelope". Infelizmente, a história é muito diferente quando aplicamos os resultados de nossa análise dimensional aos dados experimentais. O problema é que nem sempre é possível igualar *todos* os Π's de um modelo com os Π's correspondentes do protótipo, mesmo que tenhamos cuidado para atingir a semelhança geométrica. Essa situação é chamada de **semelhança incompleta**. Felizmente, em alguns casos de semelhança incompleta, ainda podemos extrapolar os testes do modelo para obter previsões em escala total razoáveis.

Teste no Túnel de Vento

Ilustramos a semelhança incompleta com o problema da medição da força de arrasto aerodinâmico em uma carreta modelo em um túnel de vento (Figura 7–38). Suponhamos que compramos um modelo de ferro fundido em escala um para dezesseis de uma carreta (18 rodas). O modelo é geometricamente semelhante ao protótipo — mesmo nos detalhes como espelhos laterais, pára-lamas etc. A carreta modelo tem 0,991 m de comprimento, correspondendo a um comprimento de 15,9 m para o protótipo completo. A carreta modelo deve ser testada em um túnel de vento que tem velocidade máxima de 70 m/s. A seção de teste do túnel de vento tem 1,0 m de altura e 1,2 m de largura — suficientemente grande para acomodar o modelo sem precisar se preocupar com a interferência das paredes ou os efeitos de bloqueio. O ar no túnel de vento está a mesma temperatura e pressão do ar que escoa ao redor do protótipo. Queremos simular o escoamento a V_p = 60 mi/h (26,8 m/s) na carreta protótipo em escala real.

A primeira coisa que fazemos é igualar os números de Reynolds,

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \mathrm{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

o que fornece a velocidade necessária, V_m, no túnel de vento para os testes do modelo,

$$V_m = V_p\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{L_p}{L_m}\right) = (26{,}8\ \text{m/s})(1)(1)\left(\frac{16}{1}\right) = 429\ \text{m/s}$$

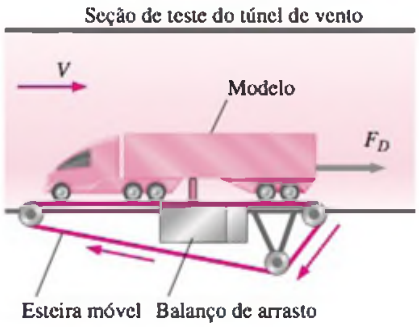


FIGURA 7–38
A medição do arrasto aerodinâmico de uma carreta modelo em um túnel de vento equipado com *balanço de arrasto* e plano de solo com *esteira móvel*.

Assim, para igualar o número de Reynolds do modelo e do protótipo, o túnel de vento deve funcionar a 429 m/s (até três algarismos significativos). Obviamente temos um problema, uma vez que essa velocidade é mais do que seis vezes maior do que a velocidade máxima que pode ser atingida no túnel de vento. Além disso, mesmo se *pudéssemos* fazer funcionar o túnel de vento com aquela velocidade, o escoamento seria *supersônico*, uma vez que a velocidade do som no ar à temperatura ambiente é de cerca de 346 m/s. Enquanto o número de Mach da carreta protótipo que se move no ar é de 26,8/335 = 0,080, o número de Mach do ar no túnel de vento, que se move sobre o modelo, seria de 429/335 = 1,28 (se o túnel de vento pudesse funcionar tão rápido assim).

Obviamente não é possível igualar o número de Reynolds do modelo com o do protótipo com esse modelo e instalação de túnel de vento. O que devemos fazer? Existem várias opções:

FIGURA 7–39
O túnel de vento para testes em escala real de Langley (LFST) é suficientemente grande para testar veículos em escala total.
Courtesia do NASA Langley Research Center.

- Se tivéssemos um túnel de vento maior, poderíamos testar um modelo maior. Os fabricantes de automóveis em geral testam com automóveis modelos em escala de 3 para 8 e caminhões e ônibus modelo em escala de 1 para 8 em túneis de vento muito grandes. Alguns túneis de vento são até mesmo suficientemente grandes para testes de automóveis em escala real (Figura 7–39). Como você deve imaginar, porém, quanto maior o túnel de vento e o modelo, mais caros serão os testes. Também devemos tomar cuidado para que o modelo não seja grande demais para o túnel de vento. Uma regra prática útil é que o **bloqueio** (a relação entre a área frontal do modelo e a área de seção transversal da seção de teste) seja menor do que 7,5%. Caso contrário, as paredes do túnel de vento afetarão adversamente a semelhança geométrica e cinemática.
- Poderíamos usar um fluido diferente para os testes de modelo. Por exemplo, os túneis de água podem atingir números de Reynolds maiores do que os túneis de vento de mesmo tamanho, mas sua construção e operação é muito mais cara.
- Poderíamos pressurizar o túnel de vento e/ou ajustar a temperatura do ar para aumentar a capacidade máxima do número de Reynolds. Embora essas técnicas ajudem, o aumento do número de Reynolds é limitado.
- Se tudo o mais falhar, podemos fazer funcionar o túnel de vento em diversas velocidades próximas à velocidade máxima e, em seguida, extrapolar nossos resultados até o número de Reynolds em escala total.

Felizmente, para muitos testes em túnel de vento essa última opção é viável. Embora o coeficiente de arrasto C_D depende somente do número de Reynolds para valores baixos para Re, quase sempre C_D se torna constante para um Re acima de determinado valor. Em outras palavras, para escoamento em muitos objetos, particularmente objetos "enganosos" como caminhões, prédios etc., o escoamento é **independente do número de Reynolds** acima de um valor limite para Re (Figura 7–40), em geral quando a camada limite e a esteira são ambas totalmente turbulentas.

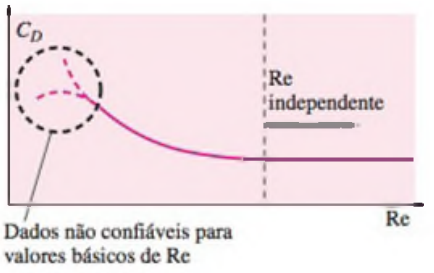


FIGURA 7–40
Para muitos objetos, os níveis do coeficiente de arrasto se tornam constantes para números de Reynolds acima de um valor limite. Essa situação é chamada de *independência do número de Reynolds*. Ela nos permite extrapolar para números de Reynolds do protótipo que estão fora do alcance de nossas instalações experimentais.

EXEMPLO 7–10 Medições no Túnel de Vento para a Carreta Modelo

Uma carreta modelo em escala 1 para 16 (18 rodas) é testada em um túnel de vento representado na Figura 7–38. A carreta modelo tem 0,991 m de comprimento, 0,257 m de altura e 0,159 m de largura. Durante os testes, a velocidade da esteira de solo móvel é ajustada para que sempre coincida com a velocidade do ar que se move na seção de teste. A força de arrasto aerodinâmico F_D é medida como função da velocidade do túnel de vento; os resultados experimentais estão listados na Tabela 7–7. Represente graficamente o coeficiente de arrasto C_D como função do número de Reynolds Re, onde a área usada para o cálculo de C_D é a área frontal da carreta modelo (a área que você vê ao olhar o modelo a montante), e a escala de comprimento usada para o cálculo do Re é a largura de carreta W. Atingimos a semelhança dinâmica? Nós atingimos a independência do número de Reynolds em nosso teste do túnel de vento? Estime a

força de arrasto aerodinâmico sobre a carreta-protótipo que percorre a estrada a 26,8 m/s. Considere que o ar do túnel de vento e o ar que escoa sobre o automóvel protótipo estejam a 25°C e à pressão atmosférica padrão.

SOLUÇÃO Devemos calcular e traçar C_D como função do Re para determinado conjunto de medições no túnel de vento e determinar se a semelhança dinâmica e/ou a independência do número de Reynolds foram atingidos. Finalmente, devemos estimar a força de arrasto aerodinâmica que age sobre a carreta protótipo.

Hipóteses **1** A carreta modelo é geometricamente semelhante à carreta protótipo. **2** O arrasto aerodinâmico dos suportes que prendem a carreta modelo é desprezível.

Propriedades Para o ar à pressão atmosférica e $T = 25°C$, $\rho = 1{,}184\ \text{kg/m}^3$ e $\mu = 1.849 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}$.

Análise Calculamos C_D e Re para o último ponto listado na Tabela 7–7 (à velocidade mais rápida do túnel de vento),

$$C_{D,m} = \frac{F_{D,m}}{\frac{1}{2}\rho_m V_m^2 A_m} = \frac{89{,}9\ \text{N}}{\frac{1}{2}(1{,}184\ \text{kg/m}^3)(70\ \text{m/s})^2(0{,}159\ \text{m})(0{,}257\ \text{m})}\left(\frac{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right)$$

$$= 0{,}758$$

e

$$\text{Re}_m = \frac{\rho_m V_m W_m}{\mu_m} = \frac{(1{,}184\ \text{kg/m}^3)(70\ \text{m/s})(0{,}159\ \text{m})}{1{,}849 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 7{,}13 \times 10^5 \qquad (1)$$

Repetimos esses cálculos para todos os pontos de dados da Tabela 7–7 e traçamos C_D *versus* Re na Figura 7–41.

Atingimos a semelhança dinâmica? Bem, temos semelhança *geométrica* entre o modelo e o protótipo, mas o número de Reynolds da carreta protótipo é

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_p V_p W_p}{\mu_p} = \frac{(1{,}184\ \text{kg/m}^3)(26{,}8\ \text{m/s})\,[16(0{,}159\ \text{m})]}{1{,}849 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 4{,}37 \times 10^6 \qquad (2)$$

onde a largura do protótipo é especificada como 16 vezes a largura do modelo. A comparação das Equações 1 e 2 revela que o número de Reynolds do protótipo é mais do que seis vezes maior do que aquele do modelo. Como não podemos igualar os Π's independentes do problema, a **semelhança dinâmica não foi atingida.**

Nós atingimos a independência do número de Reynolds? Na Figura 7–41 vemos que a **independência do número de Reynolds sem dúvida foi atingida** — para Re maior do que cerca de 5×10^5, o C_D nivelou-se no valor de cerca de 0,76 (até dois algarismos significativos).

Como atingimos a independência de número de Reynolds, podemos extrapolar até o protótipo em escala real, considerando que C_D permanece constante com o aumento do Re até aquele do protótipo em escala real.

Arrasto aerodinâmico previsto para o protótipo:

$$F_{D,p} = \frac{1}{2}\rho_p V_p^2 A_p C_{D,p}$$

$$= \frac{1}{2}(1{,}184\ \text{kg/m}^3)(26{,}8\ \text{m/s})^2[16^2(0{,}159\ \text{m})(0{,}257\ \text{m})](0{,}76)\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{3400\ N}$$

Discussão Nós damos nosso resultado final até dois algarismos significativos. Mais do que isso não se justifica. Como sempre, devemos tomar cuidado ao fazer uma extrapolação, uma vez que não temos garantias de que os resultados extrapolados estejam corretos.

TABELA 7–7

Dados do túnel de vento: força de arrasto aerodinâmica em uma carreta modelo como função da velocidade no túnel de vento

V, m/s	F_D, N
20	12,4
25	19,0
30	22,1
35	29,0
40	34,3
45	39,9
50	47,2
55	55,5
60	66,0
65	77,6
70	89,9

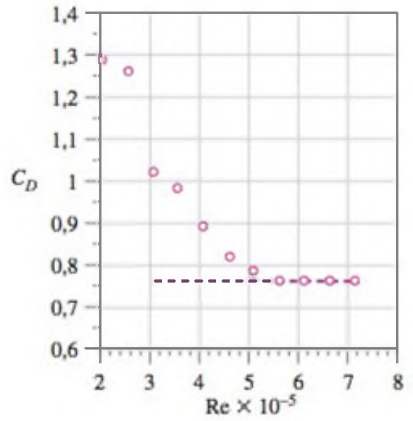


FIGURA 7–41
Coeficiente de arrasto aerodinâmico como função do número de Reynolds. Os valores são calculados por meio dos dados de teste no túnel de vento em uma carreta modelo (Tabela 7–7).

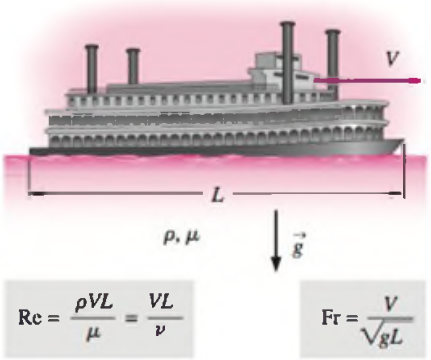


FIGURA 7–42
Em muitos escoamentos que envolvem um líquido com uma superfície livre, o número de Reynolds e o número de Froude são parâmetros adimensionais relevantes. Como nem sempre é possível igualar o Re e o Fr do modelo e do protótipo, às vezes somos forçados a aceitar a semelhança incompleta.

Escoamentos com Superfícies Livres

No caso de testes de modelos de escoamentos com superfícies livres (barcos e navios, inundações, escoamentos de rios, aquedutos, vertedouros de barragens de hidrelétricas, interação entre ondas e cais, erosão do solo etc.), surgem complicações que evitam a completa semelhança entre o modelo e o protótipo. Por exemplo, se um rio modelo é construído para estudo das inundações, o modelo quase sempre é centenas de vezes menor do que o protótipo devido às limitações de espaço no laboratório. Se as dimensões verticais do modelo estivessem em escala, a profundidade do rio modelo seria tão pequena que os efeitos da tensão superficial (e o número de Weber) se tornariam importantes, e talvez até dominassem o escoamento do modelo, embora os efeitos da tensão superficial sejam desprezíveis no escoamento do protótipo. Além disso, embora o escoamento do rio real possa ser turbulento, o escoamento do rio modelo pode ser laminar, particularmente se a inclinação do leito do rio é geometricamente semelhante àquela do protótipo. Para evitar esses problemas, os pesquisadores usam um **modelo distorcido** no qual a escala vertical do modelo (por exemplo, a profundidade do rio) é exagerada em comparação à escala horizontal do modelo (por exemplo, a largura do rio). Além disso, a inclinação do leito do rio modelo quase sempre é feita de forma proporcionalmente mais inclinada do que aquela do protótipo. Essas modificações resultam em similaridade incompleta devido à falta de semelhança geométrica. Os testes de modelo ainda são úteis nessas circunstâncias, mas outros truques (como deliberadamente tornar as superfícies do modelo mais rugosas) e correções e correlações empíricas se fazem necessários para colocar apropriadamente os dados do modelo em escala.

Em muitos problemas práticos que envolvem superfícies livres, o número de Reynolds e o número de Froude aparecem como grupos de Π's de mesma relevância para a análise dimensional (Figura 7–42). É difícil (quase sempre impossível) igualar esses dois parâmetros adimensionais simultaneamente. Para um escoamento com superfície livre com escala de comprimento L, escala de velocidade V e viscosidade cinemática ν, o número de Reynolds é igualado entre modelo e protótipo quando

$$\mathrm{Re}_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p} = \mathrm{Re}_m = \frac{V_m L_m}{\nu_m} \tag{7–21}$$

O número de Froude é comparado entre modelo e protótipo quando

$$\mathrm{Fr}_p = \frac{V_p}{\sqrt{gL_p}} = \mathrm{Fr}_m = \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}} \tag{7–22}$$

Para igualarmos ambos, Re e Fr, solucionamos as Equações 7–21 e 7–22 simultaneamente para determinar o fator de escala de comprimento necessário L_m/L_p,

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p}\frac{V_p}{V_m} = \left(\frac{V_m}{V_p}\right)^2 \tag{7–23}$$

Eliminando a relação V_m/V_p da Equação 7–23, vemos que

Razão necessária de viscosidades cinemáticas para igualar ambos Re e Fr:

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2} \tag{7–24}$$

Assim, para garantirmos a semelhança completa (supondo que a semelhança geométrica é possível sem os efeitos indesejados da tensão superficial discutidos anteriormente), precisaríamos usar um líquido cuja viscosidade cinemática satisfizesse a Equação 7–24. Embora às vezes seja possível encontrar um líquido apropriado para uso no modelo, na maioria dos casos isso não é prático nem possível, como ilustra o Exemplo 7–11.

FIGURA 7–43
Um modelo em escala 1:100 construído para investigar as condições de navegação na abordagem da comporta inferior para uma distância de 2 milhas a jusante do dique. O modelo inclui uma versão em escala do vertedouro, da casa de força e da comporta existente. Além da navegação, o modelo foi usado para avaliar as questões ambientais associadas ao novo dique e às realocações necessárias da estrada de ferro e pontes da rodovia. A vista aqui mostra a jusante, na direção do dique e da comporta. Nessa escala, 52,8 pés do modelo representam 1 milha no protótipo. Uma caminhonete, em segundo plano, dá uma idéia da escala do modelo.
Foto cortesia dos Engenheiros do Exército dos EUA, Nashville.

EXEMPLO 7–11 Comporta e Rio Modelo

No final dos anos 90 os Engenheiros do Exército dos EUA projetaram uma experiência para modelar o escoamento do Rio Tennessee a jusante da Comporta e Dique do Kentucky (Figura 7–43). Devido às restrições de espaço no laboratório, eles construíram um modelo em escala com um fator de escala de comprimento de $L_m/L_p = 1/100$. Sugira um líquido que seria apropriado para a experiência.

SOLUÇÃO Devemos sugerir um líquido para usar em uma experiência envolvendo um modelo em escala 1 para 100 de um dique, uma comporta e um rio.

Hipóteses 1 O modelo é geometricamente semelhante ao protótipo. **2** O rio modelo é suficientemente profundo para que os efeitos da tensão superficial não sejam significativos.

Propriedades Para a água à pressão atmosférica e $T = 20°C$, a viscosidade cinemática do protótipo é $\nu_p = 1{,}002 \times 10^{-6}\ m^2/s$.

Análise Na Equação 7–24,

Viscosidade cinemática necessária para o líquido modelo:

$$\nu_m = \nu_p\left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2} = (1{,}002 \times 10^{-6}\ m^2/s)\left(\frac{1}{100}\right)^{3/2} = 1{,}00 \times 10^{-9}\ m^2/s \qquad (1)$$

Assim, precisamos encontrar um líquido que tenha uma viscosidade $1{,}00 \times 10^{-9}\ m^2/s$. Uma rápida olhada nos apêndices não nos fornece esse líquido. A água quente tem uma viscosidade cinemática mais baixa do que a água fria, mas apenas por um fator 3. O mercúrio líquido tem uma viscosidade cinemática muito pequena, mas ela é da ordem de $10^{-7}\ m^2/s$ — ainda duas ordens de grandeza acima da Equação 1. Mesmo que o mercúrio líquido funcionasse, ele seria caro e perigoso demais para ser usado em tal teste. O que devemos fazer? A conclusão é de que *não podemos igualar o número de Froude e o número de Reynolds neste teste de modelo.* Em outras palavras, neste caso é impossível atingir a semelhança completa entre o modelo e o protótipo. Em vez disso, fazemos o melhor possível em condições de semelhança incompleta. Em geral, a água é usada em tais testes, por conveniência.

Discussão Para este tipo de experimento, a coincidência do número de Froude é mais crítica do que a coincidência do número de Reynolds. Como já discutimos antes para o teste no túnel de vento, a independência do número de Reynolds é atingida para valores suficientemente altos de Re. Mesmo que não seja possível atingirmos a independência do número de Reynolds, podemos extrapolar nosso número de Reynolds baixo para os dados do modelo e prever o comportamento do número de Reynolds em escala real (Figura 7–44). Um nível de confiança alto no uso desse tipo de extrapolação vem apenas após muitas experiências em laboratório com problemas semelhantes.

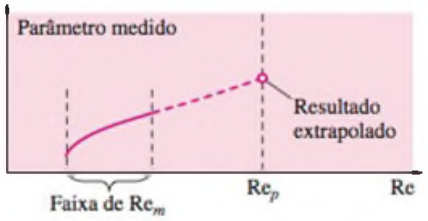


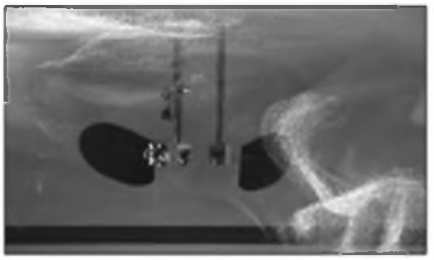
FIGURA 7–44
Em muitas experiências que envolvem superfícies livres, não podemos igualar ambos: o número de Froude e o número de Reynolds. Entretanto, podemos *extrapolar* os dados do teste de modelo com Re baixo para prever o comportamento do protótipo com Re alto.

Ao fechar esta seção sobre experiências e semelhança incompleta, mencionamos a importância da semelhança na produção dos filmes de Hollywood nos quais os modelos de barcos, trens, aviões, prédios, monstros e outros explodem ou são queimados. Os produtores de cinema devem prestar atenção à semelhança dinâmica para fazer com que os incêndios e explosões em pequena escala pareçam o mais realista possível. Você deve se lembrar de alguns filmes de orçamento menor nos quais os efeitos especiais não são muito convincentes. Na maioria dos casos isso se deve à falta de similaridade dinâmica entre o modelo pequeno e o protótipo em escala real. Se o número de Froude e/ou o número de Reynolds do modelo diferir muito daqueles do protótipo, os efeitos especiais não ficam bons, mesmo para um olho não treinado. Da próxima vez que assistir a um filme, fique alerta para a semelhança incompleta!

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Como uma Mosca Voa

Autor Convidado: Michael Dickinson,
Instituto de Tecnologia da Califórnia

(*a*)



(*b*)

FIGURA 7–45
(*a*) A mosca de fruta, *Drosophila melanogaster*, bate suas minúsculas asas para frente e para trás 200 vezes por segundo, criando uma imagem borrada do plano da batida. (*b*) O modelo escalonado dinamicamente, a *mosca robô*, bate suas asas uma vez a cada cinco s em duas toneladas de óleo mineral. Os sensores na base das asas registram forças aerodinâmicas, enquanto finas bolhas são usadas para visualizar o escoamento. O tamanho e a velocidade do robô, bem como as propriedades do óleo, foram escolhidos cuidadosamente para coincidir com o número de Reynolds de uma mosca real.

Uma aplicação interessante da análise dimensional é o estudo de como os insetos voam. O tamanho reduzido e a velocidade da asa de um inseto, como de uma minúscula mosca de fruta, dificultam a medição das forças ou a visualização do movimenta do ar criado diretamente pelas asas da mosca. Entretanto, usando princípios da análise dimensional, é possível estudar a aerodinâmica do inseto em uma escala maior, movendo o modelo lentamente — um robô mecânico. As forças criadas por uma mosca flutuando e pelo robô batendo as asas são dinamicamente semelhantes quando o número de Reynolds é igual em ambos os casos. Para uma asa batendo, o Re é calculado como $2\Phi RL_c\omega/\nu$, onde Φ é a amplitude angular da batida da asa, R é o comprimento da asa, L_c é a largura média da asa (comprimento da corda), ω é a freqüência angular da batida e ν é a viscosidade cinemática do fluido em torno da asa. Uma mosca de fruta bate suas asas de 2,5 mm de comprimento e 0,7 mm de largura 200 vezes por segundo em uma batida de 2,8 rad no ar, com viscosidade cinemática de $1{,}5 \times 10^{-5}$ m^2/s. O número de Reynolds resultante é de aproximadamente 130. Selecionando o óleo mineral com viscosidade cinemática de $1{,}15 \times 10^{-4}$ m^2/s, é possível igualar esse número de Reynolds com o de mosca robô que é cem vezes maior, batendo suas asas mais de 1000 vezes mais devagar! Se a mosca não está fixa, mas se move através do ar, é preciso comparar outro parâmetro adimensional para garantir semelhança dinâmica, a freqüência reduzida, $\sigma = 2\Phi R\omega/V$, que mede a razão entre a velocidade da batida da ponta da asa ($2\Phi R\omega$) e a velocidade de avanço do corpo (V). Para simular o vôo para a frente, um conjunto de motores reboca a *mosca robô* por meio de seu tanque de óleo a uma velocidade em uma escala apropriada.

Os robôs dinamicamente em escala ajudaram a mostrar que os insetos usam uma variedade de diferentes mecanismos para produzir forças à medida que voam. Durante cada batida para a frente e para trás, as asas do inseto percorrem altos ângulos de ataque, gerando um vórtice de bordo de ataque proeminente. A baixa pressão desse grande vórtice empurra as asas para cima. Os insetos podem aumentar ainda mais a força do vórtice de bordo de ataque girando as asas ao final de cada batida. Após a asa mudar de direção, esta também pode gerar forças quando passar rapidamente através da esteira gerada pela batida de asa anterior.

A Figura 7–45*a* mostra uma mosca real batendo suas asas, e a Figura 7–45*b* mostra a *mosca robô* batendo suas asas. Devido à escala maior de comprimento e à escala menor de tempo do modelo, as medições e as visualizações de escoamento são possíveis. As experiências com insetos modelo em escala dinamica-

mente continuam a ensinar os pesquisadores como os insetos manipulam o movimento da asa para direcionar e manobrar.

Referências

Dickinson, M. H., Lehmann, F.-O. e Sane, S. "Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight", *Science*, 284, p. 1954, 1999.

Dickinson, M. H. "Solving the mystery of insect flight", *Scientific American*, 284, n. 6, p. 35-41, junho de 2001.

Fry, S. N., Sayaman, R. e Dickinson, M. H. "The aerodynamics of free-flight maneuvers in *Drosophila*", *Science*, 300, p. 495-498, 2003.

RESUMO

Existe uma diferença entre *dimensões* e *unidades;* uma *dimensão* é uma medida de uma quantidade física (sem valores numéricos), enquanto uma *unidade* é uma forma de atribuir um número àquela dimensão. Existem sete *dimensões primárias* — não apenas na mecânica dos fluidos, mas em todos os campos da ciência e da engenharia. São elas a massa, o comprimento, o tempo, a temperatura, a corrente elétrica, a quantidade de luz e a quantidade de matéria. *Todas as outras dimensões podem ser formadas pela combinação dessas sete dimensões primárias.*

Todas as equações matemáticas devem ser *dimensionalmente homogêneas;* esse princípio fundamental pode se aplicar às equações para adimensionalizá-las e para identificar os *grupos adimensionais,* também chamados de *parâmetros adimensionais.* Uma ferramenta poderosa para reduzir o número de parâmetros independentes necessários em um problema é chamada de *análise dimensional.* O *método das variáveis repetidas* é um procedimento passo a passo para encontrar os parâmetros adimensionais, ou os Π's, com base apenas nas dimensões das variáveis e nas constantes do problema. Os seis passos do método das variáveis repetidas estão resumidos aqui.

Passo 1 Liste os n parâmetros (variáveis e constantes) do problema.

Passo 2 Liste as dimensões primárias de cada parâmetro.

Passo 3 Descubra a *redução* j, que em geral é igual ao número de dimensões primárias do problema. Se a análise não funcionar reduza j em um e tente novamente. O número esperado de Π's (k) é igual a n menos j.

Passo 4 Selecione com critério os j *parâmetros repetidos* para a construção dos Π's.

Passo 5 Gere os k Π's um de cada vez, agrupando os j parâmetros repetidos com cada uma das variáveis ou constantes restantes, forçando o produto a ser adimensional, e manipulando os Π's para chegar nos parâmetros adimensionais usuais.

Passo 6 Verifique seus cálculos e escreva a relação funcional final.

Quando todos os grupos adimensionais de um modelo e de um protótipo coincidem, a *semelhança dinâmica* é atingida e podemos prever diretamente o desempenho do protótipo com base nas experiências do modelo. Entretanto, nem sempre é possível igualar *todos* os grupos de Π's ao tentar atingir a similaridade entre um modelo e um protótipo. Nesses casos, executamos os testes de modelo sob condições de *semelhança incompleta,* comparando os grupos de Π's mais importantes da melhor forma possível e, em seguida, extrapolamos os resultados do teste do modelo para as condições do protótipo.

Usamos os conceitos apresentados neste capítulo em todo o restante do livro. Por exemplo, a análise dimensional é aplicada aos escoamentos completamente desenvolvidos em tubos no Capítulo 8 (fatores de atrito, coeficientes de perda etc.). No Capítulo 10, normalizamos as equações diferenciais do escoamento de fluidos deduzidas no Capítulo 9, produzindo vários parâmetros adimensionais. Os coeficientes de arrasto e de sustentação são muito usados no Capítulo 11 e os parâmetros adimensionais também aparecem nos capítulos sobre escoamento compressível e escoamento de canal aberto (Capítulos 12 e 13). Aprenderemos no Capítulo 14 que a semelhança dinâmica quase sempre é a base do projeto e teste das bombas e turbinas. Finalmente, os parâmetros adimensionais também serão usados nos cálculos computacionais dos escoamentos de fluido (Capítulo 15).

REFERÊNCIAS E SUGESTÕES DE LEITURA

1. D. C. Montgomery. *Design and Analysis of Experiments*, 4. ed. Nova Iorque: Wiley, 1996.

2. J. P. Holman. *Experimental Methods for Engineers*, 7. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2001.

PROBLEMAS*

Dimensões e Unidades, Dimensões Primárias

7–1C Qual é a diferença entre uma *dimensão* e uma *unidade*? Dê três exemplos de cada uma.

7–2C Ao executar uma análise dimensional, uma das primeiras etapas é listar as dimensões primárias de cada parâmetro relevante. É bom ter uma tabela de parâmetros e suas dimensões primárias. Nós iniciamos essa tabela para você (Tabela P7-2C), na qual incluímos alguns dos parâmetros básicos normalmente encontrados na mecânica dos fluidos. Ao fazer os problemas deste capítulo, adicione os resultados a essa tabela. Você poderá criar uma tabela com dezenas de parâmetros.

TABELA P7–2C

Nome do Parâmetro	Símbolo do Parâmetro	Dimensões Primárias
Aceleração	a	L^1t^{-2}
Ângulo	θ, ϕ etc.	1 (nenhuma)
Densidade	ρ	m^1L^{-3}
Força	F	$m^1L^1t^{-2}$
Freqüência	f	t^{-1}
Pressão	P	$m^1L^{-1}t^{-2}$
Tensão superficial	σ_s	m^1t^{-2}
Velocidade	V	L^1t^{-1}
Viscosidade	μ	$m^1L^{-1}t^{-1}$
Vazão em volume	$\dot{V}$	L^3t^{-1}

7–3C Liste as *sete dimensões primárias*. O que há de significativo nessas sete dimensões?

7–4 Escreva as dimensões primárias da *constante universal dos gases ideais*, R_u. (Sugestão: use a *lei dos gases ideais*, $PV = nR_uT$, onde P é pressão, V é volume, T é a temperatura absoluta e n é o número de moles do gás.) *Resposta:* $\{m^1L^2t^{-2}T^{-1}N^{-1}\}$

7–5 Em uma tabela periódica dos elementos, a massa molar (M), também chamada *peso atômico*, quase sempre é listada como se fosse uma quantidade adimensional (Figura P7–5). Na verdade, o peso atômico é a massa de 1 mol do elemento. Por exemplo, o peso atômico do nitrogênio $M_{\text{nitrogênio}} = 14{,}0067$. Interpretamos isso como 14,0067 g/mol do elemento nitrogênio, ou no sistema inglês, 14,0067 lbm/lbmol do elemento nitrogênio. Quais são as dimensões primárias do peso atômico?

6 C 12,011	7 N 14,0067	8 O 15,9994
14 Si 28,086	15 P 30,9738	16 S 32,060

FIGURA P7–5

7–6 Alguns autores preferem usar a *força* como a dimensão primária no lugar da massa. Em um problema típico de mecânica dos fluidos, então, as quatro dimensões primárias representadas m, L, t e T são substituídas por F, L, t e T. A dimensão primária da força neste sistema é {força} = {F}. Usando os resultados do Problema 7–4, reescreva as dimensões primárias da constante do gás universal neste sistema alternativo de dimensões primárias.

7–7 Definimos a *constante específica do gás ideal* $R_{\text{gás}}$ para um determinado gás como a relação entre a constante universal dos gases e a massa molar (também chamada *peso molecular*) do gás, $R_{\text{gás}} = R_u/M$. Para determinado gás, então, a lei dos gases ideais pode ser escrita da seguinte maneira:

$$PV = mR_{\text{gás}}T \qquad \text{ou} \qquad P = \rho R_{\text{gás}}T$$

onde P é a pressão, V é o volume, m é a massa, T é a temperatura absoluta e ρ é a densidade do gás particular. Quais são as dimensões primárias de $R_{\text{gás}}$? Para o ar R_{ar} =287,0 J/kg · K em unidades SI padrão. Verifique se essas unidades coincidem com o seu resultado.

7–8 O *torque* ($\vec{M}$) é formado pelo produto vetorial de um braço de momento ($\vec{r}$) e por uma força aplicada ($\vec{F}$), conforme representação na Figura P7–8. Quais são as dimensões primárias do torque? Liste suas unidades em unidades SI primárias e em unidades inglesas primárias.

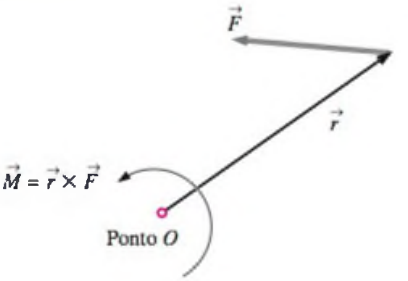


FIGURA P7–8

7–9 Escreva as dimensões primárias de cada uma das seguintes variáveis da área da termodinâmica, mostrando todo o seu trabalho: (*a*) energia E; (*b*) energia específica $e = E/m$; (*c*) potência $\dot{W}$. *Respostas:* (*a*) $\{m^1L^2t^{-2}\}$; (*b*) $\{L^2t^{-2}\}$; (*c*) $\{m^1L^2t^{-3}\}$

7–10 Quais são as dimensões primárias da voltagem elétrica (E)? (Sugestão: utilize o fato de que a energia elétrica é igual à voltagem vezes a corrente.)

7–11 Provavelmente você conhece a *lei de Ohm* dos circuitos elétricos (Figura P7–11), onde ΔE é a diferença de voltagem ou *potencial* no resistor, I é a corrente elétrica que passa através do resistor e R é a resistência elétrica. Quais são as dimensões primárias da resistência elétrica? *Resposta:* $\{m^1L^2t^{-3}I^{-2}\}$

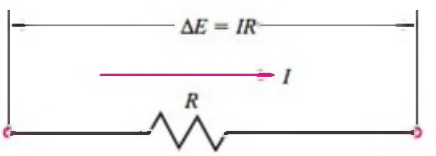


FIGURA P7–11

7–12 Escreva as dimensões primárias de cada uma das seguintes variáveis, mostrando todo o seu trabalho: (*a*) aceleração a; (*b*) velocidade angular ω; (*c*) aceleração angular α.

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

7–13 O *momento angular*, também chamado de *momento do momento* ($\vec{H}$), é formado pelo produto vetorial de um braço de momento ($\vec{r}$) e pelo momento linear ($m\vec{V}$) de uma partícula de fluido, conforme representação da Figura P7–13. Quais são as dimensões primárias do momento angular? Liste as unidades do momento angular em unidades SI primárias e em unidades inglesas. *Respostas:* $\{m^1L^2t^{-1}\}$, kg · m²/s, lbm · m²/s, lbm · ft²/s

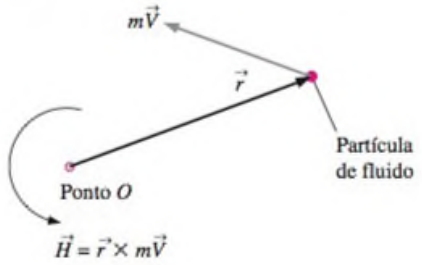


FIGURA P7–13

7–14 Escreva as dimensões primárias de cada uma das seguintes variáveis, mostrando todo o seu trabalho: (*a*) calor específico a pressão constante c_p; (*b*) peso específico ρg; (*c*) entalpia específica h.

7–15 A **condutividade térmica** k é uma medida da capacidade de um material de conduzir calor (Figura P7–15). Para a transferência de calor na direção x, através de uma superfície normal à direção x, a **lei da condução de calor de Fourier** é expressa como

$$\dot{Q}_{\text{condução}} = -kA\frac{dT}{dx}$$

onde $\dot{Q}_{\text{condução}}$ é a taxa de transferência de calor e A é a área normal à direção da transferência de calor. Determine as dimensões primárias da condutividade térmica (k). Procure um valor de k nos apêndices e verifique se suas unidades SI são consistentes com seu resultado. Em particular, escreva as unidades SI primárias de k.

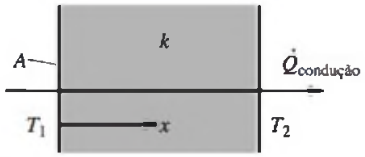


FIGURA P7–15

7–16 Escreva as dimensões primárias de cada uma das seguintes variáveis do estudo da transferência de calor por convecção (Figura P7–16), mostrando todo o seu trabalho: (*a*) taxa de geração de calor $\dot{g}$. (Dica: taxa de conversão da energia térmica por unidade de volume;) (*b*) fluxo de calor $\dot{q}$ (Sugestão: taxa de transferência de calor por unidade de área;) (*c*) coeficiente de transferência de calor h (Sugestão: fluxo de calor por unidade de diferença de temperatura.)

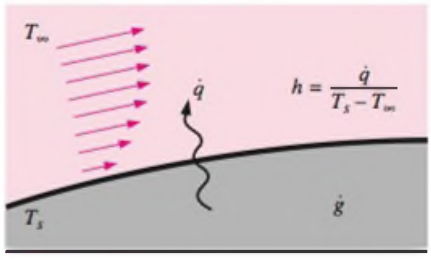


FIGURA P7–16

7–17 Percorra os apêndices do seu livro de termodinâmica e encontre três propriedades ou constantes não mencionadas nos Problemas 7–1 a 7–16. Liste o nome de cada propriedade ou constante e suas unidades SI. Em seguida, escreva as dimensões primárias de cada propriedade ou constante.

Homogeneidade Dimensional

7–18C Explique a *lei da homogeneidade dimensional* em termos simples.

7–19 No Capítulo 4 definimos a *aceleração material*, que é a aceleração quando acompanhamos uma partícula de fluido (Figura P7–19),

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

(*a*) Quais são as dimensões primárias do operador gradiente $\vec{\nabla}$? (*b*) Certifique-se de que cada termo aditivo da equação tenha as mesmas dimensões. *Respostas:* (*a*) $\{L^{-1}\}$; (*b*) $\{L^1t^{-2}\}$

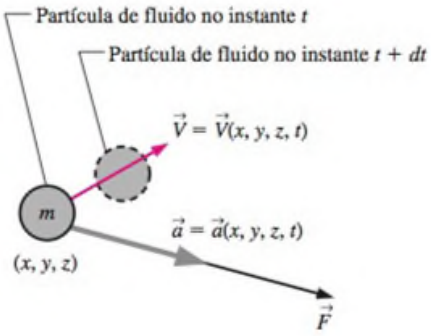


FIGURA P7–19

7–20 A Segunda Lei de Newton é a base da equação diferencial de conservação do momento linear (a ser discutida no Capítulo 9). Em termos da aceleração material acompanhando uma partícula de fluido (Figura P7–19), nós escrevemos a Segunda Lei de Newton da seguinte maneira:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}\right]$$

Ou então, dividindo ambos os lados pela massa m da partícula de fluido,

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Escreva as dimensões primárias de cada termo aditivo da equação e certifique-se de que a equação seja dimensionalmente homogênea. Mostre todo o seu trabalho.

7–21 No Capítulo 4 definimos a *taxa de deformação volumétrica* como a taxa do aumento de volume de um elemento fluido por unidade de volume (Figura P7–21). Em coordenadas cartesianas escrevemos a taxa de deformação volumétrica como

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Escreva as dimensões primárias de cada termo aditivo e verifique se a equação é dimensionalmente homogênea. Mostre todo o seu trabalho.

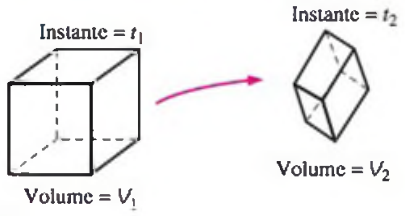


FIGURA P7–21

7–22 No Capítulo 9 discutiremos a equação diferencial para a conservação de massa, a *equação da continuidade*. Em coordenadas cilíndricas e para o escoamento em regime permanente

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Escreva as dimensões primárias de cada termo aditivo da equação e certifique-se de que a equação é dimensionalmente homogênea. Mostre todo o seu trabalho.

7–23 A água fria entra em um tubo, onde ela é aquecida por uma fonte de calor externa (Figura P7–23). As temperaturas de entrada e saída da água são T_e e T_s, respectivamente. A taxa total de transferência de calor $\dot{Q}$ da vizinhança para a água do tubo é

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T_s - T_e)$$

onde $\dot{m}$ é a taxa de escoamento de massa através do tubo e c_p é o calor específico da água. Escreva as dimensões primárias de cada termo aditivo da equação e certifique-se de que a equação é dimensionalmente homogênea. Mostre todo o seu trabalho.

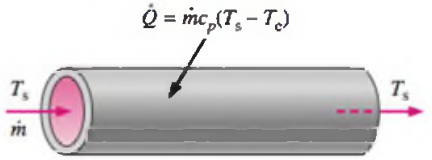


FIGURA P7–23

7–24 O *teorema de transporte de Reynolds* (TTR) é discutido no Capítulo 4. Para o caso geral de um volume de controle móvel e/ou deformável, escrevemos o TTR da seguinte maneira:

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b\, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA$$

onde $\vec{V}_r$ é a *velocidade relativa*, ou seja, a velocidade do fluido relativa à superfície de controle. Escreva as dimensões primárias de cada termo aditivo da equação e certifique-se de que a equação é dimensionalmente homogênea. Mostre todo o seu trabalho. (Sugestão: como B pode ser qualquer propriedade do escoamento — escalar, vetorial ou mesmo tensional — ele pode ter uma variedade de dimensões. Assim, basta deixar que as dimensões de B sejam aquelas do próprio B {B}. Da mesma forma, b é definido como B por unidade de massa.)

7–25 Uma aplicação importante da mecânica dos fluidos é o estudo da ventilação de uma sala. Em particular, suponhamos que há uma **fonte** S (massa por unidade de tempo) de poluição do ar em uma sala de volume V (Figura P7–25). Os exemplos incluem o monóxido de carbono da fumaça do cigarro ou um aquecedor à querosene sem ventilação, os gases como a amônia dos produtos de limpeza de uma casa e os vapores liberados pela evaporação dos **compostos orgânicos voláteis** (VOCs) de um contêiner aberto. Seja c a **concentração de massa** (a massa do contaminante por unidade de volume de ar). $\dot{V}$ é a vazão em volume de ar fresco que entra na sala. Se o ar da sala estiver bem misturado para que a concentração de massa c seja uniforme em toda a sala, mas varie com o tempo, a equação diferencial da concentração de massa na sala como função do tempo é

$$V\frac{dc}{dt} = S - \dot{V}c - cA_s k_w$$

onde k_w é um **coeficiente de adsorção** e A_s é a área da superfície das paredes, pisos, móveis etc. que absorvem parte do contaminante. Escreva as dimensões primárias dos três primeiros termos aditivos da equação, e certifique-se de que esses termos são dimensionalmente homogêneos. Em seguida, determine as dimensões de k_w. Mostre todo o seu trabalho.

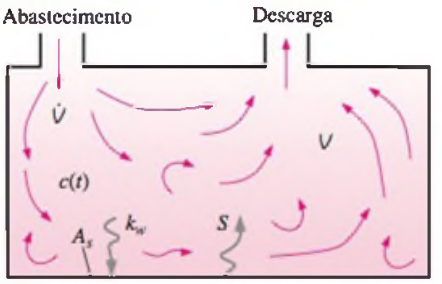


FIGURA P7–25

Adimensionalização das Equações

7–26C Qual é o motivo primário para a *adimensionalização* de uma equação?

7–27 Considere a ventilação de uma sala bem misturada como aquela da Figura P7–25. A equação diferencial da concentração de massa na sala como função do tempo é dada no Problema 7–25 e é repetida aqui por conveniência,

$$V\frac{dc}{dt} = S - \dot{V}c - cA_s k_w$$

Existem três parâmetros característicos em tal situação: L, uma escala de comprimento característica da sala (considere $L = V^{1/3}$); $\dot{V}$ a vazão em volume do ar fresco para a sala e c_{limite}, a concentração máxima de massa que não é prejudicial. (*a*) Usando esses três parâmetros característicos, defina as formas adimensionais de todas as variáveis da equação. (Sugestão: por exemplo, defina $c^* = c/c_{limite}$.) (*b*) Reescreva a equação na forma adimensional, e identifique todos os grupos usuais adimensionais que possam aparecer.

7–28 Você se lembra de que no Capítulo 4 viu que a taxa de deformação volumétrica é zero para um escoamento incompressível em regime permanente? Em coordenadas cartesianas expressamos isso como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Suponhamos que a velocidade e o comprimento característicos de determinado campo de escoamento sejam V e L, respectivamente (Figura P7–28). Defina as seguintes variáveis adimensionais,

$$x^* = \frac{x}{L},\quad y^* = \frac{y}{L},\quad z^* = \frac{z}{L},$$

$$u^* = \frac{u}{V},\quad v^* = \frac{v}{V}\quad \text{e}\quad w^* = \frac{w}{V}$$

Adimensionalize a equação e identifique todos os parâmetros adimensionais usuais (nomeados) que possam aparecer. Discuta.

FIGURA P7–28

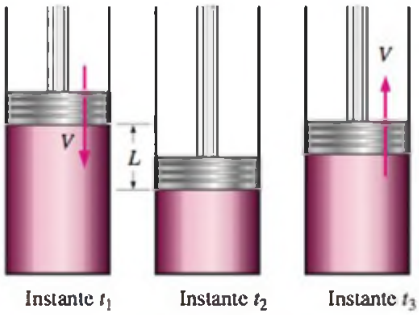
7–29 Em um campo de escoamento compressível oscilante a taxa de deformação volumétrica *não* é zero, mas varia com o tempo acompanhando uma partícula de fluido. Em coordenadas cartesianas expressamos isso como

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Suponhamos que a velocidade e o comprimento característicos de determinado campo de escoamento sejam V e L, respectivamente. Suponhamos também que f seja uma freqüência característica da oscilação (Figura P7–29). Defina as seguintes variáveis adimensionais,

$$t^* = ft, \quad V^* = \frac{V}{L^3}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L},$$
$$z^* = \frac{z}{L}, \quad u^* = \frac{u}{V}, \quad v^* = \frac{v}{V} \quad \text{e} \quad w^* = \frac{w}{V}$$

Adimensionalize a equação e identifique todos os parâmetros adimensionais usuais (nomeados) que possam aparecer.



f = freqüência de oscilação

FIGURA P7–29

7–30 No Capítulo 9 definiremos a **função de corrente** ψ para o escoamento incompressível bidimensional no plano xy

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

onde u e v são os componentes da velocidade nas direções x e y, respectivamente. (*a*) Quais são as dimensões primárias de ψ? (*b*) Suponha que determinado escoamento bidimensional tenha uma escala de comprimento característica L e uma escala de tempo característica t. Defina as formas adimensionais das variáveis x, y, u, v e ψ. (*c*) Reescreva as equações na forma adimensional e identifique todos os parâmetros adimensionais usuais que possam aparecer.

7–31 Em um campo de escoamento incompressível oscilante, a força por unidade de massa que age sobre uma partícula é obtida da Segunda Lei de Newton na forma intensiva (consulte o Problema 7–20),

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Suponhamos que a velocidade e o comprimento característicos de determinado campo de escoamento sejam V_∞ e L, respectivamente. Suponhamos também que ω seja uma freqüência angular característica (rad/s) da oscilação (Figura P7–31). Defina as seguintes variáveis adimensionalizadas,

$$t^* = \omega t, \quad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L}, \quad \vec{\nabla}^* = L\vec{\nabla} \quad \text{e} \quad \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V_\infty}$$

Como não foi dada nenhuma escala característica para a força por unidade de massa que age na partícula de fluido, nós escolhemos uma observando que $\{\vec{F}/m\} = \{L/t^2\}$. Ou seja, tomamos

$$(\vec{F}/m)^* = \frac{1}{\omega^2 L}\vec{F}/m$$

Adimensionalize a equação do movimento e identifique todos os parâmetros adimensionais usuais (nomeados) que possam aparecer.

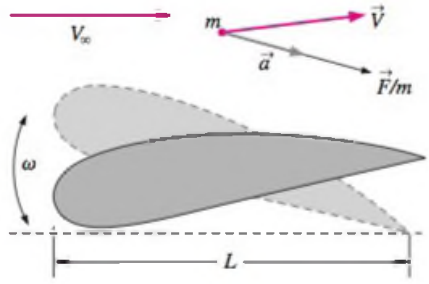


FIGURA P7–31

7–32 Um túnel de vento é usado para medir a distribuição da pressão no escoamento de ar sobre um modelo de avião (Figura P7–32). A velocidade do ar no túnel de vento é suficientemente baixa para que os efeitos compressíveis sejam desprezíveis. Conforme foi discutido no Capítulo 5, a aproximação pela equação de Bernoulli é válida em tal situação de escoamento, em toda parte, exceto muito próximo da superfície do corpo ou das superfícies da parede do túnel de vento e na região de esteira atrás do modelo. Longe do modelo o ar escoa à velocidade V_∞ e pressão P_∞ e a densidade do ar ρ é aproximadamente constante. Os efeitos gravitacionais geralmente são desprezíveis nos escoamentos de ar, de modo que escrevemos a equação de Bernoulli como

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

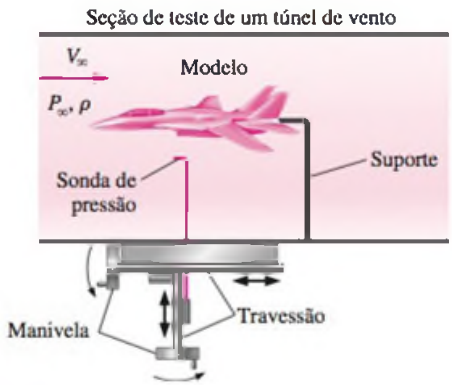


FIGURA P7–32

Adimensionalize a equação e gere uma expressão para o **coeficiente de pressão** C_p em quaquer ponto do escoamento, onde a equação de Bernoulli for válida. C_p é definido como

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

Resposta: $C_p = 1 - V/V_\infty^2$

Análise Dimensional e Similaridade

7–33C Liste as três finalidades primárias da análise dimensional.

7–34C Liste e descreva as três condições necessárias para a semelhança completa entre um modelo e um protótipo.

7–35 Uma equipe de alunos deve criar um submarino com energia humana para um concurso de projetos. O comprimento total do protótipo do submarino é de 2,24 m, e seus alunos projetistas esperam que ele possa viajar totalmente submerso através da água a 0,560 m/s. A água é doce (um lago) a $T = 15°C$. A equipe de projeto constrói um modelo em escala 1 para 8 para ser testado no túnel de vento de sua universidade (Figura P7–35). Um anteparo cerca o suporte do balanço de arrasto para que o arrasto aerodinâmico do próprio suporte não influencie o arrasto medido. O ar no túnel de vento está a 25°C e a uma pressão atmosférica padrão. Com que velocidade do ar eles precisam fazer o túnel de vento funcionar para atingir a semelhança?
Resposta: 61,4 m/s

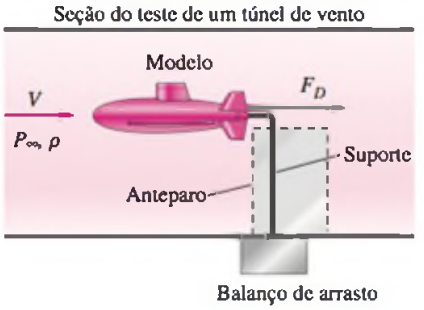


FIGURA P7–35

7–36 Repita o Problema 7–35 com todas as condições, exceto que a única instalação disponível para os alunos é um túnel de vento muito menor. Seu submarino modelo é um modelo em escala 1 para 24, em vez de um modelo em escala 1 para 8. Com que velocidade do ar eles precisam fazer o túnel de vento funcionar para atingir a semelhança? Você notou algo perturbador ou suspeito no seu resultado? Discuta.

7–37 Alguns túneis de vento são *pressurizados*. Discuta por que uma instalação de pesquisa se daria ao trabalho e incorreria nas despesas extras necessárias para pressurizar um túnel de vento. Se a pressão do ar no túnel aumentar por um fator 1,5, com todo o resto igual (mesma velocidade do vento, mesmo modelo etc.), por qual fator o número de Reynolds aumentaria?

7–38 Isso é uma continuação do Problema 7–35. Os alunos medem o arrasto aerodinâmico em seu submarino modelo no túnel de vento (Figura P7–35). Eles tomam cuidado para fazer o túnel de vento funcionar em condições que garantam a semelhança com o submarino protótipo. Sua força de arrasto medida é 2,3 N. Estime a força de arrasto sobre o submarino protótipo nas condições dadas no Problema 7–35.
Resposta: 10,3 N

7–39 Considere a situação comum na qual um pesquisador está tentando comparar o número de Reynolds de um grande veículo protótipo com aquele de um modelo em pequena escala em um túnel de vento. É melhor que o ar do túnel de vento esteja frio ou quente? Por quê? Justifique seu argumento comparando o ar do túnel de vento a 10°C e a 50°C, com todas as outras condições iguais.

7–40 Alguns alunos querem visualizar o escoamento em uma bola de beisebol girando. Seu laboratório de fluidos tem um bom túnel de água no qual eles podem injetar listras de tinta multicolorida. Assim, eles resolvem testar uma bola de beisebol girando no túnel de água (Figura P7–40). A semelhança exige que comparem o número de Reynolds e o número de Strouhal entre o modelo do teste e a bola de beisebol real que se move através do ar a 80 mi/h e gira a 300 rpm. Tanto o ar quanto a água estão a 20°C. A qual velocidade eles devem fazer a água correr no túnel de água, e a quantas rotações por minuto devem girar a bola de beisebol?
Respostas: 5.30 mi/h, 19.9 rpm

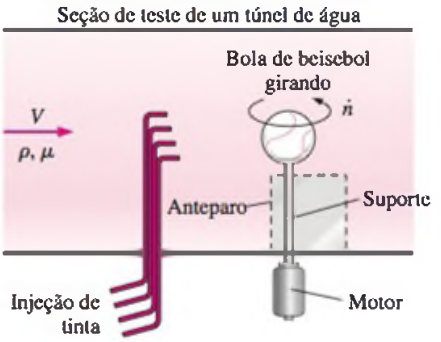


FIGURA P7–40

Parâmetros Adimensionais e o Método das Variáveis Repetidas

7–41 Usando as dimensões primárias, verifique se o número de Arquimedes (Tabela 7–5) é mesmo adimensional.

7–42 Usando as dimensões primárias, verifique se o número de Grashof (Tabela 7–5) é mesmo adimensional.

7–43 Usando as dimensões primárias, verifique se o número de Rayleigh (Tabela 7–5) é mesmo adimensional. Qual outro parâmetro adimensional usual é formado pela razão entre Ra e Gr?
Resposta: o número de Prandtl

7–44 Considere um líquido em um contêiner cilíndrico no qual tanto o contêiner quanto o líquido giram como um corpo rígido (rotação de corpo sólido). A diferença de elevação h entre o centro da superfície líquida e a borda da superfície líquida é uma função da velocidade angular ω, da densidade do fluido ρ, da aceleração gravitacional g e do raio R (Figura P7–44). Use o método das variáveis repetidas para encontrar uma relação adimensional entre os parâmetros. Mostre todo o seu trabalho.
Resposta: $h/R = f$ (Fr)

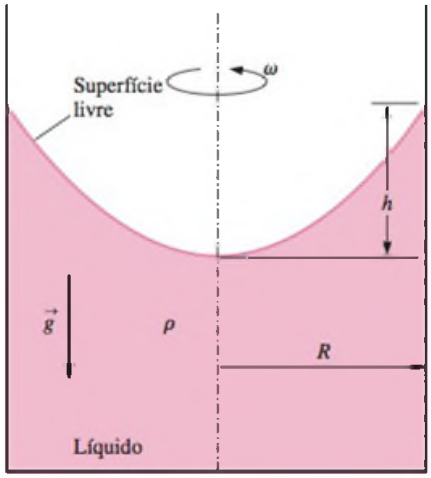


FIGURA P7–44

7–45 Considere o caso no qual o contêiner e o líquido do Problema 7–44 estão inicialmente em repouso. Em $t = 0$ o contêiner começa a girar. É preciso algum tempo para que o líquido gire como um corpo rígido e esperamos que a viscosidade do líquido seja um parâmetro adicional relevante no problema não permanente. Repita o Problema 7–44, mas com dois parâmetros independentes adicionais incluídos: a viscosidade do fluido μ e o tempo t. (Estamos interessados no desenvolvimento da altura h como função do tempo e dos outros parâmetros.)

7–46 Uma *esteira de vórtices periódicas de von Kármán* é formada quando uma corrente uniforme escoa sobre um cilindro circular (Figura P7–46). Use o método das variáveis repetidas para gerar uma relação adimensional para a freqüência de emissão de vórtices de Kármán f_k como função da velocidade da corrente livre V, da densidade do fluido ρ, da viscosidade do fluido μ e diâmetro do cilindro D. Mostre todo o seu trabalho.
Resposta: St = f (Re)

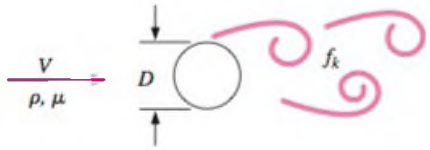


FIGURA P7–46

7–47 Repita o Problema 7–46, mas com um parâmetro independente adicional incluído: a velocidade do som c no fluido. Use o método das variáveis repetidas para gerar uma relação adimensional para a freqüência de emissão de vórtices de Kármán f_k como função da velocidade da corrente livre V, da densidade do fluido ρ, da viscosidade do fluido μ, do diâmetro do cilindro D e da velocidade do som c. Mostre todo o seu trabalho.

7–48 Um agitador é usado para misturar produtos químicos em um tanque grande (Figura P7–48). A potência de eixo $\dot{W}$ fornecida às lâminas do agitador é uma função do diâmetro do agitador D, da densidade do liquido ρ, da viscosidade do líquido μ e da velocidade angular ω das lâminas do agitador. Use o método das variáveis repetidas para gerar uma relação adimensional entre esses parâmetros. Mostre todo o seu trabalho e verifique se identificou seus grupos Π, modificando-os se necessário.
Respostas: N_p = f (Re)

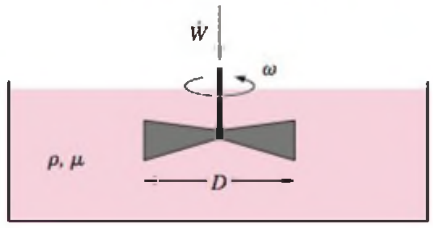


FIGURA P7–48

7–49 Repita o Problema 7–48, mas não assuma que o tanque é grande. Em vez disso, considere o diâmetro do tanque D_{tanque} e a profundidade média do líquido h_{tanque} como parâmetros adicionais relevantes.

7–50 Uma camada limite é uma região fina (em geral, ao longo de uma parede longa) na qual as forças viscosas são significativas e dentro da qual o escoamento é rotacional. Considere uma camada limite que cresce ao longo de uma placa plana fina (Figura P7–50). O escoamento é em regime permanente. A espessura da camada limite δ em qualquer distância x a jusante é uma função de x, da velocidade de corrente livre V_∞ e das propriedades do fluido ρ (densidade) e μ (viscosidade). Use o método das variáveis repetidas para gerar uma relação adimensional para δ como função dos outros parâmetros. Mostre todo o seu trabalho.

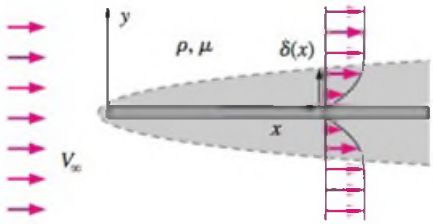


FIGURA P7–50

7–51 Miguel está trabalhando em um problema que tem uma escala de comprimento característica L, uma velocidade característica V, uma diferença de densidade característica $\Delta\rho$, uma densidade ρ (média) característica e, obviamente, a constante gravitacional g, que está sempre disponível. Ele quer definir um número de Richardson, mas não tem uma vazão em volume característica. Ajude Miguel a definir uma vazão em volume característica com base nos parâmetros disponíveis e, em seguida, defina um número de Richardson apropriado em termos dos parâmetros dados.

7–52 Considere o **escoamento de Couette** completamente desenvolvido — o escoamento entre duas placas paralelas infinitas separadas pela distância h, com a placa superior se movendo e a placa inferior fixa, como ilustra a Figura P7–52. O escoamento é em regime permanente incompressível e bidimensional no plano xy. Use o método das variáveis repetidas para gerar uma relação adimensional para a componente x da velocidade do fluido u como função da viscosidade do fluido μ, da velocidade da placa superior V, da distância h, da densidade do fluido ρ e da distância y. Mostre todo o seu trabalho. *Resposta:* u/V = f (Re, y/h)

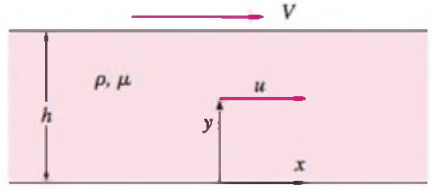


FIGURA P7–52

7–53 Considere o *desenvolvimento* do escoamento de Couette — o mesmo escoamento do Problema 7–52, exceto que o escoamento ainda não é em regime permanente, mas está se desenvolvendo com o tempo. Em outras palavras, o tempo t é um parâmetro adicional do problema. Gere uma relação adimensional entre todas as variáveis.

7–54 Sabe-se que a velocidade do som c em um gás ideal é uma função da razão entre os calores específicos k, da temperatura absoluta T e da constante específica do gás ideal $R_{gás}$ (Figura P7–54). Mostrando todo o seu trabalho, use a análise dimensional para encontrar a relação funcional entre esses parâmetros.

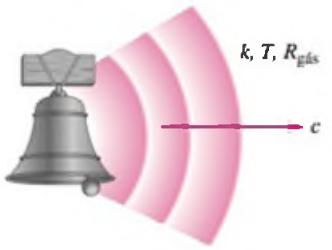


FIGURA P7–54

7–55 Repita o Problema 7–54, exceto que a velocidade do som c em um gás ideal é considerada uma função da temperatura absoluta T, da constante universal dos gases ideais R_u, da massa molar (peso molecular) M do gás e da razão dos calores específicos k. Mostrando todo o seu trabalho, use a análise dimensional para encontrar a relação funcional entre esses parâmetros.

7–56 Repita o Problema 7–54, exceto que a velocidade do som c em um gás ideal é considerada uma função apenas da temperatura absoluta T e da constante específica do gás ideal $R_{gás}$. Mostrando todo o seu trabalho, use a análise dimensional para encontrar a relação funcional entre esses parâmetros.

Respostas: $c/\sqrt{R_{gás}T}$ = constante

7–57 Repita o Problema 7–54, exceto que a velocidade do som c de um gás ideal é considerada uma função apenas da pressão P e da densidade do gás ρ. Mostrando todo o seu trabalho, use a análise dimensional para encontrar a relação funcional entre esses parâmetros. Certifique-se de que os seus resultados são consistentes com a equação da velocidade do som em um gás ideal, $c = \sqrt{kR_{gás}T}$.

7–58 Quando pequenas partículas de aerossol ou microorganismos se movem através do ar ou da água, o número de Reynolds é muito pequeno (Re << 1). Tais escoamentos são chamados de **escoamentos lentos**. O arrasto aerodinâmico de um objeto no escoamento lento é uma função apenas de sua velocidade V, de alguma escala de comprimento característica L do objeto e da viscosidade do fluido μ (Figura P7–58). Use a análise dimensional para gerar uma relação para F_D como função das variáveis independentes.

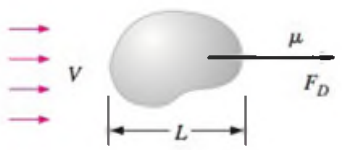


FIGURA P7–58

7–59 Uma pequena partícula de aerossol de densidade ρ_p e diâmetro característico D_p cai no ar de densidade ρ e viscosidade μ (Figura P7–59). Se a partícula for suficientemente pequena, a aproximação do escoamento lento é válida, e a velocidade terminal da partícula V depende apenas de D_p, μ, da constante gravitacional g e da diferença de densidade $(\rho_p - \rho)$. Use a análise dimensional para gerar uma relação para V como função das variáveis independentes. Cite todos os parâmetros adimensionais usuais que aparecem em sua análise.

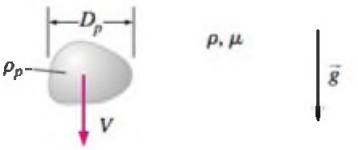


FIGURA P7–59

7–60 Combine os resultados dos Problemas 7–58 e 7–59 para gerar uma equação para a velocidade terminal V de um partícula de aerossol que cai no ar (Figura P7–59). Certifique-se de que o seu resultado é consistente com a relação funcional obtido no Problema 7–59. Por consistência, use a notação do Problema 7–59. (Sugestão: para uma partícula que cai com velocidade terminal constante, o peso total da partícula deve ser igual ao seu arrasto aerodinâmico. Seu resultado final deve ser uma equação para V que seja válida a menos de um fator constante desconhecido.)

7–61 Você precisará dos resultados do Problema 7–59 para resolver este problema. Uma minúscula partícula de aerossol cai com velocidade terminal constante V. O número de Reynolds é suficientemente pequeno para que a aproximação do escoamento lento seja válida. Se o tamanho da partícula dobrar, com todos os outros dados iguais, por qual fator a velocidade terminal se elevará? Se a diferença de densidades $(\rho_p - \rho)$ dobrar, com todos os outros dados iguais, por qual fator a velocidade terminal se elevará?

7–62 Um fluido incompressível de densidade ρ e viscosidade μ escoa a uma velocidade média V através de uma seção longa e horizontal de tubo redondo de comprimento L, diâmetro interno D e altura de rugosidade da parede interna ε (Figura P7–62). O tubo é suficientemente longo para que o escoamento seja completamente desenvolvido, significando que o perfil de velocidade não se altera ao longo do tubo. A pressão diminui (linearmente) ao longo do tubo para "empurrar" o fluido através do tubo e superar o atrito. Usando o método das variáveis repetidas, desenvolva uma relação adimensional entre a queda da pressão $\Delta P = P_1 - P_2$ e os outros parâmetros do problema. Verifique se modificou seus grupos Π adequadamente para chegar aos parâmetros adimensionais usuais e cite-os. (Sugestão: por questões de consistência, selecione D em vez de L ou ε como um de seus parâmetros repetidos.)

Resposta: Eu = f (Re, ε/D, L/D)

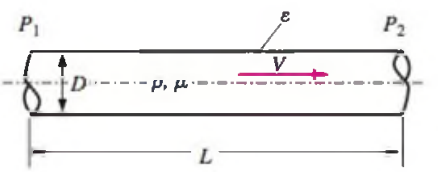


FIGURA P7–62

7–63 Considere o escoamento *laminar* através de uma seção longa do tubo, como na Figura P7–62. Para o escoamento laminar a rugosidade da parede não é um parâmetro relevante, a menos que ε seja muito grande. A vazão em volume $\dot{V}$ através do tubo é, na verdade, uma função do diâmetro do tubo D, da viscosidade do fluido μ e de um gradiente de pressão axial dP/dx. Se o diâmetro do tubo dobrar, com todas as outras condições iguais, por qual fator a vazão em volume aumentará? Use a análise dimensional.

7–64 A taxa de transferência de calor para a água que escoa em um tubo foi analisada no Problema 7–20. Vamos abordar esse mesmo problema, mas agora com a análise dimensional. A água fria entra em um tubo, onde ela é aquecida por uma fonte externa de calor (Figura P7–64). As temperaturas de entrada e saída da água são T_e e T_s, respectivamente. Sabe-se que a taxa total de transferência de calor $\dot{Q}$ da vizinhança para a água do tubo é uma função da vazão de massa $\dot{m}$, do calor específico c_p da água e da diferença de temperatura entre a água de entrada e de saída. Mostrando todo o seu trabalho, use a análise dimensional para encontrar a relação funcional entre esses parâmetros e a compare com a equação analítica dada no Problema 7–20. (Observação: estamos considerando que não conhecemos a equação analítica.)

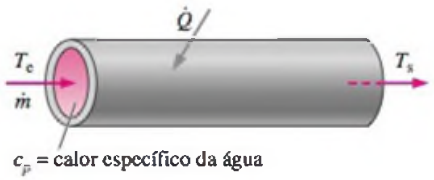


FIGURA P7–64

Teste Experimental e Semelhança Imcompleta

7–65C Defina o *bloqueio do túnel de vento*. Qual é a regra prática com relação ao bloqueio máximo aceitável para um teste de túnel de vento? Explique por que haveria erros de medição se o bloqueio fosse significativamente mais alto do que esse valor.

7–66C Qual é a regra prática sobre o limite do número de Mach para que a aproximação do escoamento incompressível seja razoável? Explique por que os resultados do túnel de vento estariam incorretos se essa regra prática fosse violada.

7–67C Embora em geral pensemos em um modelo como menor do que o protótipo, descreva pelo menos três situações nas quais é melhor que o modelo seja *maior* do que o protótipo.

7–68C Discuta a finalidade de uma esteira de solo móvel nos testes em túnel de vento do escoamento sobre automóveis modelo. Você consegue encontrar uma alternativa para a falta de uma esteira de solo?

7–69 Use a análise dimensional para mostrar que em um problema envolvendo ondas em água rasa (Figura P7–69), tanto o número de Froude quanto o número de Reynolds são parâmetros adimensionais relevantes. A velocidade c das ondas da superfície de um líquido é função da profundidade h, da aceleração gravitacional g, da densidade do fluido ρ e da viscosidade do fluido μ. Manipule seus Π's para obter os parâmetros na seguinte forma:

$$\text{Fr} = \frac{c}{\sqrt{gh}} = f(\text{Re}) \qquad \text{onde Re} = \frac{\rho c h}{\mu}$$

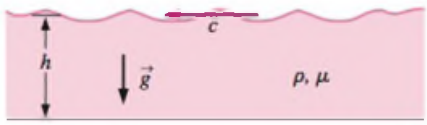


FIGURA P7–69

7–70 A água a 20°C escoa através de um tubo longo e reto. A queda de pressão é medida ao longo de uma seção do tubo de comprimento $L = 1{,}3$ m como função da velocidade média V no tubo (Tabela P7–70). O diâmetro interno do tubo é $D = 10{,}4$ cm. (*a*) Adimensionalize os dados e trace o número de Euler como uma função do número de Reynolds. A experiência foi executada a velocidades suficientemente altas para atingir a independência do número de Reynolds? (*b*) Extrapole os dados experimentais para prever a queda de pressão a uma velocidade média de 80 m/s. *Resposta:* 1.940.000 N/m²

TABELA P7–70

V, m/s	ΔP, N/m²
0,5	77,0
1	306
2	1.218
4	4.865
6	10.920
8	19.440
10	30.340
15	68.330
20	121.400
25	189.800
30	273.200
35	372.100
40	485.300
45	614.900
50	758.700

7–71 Na carreta modelo discutida na Seção 7–5, a seção de teste do túnel de vento tem 2,6 m de comprimento, 1,0 m de altura e 1,2 m de largura. A carreta modelo em escala 1 para 16 tem 0,991 m de comprimento, 0,257 m de altura e 0,159 m de largura. Qual é o bloqueio do túnel de vento para essa carreta modelo? Isso está dentro dos limites aceitáveis, de acordo com a regra prática padrão?

7–72C Considere novamente o exemplo da carreta modelo discutido na Seção 7–5, exceto que a velocidade máxima do túnel de vento é de apenas 50 m/s. Os dados da força aerodinâmica são obtidos para as velocidades do túnel de vento entre $V = 20$ e 50 m/s — assuma para essas velocidades os mesmos dados listados na Tabela 7–7. Com base *apenas* nesses dados, os pesquisadores podem ter certeza de terem atingido a independência do número de Reynolds?

7–73 Um modelo em escala 1 para 16 de um novo automóvel esporte é testado em um túnel de vento. O automóvel protótipo tem 4,37 m de comprimento, 1,30 m de altura e 1,69 m de largura. Durante os testes, a velocidade da esteira de solo móvel é ajustada para que sempre coincida com a velocidade do ar que se move através da seção de teste. A força de arrasto aerodinâmico F_D é medida como função da velocidade do túnel de vento; os resultados experimentais estão listados na Tabela P7–73. Trace o coeficiente de arrasto C_D como função do

número de Reynolds Re, onde a área usada para o cálculo de C_D é a área frontal do automóvel modelo (considere A = largura × altura), e a escala de comprimento usada para o cálculo do Re é a largura do automóvel W. Atingimos a semelhança dinâmica? Atingimos a independência do número de Reynolds em nosso teste no túnel de vento? Estime a força de arrasto aerodinâmico sobre o automóvel protótipo que se move na rodovia a 29 m/s (65 mi/h). Considere que o ar do túnel de vento e o ar que escoa sobre o automóvel protótipo estão a 25°C e a pressão atmosférica. *Respostas:* não, sim, 350 N

TABELA P7–73

V, m/s	F_D, N
10	0,29
15	0,64
20	0,96
25	1,41
30	1,55
35	2,10
40	2,65
45	3,28
50	4,07
55	4,91

Problemas de Revisão

7–74C Para cada afirmação, decida se ela é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta.

(*a*) A semelhança cinemática é uma condição necessária e suficiente para a semelhança dinâmica.
(*b*) A semelhança geométrica é uma condição necessária a semelhança dinâmica.
(*c*) A semelhança geométrica é uma condição necessária para a semelhança cinemática.
(*d*) A semelhança dinâmica é uma condição necessária para a semelhança cinemática.

7–75C Pense a respeito e descreva um escoamento protótipo e um escoamento de modelo correspondente que tem semelhança geométrica, mas não semelhança cinemática, embora os números de Reynolds coincidam. Explique.

7–76C Existem muitos parâmetros adimensionais usuais além daqueles listados na Tabela 7–5. Realize uma pesquisa na literatura ou na Internet e encontre pelo menos três parâmetros usuais, adimensionais nomeados que *não* estejam listados na Tabela 7–5. Para cada um deles, forneça sua definição e sua importância, seguindo o formato da Tabela 7–5. Caso sua equação contenha algumas variáveis não identificadas na Tabela 7–5, verifique se identificou aquelas variáveis.

7–77 Escreva as dimensões primárias de cada uma das seguintes variáveis da área da mecânica de sólidos, mostrando todo o seu trabalho: (*a*) momento de inércia I; (*b*) módulo da elasticidade E, também chamado de módulo de Young; (*c*) deformação ε; (*d*) tensão σ. (*e*) Finalmente, mostre que a relação entre a tensão e a deformação (lei de Hooke) é uma equação dimensionalmente homogênea.

7–78 A força F é aplicada à ponta de uma viga em balanço de comprimento L e momento de inércia I (Figura P7–78). O módulo da elasticidade do material da viga é E. Quando a força é aplicada, a deflexão da ponta da viga é z_d. Use a análise dimensional para gerar uma relação para z_d como função das variáveis independentes. Cite todos os parâmetros adimensionais usuais que aparecem em sua análise.

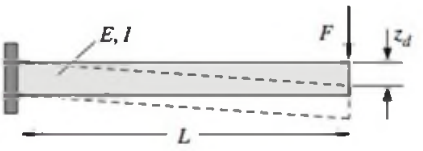


FIGURA P7–78

7–79 Uma explosão ocorre na atmosfera quando um míssil antiaéreo se choca com seu alvo (Figura P7–79). Uma **onda de choque** (também chamada de **onda de explosão**) se espalha radialmente a partir da explosão. A diferença de pressão através da onda de explosão ΔP e sua distância radial r do centro são funções do tempo t, da velocidade do som c e da quantidade total de energia E liberada pela explosão. (*a*) Gere relações adimensionais entre ΔP e os outros parâmetros e entre r e os outros parâmetros. (*b*) Para determinada explosão, se o tempo t desde a explosão dobrar, com todas as outras condições iguais, por qual fator ΔP diminuirá?

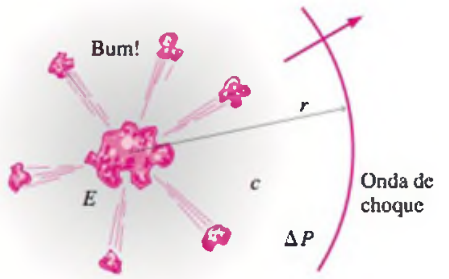


FIGURA P7–79

7–80 O número de Arquimedes listado na Tabela 7–5 é apropriado para *partículas* flutuantes em um fluido. Realize uma pesquisa na literatura ou na Internet e encontre uma definição alternativa para o número de Arquimedes que seja apropriada para os *fluidos* flutuantes (por exemplo, os jatos e os prumos flutuantes, as aplicações em condicionamento de ar). Forneça essa definição e sua importância, seguindo o formato da Tabela 7–5. Caso sua equação contenha variáveis não identificadas na Tabela 7–5, verifique se identificou essas variáveis. Finalmente, olhe os parâmetros adimensionais usuais listados na Tabela 7–5 e encontre um que seja semelhante a essa forma alternativa do número de Arquimedes.

7–81 Considere o **escoamento de Poiseouille** e bidimensional, laminar desenvolvido, — o escoamento entre duas placas paralelas finitas separadas pela distância h, com a as placas superior e inferior fixas, e um gradiente de pressão forçado dP/dx movendo o escoamento, como ilustra a Figura P7–81. (dP/dx é constante e negativo). O escoamento é incompressível, e bidimensional no plano xy. O escoamento também é *completamente desenvolvido*, significando que o perfil de velocidade não varia com a distância a jusante, x. Devido à natureza copletamente desenvolvida do escoamento, não há efeitos inerciais e a densidade não entra no problema. Acontece que u, o componente da velocidade na direção x, é uma função da distância h, do gradiente de pressão dP/dx, da viscosidade do fluido μ e da coordenada vertical y. Faça uma análise dimensional (mostrando todo o seu trabalho) e gere uma relação adimensional entre as variáveis dadas.

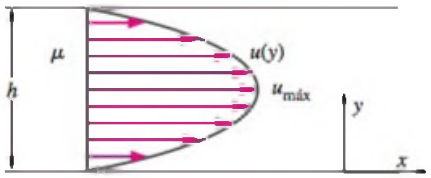


FIGURA P7–81

7–82 Considere o escoamento de Poiseuille, em regime permanente laminar, completamente desenvolvido e bidimensional do Problema 7–81. A velocidade máxima $u_{máx}$ ocorre no centro do canal. (*a*) Gere uma relação adimensional para $u_{máx}$ como função da distância entre as placas h, do gradiente de pressão dP/dx e da viscosidade do fluido μ. (*b*) Se a distância de separação das placas h dobrar, com todas as outras condições iguais, por qual fator $u_{máx}$ variará? (*c*) Se o gradiente de pressão dP/dx dobrar, com todas as outras condições iguais, por qual fator $u_{máx}$ variará? (*d*) Quantas experiências são necessárias para descrever a relação completa entre $u_{máx}$ e os outros parâmetros do problema?

7–83 A queda de pressão $\Delta P = P_1 - P_2$ através de uma seção longa de um tubo redondo pode ser escrita em termos da tensão de cisalhamento τ_w ao longo da parede. A tensão de cisalhamento que age na parede do fluido é mostrada na Figura P7–83. A região sombreada é um volume de controle composto pelo fluido do tubo entre as posições axiais 1 e 2. Existem dois parâmetros adimensionais relacionados à queda de pressão: o número de Euler Eu e o fator de atrito de Darcy f. (*a*) Usando o volume de controle representado na Figura P7–83, gere uma relação para f em termos de Eu (e de quaisquer outras propriedades ou parâmetros do problema que sejam necessários). (*b*) Usando os dados e as condições experimentais do Problema 7–70 (Tabela P7–70), trace o fator de atrito de Darcy como função de Re. O f mostra independência do número de Reynolds para valores grandes de Re? Neste caso, qual é o valor de f para um Re muito alto?

Respostas: (*a*) $f = 2\dfrac{D}{L}\text{Eu}$; (*b*) sim, 0,0487

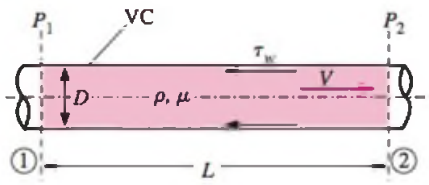


FIGURA P7–83

7–84 Freqüentemente é desejável trabalhar com um parâmetro adimensional usual, mas as escalas características disponíveis não coincidem com aquelas usadas para definir o parâmetro. Em tais casos, *criamos* as escalas características necessárias com base na argumentação dimensional (em geral por inspeção). Suponhamos, por exemplo, que tenhamos uma escala de velocidade característica V, uma área característica A, uma densidade de fluido ρ e uma viscosidade de fluido μ e queiramos definir um número de Reynolds. Nós criamos uma escala de comprimento e definimos

$$\text{Re} = \frac{\rho V\sqrt{A}}{\mu}$$

De modo semelhante, defina o parâmetro adimensional usual desejado para cada caso. (*a*) Defina um número de Froude dado $\dot{V}'$ = vazão volume por unidade de profundidade, escala de comprimento L e constante gravitacional g. (*b*) Defina um número de Reynolds dado $\dot{V}'$ = vazão em volume por unidade de profundidade e viscosidade cinemática ν. (*c*) Defina um número de Richardson dado $\dot{V}'$ = vazão em volume por unidade de profundidade, escala de comprimento L, diferença de densidade característica $\Delta\rho$, densidade característica ρ e constante gravitacional g.

7–85 Um líquido com densidade ρ e viscosidade μ escoa por gravidade através de um orifício com diâmetro d na parte inferior de um tanque com diâmetro D (Figura P7–85). No início da experiência, a superfície líquida está à altura h acima da parte inferior do tanque, como mostra a figura. O líquido sai do tanque como um jato com velocidade média V direto para baixo, como mostra a figura. Usando a análise dimensional, gere uma relação adimensional para V como função dos outros parâmetros do problema. Identifique todos os parâmetros adimensionais estabelecidos que apareçam em seu resultado. (Sugestão: Existem três escalas de comprimento neste problema. Por consistência, selecione h como sua escala de comprimento.)

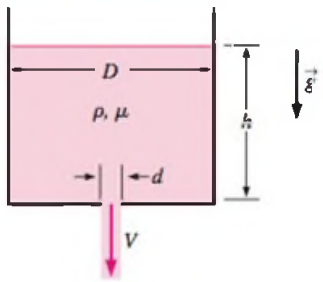


FIGURA P7–85

7–86 Repita o Problema 7–85, exceto por um parâmetro dependente diferente: o tempo necessário para esvaziar o tanque, t_{vazio}. Gere uma relação adimensional para t_{vazio} como função dos seguintes parâmetros independentes: diâmetro do orifício d, diâmetro do tanque D, densidade ρ, viscosidade μ, altura inicial da superfície líquida h e aceleração gravitacional g.

7–87 Um sistema de fornecimento de líquido está sendo criado de forma que etileno glicol escoe por um orifício na parte inferior de um tanque grande, como mostra a Figura P7–87. Os projetistas precisam prever quanto tempo será necessário para que o etileno glicol seja completamente drenado. Com seria muito caro executar testes com um protótipo em escala real usando o etileno glicol, eles resolvem construir um modelo em escala 1 para 4 para os testes experimentais e pretendem usar *água* como seu líquido de teste. O modelo é geometricamente semelhante ao protótipo (Figura P7–87). (*a*) A temperatura do etileno glicol no tanque protótipo é de 60°C, na qual $\nu = 4{,}75 \times 10^{-6}$ m²/s. A que temperatura a água da experiência modelo deve ser tomada para garantir a completa semelhança entre o modelo e o protótipo? (*b*) A experiência é feita com a água na temperatura adequada calculada na parte (*a*). São necessários 4,53 min para drenar o tanque modelo. Preveja o tempo que será necessário para drenar o etileno glicol do tanque protótipo.

Respostas: (*a*) 45,8°C (*b*) 9,06 min

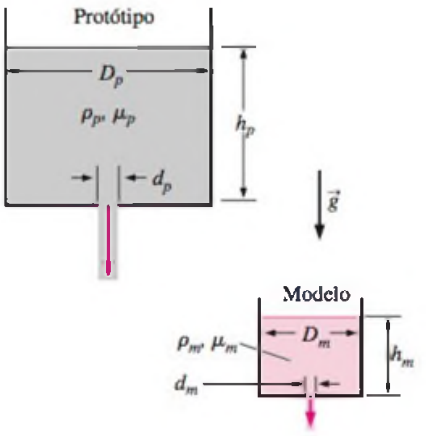


FIGURA P7–87

7–88 O líquido escoa por um orifício na parte inferior de um tanque como mostra a Figura P7–85. Considere o caso no qual o orifício é muito pequeno comparado ao tanque ($d << D$). As experiências revelam que a velocidade média do jato V é quase independente de d, D, ρ. Na verdade, para uma ampla variedade desses parâmetros, V só depende da altura da superfície líquida h e da aceleração gravitacional g. Se a altura da superfície líquida dobrar, com todas as outras condições iguais, por qual fator a velocidade média do jato aumentará? *Resposta:* $\sqrt{2}$

7–89 Uma partícula de aerossol de tamanho característico D_p se move em um escoamento de ar de comprimento característico L e velocidade característica V. O tempo característico necessário para que a partícula se ajuste a uma variação repentina na velocidade do ar é chamado de **tempo de relaxamento da partícula** τ_p,

$$\tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu}$$

Certifique-se de que as dimensões primárias de τ_p são tempo. Em seguida, crie uma forma adimensional de τ_p, com base em alguma velocidade característica V e em algum comprimento característico L do escoamento de ar (Figura P7–89). Qual parâmetro adimensional estabelecido você criou?

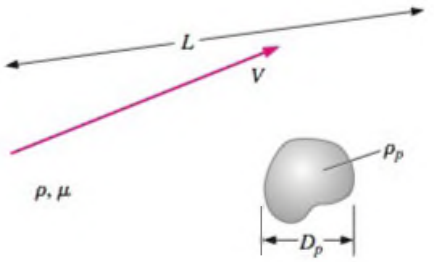


FIGURA P7–89

7–90 Compare as dimensões primárias de cada uma das seguintes propriedades no sistema de dimensões primárias com *base na massa* (m, L, t, T, I, C, N) com aquelas do sistema de dimensões primárias com *base na força* (F, L, t, T, I, C, N): (*a*) pressão ou tensão; (*b*) momento ou torque; (*c*) trabalho ou energia. Com base em seus resultados, explique quando e por que alguns autores preferem utilizar a força como uma dimensão primária no lugar da massa.

7–91 No Exemplo 7–7, o sistema de dimensões primárias com base na massa foi usado para estabelecer uma relação para a diferença de pressão $\Delta P = P_{\text{interna}} - P_{\text{externa}}$ entre o interior e o exterior de uma bolha de sabão de raio R e a tensão superficial σ_s da película de sabão (Figura P7–91). Repita a análise dimensional usando o método das variáveis repetidas, mas utilize o sistema de dimensões primárias com *base na força*. Mostre todo o seu trabalho. Você obtém o mesmo resultado?

FIGURA P7–91

7–92 Muitos dos parâmetros adimensionais usuais listados na Tabela 7–5 podem ser formados pelo produto ou razão de dois outros parâmetros adimensionais usuais. Para cada par de parâmetros adimensionais listados, encontre um *terceiro* parâmetro adimensional usual que é formado por alguma manipulação dos dois parâmetros dados: (*a*) número de Reynolds e número de Prandtl; (*b*) número de Schmidt e número de Prandt; (*c*) número de Reynolds e número de Schmidt.

7–93 O número de Stanton é listado como um parâmetro adimensional nomeado e usual na Tabela 7–5. Entretanto, uma análise cuidadosa revela que, na verdade, ele pode ser formado por uma combinação entre o número de Reynolds, o número de Nusselt e o número de Prandtl. Encontre a relação entre esses quatro grupos adimensionais, mostrando todo o seu trabalho. Você também pode formar o número de Stanton por alguma combinação de apenas *dois* outros parâmetros adimensionais usuais?

7–94 Considere uma variação do problema do escoamento de Couette completamente desenvolvido do Problema 7–52 — o escoamento entre duas placas paralelas finitas separadas pela distância h, com a placa superior se movendo à velocidade V_{sup} e a placa inferior se movendo à velocidade V_{inf} como ilustra a Figura P7–94. O escoamento é em regime permanente, incompressível e bidimensional no plano xy. Gere uma relação adimensional para o componente x da velocidade do fluido u como uma função da viscosidade do fluido μ, das velocidades das placas V_{sup} e V_{inf}, da distância h, da densidade do fluido ρ e da distância y. (Sugestão: pense cuidadosamente sobre a lista de parâmetros antes de utilizar a álgebra.)

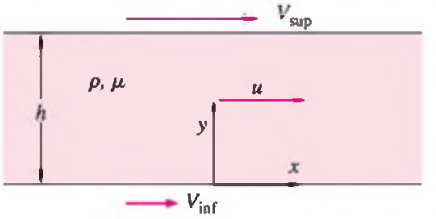


FIGURA P7–94

7–95 Quais são as dimensões primárias da carga elétrica q, sendo que as suas unidades são **coulombs** (C)? (Sugestão: procure a definição fundamental de corrente elétrica.)

7–96 Quais são as dimensões primárias da capacitância elétrica C, sendo que as suas unidades são **farads**? (Sugestão: procure a definição fundamental de capacitância elétrica.)

7–97 Em muitos circuitos elétricos nos quais algum tipo de escala de tempo está envolvido, como filtros e circuitos de temporização (Figura P7–97 — um *filtro passa baixo*), você pode ver um resistor (R) e um capacitor (C) em série. Na verdade, o produto de R e C é chamado de *constante de tempo elétrica, RC*. Mostrando todo o seu trabalho, quais são as dimensões primárias da RC? Usando apenas argumentação dimensional, explique por que um resistor e um capacitor quase sempre estão juntos em circuitos temporizadores.

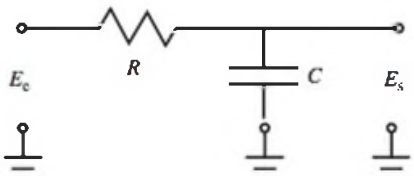


FIGURA P7–97

7–98 Da eletrônica fundamental, sabemos que o escoamento de corrente através de um capacitor em determinado instante é igual à capacitância vezes a taxa de variação da voltagem no tempo através do capacitor

$$I = C\frac{dE}{dt}$$

Escreva as dimensões primárias de cada lado dessa equação e certifique-se de que a equação é dimensionalmente homogênea. Mostre todo o seu trabalho.

7–99 Um dispositivo comum usado em diversas aplicações para limpar o ar carregado de partículas é o **ciclone de escoamento reverso** (Figura P7–99). O ar com poeira (vazão em volume e densidade ρ) entra tangencialmente através de uma abertura na lateral do ciclone e gira ao redor do tanque. As partículas de poeira são lançadas para fora e caem na parte inferior, enquanto o ar limpo é tirado para a parte superior. Os ciclones de escoamento reverso em estudo são todos geometricamente semelhantes. Assim, o diâmetro D representa a única escala de comprimento necessária para especificar completamente toda a geometria do ciclone. Os engenheiros estão preocupados com a queda de pressão δP através do ciclone. (*a*) Gere uma relação adimensional entre a queda de pressão através do ciclone e os parâmetros dados. Mostre todo o seu trabalho. (*b*) Se o tamanho do ciclone dobrar, com todas as outras condições iguais, por qual fator a queda de pressão variará? (*c*) Se a vazão em volume dobrar, com todas as outras condições iguais, com qual fator a queda de pressão variará?

Respostas: (*a*) $D^4\delta P/\rho V^2$ = constante; (*b*) 1/16; (*c*) 4

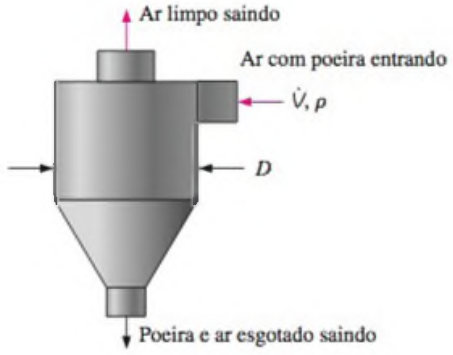


FIGURA P7–99

7–100 Um **precipitador eletrostático** (ESP) é um dispositivo usado em diversas aplicações para limpar o ar carregado de partículas. Em primeiro lugar, o ar empoeirado passa através do *estágio de carga* do ESP, onde as partículas de poeira recebem uma carga positiva q_p (coulombs) dos fios do ionizador carregado (Figura P7–100). Em seguida, o ar empoeirado entra no *estágio de coletor* do dispositivo, onde escoa entre duas placas com cargas opostas. A *força do campo elétrico* aplicado entre as placas é E_f (a diferença de voltagem por unidade de distância). A Figura P7–100 mostra uma partícula de poeira carregada com diâmetro D_p. Ela é atraída para a placa com carga negativa e se move na direção daquela placa a uma velocidade chamada de **velocidade de deriva** w. Se as placas forem suficientemente longas, a partícula de poeira se choca com a placa com carga negativa e adere a ela. O ar limpo sai do dispositivo. Acontece que para partículas muito pequenas a velocidade de deriva só depende de q_p, E_f, D_p e da viscosidade do ar μ. (*a*) Gere uma relação adimensional entre a velocidade de deriva através do estágio coletor do ESP e os parâmetros dados. Mostre todo o seu trabalho. (*b*) Se o a força do campo elétrico dobrar, com todas as outras condições iguais, por qual fator a velocidade de deriva variará? (*c*) Para determinado ESP, se o diâmetro da partícula dobrar, com todas as outras condições iguais, por qual fator a velocidade de deriva variará?

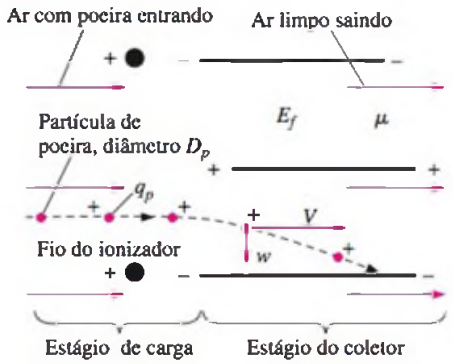


FIGURA P7–100

7–101 Quando um tubo capilar de diâmetro pequeno D é inserido em um contêiner de líquido, o líquido se eleva até a altura h dentro do tubo (Figura P7–101). h é uma função da densidade do líquido ρ, do diâmetro do tubo D, da constante gravitacional g, do ângulo de contato ϕ e da tensão superficial σ_s do líquido. (*a*) Gere uma relação adimensional para h como função dos parâmetros dados. (*b*) Compare seu resultado com a equação analítica exata para h dada no Capítulo 2. Os resultados de sua análise dimensional são consistentes com a equação exata? Discuta.

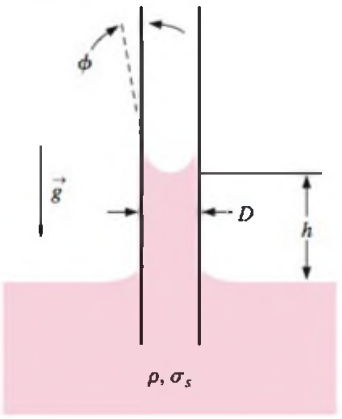


FIGURA P7–101

7–102 Repita a parte (*a*) do Problema 7–101, exceto que em vez da altura h, encontre uma relação funcional para a escala de tempo t_{elev} necessária para que o líquido suba até sua altura final no tubo capilar. (Sugestão: Verifique a lista de parâmetros independentes do Problema 7–101. Existe algum outro parâmetro relevante?)

7–103 A **intensidade do som** I é definida como a potência acústica por unidade de área que emana de uma fonte de som. Sabemos que I é função do nível de pressão do som P (dimensões de pressão) e das propriedades do fluido (densidade) e da velocidade do som c. (*a*) Use o método das variáveis repetidas nas dimensões primárias com base na massa para gerar uma relação adimensional para I como função dos outros parâmetros. Mostre todo o seu trabalho. O que acontece se você escolher três variáveis repetidas? Discuta. (*b*) Repita a parte (*a*), mas use o sistema de dimensões primárias com base na força. Discuta.

7–104 Repita o Problema 7–103, mas com a distância r da fonte de som como um parâmetro independente adicional.

CAPÍTULO

8

ESCOAMENTO EM TUBOS

Na prática o escoamento de fluidos encontra-se usualmente tanto em tubos circulares quanto não circulares. A água quente e fria que usamos em nossos lares é bombeada através de tubos. A água de uma cidade é distribuída por meio de grandes redes de tubulações. O petróleo e o gás natural são transportados por centenas de quilômetros por grandes tubulações. O sangue é transportado através de nossos corpos por artérias e veias. A água de resfriamento de um motor é transportada por mangueiras até os tubos do radiador, onde ela é resfriada à medida que escoa. A energia térmica em um sistema de aquecimento ambiental hidrônico é transferida para a água de circulação na caldeira e, em seguida, é transportada para os locais desejados através de tubos.

O escoamento do fluido é classificado como *externo* e *interno*, dependendo do fluido ser forçado a escoar por uma superfície ou em um conduto. Os escoamentos interno e externo exibem características muito diferentes. Neste capítulo consideramos o *escoamento interno* onde o conduto é completamente preenchido com o fluido, e o escoamento é primariamente impulsionado por uma diferença de pressão. Ele não deve ser confundido com o *escoamento de canal aberto* no qual o conduto é parcialmente preenchido pelo fluido e, portanto, o escoamento é parcialmente limitado por superfícies sólidas, como uma vala de irrigação, e o escoamento é impulsionado apenas pela gravidade.

Iniciamos este capítulo com uma descrição física geral do escoamento interno e da *camada limite de velocidade*. Continuamos com uma discussão do *número de Reynolds*, adimensional, e de seu significado físico. Em seguida, discutimos as características do escoamento dentro de tubos e apresentamos as correlações de *queda de pressão* associadas a ele para escoamentos laminar e turbulento. Em seguida, apresentamos as perdas menores e determinamos a queda de pressão e os requisitos de potência de bombeamento para sistemas de tubulação do mundo real. Finalmente, apresentamos uma visão geral dos dispositivos de medição de escoamento.

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura deste capítulo você deve ser capaz de:

- Ter uma compreensão profunda do escoamento laminar e turbulento nos tubos e da análise do escoamento completamente desenvolvido
- Calcular as perdas maiores e menores associadas ao escoamento de tubo nas redes de tubulação e determinar os requisitos de potência de bombeamento
- Entender as diferentes técnicas de medição de velocidade e vazão e aprender sobre suas vantagens e desvantagens

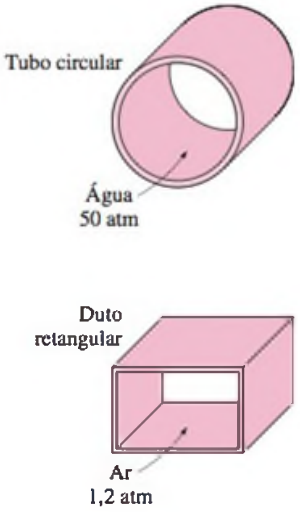


FIGURA 8–1
Os tubos circulares podem suportar grandes diferenças de pressão entre o interior e o exterior sem sofrer nenhuma distorção significativa, mas os não-circulares não podem.

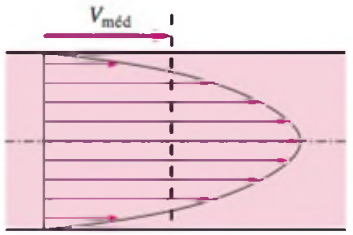


FIGURA 8–2
A velocidade média $V_{méd}$ é definida como a média da velocidade em toda uma seção transversal. Para o escoamento de tubo laminar totalmente desenvolvido, $V_{méd}$ é metade da velocidade máxima.

8–1 • INTRODUÇÃO

O escoamento de líquido ou gás através de *tubos* ou *dutos* normalmente é usado em aplicações de aquecimento e resfriamento e nas redes de distribuição de fluidos. O fluido de tais aplicações em geral é forçado por um ventilador ou uma bomba a escoar através de uma seção de escoamento. Prestamos atenção particular ao *atrito*, que está diretamente relacionado à *queda de pressão* e à *perda de carga* durante o escoamento através de tubos e dutos. Em seguida, a queda de pressão é usada para determinar o requisito de potência de bombeamento. Um sistema típico de tubulação envolve tubos de diâmetros diferentes conectados entre si por diversos acessórios ou cotovelos para transportar o fluido, válvulas para controlar a vazão e bombas para pressurizar o fluido.

Os termos *tubo, duto* e *conduto* em geral são usados com o mesmo sentido nas seções de escoamento. Em geral, as seções de escoamento de seção transversal circular são chamadas de *tubos* (particularmente quando o fluido é um líquido), e as seções de escoamento de seção transversal não circular são chamadas de *dutos* (particularmente quando o fluido é um gás). Dada essa incerteza, usaremos frases mais descritivas (como um *tubo circular* ou um *duto retangular*) sempre que necessário para evitar mal-entendidos.

Provavelmente você notou que a maioria dos fluidos, particularmente os líquidos, são transportados em *tubos circulares*. Isso acontece porque os tubos com uma seção transversal circular podem suportar grandes diferenças de pressão entre o interior e o exterior sem sofrer distorção significativa. Os *tubos não circulares* geralmente são usados em aplicações como sistemas de aquecimento e refrigeração de prédios, nos quais a diferença de pressão é relativamente pequena, os custos de fabricação e instalação são mais baixos e é limitado (Figura 8–1).

Embora a teoria do escoamento de fluidos seja razoavelmente bem compreendida, as soluções teóricas são obtidas apenas para alguns poucos casos simples, como o escoamento laminar totalmente desenvolvido em um tubo circular. Assim, devemos nos basear nos resultados experimentais e nas relações empíricas na maioria dos problemas de escoamento de fluidos em vez de em soluções analíticas fechadas. Observando que os resultados experimentais são obtidos sob condições de laboratório cuidadosamente controladas, e que não existem dois sistemas exatamente iguais, não devemos ser tão ingênuos a ponto de considerar "exatos" os resultados obtidos. Um erro de 10% (ou mais) nos fatores de atrito calculados usando as relações deste capítulo é a "regra" e não a "exceção".

A velocidade do fluido de um tubo varia do *zero* na superfície, por conta da condição de não-escorregamento, até o máximo no centro do tubo. No escoamento de fluidos é conveniente trabalhar com uma velocidade *média* $V_{méd}$, que permanece constante no escoamento incompressível quando a área de seção transversal do tubo for constante (Figura 8–2). A velocidade média nas aplicações em aquecimento e refrigeração pode variar um pouco devido às variações da densidade com a temperatura. Mas, na prática, calculamos as propriedades do fluido em alguma temperatura média e as tratamos com constantes. A conveniência de trabalhar com propriedades constantes em geral mais do que justifica a ligeira perda de exatidão.

Da mesma forma, o atrito entre as partículas de fluido de um tubo causa uma ligeira elevação na temperatura do fluido como resultado da energia mecânica que é convertida em energia térmica sensível. Mas essa elevação de temperatura devida ao *aquecimento por atrito* em geral é pequena demais para merecer qualquer consideração nos cálculos e, portanto, é desprezada. Por exemplo, na ausência de transferência de calor, nenhuma diferença notável pode ser detectada entre as temperaturas de entrada e saída da água que escoa em um tubo. A conseqüência primária do atrito no escoamento de fluidos é a queda da pressão e, portanto, qualquer variação significativa da temperatura do fluido é devida à transferência de calor.

O valor da velocidade média $V_{méd}$ em alguma seção transversal da corrente é determinado pelo requisito de que o princípio da *conservação da massa* seja satisfeito (Figura 8–2). Ou seja:

$$\dot{m} = \rho V_{méd} A_c = \int_{A_c} \rho u(r)\, dA_c \qquad (8\text{–}1)$$

onde $\dot{m}$ é a vazão de massa, ρ é a densidade, A_c é a área de seção transversal e $u(r)$ é o perfil de velocidade. Estão, a velocidade média do escoamento incompressível em um tubo circular de raio R pode ser expressa como:

$$V_{méd} = \frac{\int_{A_c} \rho u(r)\, dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho u(r) 2\pi r\, dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r\, dr \qquad (8\text{–}2)$$

Assim, quando conhecemos a vazão ou o perfil de velocidade, a velocidade média pode ser determinada com facilidade.

8–2 ▪ ESCOAMENTOS LAMINAR E TURBULENTO

Se você convive com fumantes, provavelmente já notou que a fumaça do cigarro sobe em uma coluna suave pelos primeiros centímetros e, em seguida, começa a flutuar aleatoriamente em todas as direções enquanto continua subindo. As outras colunas comportam-se de forma semelhante (Figura 8–3). Da mesma maneira, uma inspeção cuidadosa do escoamento em um tubo revela que o escoamento do fluido é aerodinâmico a baixas velocidades, mas torna-se caótico à medida que a velocidade sobe acima de um valor crítico, como mostra a Figura 8–4. No primeiro caso, diz-se que o regime de escoamento é **laminar**, caracterizado por *linhas de corrente suaves* e *movimento altamente ordenado*, e é **turbulento** no segundo caso, caracterizado pelas *flutuações* de velocidade e pelo *movimento altamente desordenado*. O escoamento de **transição** do escoamento laminar para turbulento não ocorre repentinamente; ele ocorre em alguma região na qual o escoamento flutua entre os escoamentos laminar e turbulento antes de tornar-se totalmente turbulento. A maioria dos escoamentos encontrados na prática é turbulento. O escoamento laminar é encontrado quando fluidos altamente viscosos como óleos escoam em pequenos tubos ou passagens estreitas.

Podemos verificar a existência desses regimes de escoamento laminares, de transição e turbulentos injetando listras de tinta no escoamento em um tubo de vidro, como o engenheiro britânico Osborne Reynolds (1842–1912) fez há mais de um século. Observamos que as listras de tinta formam uma *linha reta e suave* a baixas velocidades quando o escoamento é laminar (podemos ver alguns borrões por causa da difusão molecular), tem *rajadas de flutuações* no regime de transição, e faz um *ziguezague rápido e aleatório* quando o escoamento torna-se totalmente turbulento. Esses ziguezagues e a dispersão da tinta indicam as flutuações no escoamento principal e a mistura rápida das partículas de fluidos das camadas adjacentes.

A *mistura intensa* do fluido nos escoamentos turbulentos como resultado das flutuações rápidas incrementa a transferência de quantidade de movimento entre as partículas de fluidos, o que aumenta a força de atrito na superfície e, portanto, a potência de bombeamento necessária. O fator de atrito atinge o máximo quando o escoamento torna-se totalmente turbulento.

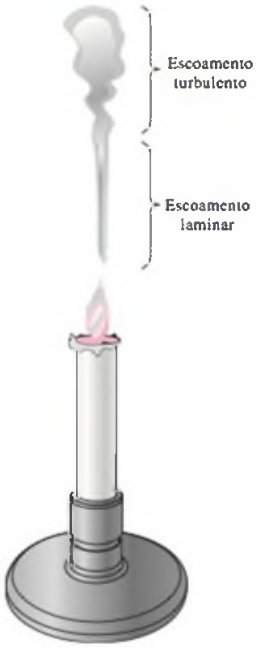
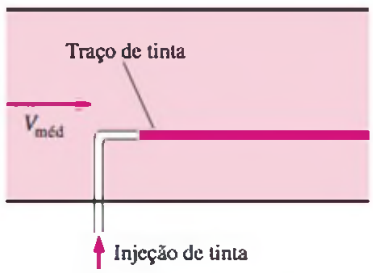
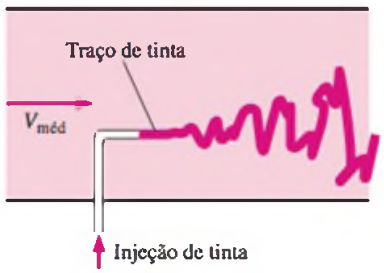


FIGURA 8–3
Regimes de escoamento laminar e turbulento da fumaça da vela.



(*a*) Escoamento laminar



(*b*) Escoamento turbulento

FIGURA 8–4
O comportamento do fluido colorido injetado nos escoamentos laminares e turbulentos de um tubo.

Número de Reynolds

A transição do escoamento laminar para turbulento depende da *geometria, da rugosidade da superfície, da velocidade de escoamento, da temperatura da superfície* e do *tipo de fluido*, entre outras coisas. Após experimentos exaustivos na década de 1880, Osborne Reynolds descobriu que o regime de escoamento depende principalmente da relação entre as *forças inerciais* e as *forças viscosas* do fluido. Essa relação é chamada de **número de Reynolds** e é expressa para o escoamento interno em um tubo circular por (Figura 8–5):

$$\text{Re} = \frac{\text{Forças inerciais}}{\text{Forças viscosas}} = \frac{V_{méd} D}{\nu} = \frac{\rho V_{méd} D}{\mu} \qquad (8\text{–}3)$$

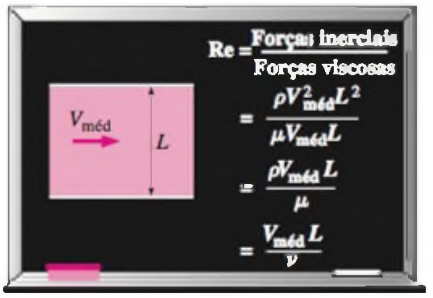


FIGURA 8–5
O número de Reynolds pode ser visto como a relação entre as forças inerciais e as forças viscosas que agem sobre um elemento fluido.

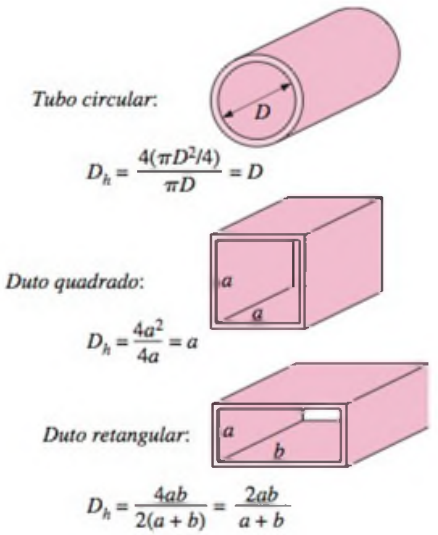


FIGURA 8–6
O diâmetro hidráulico $D_h = 4A_c/p$ é definido de forma que se reduza ao diâmetro comum para tubos circulares.

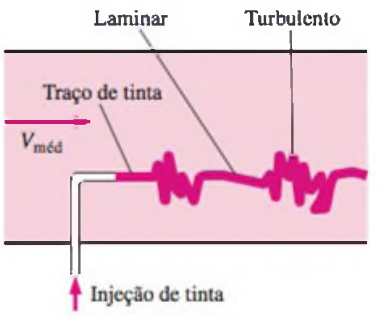


FIGURA 8–7
Na região de escoamento da transição de 2300 = Re = 4000, o escoamento troca entre laminar e turbulento aleatoriamente.

onde $V_{méd}$ = velocidade média de escoamento (m/s), D = comprimento característico da geometria (diâmetro neste caso, em m) e $\nu = \mu/p$ = viscosidade cinemática do fluido (m²/s). Observe que o número de Reynolds é uma quantidade *adimensional* (Capítulo 7). Além disso, a viscosidade cinemática tem a unidade m²/s, e pode se vista como *difusividade viscosa* ou *difusividade para o momento*.

Com números de Reynolds grandes, as forças inerciais, proporcionais à densidade do fluido e ao quadrado da velocidade do fluido, são grandes com relação às forças viscosas e, portanto, as forças viscosas não podem evitar as flutuações aleatórias e rápidas do fluido. Com números de Reynolds *pequenos* ou *moderados*, porém, as forças viscosas são suficientemente grandes para suprimir essas flutuações e manter o fluido "alinhado". Assim, o escoamento é *turbulento* no primeiro caso e *laminar* no segundo.

O número de Reynolds no qual o escoamento torna-se turbulento é chamado de **número de Reynolds crítico**, Re_{cr}. O valor do número de Reynolds crítico é diferente para geometrias e condições de escoamento diferentes. Para o escoamento interno em um tubo circular, o valor geralmente aceito do número de Reynolds crítico é $Re_{cr} = 2300$.

Para o escoamento através de tubos não circulares, o número de Reynolds se baseia no **diâmetro hidráulico** D_h definido como (Figura 8–6):

Diâmetro hidráulico:
$$D_h = \frac{4A_c}{p} \tag{8–4}$$

onde A_C é a área de seção transversal do tubo e p é seu perímetro molhado. O diâmetro hidráulico é definido de forma que se reduza ao diâmetro comum D para tubos circulares:

Tubos circulares:
$$D_h = \frac{4A_c}{p} = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$

Certamente é desejável ter valores precisos para os números de Reynolds dos escoamentos laminar, de transição e turbulento, mas isso não acontece na prática. A transição do escoamento laminar para o turbulento também depende do grau de perturbação do escoamento por *rugosidade superficial, vibrações do tubo* e *flutuações do escoamento*. Nas maioria das condições práticas, o escoamento de um tubo circular é laminar para Re ≲ 2300, turbulento para Re ≳ 4000 e de transição entre esses valores. Ou seja:

Re ≲ 2300	escoamento laminar
2300 ≲ Re ≲ 4000	escoamento de transição
Re ≳ 4000	escoamento turbulento

No escoamento de transição, o escoamento troca entre laminar e turbulento de forma aleatória (Figura 8–7). É preciso lembrar de que o escoamento laminar pode ser mantido para números de Reynolds muito mais altos em tubos muito suaves, evitando distúrbios no escoamento e vibrações do tubo. Em tais experimentos cuidadosamente controlados, o escoamento laminar tem sido mantido para números de Reynolds de até 100.000.

8–3 • A REGIÃO DE ENTRADA

Considere um fluido que entre em um tubo circular com velocidade uniforme. Devido à condição de não-escorregamento, as partículas do fluido na camada em contato com a superfície do tubo param completamente. Essa camada também faz com que as partículas de fluido das camadas adjacentes gradualmente fiquem mais lentas como resultado do atrito. Para compensar essa redução de velocidade, a velocidade do fluido na seção média do tubo tem que aumentar para manter a vazão de massa através do tubo constante. Como resultado, um gradiente de velocidade se desenvolve ao longo do tubo.

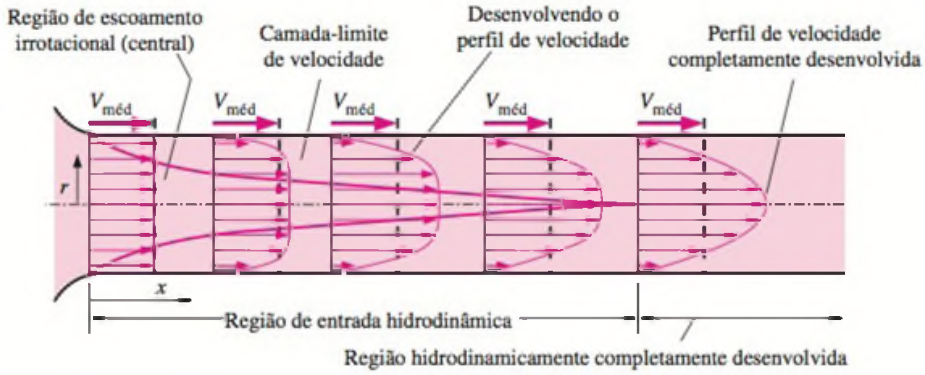


FIGURA 8–8
O desenvolvimento de camada limite da velocidade em um tubo. (O perfil desenvolvido de velocidade é parabólico no escoamento laminar, como foi mostrado, mas um pouco mais plano ou mais cheio no escoamento turbulento.)

A região do escoamento na qual os efeitos das forças de cisalhamento viscosas causadas pela viscosidade do fluido são sentidas é chamada de **camada limite de velocidade** ou apenas **camada limite**. A superfície da fronteira hipotética divide o escoamento de um tubo em duas regiões: a **região da camada limite**, na qual os efeitos viscosos e as variações de velocidade são significativos, e a **região de escoamento irrotacional (central)**, na qual os efeitos do atrito são desprezíveis e a velocidade permanece essencialmente constante na direção radial.

A espessura dessa camada limite aumenta na direção do escoamento até a camada limite atingir o centro do tubo e, portanto, preencher todo o tubo, como mostra a Figura 8–8. A região da entrada do tubo até o ponto no qual a camada limite incorpora o eixo central é chamada de **região de entrada hidrodinâmica**, e o comprimento dessa região é chamado de **comprimento de entrada hidrodinâmica** $L_{h,}$ O escoamento na região da entrada é chamado de *escoamento hidrodinamicamente em desenvolvimento*, uma vez que essa é a região na qual o perfil de velocidade se desenvolve. A região além da região de entrada na qual o perfil de velocidade está completamente desenvolvido e permanece inalterado é chamada de **região hidrodinamicamente completamente desenvolvida**. Diz-se que o escoamento é **completamente desenvolvido** quando o perfil de temperatura normalizado também permanece inalterado. O escoamento hidrodinamicamente desenvolvido é equivalente ao escoamento completamente desenvolvido quando o fluido do tubo não é aquecido ou resfriado, uma vez que a temperatura do fluido neste caso permanece essencialmente constante em todo o tubo. O perfil de velocidade na região completamente desenvolvida é *parabólico* no escoamento laminar e um pouco *mais plano* (ou *mais cheio*) no escoamento turbulento devido ao movimento de redemoinho e à mistura mais vigorosa na direção radial. A média no tempo do perfil de velocidade permanece inalterada quando o escoamento é completamente desenvolvido e, portanto:

Hidrodinamicamente completamente desenvolvido:
$$\frac{\partial u(r, x)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad u = u(r) \tag{8-5}$$

A tensão de cisalhamento na parede do tubo τ_w está relacionada à inclinação do perfil da velocidade na superfície. Observando que o perfil de velocidade permanece inalterado na região hidrodinamicamente completamente desenvolvida, a tensão de cisalhamento da parede também permanece constante naquela região (Figura 8–9).

Considere o escoamento de fluido na região de entrada hidrodinâmica de um tubo. A tensão de cisalhamento na parede é *mais alta* na entrada do tubo, onde a espessura da camada limite é menor, e diminui gradualmente até o valor completamente desenvolvido, como mostra a Figura 8–10. Assim, a queda de pressão é *mais alta* nas regiões de entrada de um tubo e o efeito da região de entrada é sempre o *aumento* do fator de atrito médio de todo o tubo. Esse aumento pode ser significativo para tubos curtos, mas é desprezível nos tubos longos.

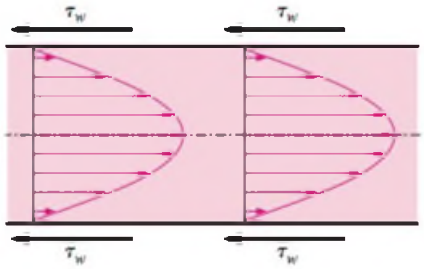


FIGURA 8–9
Na região de escoamento completamente desenvolvido de um tubo, o perfil de velocidade não muda a jusante e, portanto, a tensão de cisalhamento da parede também permanece constante.

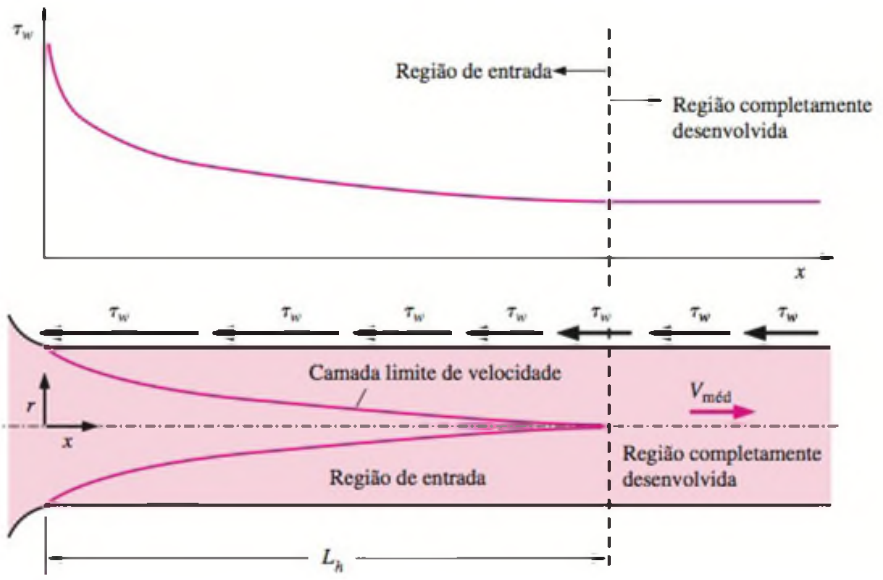


FIGURA 8–10
A variação da tensão de cisalhamento da parede na direção do escoamento de um tubo para a região de entrada na região completamente desenvolvida.

Comprimentos de Entrada

O comprimento de entrada hidrodinâmica geralmente é tomado como a distância da entrada do tubo até o lugar onde a tensão de cisalhamento da parede (e, portanto, o fator de atrito) chega até cerca de 2% do valor completamente desenvolvido. No *escoamento laminar*, o comprimento da entrada hidrodinâmica é dado aproximadamente por [consulte Kays e Crawford (1993) e Shah e Bhatti (1987)]:

$$L_{h,\,\text{laminar}} \cong 0{,}05\text{Re}D \tag{8–6}$$

Para Re = 20, o comprimento de entrada hidrodinâmica é de cerca do tamanho do diâmetro, mas aumenta linearmente com a velocidade. No caso laminar-limite de Re = 2300, o comprimento da entrada hidrodinâmica é de $115D$.

No *escoamento turbulento*, a mistura intensa durante as flutuações aleatórias geralmente supera os efeitos da difusão molecular. O comprimento de entrada hidrodinâmica do escoamento turbulento pode ser aproximado como [consulte Bhatti e Shah (1987) e Zhi-qing (1982)]:

$$L_{h,\,\text{turbulento}} = 1{,}359D\text{Re}_D^{1/4} \tag{8–7}$$

O comprimento de entrada é muito mais curto no escoamento turbulento, como esperado, e sua dependência do número de Reynolds é mais fraca. Em muitos escoamentos de tubo de interesse prático para a engenharia, os efeitos da entrada tornam-se insignificantes além de um comprimento de tubo de 10 diâmetros, e o comprimento de entrada hidrodinâmica é aproximado como:

$$L_{h,\,\text{turbulento}} \approx 10D \tag{8–8}$$

Correlações precisas para o cálculo das perdas de carga por atrito nas regiões de entrada estão disponíveis na literatura. Entretanto, os tubos usados na prática em geral têm várias vezes o comprimento da região de entrada e, portanto, o escoamento através dos tubos quase sempre é considerado completamente desenvolvido para todo o comprimento do tubo. Essa abordagem simplista permite resultados *razoáveis* para tubos longos, mas às vezes tem resultados ruins para tubos curtos, uma vez que não faz uma boa previsão da tensão de cisalhamento da parede e, assim, do fator de atrito.

8–4 ▪ ESCOAMENTO LAMINAR EM TUBOS

Nós mencionamos na Seção 8–2 que o escoamento em tubos é laminar para Re $\lesssim$ 2300 e que o escoamento é completamente desenvolvido se o tubo for suficientemente longo (com relação ao comprimento de entrada) de modo que os efeitos da

entrada são desprezíveis. Nesta seção consideramos o escoamento laminar estacionário de um fluido incompressível com propriedades constantes na região completamente desenvolvida de um tubo circular reto. Obtemos a equação de quantidade de movimento aplicando um balanço de momento a um elemento de volume diferencial e obtemos o perfil de velocidade solucionando-a. Em seguida, usamos essa equação para obter uma relação para o fator de atrito. Um aspecto importante desta análise é que ela é uma das poucas disponíveis para o escoamento viscoso.

No escoamento laminar completamente desenvolvido, cada partícula de fluido se move a uma velocidade axial constante ao longo de uma linha de corrente e o perfil de velocidade $u(r)$ permanece inalterado na direção do escoamento. Não há movimento na direção radial e, portanto, a componente da velocidade na direção normal ao escoamento é zero em toda parte. Não há aceleração, uma vez que o escoamento é estacionário e completamente desenvolvido.

Agora considere um elemento de volume diferencial em forma de anel de raio r, espessura dr e comprimento dx orientado coaxialmente com o tubo, como mostra a Figura 8–11. O elemento de volume envolve apenas os efeitos da pressão e viscosos e, portanto, as forças de pressão e de cisalhamento devem se contrabalançar. A força da pressão agindo em uma superfície plana submersa é o produto da pressão no centróide da superfície pela área da superfície. Um balanço de força do elemento de volume na direção do escoamento resulta em:

$$(2\pi r\, dr\, P)_x - (2\pi r\, dr\, P)_{x+dx} + (2\pi r\, dx\, \tau)_r - (2\pi r\, dx\, \tau)_{r+dr} = 0 \qquad \textbf{(8–9)}$$

que indica que no escoamento completamente desenvolvido em um tubo horizontal, as forças viscosas e de pressão se contrabalançam. Dividindo por $2\pi dr dx$ e reorganizando:

$$r\frac{P_{x+dx} - P_x}{dx} + \frac{(r\tau)_{r+dr} - (r\tau)_r}{dr} = 0 \qquad \textbf{(8–10)}$$

Tomando o limite quando $dr,\ dx \to 0$ temos:

$$r\frac{dP}{dx} + \frac{d(r\tau)}{dr} = 0 \qquad \textbf{(8–11)}$$

Substituindo $\tau = -\mu(du/dr)$ e tomando μ = constante, temos a equação desejada:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{dP}{dx} \qquad \textbf{(8–12)}$$

A quantidade du/dr é negativa no escoamento de tubo, e o sinal negativo é incluído para obter valores positivos para τ. (Ou $du/dr = -du/dy$, uma vez que $y = R - r$.) O lado esquerdo da Equação 8–12 é uma função de r e o lado direito é uma função de x. A igualdade deve ser mantida para todo valor de r e x, e uma igualdade da forma $f(r) = g(x)$ pode ser satisfeita apenas se $f(r)$ e $g(x)$ forem iguais a uma mesma constante. Assim, concluímos que a dP/dx = constante. Isso pode ser verificado escrevendo um balanço de força em um elemento de volume de raio R e espessura dx (uma fatia do tubo) que resulta em (Figura 8–12):

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} \qquad \textbf{(8–13)}$$

Aqui τ_w é constante, uma vez que a viscosidade e o perfil de velocidade são constantes na região completamente desenvolvida. Assim, dP/dx = constante.

A Equação 8–12 pode ser resolvida reorganizando e integrando duas vezes, resultando em:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right) + C_1 \ln r + C_2 \qquad \textbf{(8–14)}$$

O perfil de velocidade $u(r)$ é obtido aplicando as condições de contorno $\partial u/\partial r = 0$ em $r = 0$ (por causa da simetria com relação ao eixo central) e $u = 0$ em $r = R$ (a condição de não-escorregamento na superfície do tubo). Obtemos:

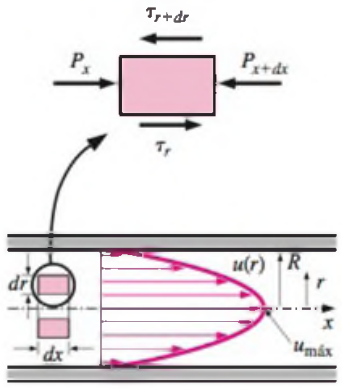
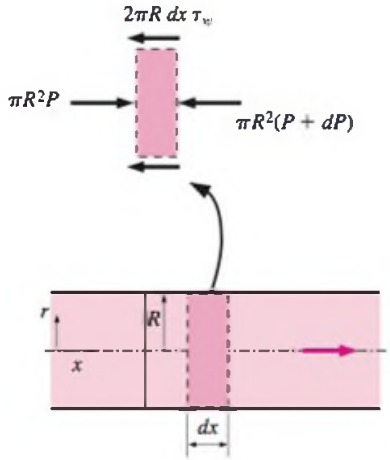


FIGURA 8–11
Diagrama de corpo livre de um elemento de fluido diferencial em forma de anel de raio r, espessura dr e comprimento dx orientado coaxialmente a um tubo horizontal no escoamento laminar totalmente desenvolvido.



Balanço de força:
$$\pi R^2 P - \pi R^2(P + dP) - 2\pi R\, dx\, \tau_w = 0$$
Simplificando:
$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$$

FIGURA 8–12
Diagrama de corpo livre de um elemento de disco de fluido de raio R e comprimento dx no escoamento laminar completamente desenvolvido de um tubo horizontal.

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{8–15}$$

Portanto, o perfil de velocidade no escoamento laminar completamente desenvolvido de um tubo é *parabólico* com o máximo no eixo central e o mínimo (zero) na parede do tubo. Da mesma forma, a velocidade axial u é positiva para qualquer r e, portanto, o gradiente de pressão axial dP/dx deve ser negativo (ou seja, a pressão deve diminuir na direção do escoamento por conta dos efeitos viscosos).

A velocidade média é determinada de sua definição, pela substituição da Equação 8–15 na Equação 8–2 e fazendo a integração. Isso resulta em:

$$V_{méd} = \frac{2}{R^2}\int_0^R u(r)r\,dr = \frac{-2}{R^2}\int_0^R \frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)r\,dr = -\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right) \tag{8–16}$$

Combinando as duas últimas equações, o perfil de velocidade é reescrito como:

$$u(r) = 2V_{méd}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{8–17}$$

Essa é uma forma conveniente para o perfil da velocidade, uma vez que $V_{méd}$ pode ser determinada facilmente com as informações da vazão.

A velocidade máxima ocorre no eixo central e é determinada da Equação 8–17 substituindo $r = 0$:

$$u_{máx} = 2V_{méd} \tag{8–18}$$

Assim, a *velocidade média do escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo é metade da velocidade máxima.*

Queda de Pressão e Perda de Carga

Uma quantidade de interesse para a análise do escoamento do tubo é a *queda de pressão* ΔP uma vez que ela está diretamente relacionada aos requisitos de potência do ventilador ou da bomba para manter o escoamento. Observamos que dP/dx = constante, e que a integração de $x = x_1$, onde a pressão é P_1 a $x = x_1 + L$, onde a pressão é P_2 resulta em:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} \tag{8–19}$$

Substituindo a Equação 8–19 na expressão de $V_{méd}$ na Equação 8–16, a queda de pressão pode ser expressa como:

$$\textit{Escoamento laminar:}\quad \Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu L V_{méd}}{R^2} = \frac{32\mu L V_{méd}}{D^2} \tag{8–20}$$

O símbolo Δ geralmente é usado para indicar a diferença entre os valores final e inicial, como em $\Delta y = y_2 - y_1$. Mas no escoamento de fluidos, ΔP é usado para designar a queda de pressão e, portanto, ela é $P_1 - P_2$. Uma queda de pressão devida aos efeitos viscosos representa uma perda irreversível de pressão e é chamada de **perda de pressão** ΔP_L para enfatizar que isso é uma *perda* (assim como a perda de carga h_L, que é proporcional a ela).

Observe na Equação 8–20 que a queda de pressão é proporcional à viscosidade μ do fluido e que ΔP seria zero se não houvesse atrito. Portanto, a queda de pressão de P_1 para P_2 neste caso é devida totalmente aos efeitos viscosos, e a Equação 8–20 representa a queda de pressão ΔP_L quando um fluido de viscosidade μ escoa através de um tubo de diâmetro constante D e comprimento L à velocidade média $V_{méd}$.

Na prática considera-se conveniente expressar a perda de pressão para todos os tipos de escoamentos internos completamente desenvolvidos (escoamentos laminar e turbulento, tubos circulares e não circulares, superfícies suaves ou rugosas, tubos horizontais ou inclinados) como (Figura 8–13):

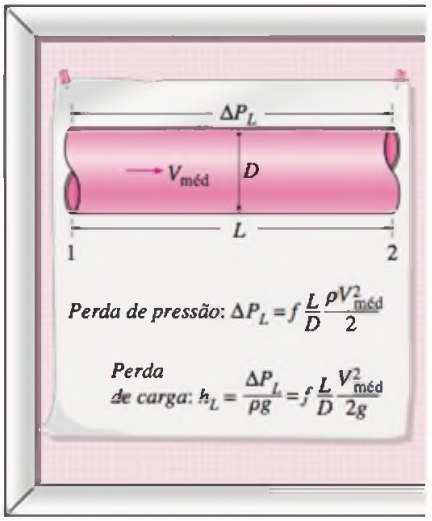


FIGURA 8–13
A relação da perda de pressão (e perda de carga) é uma das relações mais gerais da mecânica dos fluidos, e ela é válida para escoamentos laminares ou turbulentos, tubos circulares ou não circulares e tubos com superfícies lisas ou rugosas.

Perda de pressão:
$$\Delta P_L = f\frac{L}{D}\frac{\rho V_{méd}^2}{2} \tag{8–21}$$

onde $\rho V_{méd}^2/2$ é a *pressão dinâmica* e f é o **fator de atrito de Darcy:**

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V_{méd}^2} \tag{8–22}$$

Ele também é chamado de **fator de atrito de Darcy–Weisbach**, em homenagem ao francês Henry Darcy (1803–1858) e ao alemão Julius Weisbach (1806–1871), os dois engenheiros que forneceram a maior contribuição para seu desenvolvimento. Ele não deve ser confundido com o *coeficiente de atrito* C_f [também chamado de *fator de atrito de Fanning*, em homenagem ao engenheiro norte-americano John Fanning (1837–1911)], que é definido como $C_f = 2\tau_w/(\rho V_{méd}^2) = f/4$.

Ao igualarmos as Equações 8–20 e 8–21 isolando f, temos o fator de atrito do escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo circular:

Tubo circular, laminar:
$$f = \frac{64\mu}{\rho D V_{méd}} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{8–23}$$

Essa equação mostra que no *escoamento laminar, o fator de atrito é uma função do número de Reynolds e é independente da rugosidade da superfície do tubo.*

Na análise do sistema de tubos, as perdas de pressão normalmente são expressas em termos da *altura equivalente da coluna de fluido*, chamada de **perda de carga** h_L. Observando, da estática dos fluidos, que $\Delta P = \rho g h$ e que, portanto, uma diferença de pressão de ΔP corresponde a uma altura de fluido de $h = \Delta P/\rho g$, a *perda de carga do tubo* é obtida pela divisão de ΔP_L por ρg resultando em:

Perda de carga:
$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f\frac{L}{D}\frac{V_{méd}^2}{2g} \tag{8–24}$$

A perda de carga h_L representa *a altura adicional à qual o fluido precisa ser elevado por uma bomba para superar as perdas por atrito do tubo.* A perda de carga é causada pela viscosidade e está relacionada diretamente à tensão de cisalhamento na parede. As Equações 8–21 e 8–24 são válidas para os escoamentos laminar e turbulento nos tubos circulares e não circulares, mas a Equação 8–23 só é válida para o escoamento laminar completamente desenvolvido em tubos circulares.

Depois que a perda de pressão (ou perda de carga) for conhecida, a potência de bombeamento necessária *para superar a perda de pressão* é determinada por:

$$\dot{W}_{\text{bomba, }L} = \dot{V}\Delta P_L = \dot{V}\rho g h_L = \dot{m} g h_L \tag{8–25}$$

onde $\dot{V}$ é a vazão em volume e $\dot{m}$ é a vazão em massa.

A velocidade média do escoamento laminar em um tubo horizontal é, da Equação 8–20:

Tubo horizontal:
$$V_{méd} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} = \frac{(P_1 - P_2)D^2}{32\mu L} = \frac{\Delta P\, D^2}{32\mu L} \tag{8–26}$$

Assim, a vazão volumétrica do escoamento laminar através de um tubo horizontal de diâmetro D e comprimento L torna-se

$$\dot{V} = V_{méd}A_c = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L}\pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2)\pi D^4}{128\mu L} = \frac{\Delta P\, \pi D^4}{128\mu L} \tag{8–27}$$

Essa equação é conhecida como **lei de Poiseuille**, e esse escoamento é chamado de *escoamento de Hagen-Poiseuille* em homenagem aos trabalhos realizados por G. Hagen (1797–1884) e J. Poiseuille (1799–1869) sobre o assunto. Observe na Equação 8–27 que *para uma vazão especificada, a queda de pressão e, portanto, a potência necessária de bombeamento é proporcional ao comprimento do tubo e à viscosidade do fluido, mas é inversamente proporcional à quarta potência do raio (ou diâmetro) do tubo.* Assim, o requisito de potência de bombeamento de um sistema de tubos pode ser reduzida por um fator de 16, dobrando o diâmetro do tubo (Figura 8–14). Obviamente,

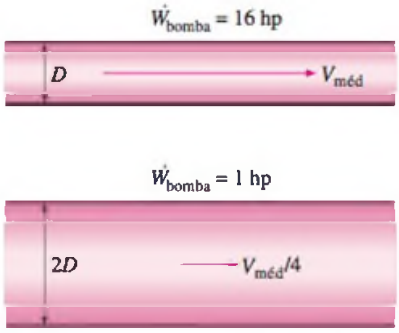


FIGURA 8–14
O requisito de potência de bombeamento de um sistema de tubos com escoamento laminar pode ser reduzido por um fator de 16, dobrando o diâmetro do tubo.

os benefícios da redução dos custos da energia devem ser ponderados com relação ao maior custo de construção acarretado pelo uso de um tubo com diâmetro maior.

A queda de pressão ΔP é igual à perda de pressão ΔP_L no caso de um tubo horizontal, mas esse não é o caso dos tubos inclinados ou dos tubos com uma área de seção transversal variável. Isso pode ser mostrado escrevendo a equação da energia para escoamento estacionário, incompressível e unidimensional em termos das cargas como (consulte o Capítulo 5):

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, } u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, } e} + h_L \qquad \textbf{(8–28)}$$

onde $h_{\text{bomba, } u}$ é a carga útil da bomba fornecida ao fluido, $h_{\text{turbina } e}$ é a carga da turbina extraída do fluido, h_L é a perda de carga irreversível entre as seções 1 e 2, V_1 e V_2 são as velocidades médias nas seções 1 e 2, respectivamente, e a_1 e a_2 são os *fatores de correção da energia cinética* nas seções 1 e 2 (é possível mostrar que $a = 2$ para o escoamento laminar completamente desenvolvido e cerca de 1,05 para o escoamento turbulento completamente desenvolvido). A Equação 8–28 pode ser reorganizada como:

$$P_1 - P_2 = \rho(\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2)/2 + \rho g[(z_2 - z_1) + h_{\text{turbina, } e} - h_{\text{bomba, } u} + h_L] \qquad \textbf{(8–29)}$$

Assim, a queda de pressão $\Delta P = P_1 - P_2$ e a perda de pressão $\Delta P_L = \rho g h_L$ para determinada seção de escoamento são equivalentes se (1) a seção de escoamento é horizontal para que não haja efeitos hidrostáticos ou de gravidade ($z_1 = z_2$), (2) a seção de escoamento não envolve nenhum dispositivo de trabalho, como uma bomba ou uma turbina, uma vez que eles alteram a pressão do fluido ($h_{\text{bomba, } u} = h_{\text{turbina, } e} = 0$), (3) a área de seção transversal da seção de escoamento é constante e, portanto, a velocidade média de escoamento é constante ($V_1 = V_2$) e (4) os perfis de velocidade das seções 1 e 2 têm a mesma forma ($a_1 = a_2$).

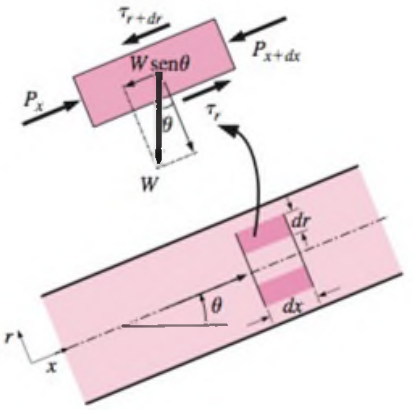


FIGURA 8–15
Diagrama de corpo livre de um elemento diferencial de fluido em forma de anel de raio r, espessura dr e comprimento dx orientado coaxialmente com um tubo inclinado no escoamento laminar completamente desenvolvido.

Tubos Inclinados

As relações para os tubos inclinados podem ser obtidas de modo semelhante com base em um balanço de força na direção do escoamento. A única força adicional neste caso é a componente do peso do fluido na direção do escoamento, cuja intensidade é:

$$W_x = W \operatorname{sen}\theta = \rho g V_{\text{elemento}} \operatorname{sen}\theta = \rho g(2\pi r\, dr\, dx) \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(8–30)}$$

onde θ é o ângulo entre a direção horizontal e a direção do escoamento (Figura 8–15). O balanço de forças da Equação 8–9 agora torna-se:

$$(2\pi r\, dr\, P)_x - (2\pi r\, dr\, P)_{x+dx} + (2\pi r\, dx\, \tau)_r - (2\pi r\, dx\, \tau)_{r+dr} - \rho g(2\pi r\, dr\, dx)\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \textbf{(8–31)}$$

que resulta na equação diferencial:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{dP}{dx} + \rho g \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(8–32)}$$

Seguindo o mesmo procedimento de solução, pode ser mostrado que o perfil de velocidade é:

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx} + \rho g \operatorname{sen}\theta\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \textbf{(8–33)}$$

Também é possível mostrar que as relações da *velocidade média* e da *vazão volumétrica* para o escoamento laminar através dos tubos inclinados são respectivamente:

$$V_{\text{méd}} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta)D^2}{32\mu L} \quad \text{e} \quad \dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta)\pi D^4}{128\mu L} \qquad \textbf{(8–34)}$$

- *Tubo horizontal:* $\dot{V} = \dfrac{\Delta P\, \pi D^4}{128\mu L}$
- *Tubo inclinado:* $\dot{V} = \dfrac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta)\pi D^4}{128\mu L}$
- Escoamento ascendente: $\theta > 0$ e $\operatorname{sen}\theta > 0$
- Escoamento descendente: $\theta < 0$ e $\operatorname{sen}\theta < 0$

FIGURA 8–16
As relações desenvolvidas para o escoamento laminar totalmente desenvolvido através dos tubos horizontais também podem ser usadas nos tubos inclinados, substituindo ΔP por $\Delta P\ \rho g L \operatorname{sen}\theta$.

que são idênticas às relações correspondentes para os tubos horizontais, exceto que ΔP é substituído por $\Delta P - \rho g L \operatorname{sen} \theta$. Assim, os resultados já obtidos para os tubos horizontais também podem ser usados para os tubos inclinados, desde que ΔP seja substituído por $\Delta P - \rho g L \operatorname{sen} \theta$ (Figura 8–16). Observe que $\theta > 0$ e, portanto, sen $\theta > 0$ para o escoamento ascendente e $\theta < 0$ e, portanto, sen $\theta < 0$ para o escoamento descendente.

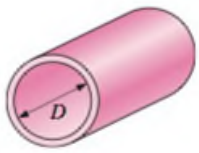
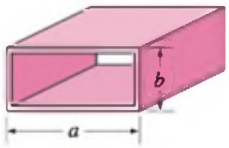
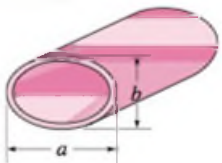
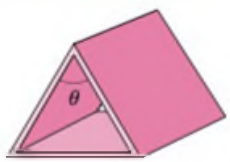
Nos tubos inclinados, o efeito combinado da diferença de pressão e gravidade movimenta o escoamento. A gravidade ajuda o escoamento descendente, mas se opõe ao escoamento ascendente. Assim, diferenças de pressão muito maiores precisam ser aplicadas para manter uma vazão especificada no escoamento ascendente, embora isso torne-se importante apenas para os líquidos, já que a densidade dos gases geralmente é baixa. No caso especial de *não haver escoamento* ($\dot{V} = 0$), temos $\Delta P = \rho g L \operatorname{sen} \theta$, que é o que obtemos da estática dos fluidos (Capítulo 3).

Escoamento Laminar em Tubos Não Circulares

As relações do fator de atrito f são dadas na Tabela 8–1 para o *escoamento laminar completamente desenvolvido* em tubos de diversas seções transversais. O número de Reynolds desses tubos tem por base o diâmetro hidráulico $D_h = 4A_c/p$, onde A_c é a área de seção transversal do tubo e p é seu perímetro molhado.

TABELA 8–1

Fator de atrito do escoamento laminar completamente desenvolvido de diversas seções transversais ($D_h = 4A_c/p$ e $Re = V_{méd}\, D_h/\nu$)

Geometria do tubo	*a/b* ou θ°	Fator de atrito *f*
Círculo	—	64,00/Re
		
Retângulo	*a/b*	
	1	56,92/Re
	2	62,20/Re
	3	68,36/Re
	4	72,92/Re
	6	78,80/Re
	8	82,32/Re
	∞	96,00/Re
Elipse	*a/b*	
	1	64,00/Re
	2	67,28/Re
	4	72,96/Re
	8	76,60/Re
	16	78,16/Re
Triângulo isósceles	θ	
	10°	50,80/Re
	30°	52,28/Re
	60°	53,32/Re
	90°	52,60/Re
	120°	50,96/Re

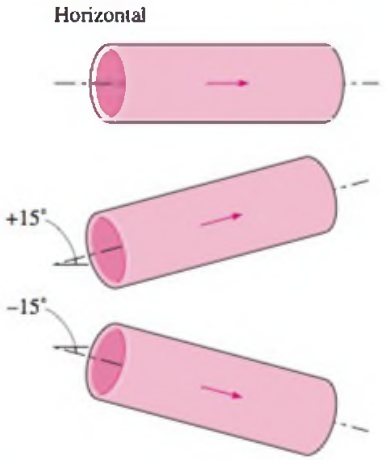


FIGURA 8–17
Esquema do Exemplo 8–1.

EXEMPLO 8–1 Vazões em Tubos Horizontais e Inclinados

Óleo a 20°C (ρ = 888 kg/m^3 e μ = 0,800 kg/m · s) escoa estacionariamente através de um tubo de 5 cm de diâmetro e 40 m de comprimento (Figura 8–17). A pressão na entrada e saída do tubo é medida como 745KPa e 97 kPa, respectivamente. Determine a vazão do óleo através do tubo supondo que o tubo seja (*a*) horizontal, (*b*) inclinado 15° para cima, (*c*) inclinado 15° para baixo. Verifique também se o escoamento através do tubo é laminar.

SOLUÇÃO As leituras de pressão na entrada e saída de um tubo são dadas. As vazões devem ser determinadas para três orientações diferentes e é preciso mostrar que o escoamento é laminar.

Hipóteses **1** O escoamento é estacionário e incompressível. **2** Os efeitos da entrada são desprezíveis e, portanto, o escoamento é totalmente desenvolvido. **3** O tubo não envolve nenhum componente tais como curvas, válvulas e conectores. **4** A seção da tubulação não envolve dispositivos de trabalho como uma bomba ou turbina.

Propriedades A densidade e a viscosidade dinâmica do óleo são dadas por ρ = 888 kg/m^3 e μ = 0,800 kg/m · s, respectivamente.

Análise A queda de pressão através do tubo e da área de seção transversal são:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 745 - 97 = 648 \text{ kPa}$$

$$A_c = \pi D^2/4 = \pi(0{,}05 \text{ m})^2/4 = 0{,}001963 \text{ m}^2$$

(*a*) A vazão para todos os três casos pode ser determinada pela Equação 8–34:

$$\dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta)\pi D^4}{128\mu L}$$

onde θ é o ângulo que o tubo faz com a horizontal. Para o caso horizontal, θ = 0 e, portanto, sen θ = 0. Assim:

$$\dot{V}_{\text{horiz}} = \frac{\Delta P\,\pi D^4}{128\mu L} = \frac{(648 \text{ kPa})\pi(0.05 \text{ m})^4}{128(0{,}800 \text{ kg/m} \cdot \text{s})(40 \text{ m})}\left(\frac{1000 \text{ N/m}^2}{1 \text{ kPa}}\right)\left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}}\right)$$

$$= \mathbf{0{,}00311 \text{ m}^3/\text{s}}$$

(*b*) Para o escoamento ascendente com uma inclinação de 15°, temos θ = +15° e:

$$\dot{V}_{\text{ascen}} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta)\pi D^4}{128\mu L}$$

$$= \frac{[648.000 \text{ Pa} - (888 \text{ kg/m}^3)(9{,}81 \text{ m/s}^2)(40 \text{ m})\operatorname{sen} 15°]\pi(0{,}05 \text{ m})^4}{128(0{,}800 \text{ kg/m} \cdot \text{s})(40 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2}\right)$$

$$= \mathbf{0{,}00267 \text{ m}^3/\text{s}}$$

(*c*) Para o escoamento descendente com uma inclinação de 15°, temos θ = −15° e:

$$\dot{V}_{\text{descen}} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta)\pi D^4}{128\mu L}$$

$$= \frac{[648.000 \text{ Pa} - (888 \text{ kg/m}^3)(9{,}81 \text{ m/s}^2)(40 \text{ m})\operatorname{sen}(-15°)]\pi(0{,}05 \text{ m})^4}{128(0{,}800 \text{ kg/m} \cdot \text{s})(40 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2}\right)$$

$$= \mathbf{0{,}00354 \text{ m}^3/\text{s}}$$

Como esperado, a vazão é a mais alta para o caso do escoamento descendente. A velocidade média do fluido e o número de Reynolds neste caso são:

$$V_{\text{méd}} = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{0{,}00354 \text{ m}^3/\text{s}}{0{,}001963 \text{ m}^2} = 1{,}80 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V_{\text{méd}} D}{\mu} = \frac{(888 \text{ kg/m}^3)(1{,}80 \text{ m/s})(0{,}05 \text{ m})}{0{,}800 \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 100$$

que é muito menor do que 2300. Assim, o escoamento é laminar em todos os três casos e a análise é válida.

Discussão Observe que o escoamento é impulsionado pelo efeito combinado da diferença entre a pressão e a gravidade. Como é possível ver pelas vazões que calculamos, a gravidade se opõe ao escoamento ascendente, mas incrementa o escoamento descendente. A gravidade não tem efeito sobre a vazão no caso horizontal. O escoamento descendente pode ocorrer mesmo na ausência da aplicação de uma diferença de pressão. Para o caso de $P_1 = P_2 = 97$ kPa (ou seja, nenhuma diferença de pressão aplicada), a pressão em todo o tubo permaneceria constante a 97 Pa e o fluido escoaria através do tubo a uma taxa de 0,00043 m³/s sob a influência da gravidade. A vazão aumenta à medida que o ângulo de inclinação do tubo com relação à horizontal aumenta na direção negativa, e atinge seu valor máximo quando o tubo está na vertical.

EXEMPLO 8–2 Queda de Pressão e Perda de Carga em um Tubo

A água a 40°F ($\rho = 62{,}42$ lbm/pés³ e $\mu = 1{,}038 \times 10^{-3}$ lbm/pés · s) escoa através de um tubo horizontal com diâmetro de 0,12 pol (= 0,010 pés) e 30 pés de comprimento estacionariamente a uma velocidade média de 3,0 pés/s (Figura 8–18). Determine (*a*) a perda de carga, (*b*) a queda de pressão e (*c*) o requisito de potência de bombeamento para superar essa queda de pressão.

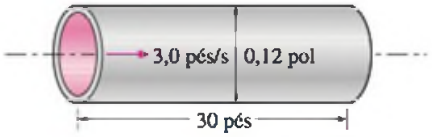


FIGURA 8–18
Esquema do Exemplo 8–2.

SOLUÇÃO A velocidade média de escoamento em um tubo é dada. A perda de carga, a queda de pressão e a potência de bombeamento devem ser determinadas.
Hipóteses **1** O escoamento é estacionário e incompressível. **2** Os efeitos da entrada são desprezíveis e, portanto, o escoamento é totalmente desenvolvido. **3** O tubo não envolve nenhum componente tais como curvas, válvulas e conectores.
Propriedades A densidade e a viscosidade dinâmica da água são dadas por $\rho = 62{,}42$ lbm/pés³ e $\mu = 1{,}038 \times 10^{-3}$ lbm/pés · s, respectivamente.
Análise (*a*) Em primeiro lugar, precisamos determinar o regime de escoamento. O número de Reynolds é:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V_{\text{méd}} D}{\mu} = \frac{(62{,}42\ \text{lbm/pés}^3)(3\ \text{pés/s})(0{,}01\ \text{pé})}{1{,}038 \times 10^{-3}\ \text{lbm/pé} \cdot \text{s}} = 1803$$

que é menor do que 2300. Assim, o escoamento é laminar. Então, o fator de atrito e a perda de carga tornam-se:

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64}{1803} = 0{,}0355$$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V_{\text{méd}}^2}{2g} = 0{,}0355 \frac{30\ \text{pés}}{0{,}01\ \text{pé}} \frac{(3\ \text{pés/s})^2}{2(32{,}2\ \text{pés/s}^2)} = \mathbf{14{,}9\ pés}$$

(*b*) Observando que o tubo é horizontal e que seu diâmetro é constante, a queda de pressão no tubo é devida totalmente às perdas por atrito e é equivalente à perda de pressão:

$$\Delta P = \Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{\text{méd}}^2}{2} = 0{,}0355 \frac{30\ \text{pés}}{0{,}01\ \text{pé}} \frac{(62{,}42\ \text{lbm/pés}^3)(3\ \text{pés/s})^2}{2} \left(\frac{1\ \text{lbf}}{32{,}2\ \text{lbm} \cdot \text{pés/s}^2} \right)$$

$$= \mathbf{929\ lbf/pés^2 = 6{,}45\ psi}$$

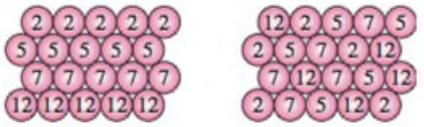
(*c*) A vazão em volume e os requisitos de potência de bombeamento são:

$$\dot{V} = V_{\text{méd}} A_c = V_{\text{méd}} (\pi D^2/4) = (3\ \text{pés/s})[\pi (0{,}01\ \text{pé})^2/4] = 0{,}000236\ \text{pé}^3/\text{s}$$

$$\dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{V}\, \Delta P = (0{,}000236\ \text{pé}^3/\text{s})(929\ \text{lbf/pé}^2) \left(\frac{1\ \text{W}}{0{,}737\ \text{lbf} \cdot \text{pé/s}} \right) = \mathbf{0{,}30\ W}$$

Assim, a entrada de potência na quantidade de 0,30 W é necessária para superar as perdas por atrito no escoamento devido à viscosidade.

Discussão A elevação de pressão fornecida por uma bomba quase sempre dada por um fabricante de bombas em unidades de carga (Capítulo 14). Assim, a bomba desse escoamento precisa fornecer 14,9 pés de carga de água para superar a perda irreversível de carga.



(*a*) Antes da turbulência (*b*) Depois da turbulência

FIGURA 8–19
A mistura intensa do escoamento turbulento coloca em contato partículas de fluido com momentos diferentes e, portanto, incrementa a transferência de momento.

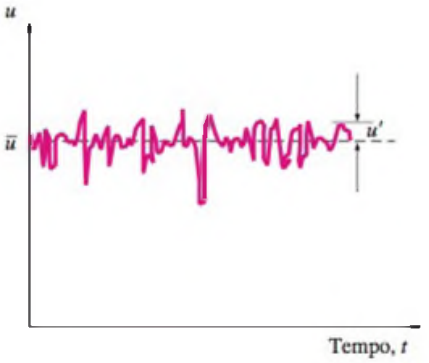
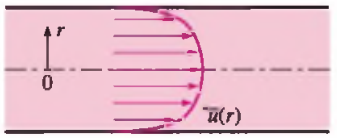


FIGURA 8–20
As flutuações da componente da velocidade u com o tempo em um local especificado no escoamento turbulento.



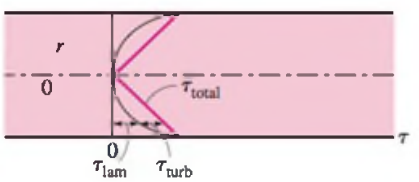


FIGURA 8–21
O perfil de velocidade e a variação da tensão de cisalhamento com a distância radial do escoamento turbulento em um tubo.

8–5 • ESCOAMENTO TURBULENTO EM TUBOS

A maioria dos escoamentos encontrados na prática da engenharia é turbulento e, portanto, é importante entender como a turbulência afeta a tensão de cisalhamento da parede. Entretanto, o escoamento turbulento é um mecanismo complexo dominado por flutuações e, apesar da tremenda quantidade de trabalho realizada nessa área pelos pesquisadores, a teoria do escoamento turbulento permanece em grande parte não desenvolvida. Assim, devemos nos apoiar nos experimentos e nas correlações empíricas ou semi-empíricas desenvolvidas para diversas situações.

O escoamento turbulento é caracterizado por flutuações aleatórias e rápidas de regiões em redemoinho de fluido, chamadas de **turbilhões**, em todo o escoamento. Essas flutuações oferecem um mecanismo adicional para a quantidade de movimento e a transferência de energia. No escoamento laminar, as partículas de fluido escoam de forma ordenada ao longo de linhas de trajetória, e o momento e a energia são transferidos através das linhas de corrente pela difusão molecular. No escoamento turbulento, os turbilhões, em redemoinho, transportam massa, momento e energia para outras regiões do escoamento muito mais rapidamente do que a difusão molecular, aumentando muito a transferência de massa, momento e calor. Como resultado, o escoamento turbulento é associado a valores muito mais altos de coeficientes de atrito, de transferência de calor e de transferência de massa (Figura 8–19).

Mesmo quando o escoamento médio é estacionário, o movimento dos turbilhões em escoamento turbulento causa flutuações significativas nos valores da velocidade, da temperatura, da pressão e até mesmo da densidade (no escoamento compressível). A Figura 8–20 mostra a variação da componente da velocidade instantânea u com o tempo em um local especificado, como pode ser medida com uma sonda de anemômetro de fio quente ou com outro dispositivo sensível. Observamos que os valores instantâneos da velocidade flutuam com relação a um valor médio, o que sugere que a velocidade pode ser expressa como a soma de um *valor médio* $\bar{u}$ e uma *componente flutuante* u':

$$u = \bar{u} + u' \tag{8–35}$$

Esse também é o caso para outras propriedades como a componente da velocidade v na direção y e, portanto, $v = \bar{v} + v'$, $P = \bar{P} + P'$ e $T = \bar{T} + T'$. O valor médio de uma propriedade em algum local é determinado pela média ao longo de um intervalo de tempo que seja suficientemente grande para que a média de tempo se equipare a uma constante. Assim, a média no tempo das componentes flutuantes é zero, isto é $\overline{u'} = 0$. A magnitude de u', em geral, é apenas alguns pontos percentuais de $\bar{u}$, mas as altas freqüências dos turbilhões (na ordem de um milhar por segundo) os torna muito efetivos para o transporte de momento, da energia térmica e da massa. No escoamento turbulento com média temporal *estacionária*, os valores médios das propriedades (indicados por uma barra em cima) são independentes do tempo. As flutuações caóticas das partículas do fluido têm um papel dominante na queda da pressão, e esses movimentos aleatórios devem ser levados em conta na análise juntamente com a velocidade média.

Talvez a primeira idéia que venha à mente seja determinar a tensão de cisalhamento de forma análoga à do escoamento laminar com $\tau = -\mu\, d\bar{u}/dr$, onde $\bar{u}(r)$ é o perfil de velocidade média do escoamento turbulento. Mas os estudos experimentais mostram que esse não é o caso, e a tensão de cisalhamento é muito maior devido às flutuações turbulentas. Assim, é conveniente pensar em duas partes para a tensão de cisalhamento turbulento: a *componente laminar,* que contribui para o atrito entre as camadas na direção do escoamento (expresso por $\tau_{lam} = -\mu\, d\bar{u}/dr$) e a *componente turbulenta,* que representa o atrito entre as partículas de fluido flutuante e o corpo do fluido (denotado por τ_{turb} e relacionado às componentes de flutuação da velocidade). Assim, a *tensão de cisalhamento total* no escoamento turbulento pode ser expressa por:

$$\tau_{total} = \tau_{lam} + \tau_{turb} \tag{8–36}$$

O perfil típico da velocidade média e os valores relativos das componentes laminar e turbulenta da tensão de cisalhamento para o escoamento turbulento em um tubo são dados na Figura 8–21. Observe que embora o perfil de velocidade seja

aproximadamente parabólico no escoamento laminar, ele se torna mais achatado ou "mais cheio" no escoamento turbulento, com uma queda brusca próxima à parede do tubo. Esta característica aumenta com o número de Reynolds e o perfil de velocidade torna-se mais próximo do uniforme, justificando a aproximação usual do perfil de velocidade uniforme no escoamento de tubo turbulento completamente desenvolvido. Lembre-se, porém, de que a velocidade do escoamento na parede de um tubo fixo é sempre zero (condição de não-escorregamento).

Tensão de Cisalhamento Turbulenta

Considere o escoamento turbulento em um tubo horizontal, e o movimento de turbilhões ascendente das partículas de fluido em uma camada de velocidade mais baixa até uma camada adjacente de velocidade mais alta através de uma área diferencial dA como resultado da flutuação da velocidade v', como mostra a Figura 8–22. A vazão em massa das partículas de fluido que se elevam através de dA é $\rho v' dA$, e seu efeito total sobre a camada acima de dA é uma redução de sua velocidade de escoamento média por conta da transferência de momento para as partículas de fluido com velocidade de escoamento média mais baixa. Essa transferência de momento faz com que a velocidade horizontal das partículas de fluido aumente em u' e, portanto, que seu momento na direção horizontal aumente a uma taxa $(\rho v' dA)u'$, que deve ser igual à diminuição do momento na camada de fluido superior. Observando que a força em determinada direção é igual à taxa de variação do momento naquela direção, a força horizontal que age sobre um elemento de fluido acima de dA devido à passagem das partículas de fluido através de dA é $\delta F = (\rho v' dA)(-u') = -\rho u' v' dA$. Portanto, a força de cisalhamento por unidade de área devida ao movimento de turbilhões das partículas de fluido $\delta F/dA = -\rho u' v'$ pode se vista como a tensão de cisalhamento turbulento instantânea. Assim, a **tensão de cisalhamento turbulenta** pode ser expressa por:

$$\tau_{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'} \tag{8–37}$$

onde $\overline{u'v'}$ é a média temporal do produto das componentes da velocidade de flutuação u' e v'. Observe que $\overline{u'v'} \neq 0$ mesmo que $\overline{u'} = 0$ e $\overline{v'} = 0$ (e assim $\overline{u'}\,\overline{v'} = 0$), e os resultados experimentais mostram que $\overline{u'v'}$ em geral é uma quantidade negativa. Termos tais como $-\rho\overline{u'v'}$ ou $-\rho\overline{u'^2}$ são chamados de **tensões de Reynolds** ou **tensões turbulentas**.

Várias formulações semi-empíricas foram desenvolvidas para modelar a tensão de Reynolds em termos dos gradientes de velocidade média para fornecer *fechamento* matemático para as equações do movimento. Tais modelos são chamados de **modelos de turbulência** e discutidos com mais detalhe no Capítulo 15.

O movimento aleatório de turbilhonamento de grupos de partículas se parece com o movimento aleatório das moléculas de um gás — colidindo entre si após percorrer determinada distância e trocar momento no processo. Assim, o transporte de momento pelos turbilhões nos escoamentos turbulentos é como a difusão do momento molecular. Em muitos dos modelos de turbulência mais simples, a tensão de cisalhamento turbulento é expressa de forma análoga, como sugeriu o matemático francês Joseph Boussinesq (1842–1929) em 1877:

$$\tau_{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{8–38}$$

onde μ_t é a **viscosidade de turbilhonamento** ou **viscosidade turbulenta**, que contribui para o transporte de momento pelos vórtices turbulentos. Assim, a tensão de cisalhamento total pode ser expressa de forma conveniente como:

$$\tau_{\text{total}} = (\mu + \mu_t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \rho(\nu + \nu_t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{8–39}$$

onde $\nu_t = \mu_t/\rho$ é a **viscosidade cinemática de turbilhonamento** ou **viscosidade cinemática turbulenta** (também chamada de *difusidade turbilhonar de momento*). O conceito da viscosidade de turbilhonar é muito interessante, mas não tem uso prático a menos que seu valor possa ser determinado. Em outras palavras, a viscosidade

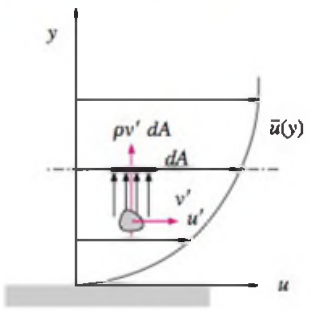
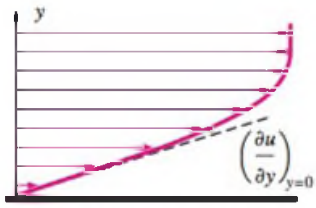
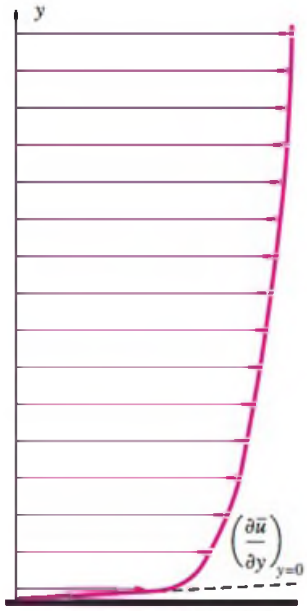


FIGURA 8–22
Partícula de fluido movendo-se na direção ascendente através de uma área diferencial dA como resultado da flutuação da velocidade v'.



Escoamento laminar



Escoamento turbulento

FIGURA 8–23
Os gradientes de velocidade na parede e, portanto, a tensão de cisalhamento da parede, são muito maiores para o escoamento turbulento do que para o escoamento laminar, embora a camada-limite turbulenta seja mais espessa do que a laminar para o mesmo valor da velocidade de corrente livre.

turbilhonar deve ser modelada como função das variáveis do escoamento médio; podemos chamar isso de *fechamento da viscosidade de vórtice*. Por exemplo, no início do século 19, o engenheiro alemão L. Prandtl introduziu o conceito do **comprimento de mistura** l_m, que está relacionado ao tamanho médio dos turbilhões que são primariamente responsáveis pela mistura e expressou a tensão do cisalhamento turbulento como:

$$\tau_{turb} = \mu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2 \qquad (8\text{–}40)$$

Mas esse conceito também tem uso limitado, uma vez que l_m não é uma constante para determinado escoamento (na vizinhança da parede, por exemplo, l_m é quase proporcional à distância da parede) e sua determinação não é fácil. O fechamento matemático final é obtido apenas quando l_m é escrito como função das variáveis do escoamento médio, distância da parede etc.

O movimento de turbilhonamento e, portanto, as difusividades são muito maiores do que seus equivalentes moleculares na região central de uma camada limite turbulenta. O movimento de turbilhonamento perde sua intensidade próximo à parede e diminui na parede, por causa da condição de não-escorregamento (u' e v' são identicamente nulas em uma parede fixa). Assim, o perfil de velocidade varia muito lentamente na região central de uma camada limite turbulenta, mas muito rapidamente na fina camada adjacente à parede, resultando em gradientes de velocidade grandes na superfície da parede. Assim, não é surpresa o fato de que a tensão de cisalhamento da parede é muito maior no escoamento turbulento do que no escoamento laminar (Figura 8–23).

Observe que a difusividade molecular do momento ν (bem como μ) é uma propriedade do fluido, e seu valor está listado nos manuais de fluidos. A difusividade de turbilhonar ν_t (bem como μ_t), porém, *não* é uma propriedade do fluido e seu valor depende das condições do escoamento. A difusividade de turbilhonar ν_t diminui na direção da parede, tornando-se zero na parede. Seu valor varia de zero na parede até vários milhares de vezes o valor da difusividade molecular na região central.

Perfil da Velocidade Turbulenta

Ao contrário do escoamento laminar, as expressões do perfil de velocidade em um escoamento turbulento se baseiam tanto na análise quanto nas medições e, portanto, elas têm natureza semi-empírica, com constantes determinadas por dados experimentais. Considere o escoamento turbulento completamente desenvolvido em um tubo e faça u denotar a velocidade média no tempo na direção axial (e, portanto, tire a barra de $\overline{u}$ por simplicidade).

Os perfis de velocidade típicos para os escoamentos laminar e turbulento totalmente desenvolvidos são dados na Figura 8–24. Observe que o perfil de velocidade é parabólico no escoamento laminar, mas é muito mais cheio no escoamento turbulento, com queda brusca próximo à parede do tubo. O escoamento turbulento ao longo de uma parede pode ser considerado com quatro regiões, caracterizadas pela distância da parede. A camada muito fina próxima à parede na qual os efeitos viscosos dominam é a subcamada **viscosa** (ou **laminar**, ou **linear** ou **de parede**). O perfil de velocidade nessa camada está muito próximo do *linear*, e o escoamento é aerodinâmico. Ao lado da subcamada viscosa está a **camada amortecedora**, na qual os efeitos turbulentos estão se tornando significativos, mas o escoamento ainda é dominado pelos efeitos viscosos. Acima da camada amortecedora está a **camada de superposição** (ou **transição**), também chamada de **subcamada inercial**, na qual os efeitos turbulentos são muito mais significativos, mas ainda não são dominantes. Acima dela está a **camada externa** (ou **turbulenta**) na parte restante do escoamento, na qual os efeitos turbulentos dominam sobre os efeitos (viscosos) da difusão molecular.

As características de escoamento são bastante diferentes nas diferentes regiões e, portanto, é difícil pensar em uma relação analítica para o perfil de velocidade de todo o escoamento, como fizemos para o escoamento laminar. A melhor abordagem no caso turbulento é a identificação das principais variáveis e formas funcionais usando a análise dimensional e, em seguida, os dados experimentais para determinar os valores numéricos de quaisquer constantes.

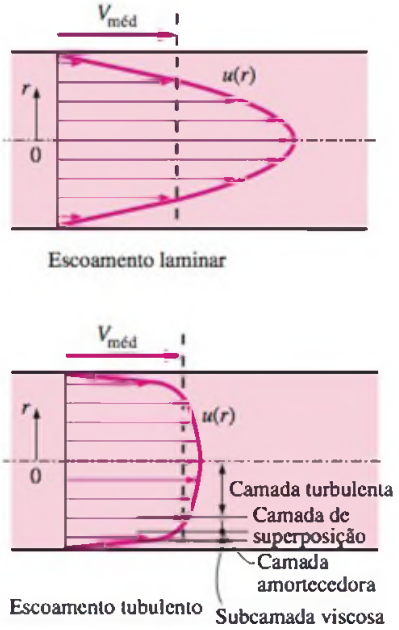


FIGURA 8–24
O perfil de velocidade no escoamento de tubo totalmente desenvolvido é parabólico no escoamento laminar, mas muito mais cheio no escoamento turbulento.

A espessura da subcamada viscosa é muito pequena (em geral, muito menor do que 1% do diâmetro do tubo), mas essa fina camada próxima à parede tem papel dominante nas características do escoamento por conta dos grandes gradientes de velocidade que ela envolve. A parede amortece o movimento de turbilhonamento e, portanto, o escoamento nessa camada é essencialmente laminar e a tensão de cisalhamento consiste na tensão de cisalhamento laminar que é proporcional à viscosidade do fluido. Considerando que a velocidade muda de zero até quase o valor da região central através de uma camada que às vezes não é mais espessa do que um fio de cabelo (quase como uma função degrau), esperamos que o perfil de velocidade dessa camada seja quase linear e os experimentos confirmam isso. Assim, o gradiente de velocidade na subcamada viscosa permanece quase constante em $du/dy = u/y$, e a tensão de cisalhamento da parede pode ser expressa como:

$$\tau_w = \mu \frac{u}{y} = \rho \nu \frac{u}{y} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\nu u}{y} \tag{8–41}$$

onde y é a distância da parede (observe que $y = R - r$ para um tubo circular). A quantidade τ_w/ρ é freqüentemente encontrada na análise dos perfis de velocidade turbulenta. A raiz quadrada de τ_w/ρ tem as dimensões de velocidade e, portanto, é conveniente vê-la como uma velocidade fictícia chamada de **velocidade de atrito** expressa como $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$. Substituindo isso na Equação 8–41, o perfil de velocidade na subcamada viscosa pode ser expresso na forma adimensional como:

Subcamada viscosa: $$\frac{u}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu} \tag{8–42}$$

Essa equação é conhecida como a **lei da parede**, e se correlaciona satisfatoriamente com os dados experimentais das superfícies lisas para $0 \leq yu_*/\nu \leq 5$. Assim, a espessura da subcamada viscosa é de aproximadamente:

Espessura da subcamada viscosa: $$y = \delta_{\text{subcam}} = \frac{5\nu}{u_*} = \frac{25\nu}{u_\delta} \tag{8–43}$$

onde u_δ é a velocidade de escoamento na borda da subcamada viscosa, que está intimamente relacionada à velocidade média em um tubo. Assim, concluímos que *a espessura da subcamada viscosa é proporcional à viscosidade cinemática e inversamente proporcional à velocidade de escoamento média.* Em outras palavras, a subcamada viscosa é comprimida e fica mais fina à medida que a velocidade (e o número de Reynolds) aumenta. Conseqüentemente, o perfil de velocidade torna-se quase plano e, portanto, a distribuição da velocidade torna-se mais uniforme para números de Reynolds muito altos.

A quantidade ν/u_* tem dimensões de comprimento e é chamada de **comprimento viscoso**. Ela é usada para adimensionalizar a distância y da superfície. Na análise da camada limite, é conveniente trabalhar com a distância e a velocidade adimensionalizadas definidas como:

Variáveis adimensionalizadas: $$y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \qquad \text{e} \qquad u^+ = \frac{u}{u_*} \tag{8–44}$$

Assim, a lei da parede (Equação 8–42) torna-se simplesmente:

Lei normalizada da parede: $$u^+ = y^+ \tag{8–45}$$

Observe que a velocidade do atrito u_* é usada para adimensionalizar tanto y quanto u e que y^+ se parece com a expressão do número de Reynolds.

Na camada de superposição, observa-se que os dados experimentais da velocidade se alinham em uma linha reta quando mostrados em um gráfico com relação ao logaritmo da distância à parede. A análise dimensional indica e os experimentos confirmam que a velocidade na camada de superposição é proporcional ao logaritmo da distância, e o perfil da velocidade pode ser expresso por:

A lei logarítmica: $$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B \tag{8–46}$$

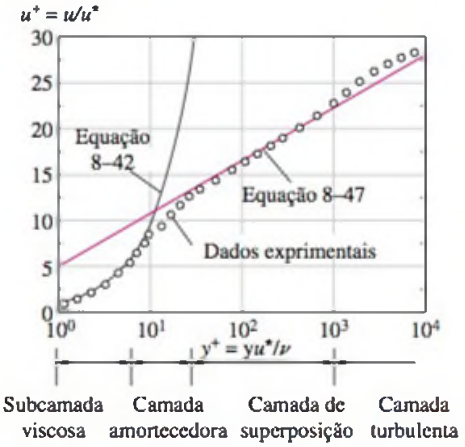


FIGURA 8–25
Comparação entre a lei da parede e os perfis de velocidade da lei logarítmica com dados experimentais para escoamento turbulento completamente desenvolvido em um tubo.

onde κ e B são constantes cujos valores são determinados experimentalmente em torno de 0,40 e 0,50, respectivamente. A Equação 8–46 é conhecida como a **lei logarítmica**. Substituindo os valores das constantes, o perfil de velocidade é determinado por:

$$\textit{Camada de superposição:}\quad \frac{u}{u_*} = 2{,}5 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5{,}0 \quad \text{ou} \quad u^+ = 2{,}5 \ln y^+ + 5{,}0 \qquad \textbf{(8–47)}$$

A lei logarítmica da Equação 8–47 representa satisfatoriamente os dados experimentais de toda a região de escoamento, exceto nas regiões muito próximas à parede e ao centro do tubo, como mostra a Figura 8–25 e, portanto, ela é vista como o *perfil de velocidade universal* para o escoamento turbulento nos tubos ou sobre as superfícies. Observe na figura que o perfil de velocidade da lei logarítmica é bastante preciso para $y^+ > 30$, mas nenhum perfil de velocidade é preciso na camada de amortecimento, ou seja, na região $5 < y^+ < 30$. Além disso, a subcamada viscosa aparece muito maior na figura do que ela realmente é, já que usamos uma escala logarítmica para a distância à parede.

Uma boa aproximação para a camada turbulenta exterior do escoamento do tubo pode ser obtida pelo cálculo da constante B da Equação 8–46 com base no requisito de que a velocidade máxima em um tubo ocorre no eixo central onde $r = 0$. Isolando B na Equação 8–46, fazendo $y = R - r = R$ e $u = u_{máx}$ e substituindo novamente na Equação 8–46 juntamente com $\kappa = 0{,}4$ temos:

$$\textit{Camada turbulenta exterior:}\quad \frac{u_{máx} - u}{u_*} = 2{,}5 \ln \frac{R}{R - r} \qquad \textbf{(8–48)}$$

O desvio da velocidade do valor do eixo central $u_{máx} - u$ é chamado de **defeito de velocidade** e a Equação 8–48 é chamada de **lei do defeito da velocidade.** Essa relação mostra que o perfil de velocidade normalizado na região central e o escoamento turbulento em um tubo dependem da distância do eixo central e não da viscosidade do fluido. Isso não é novidade, uma vez que o movimento de turbilhão é dominante nessa região e o efeito da viscosidade do fluido é desprezível.

Existem inúmeros outros perfis de velocidade empíricos para o escoamento turbulento em tubos. Entre eles, o mais simples e conhecido é o **perfil de velocidade da lei de potência**, expresso por:

$$\textit{Perfil de velocidade da lei de potência:}\quad \frac{u}{u_{máx}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} \quad \text{ou} \quad \frac{u}{u_{máx}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \qquad \textbf{(8–49)}$$

onde o expoente n é uma constante cujo valor depende do número de Reynolds. O valor de n aumenta quando o número de Reynolds aumenta. O valor $n = 7$ em geral aproxima muitos escoamentos na prática, dando origem ao termo *lei de potência um sétimo para o perfil de velocidade*.

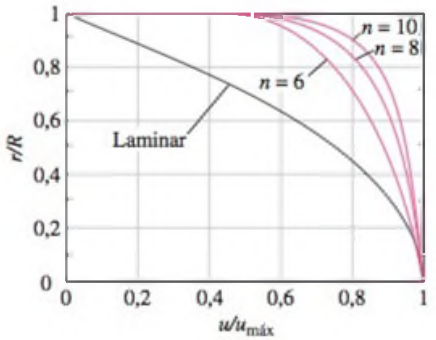


FIGURA 8–26
Os perfis de velocidade da lei de potência para o escoamento turbulento completamente desenvolvido em um tubo para diferentes expoentes e sua comparação com o perfil de velocidade laminar.

A Figura 8–26 mostra diversos perfis de velocidade da lei de potência para $n = 6$, 8 e 10 juntamente com o perfil de velocidade do escoamento laminar completamente desenvolvido para uma comparação. Observe que o perfil de velocidade turbulento é mais cheio do que o laminar, e torna-se mais plano à medida que n (e, portanto, o número de Reynolds) aumenta. Observe também que o perfil da lei de potência não pode ser usado para calcular a tensão de cisalhamento de parede, uma vez que lá ele oferece um gradiente de velocidade de infinito, e não fornece inclinação zero no eixo central. Mas essas regiões de discrepância constituem uma pequena parte do escoamento, e o perfil da lei de potência oferece resultados altamente precisos para o escoamento turbulento através de um tubo.

Apesar da espessura reduzida da subcamada viscosa (em geral, muito menor do que 1% do diâmetro do tubo), as características do escoamento nessa camada são muito importantes, uma vez que definem o escoamento no restante do tubo. Qualquer irregularidade ou rugosidade na superfície perturba essa camada e afeta o escoamento. Assim, ao contrário do escoamento laminar, o fator de atrito no escoamento turbulento é uma função importante da rugosidade da superfície.

É preciso lembrar de que a rugosidade é um conceito relativo e tem significado quando sua altura ε é comparável à espessura da subcamada laminar (que é uma

função do número de Reynolds). Todos os materiais parecem ser "rugosos" em um microscópio com ampliação suficiente. Na mecânica dos fluidos, uma superfície é caracterizada como rugosa quando os picos da rugosidade se estendem para fora da subcamada laminar. Diz-se que uma superfície é lisa quando a subcamada submerge os elementos de rugosidade. As superfícies de vidro e plástico em geral são consideradas hidrodinamicamente lisas.

O Diagrama de Moody

O fator de atrito no escoamento turbulento e totalmente desenvolvido em um tubo depende do número de Reynolds e da **rugosidade relativa** ε/D, que é a razão entre a altura média da rugosidade do tubo e o diâmetro do tubo. A forma funcional dessa dependência não pode ser obtida de uma análise teórica, e todos os resultados disponíveis são obtidos de experimentos meticulosos usando superfícies artificialmente enrugadas (em geral colando grãos de areia de tamanho conhecido nas superfícies internas dos tubos). A maioria dos experimentos foi realizada por um aluno de Prandtl, J. Nikuradse, em 1933, seguido pelos trabalhos de outros. O fator de atrito foi calculado com medições da vazão e da queda da pressão.

Os resultados experimentais obtidos são apresentados nas formas tabular, gráfica e funcional obtidas pelo ajuste de curva dos dados experimentais. Em 1939, Cyril F. Colebrook (1910–1997) combinou os dados disponíveis para o escoamento de transição e o escoamento turbulento, tanto em tubos lisos quanto em tubos rugosos na seguinte relação implícita conhecida como **equação de Colebrook**:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad \text{(escoamento turbulento)} \qquad \textbf{(8–50)}$$

Observamos que o logaritmo da Equação 8–50 está na base 10 em vez de ser um logaritmo natural. Em 1942, o engenheiro norte-americano Hunter Rouse (1906–1996) confirmou a equação de Colebrook e produziu um gráfico de f como função do Re e do produto $\mathrm{Re}\sqrt{f}$. Ele também apresentou a relação do escoamento laminar e uma tabela de rugosidade do tubo comercial. Dois anos mais tarde, Lewis F. Moody (1880–1953) recriou o diagrama de Rouse na forma que é usado hoje. O agora famoso **diagrama de Moody** é dado na Figura A–12 do apêndice. Ele apresenta o fator de atrito de Darcy para o escoamento de tubo como uma função do número de Reynolds e de ε/D em um amplo intervalo. Provavelmente esse é um dos diagramas mais aceitos e usados da engenharia. Embora seja desenvolvido para tubos circulares, ele também pode ser usado para tubos não circulares, substituindo o diâmetro pelo diâmetro hidráulico.

Os tubos disponíveis comercialmente diferem daqueles usados nos experimentos, pois a rugosidade dos tubos do mercado não é uniforme e é difícil descrevê-la com precisão. Os valores de rugosidade equivalentes da maioria dos tubos comerciais são dados na Tabela 8–2, assim como o diagrama de Moody. Mas é preciso lembrar de que esses valores são para tubos novos, e a rugosidade relativa dos tubos pode aumentar com o uso, como resultado da corrosão, acúmulo de resíduos e precipitação. Como resultado, o fator de atrito pode aumentar por um fator de 5 a 10. As condições reais de operação devem ser consideradas no projeto dos sistemas de tubulação. Da mesma forma, os diagramas de Moody e sua equação equivalente de Colebrook envolvem várias incertezas (o tamanho da rugosidade, o erro experimental, o ajuste de curva dos dados etc.) e, portanto, os resultados obtidos não devem ser tratados como "precisos". Em geral eles são considerados precisos até ±15% sobre todo o intervalo da figura.

A equação de Colebrook é implícita em f e, portanto, a determinação do fator de atrito exige alguma iteração, a menos que um aplicativo para a solução de equações, como o EES, seja usado. Uma relação explícita aproximada para f foi dada por S. E. Haaland em 1983 como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1{,}8 \log\left[\frac{6{,}9}{\mathrm{Re}} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right] \qquad \textbf{(8–51)}$$

TABELA 8–2

Valores equivalentes de rugosidade para tubos comerciais novos*

Material	Rugosidade, ε pés	mm
Vidro, plástico	0 (lisa)	
Concreto	0,003–0,03	0,9–9
Bastão de madeira	0,0016	0,5
Borracha, uniformizada	0,000033	0,01
Tubulação de cobre ou latão	0,000005	0,0015
Ferro fundido	0,00085	0,26
Ferro galvanizado	0,0005	0,15
Ferro forjado	0,00015	0,046
Aço inoxidável	0,000007	0,002
Aço comercial	0,00015	0,045

* A incerteza desses valores pode chegar a ±60%.

Rugosidade Relativa ε/D	Fator de atrito f
0,0*	0,0119
0,00001	0,0119
0,0001	0,0134
0,0005	0,0172
0,001	0,0199
0,005	0,0305
0,01	0,0380
0,05	0,0716

* Superfície lisa. Todos os valores são para $\mathrm{Re} = 10^6$ e foram calculados com base na equação de Colebrook.

FIGURA 8–27

O fator de atrito é mínimo para um tubo liso e aumenta com a rugosidade.

Os resultados dessa relação estão naqueles 2% obtidos da equação de Colebrook. Se forem desejados resultados mais precisos, a Equação 8–51 pode ser usada como boa *primeira estimativa* em uma iteração de Newton ao utilizar uma calculadora programável ou uma planilha eletrônica para determinar f com a Equação 8–50.

Fazemos as seguintes observações por meio do diagrama de Moody:

- Para o escoamento laminar, o fator de atrito diminui quando o número de Reynolds diminui, e depende da rugosidade da superfície.
- O fator de atrito é mínimo para um tubo suave (mas ainda não é zero por causa da condição de não-escorregamento) e aumenta com a rugosidade (Figura 8–27). Neste caso, a equação de Colebrook ($\varepsilon = 0$) se reduz à **equação de Prandtl**, expressa por $1/\sqrt{f} = 2{,}0 \log(\mathrm{Re}\sqrt{f}) - 0{,}8$.
- A região de transição do regime laminar para o turbulento ($2300 < \mathrm{Re} < 4000$) é indicada pela área sombreada do diagrama de Moody (Figuras 8–28 e A–12). O escoamento nessa região pode ser laminar ou turbulento, dependendo dos distúrbios no escoamento, ou pode alternar entre laminar e turbulento e, portanto, o fator de atrito também pode alternar entre os valores de escoamento laminar ou turbulento. Os dados desse intervalo são os menos confiáveis. Com rugosidade relativamente pequena, o fator de atrito aumenta na região de transição e se aproxima do valor para os tubos lisos.
- Com números de Reynolds muito grandes (à direita da linha tracejada do diagrama), as curvas do fator de atrito correspondentes às curvas de rugosidade relativas especificadas são quase horizontais e, portanto, os fatores de atrito não dependem do número de Reynolds (Figura 8–28). O escoamento nessa região é chamado de *escoamento turbulento completamente rugoso* ou apenas *escoamento completamente rugoso,* porque a espessura da subcamada viscosa diminui com o aumento do número de Reynolds, e torna-se tão fina que pode ser desprezada em uma comparação com a altura da rugosidade da superfície. Os efeitos viscosos nesse caso são produzidos no escoamento principal primariamente pelos elementos protuberantes da rugosidade, e a contribuição da subcamada laminar é desprezível. A equação de Colebrook na zona completamente *rugosa* ($\mathrm{Re} \to \infty$) se reduz à **equação de von Kármán** expressa por $1/\sqrt{f} = -2{,}0 \log[(\varepsilon/D)/3{,}7]$, que é explícita em f. Alguns autores chamam essa zona de *escoamento completamente (ou totalmente) turbulento,* mas isso é enganoso uma vez que o escoamento para a esquerda da linha azul tracejada da Figura 8–28 também é completamente turbulento.

Nos cálculos, devemos ter certeza de usarmos o diâmetro interno real do tubo, que pode ser diferente do diâmetro nominal. Por exemplo, o diâmetro interno de um tubo de aço cujo diâmetro nominal é 1 pol é 1,049 pol (Tabela 8–3).

TABELA 8–3

Tamanhos-padrão para os tubos de aço da Escala 40

Tamanho Nominal, pol	Diâmetro Interior real, pol
$\frac{1}{8}$	0,269
$\frac{1}{4}$	0,364
$\frac{3}{8}$	0,493
$\frac{1}{2}$	0,622
$\frac{3}{4}$	0,824
1	1,049
$1\frac{1}{2}$	1,610
2	2,067
$2\frac{1}{2}$	2,469
3	3,068
5	5,047
10	10,02

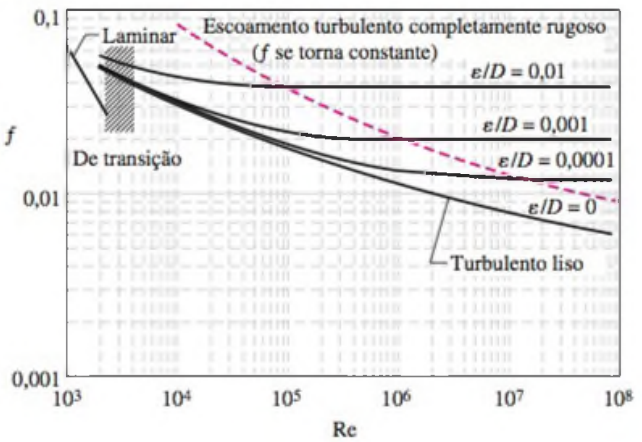


FIGURA 8–28
Para números de Reynolds muito grandes, as curvas do fator de atrito do diagrama de Moody são quase horizontais e, portanto, os fatores de atrito não dependem do número de Reynolds.

Tipos de Problemas de Escoamento de Fluidos

No projeto e análise dos sistemas de tubos que envolva o uso do diagrama de Moody (ou da equação de Colebrook), em geral encontramos três tipos de problemas (o fluido e a rugosidade do tubo são considerados especificados em todos os casos) (Figura 8–29):

1. Determinar a **queda de pressão** (ou a perda de carga) quando o comprimento e o diâmetro do tubo são dados, para uma vazão (ou velocidade) especificada.
2. Determinar a **vazão** quando o comprimento e o diâmetro do tubo são dados, para uma queda de pressão (ou perda de carga) especificada.
3. Determinar o **diâmetro do tubo** quando o comprimento do tubo e a vazão são dados, para a queda de pressão (ou perda de carga) especificada.

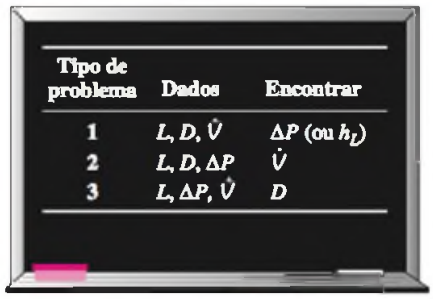


FIGURA 8–29
Os três tipos de problemas encontrados no escoamento em um tubo.

Os problemas do *primeiro tipo* são simples e podem ser resolvidos diretamente usando o diagrama de Moody. Os problemas do *segundo* e *terceiro tipos* normalmente são encontrados em projeto de engenharia (na seleção do diâmetro de tubo, por exemplo, que minimize os custos totais de construção e de tubulação), mas o uso do diagrama de Moody nestes problemas exige uma abordagem iterativa, a menos que um aplicativo para resolver equações seja usado.

Nos problemas do *segundo tipo,* o diâmetro é dado, mas a vazão é desconhecida. Uma boa estimativa para o fator de atrito nesse caso é obtida da região de escoamento completamente turbulento para a rugosidade fornecida. Isso é válido para os números de Reynolds grandes, o que quase sempre ocorre na prática. Após obter a vazão, o fator de atrito pode ser corrigido usando o diagrama de Moody ou a equação de Colebrook, e o processo se repete até que a solução convirja. (Em geral, apenas algumas poucas iterações são necessárias para a convergência com três ou quatro dígitos de precisão.)

Nos problemas do *terceiro tipo,* o diâmetro não é conhecido e, portanto, o número de Reynolds e a rugosidade relativa não podem ser calculados. Assim, iniciamos os cálculos escolhendo um diâmetro de tubo. Em seguida, a queda de pressão calculada para o diâmetro escolhido é comparada com a queda de pressão específica, e os cálculos são repetidos com outro diâmetro de tubo de forma iterativa até a convergência.

Para evitarem iterações cansativas nos cálculos da perda de carga, vazão e diâmetro, Swamee e Jain propuseram as seguintes relações explícitas em 1976. Elas são precisas até 2% do diagrama de Moody:

$$h_L = 1{,}07\frac{\dot{V}^2 L}{gD^5}\left\{\ln\left[\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + 4{,}62\left(\frac{\nu D}{\dot{V}}\right)^{0{,}9}\right]\right\}^{-2} \qquad \begin{matrix}10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}\\ 3000 < \mathrm{Re} < 3\times 10^8\end{matrix} \qquad (8\text{–}52)$$

$$\dot{V} = -0{,}965\left(\frac{gD^5 h_L}{L}\right)^{0{,}5}\ln\left[\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \left(\frac{3{,}17\nu^2 L}{gD^3 h_L}\right)^{0{,}5}\right] \qquad \mathrm{Re} > 2000 \qquad (8\text{–}53)$$

$$D = 0{,}66\left[\varepsilon^{1{,}25}\left(\frac{L\dot{V}^2}{gh_L}\right)^{4{,}75} + \nu\dot{V}^{9{,}4}\left(\frac{L}{gh_L}\right)^{5{,}2}\right]^{0{,}04} \qquad \begin{matrix}10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}\\ 5000 < \mathrm{Re} < 3\times 10^8\end{matrix} \qquad (8\text{–}54)$$

Observe que todas as quantidades são dimensionais e que as unidades são simplificadas para a unidade desejada (por exemplo, para m ou pé na última relação) quando são usadas unidades consistentes. Observando que o diagrama de Moody é preciso até em 15% dos dados experimentais, não devemos ter nenhuma restrição a usar essas relações aproximadas no projeto dos sistemas de tubulações.

EXEMPLO 8–3 Determinação da Perda de Carga em um Tubo de Água

Água a 60°F (ρ = 62,36 lbm/pés^3 e μ = 7,536 × 10^{-4} lbm/pés · s) escoa estacionariamente em um tubo horizontal de 2 pol de diâmetro feito de aço inoxidável a uma vazão de 0,2 pés^3/s (Figura 8–30). Determine a queda de pressão, a perda de carga e a entrada de potência de bombeamento necessária para o escoamento em uma seção do tubo com 200 pés de comprimento.

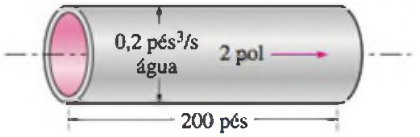


FIGURA 8–30
Esquema do Exemplo 8–3.

SOLUÇÃO A vazão através de um tubo de água especificado é dada. A perda de pressão, a perda de carga e os requisitos de potência de bombeamento devem ser determinados.

Hipóteses **1** O escoamento é estacionário e incompressível. **2** Os efeitos da entrada são desprezíveis e, portanto, o escoamento é totalmente desenvolvido. **3** O tubo não envolve nenhum componente, como curvas, válvulas e conectores. **4** A seção da tubulação não envolve dispositivos de trabalho como uma bomba ou turbina.

Propriedades É dado que a densidade e a viscosidade dinâmica da água são $\rho = 62{,}36$ lbm/pés³ e $\mu = 7{,}536 \times 10^{-4}$ lbm/pés · s, respectivamente.

Análise Percebemos que este é um problema do primeiro tipo, uma vez que a vazão, o comprimento e o diâmetro do tubo são conhecidos. Em primeiro lugar calculamos a velocidade média e o número de Reynolds para determinar o regime de escoamento:

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0{,}2 \text{ pé}^3/\text{s}}{\pi(2/12 \text{ pés})^2/4} = 9{,}17 \text{ pés/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(62{,}36 \text{ lbm/pés}^3)(9{,}17 \text{ pés/s})(2/12 \text{ pés})}{7{,}536 \times 10^{-4} \text{ lbm/pés} \cdot \text{s}} = 126.400$$

que é maior do que 4.000. Assim, o escoamento é turbulento. A rugosidade relativa do tubo é calculada usando a Tabela 8–2:

$$\varepsilon/D = \frac{0{,}000007 \text{ pé}}{2/12 \text{ pés}} = 0{,}000042$$

O fator de atrito correspondente a essa rugosidade relativa e a esse número de Reynolds pode ser determinado de forma simples com o diagrama de Moody. Para evitar erros de leitura, determinamos f com a equação de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{0{,}000042}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{126.400\sqrt{f}}\right)$$

Usando um aplicativo para resolver equações ou um esquema iterativo, determinamos que o fator de atrito é $f = 0{,}0174$. Então, a queda de pressão (que neste caso é equivalente à perda de pressão), a perda de carga e a entrada de potência necessária tornam-se:

$$\Delta P = \Delta P_L = f\frac{L}{D}\frac{\rho V^2}{2} = 0{,}0174\,\frac{200 \text{ pés}}{2/12 \text{ pés}}\,\frac{(62{,}36 \text{ lbm/pés}^3)(9{,}17 \text{ pés/s})^2}{2}\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32{,}2 \text{ lbm} \cdot \text{pés/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{1700 \text{ lbf/pés}^2} = \mathbf{11{,}8 \text{ psi}}$$

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0{,}0174\,\frac{200 \text{ pés}}{2/12 \text{ pés}}\,\frac{(9{,}17 \text{ pés/s})^2}{2(32{,}2 \text{ pés/s}^2)} = \mathbf{27{,}3 \text{ pés}}$$

$$\dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{V}\,\Delta P = (0{,}2 \text{ pé}^3/\text{s})(1700 \text{ lbf/pés}^2)\left(\frac{1 \text{ W}}{0{,}737 \text{ lbf} \cdot \text{pé/s}}\right) = \mathbf{461 \text{ W}}$$

Assim, a entrada de potência necessária para superar as perdas por atrito no tubo é 461 W.

Discussão É prática comum escrever nossas respostas finais até três algarismos significativos, muito embora saibamos que os resultados são precisos até no máximo dois algarismos significativos, por conta das imprecisões inerentes da equação de Colebrook, como já foi discutido anteriormente. O fator de atrito também poderia ser determinado facilmente com a relação explícita de Haaland (Equação 8–51). Ela nos daria $f = 0{,}0172$, que está suficientemente próximo de 0,0174. Além disso, o fator de atrito correspondente a $\varepsilon = 0$ neste caso é 0,0171, indicando que os tubos de aço inoxidável podem ser considerados lisos com erro desprezível.

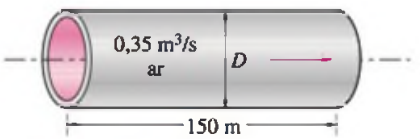


FIGURA 8–31
Esquema do Exemplo 8–4.

EXEMPLO 8–4 Determinação do Diâmetro de um Duto de Ar

O ar aquecido a 1 atm e 35°C deve ser transportado em um duto plástico circular com 150 m de comprimento a uma vazão de 0,35 m³/s (Figura 8–31). Se a perda de carga no tubo não exceder os 20 m, determine o diâmetro mínimo do duto.

SOLUÇÃO A vazão e a perda de carga em um duto de ar são dadas. O diâmetro do duto deve ser determinado.

Hipóteses **1** O escoamento é estacionário e incompressível. **2** Os efeitos da entrada são desprezíveis e, portanto, o escoamento é totalmente desenvolvido. **3** O tubo não envolve nenhum componente, como curvas, válvulas e conectores. **4** O ar é um gás ideal. **5** O duto é liso, uma vez que é feito de plástico. **6** O escoamento é turbulento (a ser verificado).

Propriedades A densidade, a viscosidade dinâmica e a viscosidade cinemática do ar a 35°C são $\rho = 1{,}145\ \text{kg/m}^3$, $\mu = 1{,}895 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}$ e $\nu = 1{,}655 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$.

Análise Este é um problema do terceiro tipo, uma vez que envolve a determinação do diâmetro para vazão e perda de carga específicas. É possível solucionar este problema por meio de três abordagens diferentes: (1) uma abordagem iterativa considerando um diâmetro de tubo, calculando a perda de carga, comparando o resultado com a perda de carga especificada e repetindo os cálculos até que a perda de carga calculada coincida com o valor especificado; (2) escrevendo todas as equações relevantes (deixando o diâmetro como incógnita) e resolvendo-as simultaneamente usando um aplicativo para resolver equações e (3) usando a terceira fórmula de Swamee–Jain. Ilustraremos o uso das duas últimas abordagens.

A velocidade média, o número de Reynolds, o fator de atrito e as relações de perda de carga podem ser expressas por (D está em m, V está em m/s e Re e f são adimensionais):

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0.35\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi D^2/4}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD}{1{,}655 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) = -2{,}0 \log\left(\frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad 20 = f\frac{150\ \text{m}}{D}\frac{V^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)}$$

A rugosidade é aproximadamente zero para um tubo de plástico (Tabela 8–2). Assim, esse é um conjunto de quatro equações em quatro incógnitas, e a sua solução com um aplicativo para resolver equações, como o EES, resulta em:

$$D = \mathbf{0{,}267\ \text{m}}, \quad f = 0{,}0180, \quad V = 6{,}24\ \text{m/s}, \quad \text{e} \quad \text{Re} = 100.800$$

Assim, o diâmetro do duto deve ser maior do que 26,7 cm se a perda de carga não exceder 20 m. Observe que Re > 4.000 e, portanto, a hipótese do escoamento turbulento é satisfeita.

O diâmetro também pode ser determinado diretamente com a terceira fórmula de Swamee-Jain como:

$$D = 0{,}66\left[\varepsilon^{1{,}25}\left(\frac{L\dot{V}^2}{gh_L}\right)^{4{,}75} + \nu\dot{V}^{9{,}4}\left(\frac{L}{gh_L}\right)^{5{,}2}\right]^{0.04}$$

$$= 0{,}66\left[0 + (1{,}655 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})(0{,}35\ \text{m}^3/\text{s})^{9{,}4}\left(\frac{150\ \text{m}}{(9{,}81\ \text{m/s}^2)(20\ \text{m})}\right)^{5{,}2}\right]^{0.04}$$

$$= \mathbf{0{,}271\ \text{m}}$$

Discussão Observe que a diferença entre os dois resultados é menor do que 2%. Assim, a relação simples de Swamee-Jain pode ser usada com confiança. Finalmente, a primeira abordagem (iterativa) exige uma estimativa inicial para D. Se usarmos o resultado de Swamee–Jain como nossa estimativa inicial, o diâmetro converge rapidamente para $D = 0{,}267$ m.

EXEMPLO 8–5 Determinação da Vazão do Ar de um Duto

Reconsidere o Exemplo 8–4. Agora o comprimento do duto dobra enquanto seu diâmetro é mantido constante. Se a perda de carga total deve permanecer constante, determine a queda na vazão através do duto.

SOLUÇÃO O diâmetro e a perda de carga de um duto de ar são dados. A queda na vazão deve ser determinada.

Análise Este é um problema do segundo tipo, uma vez que envolve a determinação da vazão de um tubo com diâmetro e perda de carga especificados. A solução envolve uma abordagem iterativa, uma vez que a vazão (e, portanto, a velocidade de escoamento) não é conhecida.

A velocidade média, o número de Reynolds, o fator de atrito e as relações de perda de carga podem ser expressas por (D está em m, V está em m/s e Re e f são adimensionais):

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} \quad \rightarrow \quad V = \frac{\dot{V}}{\pi(0{,}267\ \text{m})^2/4}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} \quad \rightarrow \quad \text{Re} = \frac{V(0{,}267\ \text{m})}{1{,}655 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad 20 = f\frac{300\ \text{m}}{0{,}267\ \text{m}}\frac{V^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)}$$

Esse é um conjunto de quatro equações em quatro incógnitas, e a sua solução com um aplicativo para resolver equações, como o EES, resulta em:

$$\dot{V} = 0{,}24\ \text{m}^3/\text{s}, \qquad f = 0{,}0195, \qquad V = 4{,}23\ \text{m/s}, \qquad \text{e} \qquad \text{Re} = 68.300$$

Assim, a queda da vazão torna-se:

$$\dot{V}_{\text{queda}} = \dot{V}_{\text{velha}} - \dot{V}_{\text{nova}} = 0{,}35 - 0{,}24 = \mathbf{0{,}11\ m^3/s} \qquad \text{(uma queda de 31\%)}$$

Portanto, para uma perda de carga especificada (ou carga disponível ou potência de bombeamento de ventilador), a vazão cai em cerca de 31%, de 0,35 até 0,24 m³/s quando o comprimento do duto dobra.

Solução Alternativa Se um computador não estiver disponível (como em uma situação de exame), outra opção seria definir um *laço de iteração manual*. Descobrimos que, em geral, conseguimos a melhor convergência estimando primeiro o fator de atrito f e, em seguida, determinando a velocidade V. A equação de V como função de f é:

Velocidade média através do tubo: $$V = \sqrt{\frac{2gh_L}{fL/D}}$$

Agora que V foi calculada, o número de Reynolds pode ser calculado, do qual um fator de atrito corrigido pode ser obtido dos diagramas de Moody ou da equação de Colebrook. Repetimos os cálculos com o valor corrigido de f até a convergência. Usamos $f = 0{,}04$ como estimativa inicial, para fins de ilustração:

Iteração	f (estimativa)	V, m/s	Re	f corrigido
1	0,04	2,955	$4{,}724 \times 10^4$	0,0212
2	0,0212	4,059	$6{,}489 \times 10^4$	0,01973
3	0,01973	4,207	$6{,}727 \times 10^4$	0,01957
4	0,01957	4,224	$6{,}754 \times 10^4$	0,01956
5	0,01956	4,225	$6{,}756 \times 10^4$	0,01956

Observe que a iteração convergiu para três algarismos em apenas três iterações e para quatro algarismos em apenas quatro iterações. Os resultados finais são idênticos àqueles obtidos com o EES, embora não tenha sido necessário um computador para obtê-los.

Discussão A nova vazão também pode ser determinada diretamente da segunda fórmula de Swamee-Jain:

$$\dot{V} = -0{,}965\left(\frac{gD^5h_L}{L}\right)^{0,5}\ln\left[\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \left(\frac{3{,}17\nu^2L}{gD^3h_L}\right)^{0,5}\right]$$

$$= -0{,}965\left(\frac{(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}267\ \text{m})^5(20\ \text{m})}{300\ \text{m}}\right)^{0,5}$$

$$\times \ln\left[0 + \left(\frac{3{,}17(1{,}655\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})^2(300\ \text{m})}{(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}267\ \text{m})^3(20\ \text{m})}\right)^{0,5}\right]$$

$$= 0{,}24\ \text{m}^3/\text{s}$$

Observe que o resultado da relação de Swamee-Jain é igual (até dois algarismos significativos) àquele obtido com a equação Colebrook utilizando o ESS ou usando nossa técnica de iteração manual. Assim, a relação simples de Swamee-Jain pode ser empregada com confiança.

8–6 • PERDAS MENORES

O fluido de um sistema de tubulação típico passa através de diversas conexões, válvulas, curvas, cotovelos, tês, entradas, saídas, extensões e reduções, além dos tubos. Essas componentes interrompem o escoamento suave do fluido e causam perdas adicionais devido à separação do escoamento e à mistura que eles induzem. Em um sistema típico com tubos longos, essas perdas são menores se comparadas à perda total de carga dos tubos (as **grandes perdas**) e são chamadas de **perdas menores**. Embora em geral isso seja verdadeiro, em alguns casos as perdas menores podem ser maiores do que as grandes perdas. Esse é o caso, por exemplo, nos sistemas com várias curvas e válvulas em uma distância curta. A perda de carga introduzida por uma válvula completamente aberta, por exemplo, pode ser desprezível. Mas uma válvula parcialmente fechada pode causar a maior perda de carga no sistema, como deixa claro a queda da vazão. O escoamento através de válvulas e conexões é muito complexo, e uma análise teórica em geral não é plausível. Assim, as perdas menores são determinadas experimentalmente, em geral pelos fabricantes dos componentes.

As perdas menores em geral são expressas em termos do **coeficiente de perda** K_L (também chamado de **coeficiente de resistência**), definido por (Figura 8–32):

Coeficiente de perda:
$$K_L = \frac{h_L}{V^2/(2g)} \tag{8–55}$$

onde h_L é a perda de carga irreversível *adicional* no sistema de tubulação causada pela inserção da componente, e é definida por $h_L = \Delta P_L/\rho g$. Por exemplo, imagine a substituição da válvula da Figura 8–32 por uma seção de tubo com diâmetro constante do local 1 até o local 2. ΔP_L é definido como a queda de pressão de 1 para 2 para o caso *com* a válvula, $(P_1 - P_2)_{\text{válvula}}$, *menos* a queda de pressão que ocorreria na seção de tubo reta imaginária de 1 para 2 *sem* a válvula, $(P_1 - P_2)_{\text{tubo}}$ à mesma vazão. Embora a maioria da perda de carga irreversível ocorra localmente próximo à válvula, parte dela ocorre a jusante da válvula devido aos turbilhões de redemoinho induzido produzidos na válvula e continuam a jusante. Esses turbilhões "desperdiçam" energia mecânica porque, em última análise, são dissipados em calor enquanto o escoamento na seção a jusante do tubo eventualmente retorna às condições completamente desenvolvidas. Ao medir as perdas menores de alguns componentes de perda menor, como os *cotovelos*, por exemplo, o local 2 deve estar consideravelmente longe a jusante (dezenas de diâmetros de tubo) para levar totalmente em conta as perdas irreversíveis adicionais devido a esses turbilhões decadentes.

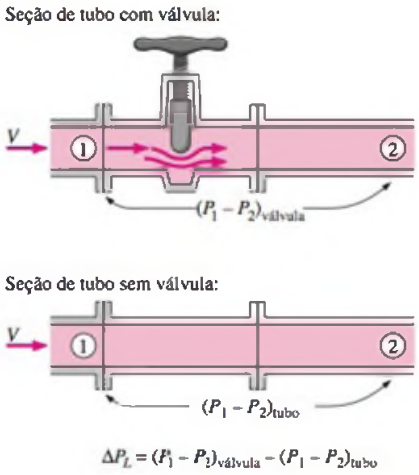


FIGURA 8–32
Para uma seção de um tubo com diâmetro constante e uma componente de perda menor, o coeficiente de perda da componente (como a válvula de gaveta mostrada) é determinado pela medição da perda de pressão adicional que ela causa e dividindo-a pela pressão dinâmica no tubo.

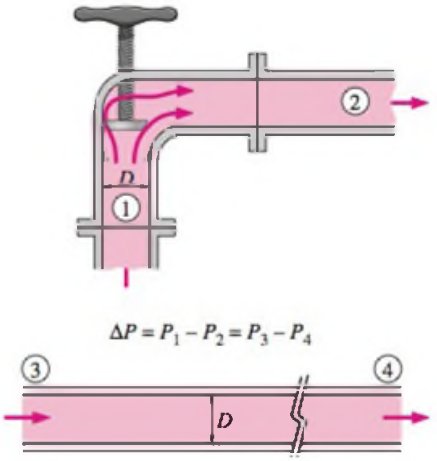
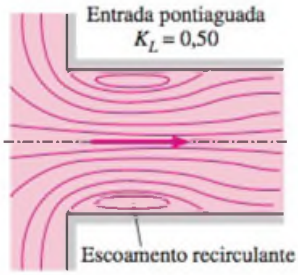


FIGURA 8–33
A perda de carga causada por um componente (como a válvula de ângulo mostrada) é equivalente à perda de carga causada por uma seção do tubo cujo comprimento é o comprimento equivalente.



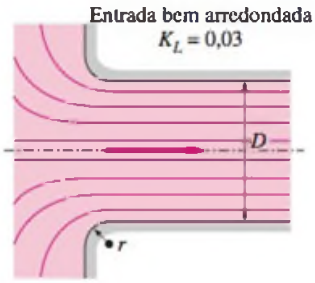


FIGURA 8–34
A perda de carga na entrada de um tubo é quase desprezível para entradas bem arredondadas ($K_L = 0{,}03$ para $r/D > 0{,}2$), mas aumenta até cerca de 0,50 para entradas com bordas pontiagudas.

Quando o diâmetro do tubo a jusante da componente *varia*, a determinação da perda menor é mais complicada ainda. Em todos os casos, porém, ela se baseia na perda irreversível *adicional* da energia mecânica que de outra forma não existiria se a componente da perda menor não estivesse lá. Por questões de simplicidade, você pode imaginar a perda menor ocorrendo *localmente* através da componente de perda menor, mas lembre-se de que a componente influencia o escoamento por diversos diâmetros de tubo a jusante. Por falar nisso, esse é o motivo pelo qual a maioria dos fabricantes de medidores de vazão recomendam a instalação de seus medidores de vazão em um local pelo menos entre 10 e 20 diâmetros de tubo a jusante de quaisquer cotovelos ou válvulas — isso permite que os turbilhões em redemoinho gerados pelo cotovelo ou pela válvula desapareçam em maior medida e o perfil de velocidade se torne totalmente desenvolvido antes de entrar no medidor de vazão. (A maioria dos medidores de vazão é calibrada com um perfil de velocidade completamente desenvolvido na entrada do medidor de vazão, e produzem a melhor exatidão quando tais condições também existem na aplicação real.)

Quando o diâmetro de entrada é igual ao diâmetro de saída, o coeficiente de perda de uma componente também pode ser determinado pela medição da perda de pressão através da componente e pela sua divisão pela pressão dinâmica $K_L = \Delta P_L/(\rho V^2)$. Quando o coeficiente de perda de uma componente é disponível, a perda de carga daquela componente é determinada por:

Perda menor:
$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} \tag{8–56}$$

O coeficiente de perda, em geral, depende da geometria da componente e do número de Reynolds, assim como o fator de atrito. Entretanto, ele em geral é considerado independente do número de Reynolds. Essa é uma aproximação razoável, uma vez que a maioria dos escoamentos na prática tem números de Reynolds grandes e os coeficientes de perda (incluindo o fator de atrito) tendem a ser independentes do número de Reynolds no caso de números de Reynolds grandes.

As perdas menores também são expressas em termos do **comprimento equivalente** L_{equiv}, definido por (Figura 8–33):

Comprimento equivalente:
$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} = f \frac{L_{equiv}}{D} \frac{V^2}{2g} \rightarrow L_{equiv} = \frac{D}{f} K_L \tag{8–57}$$

onde f é o fator de atrito e D é o diâmetro do tubo que contém a componente. A perda de carga causada pela componente é equivalente à perda de carga causada por uma seção do tubo cujo comprimento seja L_{equiv}. Assim, a contribuição de uma componente para a perda de carga pode ser calculada simplesmente pela adição de L_{equiv} ao comprimento total do tubo.

As duas abordagens são usadas na prática, mas o uso dos coeficientes de perda é mais comum. Portanto, também usaremos essa abordagem neste livro. Depois que todos os coeficientes de perda estão disponíveis, a perda total de carga de um sistema de tubos é determinada por:

Perda total de carga (geral):
$$h_{L,\,total} = h_{L,\,grande} + h_{L,\,menor} = \sum_i f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_j K_{L,j} \frac{V_j^2}{2g} \tag{8–58}$$

onde i representa cada seção do tubo com diâmetro constante e j representa cada componente que causa uma perda menor. Se todo o sistema de tubulação analisado tem um diâmetro constante, a Equação 8-58 se reduz a:

Perda total de carga (D = constante):
$$h_{L,\,total} = \left(f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g} \tag{8–59}$$

onde V é velocidade de escoamento média através de todo o sistema (observe que V = constante, uma vez que D = constante).

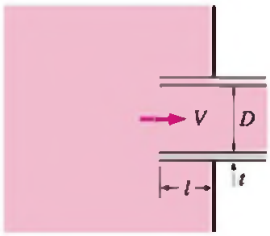
Coeficientes de perda representativos K_L são dados na Tabela 8–4 para entradas, saídas, curvas, variações de área repentinas e graduais e válvulas. Existe uma incerteza considerável nesses valores, uma vez que os coeficientes de perda em geral variam com o diâmetro do tubo, com a rugosidade da superfície, com o

TABELA 8–4

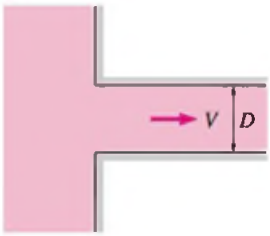
Coeficientes de perda K_L das diversas componentes para escoamento turbulento em um tubo (para uso na relação $hL = KLV^2/(2g)$, onde V é a velocidade média no tubo que contém o componente)*

Entrada do tubo

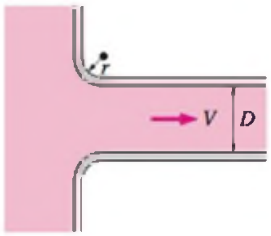
Reentrante: $K_L = 0{,}80$
($t \ll D$ and $l \approx 0{,}1D$)



Aresta viva: $K_L = 0{,}50$

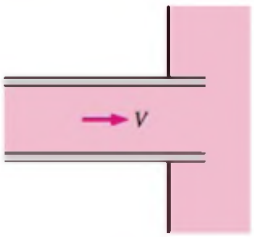


Bem arredondado ($r/D > 0{,}2$): $K_L = 0{,}03$
Ligeiramente arredondado ($r/D = 0{,}1$):
$K_L = 0{,}12$ (*consulte* Figura 8–36)

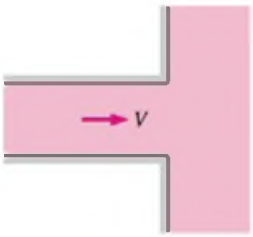


Saída do tubo

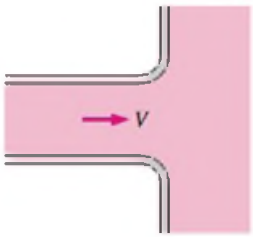
Reentrante: $K_L = \alpha$



Aresta viva: $K_L = \alpha$



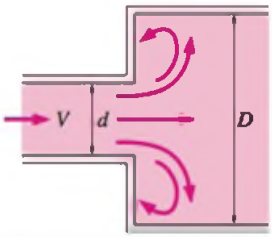
Arredondada: $K_L = \alpha$



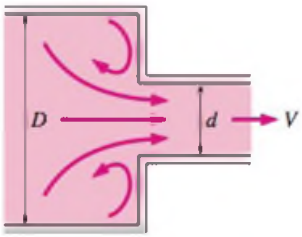
Nota: O fator de correção da energia cinética é $\alpha = 2$ para o escoamento laminar completamente desenvolvido e $\alpha \approx 1{,}05$ para o escoamento turbulento completamente desenvolvido.

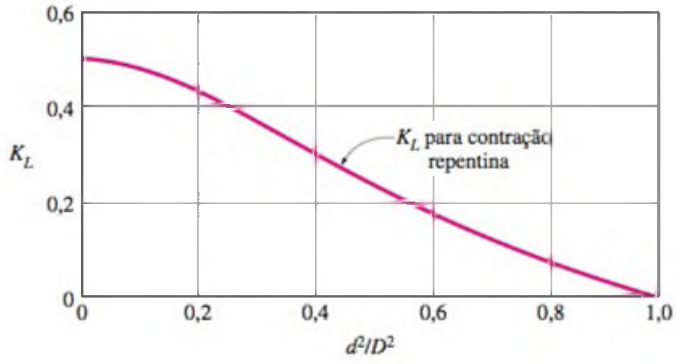
Expansão e Contração Repentinas (com base na velocidade no tubo de diâmetro menor)

Expansão repentina: $K_L = \alpha\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$



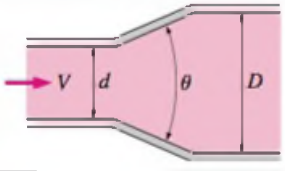
Contração repentina: Consulte o diagrama.





Expansão e Contração Graduais (com base na velocidade do tubo de diâmetro menor)

Contração (para $\theta = 20°$):
$K_L = 0{,}30$ para $d/D = 0{,}2$
$K_L = 0{,}25$ para $d/D = 0{,}4$
$K_L = 0{,}15$ para $d/D = 0{,}6$
$K_L = 0{,}10$ para $d/D = 0{,}8$



Expansão:
$K_L = 0{,}02$ para $\theta = 30°$
$K_L = 0{,}04$ para $\theta = 45°$
$K_L = 0{,}07$ para $\theta = 60°$

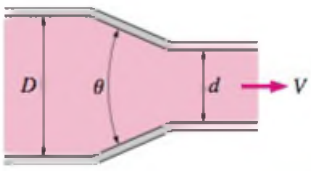
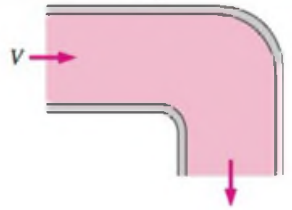


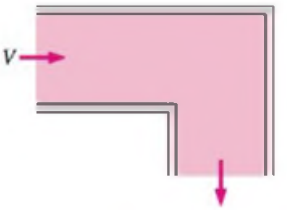
TABELA 8–4 (CONCLUSÃO)

Curvas e Desvios

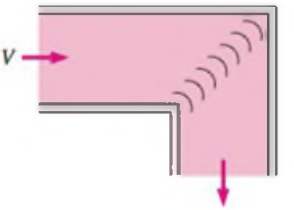
Curva suave de 90°
Flangeado: $K_L = 0{,}3$
Rosqueado: $K_L = 0{,}9$



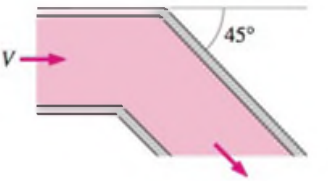
Curva chanfrada de 90° (sem palhetas): $K_L = 1{,}1$



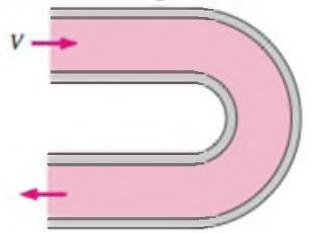
Curva chanfrada de 90° (com palhetas): $K_L = 0{,}2$



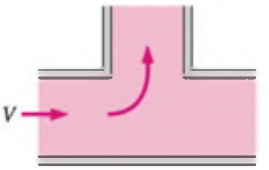
Cotovelo rosqueado de 45°: $K_L = 0{,}4$



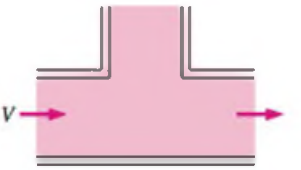
Curva de retorno de 180°:
Flangeado: $K_L = 0{,}2$
Rosqueado: $K_L = 1{,}5$



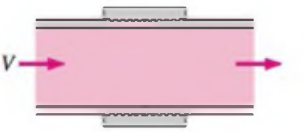
Tê (escoamento de desvio):
Flangeado: $K_L = 1{,}0$
Rosqueado: $K_L = 2{,}0$



Tê (escoamento de linha):
Flangeado: $K_L = 0{,}2$
Rosqueado: $K_L = 0{,}9$



União rosqueada: $K_L = 0{,}08$

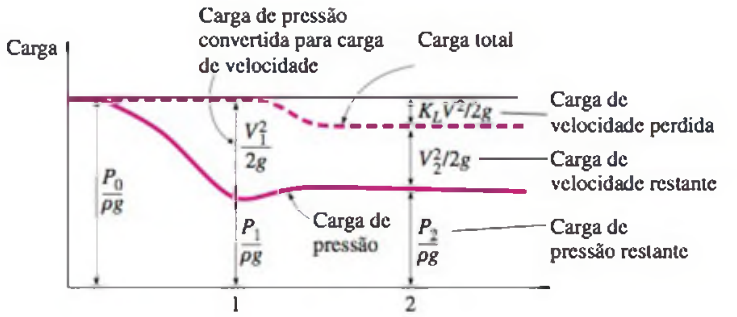


Válvulas

Válvula de globo, completamente aberta: $K_L = 10$
Válvula de ângulo, completamente aberta: $K_L = 5$
Válvula de esfera, completamente aberta: $K_L = 0{,}05$
Válvula de retenção de batente: $K_L = 2$

Válvula de gaveta, completamente aberta: $K_L = 0{,}2$
$\frac{1}{4}$ fechada: $K_L = 0{,}3$
$\frac{1}{2}$ fechada: $K_L = 2{,}1$
$\frac{3}{4}$ fechada: $K_L = 17$

* Esses valores são representativos para os coeficientes de perda. Os valores reais dependem muito do projeto e da fabricação das componentes e podem diferir dos valores dados de forma considerável (particularmente para as válvulas). Os dados reais do fabricante devem ser usados no projeto final.



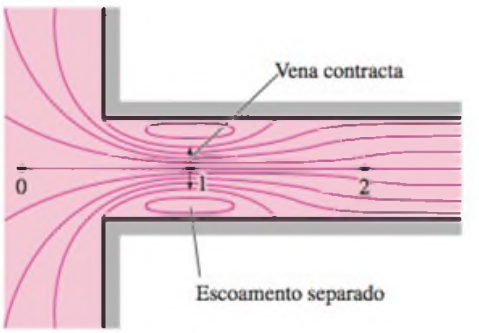


FIGURA 8–35
Representação gráfica da contração do escoamento e da perda associada de carga na entrada de um tubo com borda pontiaguda.

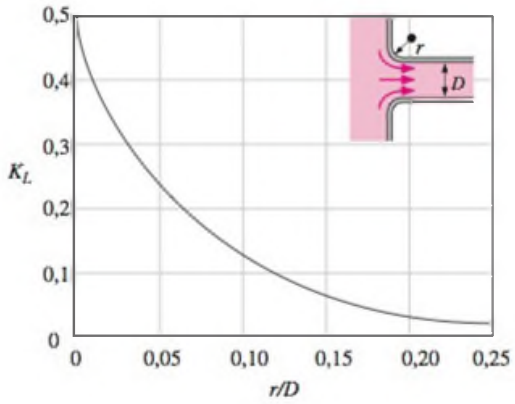


FIGURA 8–36
O efeito do arredondamento de uma entrada de tubo sobre o coeficiente de perda.
De ASHRAE, Handbook of Fundamentals.

número de Reynolds e com os detalhes do projeto. Os coeficientes de perda de duas válvulas aparentemente idênticas de dois fabricantes diferentes, por exemplo, podem diferir por um fator de 2 ou mais. Assim, os dados do fabricante escolhido devem ser consultados no projeto final dos sistemas de tubulação, em vez de serem usados valores representativos dos manuais.

A perda de carga na entrada de um tubo é uma função importante da geometria. Ela é quase desprezível para entradas bem arredondadas ($K_L = 0{,}03$ para $r/D > 0{,}2$), mas aumenta até cerca de 0,50 para entradas com bordas pontiagudas (Figura 8–34). Ou seja, uma entrada pontiaguda faz com que metade da carga de velocidade se perca à medida que o fluido entra no tubo. Isso acontece porque o fluido não pode fazer curvas bruscas de 90° com facilidade, particularmente a altas velocidades. Como resultado, o escoamento separa-se nos cantos, e o escoamento fica restrito à região da **vena contracta** formada na seção média do tubo (Figura 8–35). Assim, uma entrada pontiaguda age como uma restrição de escoamento. A velocidade aumenta na região de contração de seção (e a pressão diminui) por conta da área de escoamento efetivo reduzida e, em seguida, diminui à medida que o escoamento preenche toda a seção transversal do tubo. Haveria uma perda desprezível quando a pressão fosse aumentada de acordo com a equação de Bernoulli (a carga de velocidade simplesmente seria convertida em carga de pressão). Entretanto, esse processo de desaceleração está longe de ser ideal e a dissipação viscosa causada pela mistura intensa e pelos turbilhões converte parte da energia cinética em aquecimento por atrito, como fica evidente por uma ligeira elevação da temperatura do fluido. O resultado final é uma queda da velocidade sem muita recuperação de pressão, e a perda de entrada é uma medida dessa queda de pressão irreversível.

Até mesmo o ligeiro arredondamento das bordas pode resultar em redução significativa do K_L, como mostra a Figura 8–36. O coeficiente de perda se eleva bruscamente (até cerca de $K_L = 0{,}8$) quando o tubo se projeta para o reservatório, uma vez que parte do fluido próximo à lateral, neste caso, é forçado a fazer uma curva de 180°.

O coeficiente de perda de uma saída de tubo submersa quase sempre é listado nos manuais como $K_L = 1$. Mais precisamente, porém, K_L é igual ao fator de correção da energia cinética α na saída do tubo. Embora α esteja próximo de 1 para escoamento de tubo *turbulento* completamente desenvolvido, ele é igual a 2 para escoamento de tubo *laminar* completamente desenvolvido. Assim, para evitar possíveis erros ao analisar o escoamento de tubo laminar, é melhor sempre tomar $K_L = \alpha$ em uma saída de tubo submersa. Em qualquer dessas saídas, seja ela laminar ou turbulenta, o fluido que sai do tubo perde *toda* a sua energia cinética ao se misturar com o fluido do reservatório e eventualmente atinge o repouso pela ação irreversível da viscosidade. Isso é verdadeiro, independentemente da forma da saída (Tabela 8–4 e Figura 8–37). Assim, não há necessidade de arredondar as saídas do tubo.

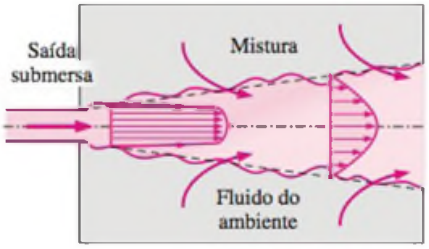


FIGURA 8–37
Toda a energia cinética do escoamento é "perdida" (transformada em energia térmica) através do atrito, à medida que o jato desacelera e se mistura a jusante com o fluido ambiente de uma saída submersa.

Os sistemas de tubulações com freqüência envolvem seções de expansão ou contração *repentinas* ou *graduais* para acomodar variações nas vazões ou nas propriedades como densidade e velocidade. As perdas em geral são muito maiores no caso de expansão e contração *repentina* (ou expansão em ângulo amplo) por causa da

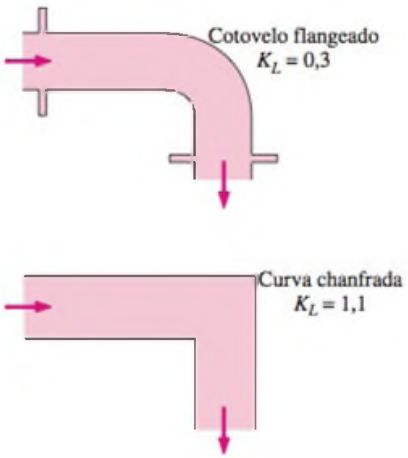


FIGURA 8–38
As perdas durante as variações de direção podem ser minimizadas "facilitando" a curva do fluido com o uso de arcos circulares, em vez de curvas fechadas.

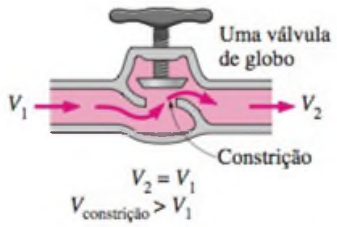


FIGURA 8–39
A grande perda de carga em uma válvula parcialmente fechada deve-se à desaceleração irreversível, separação do escoamento e mistura do fluido de alta velocidade que vem da passagem estreita da válvula.

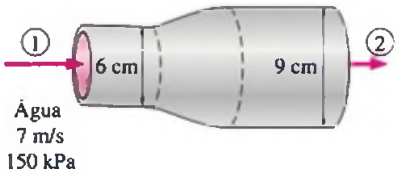


FIGURA 8–40
Esquema do Exemplo 8–6.

separação do fluido. Combinando as equações de conservação da massa, momento e energia, o coeficiente de perda no caso de **expansão repentina** é aproximado por

$$K_L = \alpha\left(1 - \frac{A_{pequena}}{A_{grande}}\right)^2 \qquad \text{(expansão repentina)} \qquad \textbf{(8–60)}$$

onde $A_{pequena}$ e A_{grande} são as áreas de seção transversal dos tubos pequenos e grandes, respectivamente. Observe que $K_L = 0$ quando não há variação de área ($A_{pequena} = A_{grande}$) e $K_L = \alpha$ quando um tubo descarrega em um reservatório ($A_{grande} >> A_{pequena}$). Não existe tal relação para uma contração repentina, e os valores de K_L naquele caso podem ser lidos do diagrama da Tabela 8–4. As perdas devidas à expansão e contração podem ser significativamente reduzidas pela instalação de modificadores de área graduais cônicos (bocais e difusores) entre os tubos pequenos e grandes. Os valores de K_L dos casos representativos de expansão e contração gradual são dados na Tabela 8–4. Observe que nos cálculos de perda de carga, a velocidade no *tubo pequeno* deve ser usada como velocidade de referência na Equação 8–56. As perdas durante a expansão em geral são muito mais altas do que as perdas durante a contração por causa da separação do escoamento.

Os sistemas de tubulação também envolvem variações na direção sem uma variação no diâmetro e tais seções de escoamento são chamadas de *curvas* ou *cotovelos*. As perdas nesses dispositivos são devidas à separação do escoamento (assim como um carro que é jogado para fora da estrada quando entra muito rápido em uma curva) no lado interno e aos escoamentos secundários em redemoinho causados pelos diferentes comprimentos de trajetória. As perdas durante as variações de direção podem ser minimizadas "facilitando" a curva no fluido por meio de arcos circulares (como o cotovelo de 90°), em vez de curvas agudas (como curvas chanfradas) (Figura 8–38). Mas o uso de curvas agudas (e, portanto, sofrer a penalização no coeficiente de perda) pode ser necessário quando o espaço para a curva é limitado. Em tais casos, as perdas podem ser minimizadas pela utilização de aletas de guia convenientemente localizadas que ajudam o escoamento a fazer a curva de forma ordenada sem ser tirado do curso. Os coeficientes de perda de alguns cotovelos e curvas chanfradas, bem como dos tês, são dados na Tabela 8–4. Esses coeficientes não incluem as perdas por atrito ao longo da curva do tubo. Tais perdas devem ser calculadas como nos tubos retos (usando o comprimento do eixo central como o comprimento do tubo) e somadas às outras perdas.

As *válvulas* normalmente são usadas nos sistemas de tubulações para controlar as vazões, simplesmente alterando a perda de carga até que a vazão desejada seja atingida. Nas válvulas é desejável ter um coeficiente de perda muito baixo quando elas estão totalmente abertas, para que causem perda de carga mínima durante a operação a toda carga. Hoje, vários projetos de válvula diferentes, cada um com suas próprias vantagens e desvantagens, são usados normalmente. A *válvula de gaveta* desliza para cima e para baixo como uma barreira, a *válvula de globo* fecha um orifício colocado na válvula, a *válvula de ângulo* é uma válvula de globo com uma curva de 90°, e a *válvula de retenção* permite que o fluido escoe apenas em uma direção, como um diodo em um circuito elétrico. A Tabela 8–4 lista os coeficientes de perda representativos dos projetos mais populares. Observe que o coeficiente de perda aumenta drasticamente à medida que a válvula é fechada (Figura 8–39). Além disso, o desvio dos coeficientes de perda dos vários fabricantes é maior nas válvulas por conta de suas geometrias complexas.

EXEMPLO 8–6 Perda de Carga e Elevação de Pressão durante uma Expansão Gradual

Um tubo de água horizontal com diâmetro de 6 cm se expande gradualmente até um tubo de 9 cm de diâmetro (Figura 8–40). As paredes da seção de expansão têm ângulo de 10° em relação ao eixo. A velocidade média e a pressão da água antes da seção de expansão são de 7 m/s e 150 kPa, respectivamente. Determine a perda de carga na seção de expansão e a pressão no tubo de diâmetro maior.

SOLUÇÃO Um tubo de água horizontal se expande gradualmente para um tubo de diâmetro maior. A perda de carga e a pressão após a expansão devem ser determinadas.

Hipóteses 1 O escoamento é estacionário e incompressível. **2** O escoamento nas seções 1 e 2 é completamente desenvolvido e turbulento com $\alpha_1 = \alpha_2 \cong 1{,}06$.

Propriedades Assumimos a densidade da água como $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$. O coeficiente de perda da expansão gradual do ângulo total incluído de 60°, $\theta = 20°$ e a razão de diâmetro $d/D = 6/9$ é $K_L = 0{,}133$ (por interpolação usando a Tabela 8–4).

Análise Observando que a densidade da água permanece constante, a velocidade a jusante da água é determinada da conservação de massa como:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \rightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{D_1^2}{D_2^2} V_1$$

$$V_2 = \frac{(0{,}06\ \text{m})^2}{(0{,}09\ \text{m})^2}(7\ \text{m/s}) = 3{,}11\ \text{m/s}$$

Então, a perda de carga irreversível na seção de expansão torna-se:

$$h_L = K_L \frac{V_1^2}{2g} = (0{,}133)\frac{(7\ \text{m/s})^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \mathbf{0{,}333\ m}$$

Observando que $z_1 = z_2$ e que não há bombas ou turbinas envolvidas, a equação da energia para a seção de expansão pode ser expressa em termos de cargas como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} + \cancel{h_{\text{bomba, } u}}^{\,0} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2} + \cancel{h_{\text{turbina, } e}}^{\,0} + h_L$$

$$\rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

Isolando P2 e substituindo:

$$P_2 = P_1 + \rho\left\{\frac{\alpha_1 V_1^2 - \alpha_2 V_2^2}{2} - g h_L\right\} = (150\ \text{kPa}) + (1000\ \text{kg/m}^3)$$
$$\times \left\{\frac{1{,}06(7\ \text{m/s})^2 - 1{,}06(3{,}11\ \text{m/s})^2}{2} - (9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}333\ \text{m})\right\}$$
$$\times \left(\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{kPa}}{1\ \text{kN/m}^2}\right)$$
$$= \mathbf{168\ kPa}$$

Assim, apesar da perda de carga (e de pressão), a pressão aumenta de 150 até 168 kPa após a expansão. Isso se deve à conversão da pressão dinâmica em pressão estática quando a velocidade do escoamento médio diminui no tubo maior.

Discussão É de conhecimento geral que uma pressão mais alta a montante é necessária para causar o escoamento, e talvez você se surpreenda ao saber que, apesar da perda, a pressão a jusante *aumentou* após a expansão. Isso acontece porque o escoamento é impulsionado pela soma das três cargas que compreendem a carga total (a saber, carga de pressão, carga de velocidade e carga de elevação). Durante a expansão do escoamento, a carga de velocidade maior a montante é convertida em carga de pressão a jusante e esse aumento supera a perda de carga não recuperável. Da mesma forma, você pode se sentir tentado a solucionar este problema usando a equação de Bernoulli. Tal solução ignoraria a perda de carga (e de pressão associada) e resultaria em uma pressão mais alta incorreta para o fluido a jusante.

8–7 ▪ REDES DE TUBULAÇÕES E SELEÇÃO DE BOMBA

A maioria dos sistemas de tubulação encontrados, como os sistemas de distribuição de água das cidades ou dos estabelecimentos comerciais ou residenciais, envolvem inúmeras conexões paralelas e em série, bem como várias fontes (suprimento de

FIGURA 8–41
Uma rede de tubulações de uma instalação industrial.
Cortesia da UMDE Engineering, Contracting, and Trading. Usada com permissão.

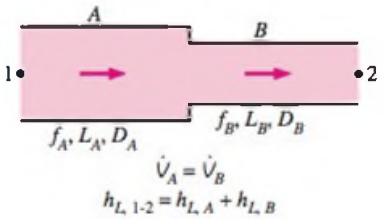


FIGURA 8–42
Para tubos *em série*, a vazão é igual em todos os tubos, e a perda de carga total é a soma das perdas de carga dos tubos individuais.

fluido para o sistema) e cargas ou sumidouros (descargas de fluido do sistema) (Figura 8–41). Um projeto de tubulação pode envolver a criação de um novo sistema ou a expansão de um sistema existente. O objetivo da engenharia em tais projetos é criar um sistema de tubulação que forneça as vazões especificadas às pressões especificadas de forma confiável com custo total mínimo (custo inicial mais operacional e de manutenção). Depois que a configuração do sistema é preparada, a determinação dos diâmetros do tubos e das pressões em todo o sistema, embora permanecendo dentro das restrições do orçamento, em geral exige a solução repetida do sistema até que a solução ótima seja atingida. A modelagem e análise por computador desses sistemas facilitam a tarefa.

Em geral, os sistemas de tubulação envolvem vários tubos conectados uns aos outros em série ou em paralelo, como mostram as Figuras 8–42 e 8–43. Quando os tubos são conectados **em série**, a vazão através de todo o sistema permanece constante independentemente dos diâmetros dos tubos individuais do sistema. Essa é uma conseqüência natural do princípio de conservação da massa para um escoamento estacionário incompressível. A perda de carga total nesse caso é igual à soma das perdas de carga dos tubos individuais do sistema, incluindo perdas menores. As perdas por expansão ou contração nas conexões são atribuídas ao tubo de diâmetro menor, uma vez que os coeficientes de perda por expansão e contração são definidos com base na velocidade média do tubo de menor diâmetro.

Para um tubo que se divide em dois (ou mais) **tubos paralelos** e, em seguida, é reunido em uma junção a jusante, a vazão total é a soma das vazões dos tubos individuais. A queda de pressão (ou perda de carga) de cada tubo individual conectado em paralelo deve ser igual, uma vez que $\Delta P = P_A - P_B$ e as pressões nas junções P_A e P_B são iguais para todos os tubos individuais. Para um sistema de dois tubos paralelos 1 e 2 entre as junções A e B com perdas menores desprezíveis, isso pode ser expresso por:

$$h_{L,1} = h_{L,2} \quad \rightarrow \quad f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} = f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g}$$

Assim, a razão das velocidades médias e das vazões dos dois tubos paralelos tornam-se:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{f_2}{f_1}\frac{L_2}{L_1}\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{A_{c,1}V_1}{A_{c,2}V_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}\left(\frac{f_2}{f_1}\frac{L_2}{L_1}\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/2}$$

Portanto, as vazões relativas dos tubos paralelos são estabelecidas do requisito de que a perda de carga de cada tubo seja a mesma. Esse resultado pode ser estendido a qualquer número de tubos conectados em paralelo. O resultado também será válido para tubos nos quais as perdas menores são significativas se os comprimentos equivalentes às componentes que contribuem para perdas menores forem somados ao comprimento do tubo. Observe que a vazão de um dos ramais paralelos é proporcional a seu diâmetro à potência 5/2, e é inversamente proporcional à raiz quadrada de seu comprimento e fator de atrito.

A análise das redes de tubulações, independentemente de sua complexidade, se baseia em dois princípios simples:

1. *A conservação da massa em todo o sistema deve ser satisfeita.* Isso é feito exigindo que o escoamento total que entra em uma junção seja igual ao

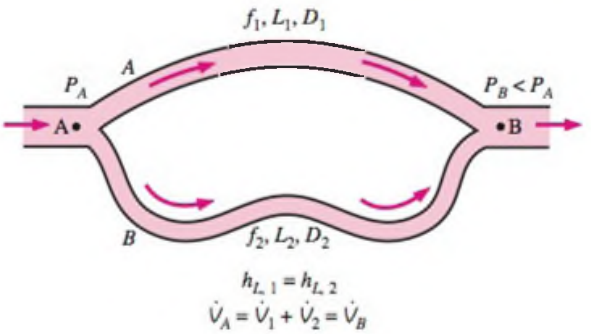


FIGURA 8–43
Para tubos *em paralelo*, a perda de carga é igual em todos os tubos, e a vazão total é a soma das vazões dos tubos individuais.

escoamento total para fora desta junção, em todas as junções do sistema. Além disso, a vazão deve permanecer constante nos tubos conectados em série, independentemente das variações nos diâmetros.

2. *A queda de pressão (e, portanto, a perda de carga) entre duas junções deve ser igual em todas as trajetórias entre as duas junções.* Isso acontece porque a pressão é uma função puntual e não pode ter dois valores distintos em um ponto especificado. Na prática, essa regra é usada exigindo que a soma algébrica das perdas de carga de um laço (para todos os laços) seja zero. (Uma perda de carga é tomada como positiva para o escoamento na direção horária e negativa para o escoamento na direção anti-horária.)

Assim, a análise das redes de tubulação é muito semelhante à análise dos circuitos elétricos, com a vazão correspondendo à corrente elétrica e a pressão correspondendo ao potencial elétrico. Entretanto, a situação é muito mais complexa aqui, uma vez que ao contrário da resistência elétrica a "resistência ao escoamento" é uma função altamente não-linear. Assim, a análise das redes de tubulação exige a solução simultânea de um sistema de equações não-lineares. A análise desses sistemas está além do escopo deste texto introdutório.

Sistemas de Tubulações com Bombas e Turbinas

Quando um sistema de tubulação envolve uma bomba e/ou turbina, a equação da energia para escoamento estacionário expressa em unidade de massa pode ser expressa como (consulte a Seção 5–7):

$$\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + w_{\text{bomba, }u} = \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{turbina, }e} + gh_L \qquad \textbf{(8–61)}$$

Ela também pode ser expressa em termos de cargas como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, }u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, }e} + h_L \qquad \textbf{(8–62)}$$

onde $h_{\text{bomba, }u} = w_{\text{bomba, }u}/g$ é a carga de bomba útil fornecida ao fluido, $h_{\text{turbina, }e} = w_{\text{turbina, }e}/g$ é a carga da turbina extraída do fluido, a é o fator de correção da energia cinética cujo valor é aproximadamente 1 para a maioria dos escoamentos (turbulentos) encontrados e h_L é a perda de carga total na tubulação (incluindo as perdas menores, se elas forem significativas) entre os pontos 1 e 2. A carga da bomba é zero se o sistema de tubulação não envolver uma bomba ou um ventilador, a carga da turbina é zero se o sistema não envolver uma turbina, e ambas são zero se o sistema não envolver nenhum dispositivo produtor de trabalho mecânico ou consumidor de trabalho.

Muitos sistemas de tubulação envolvem uma turbina para movimentar um fluido de um reservatório para outro. Tomando os pontos 1 e 2 nas *superfícies livres* dos reservatórios, a equação da energia neste caso se reduz à carga de bomba útil exigida por (Figura 8–44):

$$h_{\text{bomba, }u} = (z_2 - z_1) + h_L \qquad \textbf{(8–63)}$$

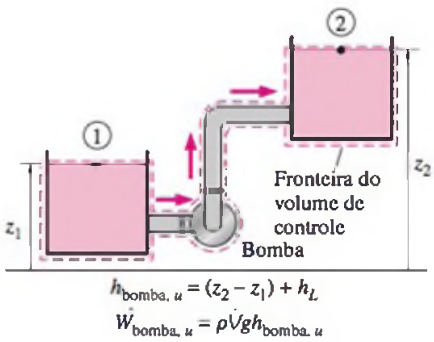
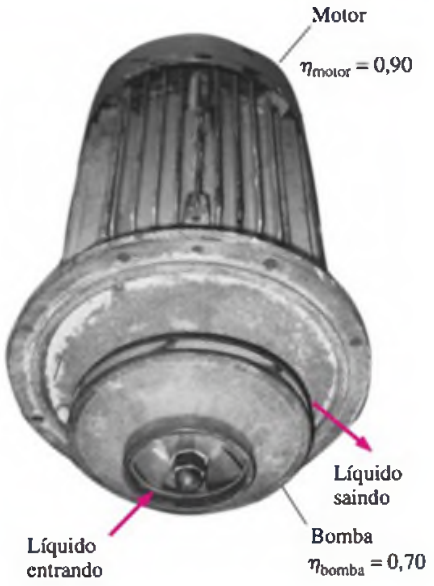


FIGURA 8–44
Quando uma bomba movimenta um fluido de um reservatório para outro, os requisitos de carga útil da bomba são iguais à diferença de elevação entre os dois reservatórios mais a perda de carga.



$$\eta_{bomba\text{-}motor} = \eta_{bomba}\eta_{motor} = 0,70 \times 0,90 = 0,63$$

FIGURA 8–45
A eficiência da combinação bomba-motor é o produto das eficiências da bomba e do motor.
Cortesia de Yunus Çengel.

uma vez que as velocidades nas superfícies livres são desprezíveis e as pressões são atmosféricas. Assim, a carga de bomba útil é igual à diferença de elevação entre os dois reservatórios mais a perda de carga. Se a perda de carga for desprezível comparada a $z_2 - z_1$, a carga de bomba útil é simplesmente igual à diferença de elevação entre os dois reservatórios. No caso de $z_1 > z_2$ (o primeiro reservatório está a uma elevação maior do que o segundo) sem nenhuma bomba, o escoamento é feito por gravidade a uma vazão que causa uma perda de carga igual à diferença de elevação. Um argumento semelhante pode ser usado para a carga da turbina de uma usina hidrelétrica pela substituição de $h_{bomba,\,u}$ da Equação 8–63 por $-h_{turbina,\,e}$.

Depois que a carga de bomba útil é conhecida, a *potência mecânica que precisa ser fornecida pela bomba ao fluido* e a *energia elétrica consumida pelo motor da bomba* para uma vazão especificada são determinadas por:

$$\dot{W}_{bomba,\,eixo} = \frac{\rho \dot{V} g h_{bomba,\,u}}{\eta_{bomba}} \quad \text{e} \quad \dot{W}_{elétrica} = \frac{\rho \dot{V} g h_{bomba,\,u}}{\eta_{bomba\text{-}motor}} \qquad \textbf{(8–64)}$$

onde $\eta_{bomba\text{-}motor}$ é a *eficiência da combinação bomba-motor*, que é o produto das eficiências da bomba e do motor (Figura 8–45). A eficiência bomba-motor é definida como a razão entre a energia mecânica líquida fornecida ao fluido pela bomba e a energia elétrica consumida pelo motor da bomba, e em geral ela varia entre 50% e 85%.

A perda de carga de um sistema de tubulação aumenta (em geral quadraticamente) com a vazão. Um gráfico da carga de bomba útil necessária $h_{bomba,\,u}$ como função da vazão é chamada de **curva de sistema** (ou **de demanda**). A carga produzida por uma bomba, porém, não é uma constante. Tanto a carga quanto a eficiência da bomba variam com a vazão e os fabricantes de bombas oferecem essa variação na forma tabular ou gráfica, como mostra a Figura 8–46. As curvas desses dados determinados experimentalmente para $h_{bomba,\,u}$ e $\eta_{bomba,\,u}$ *versus* $\dot{V}$ são chamadas de **curvas características** (ou **de fornecimento** ou **de desempenho**). Observe que a vazão de uma bomba aumenta à medida que a carga necessária diminui. O ponto de intersecção da curva de carga de bomba com o eixo vertical em geral representa a *carga máxima* que a bomba pode fornecer, enquanto o ponto de intersecção com o eixo horizontal indica a *vazão máxima* (chamada de **fornecimento livre**) que a bomba pode fornecer.

A *eficiência* de uma bomba é suficientemente alta para uma certa variação da combinação de vazão e carga. Assim, uma bomba que pode fornecer a carga e a vazão necessárias não é necessariamente uma boa opção para um sistema de tubulação, a menos que a eficiência da bomba nessas condições seja suficientemente alta. A bomba instalada em um sistema de tubulação operará no ponto onde a *curva do sistema* e a *curva característica* se interceptarem. Esse ponto de intersecção é

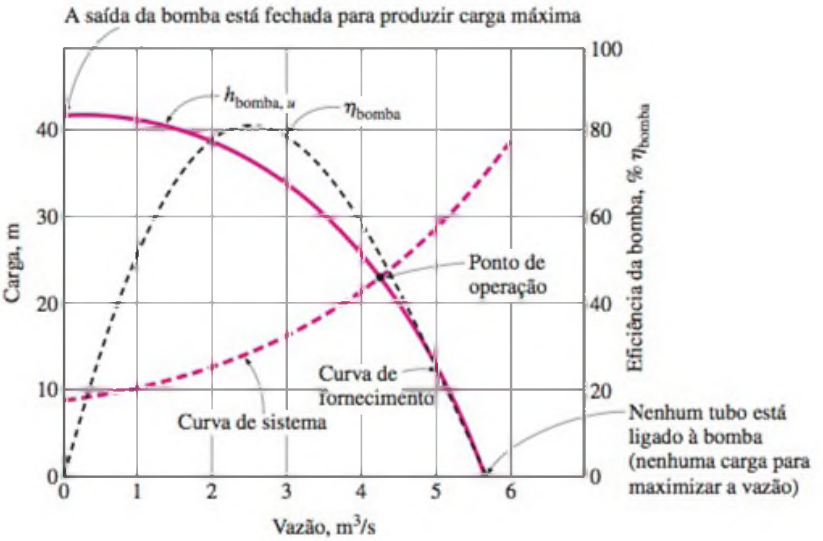


FIGURA 8–46
Curvas características de bomba para bombas centrífugas, a curva de um sistema de tubulações e o ponto operacional.

chamado de **ponto operacional**, como mostra a Figura 8–46. A carga útil produzida pela bomba nesse ponto coincide com os requisitos de carga do sistema para aquela vazão. Além disso, a eficiência da bomba durante a operação é o valor correspondentes àquela vazão.

EXEMPLO 8–7 Bombeamento de Água através de Dois Tubos Paralelos

Água a 20°C deve ser bombeada de um reservatório (z_A = 5 m) para outro a uma elevação maior (z_B = 13 m) através de dois tubos com 36 m de comprimento conectados em paralelo, como mostra a Figura 8–47. Os tubos são feitos de aço comercial, e os diâmetros dos dois tubos são de 4 cm e 8 cm. A água deve ser bombeada por uma combinação bomba-motor com eficiência de 70% que consome 8 kW de energia elétrica durante a operação. As perdas menores e a perda de carga dos tubos que conectam os tubos paralelos aos dois reservatórios são consideradas desprezíveis. Determine a vazão total entre os reservatórios e a vazão através de cada um dos tubos paralelos.

SOLUÇÃO A entrada de potência de bombeamento de um sistema de tubulação com dois tubos paralelos é dada. As vazões devem ser determinadas.

Hipóteses **1** O escoamento é estacionário e incompressível. **2** Os efeitos da entrada são desprezíveis e, portanto, o escoamento é totalmente desenvolvido. **3** As elevações dos reservatórios permanecem constantes. **4** As perdas menores e a perda de carga dos outros tubos além dos paralelos são desprezíveis. **5** Os escoamentos através dos tubos são turbulentos (a ser verificado).

Propriedades A densidade e a viscosidade dinâmica da água a 20°C são ρ = 998 kg/m^3 e μ = 1,002 x 10^{-3} kg/m · s. A rugosidade do tubo de aço comercial é ε = 0,000045 m.

Análise Este problema não pode ser diretamente solucionado, pois as velocidades (ou as vazões) nos tubos não são conhecidas. Assim, normalmente usaríamos aqui uma abordagem de tentativa e erro. Entretanto, hoje em dia os aplicativos para resolver equações, como o EES, estão amplamente disponíveis e, portanto, definiremos as equações a serem solucionadas por um aplicativo para resolver equações. A carga útil fornecida pela bomba ao fluido é determinada por:

$$\dot{W}_{\text{elétrica}} = \frac{\rho \dot{V} g h_{\text{bomba, }u}}{\eta_{\text{bomba - motor}}} \rightarrow 8000\ \text{W} = \frac{(998\ \text{kg/m}^3)\dot{V}(9{,}81\ \text{m/s}^2)h_{\text{bomba, }u}}{0{,}70} \qquad (1)$$

Escolhemos os pontos A e B nas superfícies livres dos dois reservatórios. Observando que o fluido em ambos os pontos é aberto para a atmosfera (e, portanto, $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$) e que as velocidades do fluido em ambos os pontos são zero ($V_A = V_B = 0$), a equação da energia de um volume de controle entre esses dois pontos pode ser simplificada como:

$$\frac{P_A}{\rho g} + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g}^{0} + z_A + h_{\text{bomba, }u} = \frac{P_B}{\rho g} + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g}^{0} + z_B + h_L \rightarrow h_{\text{bomba, }u} = (z_B - z_A) + h_L$$

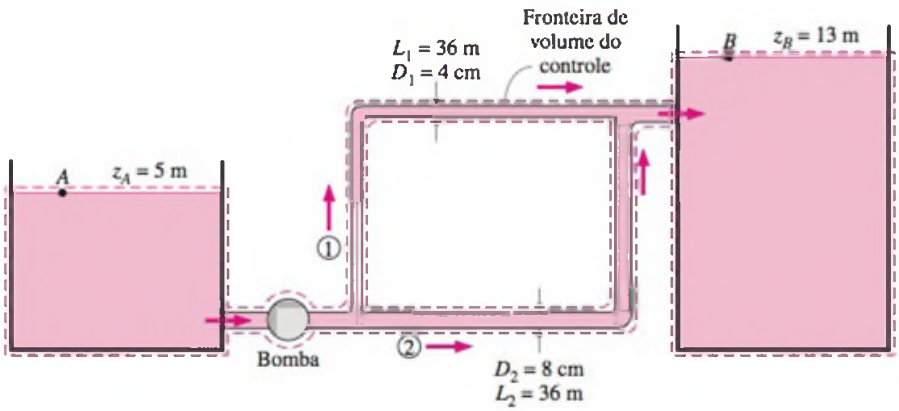


FIGURA 8–47
O sistema de tubulações discutido no Exemplo 8–7.

ou

$$h_{\text{bomba},u} = (13 - 5) + h_L \tag{2}$$

onde

$$h_L = h_{L,1} = h_{L,2} \tag{3)(4}$$

Designamos o tubo com 4 cm de diâmetro como 1 e o tubo com 8 cm de diâmetro como 2. A velocidade média, o número de Reynolds, o fator de atrito e a perda de carga de cada tubo são expressos por:

$$V_1 = \frac{\dot{V}_1}{A_{c,1}} = \frac{\dot{V}_1}{\pi D_1^2/4} \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{\dot{V}_1}{\pi(0{,}04\text{ m})^2/4} \tag{5}$$

$$V_2 = \frac{\dot{V}_2}{A_{c,2}} = \frac{\dot{V}_2}{\pi D_2^2/4} \quad \rightarrow \quad V_2 = \frac{\dot{V}_2}{\pi(0{,}08\text{ m})^2/4} \tag{6}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{\rho V_1 D_1}{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{Re}_1 = \frac{(998\text{ kg/m}^3)V_1(0{,}04\text{ m})}{1{,}002 \times 10^{-3}\text{ kg/m} \cdot \text{s}} \tag{7}$$

$$\text{Re}_2 = \frac{\rho V_2 D_2}{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{Re}_2 = \frac{(998\text{ kg/m}^3)V_2(0{,}08\text{ m})}{1{,}002 \times 10^{-3}\text{ kg/m} \cdot \text{s}} \tag{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D_1}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}_1\sqrt{f_1}}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2{,}0 \log\left(\frac{0{,}000045}{3{,}7 \times 0{,}04} + \frac{2{,}51}{\text{Re}_1\sqrt{f_1}}\right) \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D_2}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}_2\sqrt{f_2}}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2{,}0 \log\left(\frac{0{,}000045}{3{,}7 \times 0{,}08} + \frac{2{,}51}{\text{Re}_2\sqrt{f_2}}\right) \tag{10}$$

$$h_{L,1} = f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} \quad \rightarrow \quad h_{L,1} = f_1 \frac{36\text{ m}}{0{,}04\text{ m}}\frac{V_1^2}{2(9{,}81\text{ m/s}^2)} \tag{11}$$

$$h_{L,2} = f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} \quad \rightarrow \quad h_{L,2} = f_2 \frac{36\text{ m}}{0{,}08\text{ m}}\frac{V_2^2}{2(9{,}81\text{ m/s}^2)} \tag{12}$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \tag{13}$$

Esse é um sistema de 13 equações com 13 incógnitas e sua solução simultânea com um aplicativo para resolver de equações resulta em:

$$\dot{V} = \mathbf{0{,}0300\text{ m}^3/\text{s}}, \quad \dot{V}_1 = \mathbf{0{,}00415\text{ m}^3/\text{s}}, \quad \dot{V}_2 = \mathbf{0{,}0259\text{ m}^3/\text{s}}$$

$$V_1 = 3{,}30\text{ m/s}, \quad V_2 = 5{,}15\text{ m/s}, \quad h_L = h_{L,1} = h_{L,2} = 11{,}1\text{ m}, \quad h_{\text{bomba}} = 19{,}1\text{ m}$$

$$\text{Re}_1 = 131.600, \quad \text{Re}_2 = 410.000, \quad f_1 = 0.0221, \quad f_2 = 0.0182$$

Observe que Re > 4000 para ambos os tubos e, portanto, a hipótese do escoamento turbulento é verificada.

Discussão Os dois tubos paralelos são idênticos, exceto pelo diâmetro do primeiro tubo ser a metade do diâmetro do segundo. Mas apenas 14% da água escoa através do primeiro tubo. Isso mostra a forte dependência entre a vazão (e a perda de carga) e o diâmetro. Além disso, é possível mostrar que se as superfícies dos dois reservatórios estivessem à mesma elevação (e, portanto, $z_A = z_B$), a vazão aumentaria em 20% de 0,0300 para 0,0361 m³/s. Alternativamente, se os reservatórios fossem como dados, mas as perdas de carga irreversíveis fossem desprezíveis, a vazão seria 0,0715 m³/s (um aumento de 138%).

EXEMPLO 8–8 Escoamento de Água em um Tubo Impulsionado pela Gravidade

A água a 10°C escoa de um reservatório grande para um menor através de um sistema de tubos de ferro fundido de 5 cm de diâmetro, como mostra a Figura 8–48. Determine a elevação z_1 para uma vazão de 6 L/s.

SOLUÇÃO A vazão através de um sistema de tubos que conecta dois reservatórios é dada. A elevação da fonte deve ser determinada.

Hipóteses **1** O escoamento é estacionário e incompressível. **2** As elevações dos reservatórios permanecem constantes. **3** Não há bombas ou turbinas na linha.

Propriedades A densidade e a viscosidade dinâmica da água a 10°C são $\rho = 999{,}7\ \text{kg/m}^3$ e $\mu = 1{,}307 \times 10^{-3}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}$. A rugosidade do tubo de ferro fundido é $\varepsilon = 0{,}00026$ m.

Análise O sistema de tubos envolve 89 m de tubos, uma entrada de aresta viva ($K_L = 0{,}5$), dois cotovelos com flange padrão ($K_L = 0{,}3$ cada), uma válvula de gaveta totalmente aberto ($K_L = 0{,}2$) e uma saída submersa ($K_L = 1{,}06$). Escolhemos os pontos 1 e 2 nas superfícies livres dos dois reservatórios. Observando que o fluido em ambos os pontos é aberto para a atmosfera (e, portanto, $P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$) e que as velocidades do fluido em ambos os pontos são zero ($V_1 = V_2 = 0$), a equação da energia de um volume de controle entre esses dois pontos pode ser simplificada para:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}^{\,0} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}^{\,0} + z_2 + h_L \quad \rightarrow \quad z_1 = z_2 + h_L$$

onde

$$h_L = h_{L,\,\text{total}} = h_{L,\,\text{grandes}} + h_{L,\,\text{menores}} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g}$$

uma vez que o diâmetro do sistema de tubos é constante. A velocidade média do tubo e o número de Reynolds são:

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0{,}006\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}05\ \text{m})^2/4} = 3{,}06\ \text{m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(999{,}7\ \text{kg/m}^3)(3{,}06\ \text{m/s})(0{,}05\ \text{m})}{1{,}307 \times 10^{-3}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 117.000$$

O escoamento é turbulento já que Re > 4.000. Observando que $\varepsilon/D = 0{,}00026/0{,}05 = 0{,}0052$, o fator de atrito pode ser determinado com a equação de Colebrook (ou o diagrama de Moody):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{0{,}0052}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{117.000\sqrt{f}}\right)$$

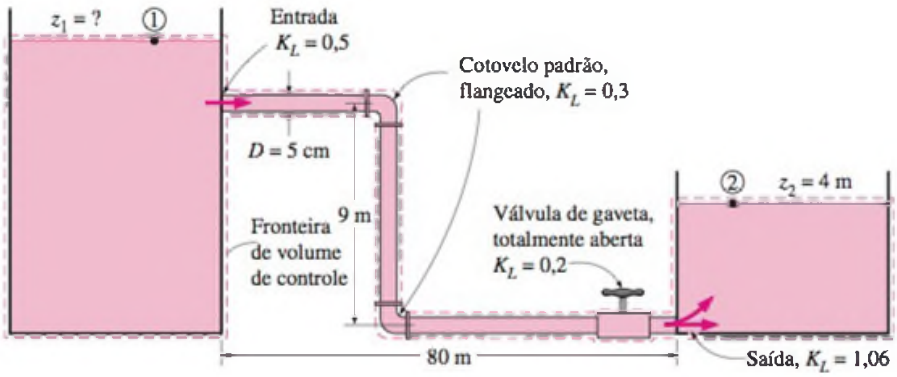


FIGURA 8–48
O sistema de tubulações discutido no Exemplo 8–8.

Isso resulta em $f = 0{,}0315$. A soma dos coeficientes de perda é:

$$\sum K_L = K_{L,\text{entrada}} + 2K_{L,\text{cotovelo}} + K_{L,\text{válvula}} + K_{L,\text{saída}}$$
$$= 0{,}5 + 2 \times 0{,}3 + 0{,}2 + 1{,}06 = 2{,}36$$

Assim, a perda de carga total e a elevação da fonte tornam-se:

$$h_L = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} = \left(0{,}0315\,\frac{89\text{ m}}{0{,}05\text{ m}} + 2{,}36\right)\frac{(3{,}06\text{ m/s})^2}{2(9{,}81\text{ m/s}^2)} = 27{,}9\text{ m}$$

$$z_1 = z_2 + h_L = 4 + 27{,}9 = \mathbf{31{,}9\text{ m}}$$

Portanto, a superfície livre do primeiro reservatório deve estar a 31,9 m acima do nível do solo para garantir o escoamento da água entre os dois reservatórios à vazão especificada.

Discussão Observe que $fL/D = 56{,}1$ neste caso, que é cerca de 24 vezes o coeficiente de perdas menores total. Portanto, se as fontes de perdas menores fossem ignoradas neste caso, o resultado teria cerca de 4% de erro.

É possível mostrar que a perda total de carga seria de 35,9 m (em vez de 27,9 m) se houvesse um fechamento de três quartos da válvula e cairia para 24,8 m se o tubo entre os dois reservatórios fosse reto no nível do solo (eliminando, assim, os cotovelos e a seção vertical do tubo). A perda de carga se reduziria ainda mais (de 24,8 até 24,6 m) pelo arredondamento da entrada. A perda de carga pode ser reduzida de modo significativo (de 27,9 para 16,0 m) substituindo os tubos de ferro fundido por tubos suaves como aqueles feitos de plástico.

EXEMPLO 8–9 Efeito da Descarga sobre a Vazão de um Chuveiro

O encanamento do banheiro de um prédio consiste em tubos de cobre de 1,5 cm de diâmetro com conectores rosqueados, como mostra a Figura 8–49. (*a*) Se a pressão manométrica da entrada do sistema for de 200 kPa durante um banho e o reservatório da descarga estiver cheio (sem escoamento naquele ramal), determine a vazão da água através do chuveiro. (*b*) Determine o efeito da descarga do vaso sobre a vazão no chuveiro. Considere os coeficientes de perda do chuveiro e do reservatório como 12 e 14, respectivamente.

SOLUÇÃO O sistema de encanamento de água fria de um banheiro é dado. A vazão através do chuveiro e o efeito da descarga do vaso sobre a vazão devem ser determinados.

Hipóteses **1** O escoamento é estacionário e incompressível. **2** O escoamento é turbulento e totalmente desenvolvido. **3** O reservatório é aberto para a atmosfera. **4** As cargas de velocidade são desprezíveis.

Propriedades As propriedades da água a 20°C são $\rho = 998\text{ kg/m}^3$, $\mu = 1{,}002 \times 10^{-3}\text{ kg/m} \cdot \text{s}$ e $\nu = \mu/\rho = 1{,}004 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$. A rugosidade dos tubos de cobre é $\varepsilon = 1{,}5 \times 10^{-6}\text{ m}$.

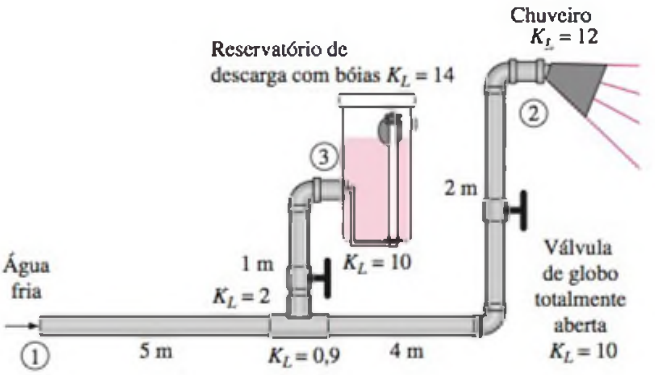


FIGURA 8–49
Esquema do Exemplo 8–9.

Análise Este é um problema do segundo tipo, uma vez que envolve a determinação da vazão para um diâmetro de tubo e perda de carga especificados. A solução envolve uma abordagem iterativa, uma vez que a vazão (e, portanto, a velocidade de escoamento) não é conhecida.

(*a*) o sistema de tubos do chuveiro sozinho envolve 11 m de tubos, um tê com escoamento em linha ($K_L = 0{,}9$), dois cotovelos padrão ($K_L = 0{,}9$ cada), uma válvula de globo totalmente aberta ($K_L = 10$) e um chuveiro ($K_L = 12$). Portanto, $\Sigma K_{L2} = 0{,}9 + 2 \times 0{,}9 + 10 + 12 = 24{,}7$. Observando que o chuveiro está aberta para a atmosfera, e que as cargas de velocidade são desprezíveis, a equação da energia de um volume de controle entre os pontos 1 e 2 pode ser simplificada para:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, u}} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, e}} + h_L$$

$$\rightarrow \qquad \frac{P_{1,\,\text{man}}}{\rho g} = (z_2 - z_1) + h_L$$

Assim, a perda de carga é:

$$h_L = \frac{200.000\ \text{N/m}^2}{(998\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} - 2\ \text{m} = 18{,}4\ \text{m}$$

Além disso,

$$h_L = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} \qquad \rightarrow \qquad 18{,}4 = \left(f\frac{11\ \text{m}}{0{,}015\ \text{m}} + 24.7\right)\frac{V^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)}$$

uma vez que o diâmetro do sistema de tubos é constante. A velocidade média do tubo, o número de Reynolds e o fator de atrito são:

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} \qquad \rightarrow \qquad V = \frac{\dot{V}}{\pi(0{,}015\ \text{m})^2/4}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} \qquad \rightarrow \qquad \text{Re} = \frac{V(0{,}015\ \text{m})}{1{,}004 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

$$\rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{1{,}5 \times 10^{-6}\ \text{m}}{3{,}7(0{,}015\ \text{m})} + \frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

Este é um conjunto de quatro equações em quatro incógnitas, e a sua solução com um aplicativo para resolver equações, como o EES, resulta em:

$$\dot{V} = 0{,}00053\ \text{m}^3/\text{s}, \quad f = 0{,}0218, \quad V = 2{,}98\ \text{m/s}, \quad \text{e} \quad \text{Re} = 44.550$$

Assim, a vazão da água através do chuveiro é **0,53 L/s.**

(*b*) Quando a descarga do vaso é acionada, a bóia se movimenta e abre a válvula. A água descarregada começa a encher o reservatório, resultando em um escoamento paralelo após a conexão tê. A perda de carga e os coeficientes de perda menores do ramal do chuveiro foram determinados em (*a*) como $h_{L,\,2} = 18{,}4$ m e $\Sigma K_{L,\,2} = 24{,}7$, respectivamente. As quantidades correspondentes no ramal do reservatório podem ser determinadas da mesma forma por:

$$h_{L,\,3} = \frac{200.000\ \text{N/m}^2}{(998\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} - 1\ \text{m} = 19{,}4\ \text{m}$$

$$\Sigma K_{L,\,3} = 2 + 10 + 0{,}9 + 14 = 26{,}9$$

As equações relevantes neste caso são:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

$$h_{L\,2} = f_1\frac{5\ \text{m}}{0{,}015\ \text{m}}\frac{V_1^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)} + \left(f_2\frac{6\ \text{m}}{0{,}015\ \text{m}} + 24{,}7\right)\frac{V_2^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = 18{,}4$$

$$h_{L,3} = f_1 \frac{5\text{ m}}{0{,}015\text{ m}} \frac{V_1^2}{2(9{,}81\text{ m/s}^2)} + \left(f_3 \frac{1\text{ m}}{0{,}015\text{ m}} + 26{,}9\right) \frac{V_3^2}{2(9{,}81\text{ m/s}^2)} = 19{,}4$$

$$V_1 = \frac{\dot{V}_1}{\pi(0{,}015\text{ m})^2/4}, \quad V_2 = \frac{\dot{V}_2}{\pi(0{,}015\text{ m})^2/4}, \quad V_3 = \frac{\dot{V}_3}{\pi(0{,}015\text{ m})^2/4}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{V_1(0{,}015\text{ m})}{1{,}004 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}}, \quad \text{Re}_2 = \frac{V_2(0{,}015\text{ m})}{1{,}004 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}}, \quad \text{Re}_3 = \frac{V_3(0{,}015\text{ m})}{1{,}004 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2{,}0 \log\left(\frac{1{,}5 \times 10^{-6}\text{ m}}{3{,}7(0{,}015\text{ m})} + \frac{2{,}51}{\text{Re}_1\sqrt{f_1}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2{,}0 \log\left(\frac{1{,}5 \times 10^{-6}\text{ m}}{3{,}7(0{,}015\text{ m})} + \frac{2{,}51}{\text{Re}_2\sqrt{f_2}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_3}} = -2{,}0 \log\left(\frac{1{,}5 \times 10^{-6}\text{ m}}{3{,}7(0{,}015\text{ m})} + \frac{2{,}51}{\text{Re}_3\sqrt{f_3}}\right)$$

Solucionando essas 12 equações com 12 incógnitas simultaneamente usando um aplicativo para resolver equações, as vazões são determinadas por:

$$\dot{V}_1 = 0{,}00090\text{ m}^3/\text{s}, \quad \dot{V}_2 = 0{,}00042\text{ m}^3/\text{s}, \quad \text{e} \quad \dot{V}_3 = 0{,}00048\text{ m}^3/\text{s}$$

Assim, a descarga do vaso **reduz a vazão da água fria através do chuveiro em 21%,** de 0,53 para 0,42 L/s, fazendo com que a água do chuveiro fique repentinamente muito quente (Figura 8–50).

Discussão Se as cargas de velocidade fossem consideradas, a vazão através do chuveiro seria 0,43 em vez de 0,42 L/s. Assim, a hipótese das cargas de velocidade desprezíveis é razoável neste caso.

Observe que um vazamento em um sistema de tubos causará o mesmo efeito e, portanto, uma queda inexplicável na vazão em um ponto final pode sinalizar um vazamento no sistema.

FIGURA 8–50
A vazão da água fria através de um chuveiro pode ser afetada de modo significativo pela descarga de um vaso próximo.

8–8 • MEDIÇÃO DE VAZÃO E VELOCIDADE

Uma importante área de aplicação da mecânica dos fluidos é a determinação da vazão dos fluidos, e inúmeros dispositivos foram desenvolvidos ao longo dos anos com a finalidade de medir o escoamento. Os medidores de vazão variam amplamente em seu nível de sofisticação, tamanho, custo, exatidão, versatilidade, capacidade, queda de pressão e princípio operacional. Damos uma visão geral dos medidores mais usados para medir a vazão dos líquidos e gases que escoam através de tubos ou dutos. Limitamos nossa consideração ao escoamento incompressível.

Alguns medidores de vazão medem a vazão diretamente, descarregando e recarregando uma câmara de medição de volume conhecido continuamente e controlando o número de descargas por unidade de tempo. Porém, a maioria dos medidores de vazão mede indiretamente a vazão — eles medem a velocidade média V ou uma quantidade que está relacionada à velocidade média tal como pressão e arrasto, e determinam a vazão em volume $\dot{V}$ de:

$$\dot{V} = VA_c \qquad \textbf{(8–65)}$$

onde A_C é a área de seção transversal do escoamento. Portanto, a medição da vazão em geral é feita medindo a velocidade do escoamento, e a maioria dos medidores de vazão são apenas velocímetros usados com a finalidade de medir o escoamento.

A velocidade em um tubo varia de zero na parede até um máximo no centro, e é importante lembrar disso ao tomar medições de velocidade. Para o escoamento laminar, por exemplo, a velocidade média é metade da velocidade do eixo central. Mas isso não acontece com o escoamento turbulento, e talvez seja preciso tomar a média ponderada de diversas medições de velocidades locais para determinar a velocidade média.

As técnicas de medição de vazão variam de muito rústicas até muito elegantes. A vazão da água através de uma mangueira de jardim, por exemplo, pode ser medida simplesmente coletando a água em um balde com volume conhecido e dividindo a quantidade coletada pelo tempo de coleta (Figura 8–51). Uma maneira rústica de estimar a velocidade de escoamento de um rio é soltar um objeto flutuante no rio e medir o tempo de deriva entre dois locais especificados. No outro extremo, alguns medidores de vazão usam a propagação do som nos fluidos dos escoamentos, enquanto outros usam a força eletromotriz gerada quando um fluido passa através de um campo magnético. Nesta seção, discutimos os dispositivos que normalmente são usados para medir a velocidade e a vazão, começando pela sonda estática de Pitot, apresentada no Capítulo 5.

FIGURA 8–51
Uma forma primitiva (mas relativamente exata) de medir a vazão da água através de uma mangueira de jardim envolve a coleta de água em um balde e o registro do tempo de coleta.

Sonda de Pitot e Sonda Estática de Pitot

As **sondas de Pitot** (também chamadas de *tubos de Pitot*) e as **sondas estáticas de Pitot**, cujo nome é uma homenagem ao engenheiro francês Henri de Pitot (1695–1771), são amplamente utilizadas para medição da vazão. Uma sonda de Pitot é simplesmente um tubo com uma tomada de pressão no ponto de estagnação que mede a pressão de estagnação, enquanto uma sonda estática de Pitot tem a tomada de pressão de estagnação e várias tomadas de pressão estáticas na circunferência, e mede tanto a estagnação quanto as pressões estáticas (Figuras 8–52 e 8–53). Pitot foi a primeira pessoa a medir a velocidade com o tubo apontado a montante, enquanto o engenheiro francês Henri Darcy (1803–1858) desenvolveu a maioria dos recursos dos instrumentos que utilizamos hoje, incluindo o uso de pequenas aberturas e a colocação do tubo estático na mesma montagem. Assim, é mais apropriado chamar as sondas estáticas de Pitot de **sondas de Pitot-Darcy**.

A sonda estática de Pitot mede a velocidade local, medindo a diferença de pressão usada juntamente com a equação de Bernoulli. Ela consiste em um tubo duplo fino alinhado ao escoamento e conectado a um medidor de pressão diferencial. O tubo interno está totalmente aberto para o escoamento no nariz e, portanto, ele mede a pressão de estagnação naquele local (ponto 1). O tubo externo é vedado no nariz, mas ele tem orifícios na lateral da parede externa (ponto 2) e, portanto, mede a pressão estática. Para o escoamento incompressível com velocidades suficientemente altas (de modo que os efeitos do atrito entre os pontos 1 e 2 sejam desprezíveis), a equação de Bernoulli se aplica e pode ser expressa como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \qquad \textbf{(8–66)}$$

Observando que $z_1 \cong z_2$ já que os orifícios da pressão estática da sonda estática de Pitot são organizados em uma circunferência em torno do tubo e $V_1 = 0$ por causa das condições de estagnação, a velocidade de escoamento $V = V_2$ torna-se:

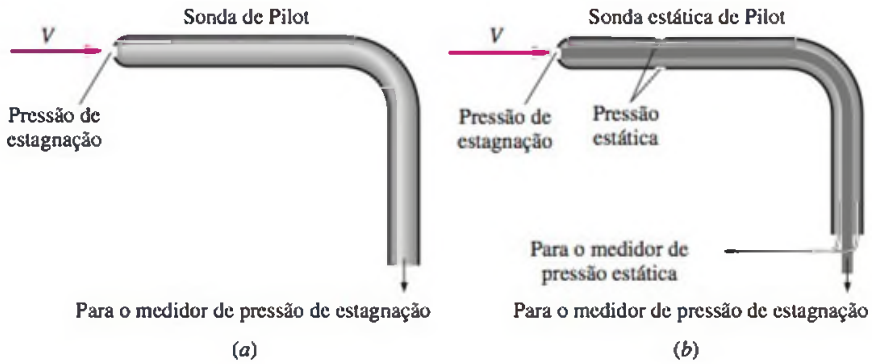


FIGURA 8–52
(*a*) Uma sonda de Pitot mede a pressão de estagnação no nariz da sonda enquanto (*b*) uma sonda estática de Pitot mede a pressão de estagnação e a pressão estática, da qual a velocidade de escoamento pode ser calculada.

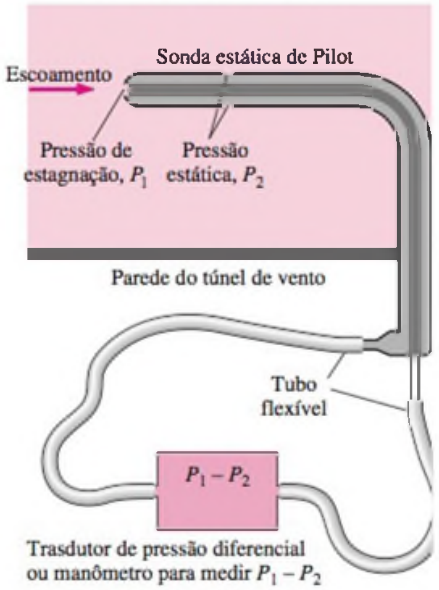


FIGURA 8–53
Medição da velocidade de escoamento com uma sonda estática de Pitot. (Um manômetro também pode ser usado no lugar do transdutor de pressão diferencial.)

Fórmula de Pilot:
$$V = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \tag{8–67}$$

que é conhecida como **fórmula de Pitot**. Se a velocidade é medida em um local onde a velocidade local é igual à velocidade de escoamento média, a vazão volumétrica pode ser determinada por $\dot{V} = VA_C$.

A sonda estática de Pitot é um dispositivo simples, acessível e altamente confiável, uma vez que não tem partes móveis (Figura 8-54). Ela também causa uma queda de pressão muito pequena e, em geral, não atrapalha muito o escoamento. Entretanto, é importante que seja adequadamente alinhada ao escoamento para evitar erros significativos que possam ser causados por mal alinhamento. Da mesma forma, a diferença entre as pressões estática e de estagnação (que é a pressão dinâmica) é proporcional à densidade do fluido e ao quadrado da velocidade de escoamento. Ela pode ser usada para medir a velocidade de líquidos e gases. Observando que os gases têm densidades baixas, a velocidade de escoamento deve ser suficientemente alta quando a sonda estática de Pitot é usada para escoamento de gás, de forma que se desenvolva uma pressão dinâmica mensurável.

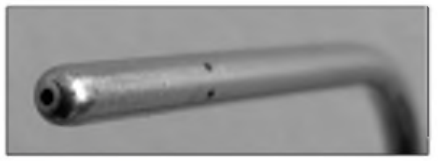


FIGURA 8–54
Detalhe de uma sonda estática de Pitot, mostrando o orifício da pressão de estagnação e dois dos cinco orifícios de pressão estática na circunferência.
Foto de Po-Ya Abel Chuang.

Medidores de Vazão por Obstrução: Orifício, Venturi e Medidores de Bocal

Considere o escoamento em regime permanente incompressível em um tubo horizontal de diâmetro D que é restrito a uma área de escoamento de diâmetro d, como mostra a Figura 8–55. As equações de balanço de massa e de Bernoulli entre um local antes da constrição (ponto 1) e o local onde a constrição ocorre (ponto 2) podem ser escritos como

Balanço de Massa:
$$\dot{V} = A_1V_1 = A_2V_2 \quad \rightarrow \quad V_1 = (A_2/A_1)V_2 = (d/D)^2V_2 \tag{8–68}$$

Equação de Bernoulli ($z_1 = z_2$):
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \tag{8–69}$$

Combinando as Equações 8–68 e 8–69 e isolando a velocidade V_2 temos:

Obstrução (sem perda):
$$V_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \tag{8–70}$$

onde $\beta = d/D$ é a razão do diâmetro. Depois que V_2 é conhecido, a vazão pode ser determinada por $\dot{V} = A_2V_2 = (\pi d^2/4)V_2$.

Essa análise simples mostra que a vazão através de um tubo pode ser determinada restringindo o escoamento e medindo a diminuição na pressão devida ao aumento da velocidade no local da constrição. Observando que a queda de pressão entre dois pontos ao longo do escoamento pode ser medida facilmente por um transdutor de pressão diferencial ou manômetro, é claro que um dispositivo simples de medição da vazão pode ser criado com a obstrução do escoamento. Os medidores de vazão com base nesse princípio são chamados de **medidores de vazão por obstrução**. Eles são amplamente usados para medir vazões de gases e líquidos.

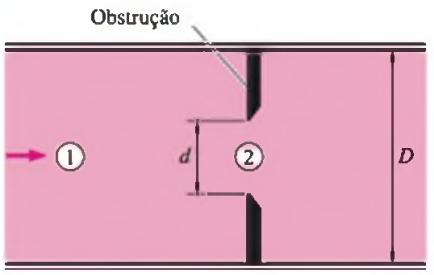


FIGURA 8–55
Escoamento através de uma constrição em um tubo.

A velocidade da Equação 8–70 é obtida considerando que não haja nenhuma perda e, portanto, essa é a velocidade máxima que pode ocorrer no local da constrição. Na verdade, é inevitável que haja alguma perda de pressão devida aos efeitos do atrito e, portanto a velocidade será menor. Além disso, a corrente de fluido continua se contraindo após a obstrução, e a área da vena contracta é menor do que a área de escoamento da obstrução. As duas perdas podem ser calculadas pela incorporação de um fator de correção chamado de **coeficiente de descarga** C_d cujo valor (que é menor do que 1) é determinado experimentalmente. Assim, a vazão dos medidores de vazão por obstrução pode ser expressa como:

Medidor de vazão por obstrução: $$\dot{V} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \quad \textbf{(8–71)}$$

onde $A_0 = A_2 = \pi d^2/4$ é a área de seção transversal do orifício e $\beta = d/D$ é a razão entre o diâmetro do orifício e o diâmetro do tubo. O valor de C_d depende de β e do número de Reynolds $\text{Re} = V_1 D/\nu$, e as correlações entre os diagramas e os ajustes de curvas para C_d estão disponíveis para os diversos tipos de medidores por obstrução.

Dos inúmeros tipos de medidores por obstrução disponíveis, aqueles mais usados são os medidores de orifício, bocais de escoamento e medidores Venturi (Figura 8–56). Os dados determinados experimentalmente para os coeficientes de descarga são expressos por (Miller, 1997).:

Medidor de orifício: $$C_d = 0{,}5959 + 0{,}0312\beta^{2{,}1} - 0{,}184\beta^8 + \frac{91{,}71\beta^{2{,}5}}{\text{Re}^{0{,}75}} \quad \textbf{(8–72)}$$

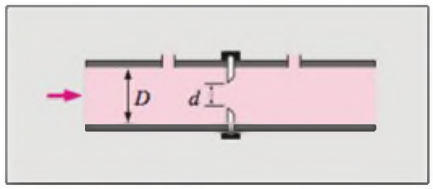
Medidor de bocal: $$C_d = 0{,}9975 - \frac{6{,}53\beta^{0{,}5}}{\text{Re}^{0{,}5}} \quad \textbf{(8–73)}$$

Essas relações são válidas para $0{,}25 < \beta < 0{,}75$ e $10^4 < \text{Re} < 10^7$. Os valores exatos de C_d dependem do projeto particular da obstrução e, portanto, os dados do fabricante devem ser consultados quando estiverem disponíveis. Para escoamentos com números de Reynolds altos ($\text{Re} > 30.000$), o valor de C_d pode ser tomado como 0,96 para os bocais de escoamento e 0,61 para os orifícios.

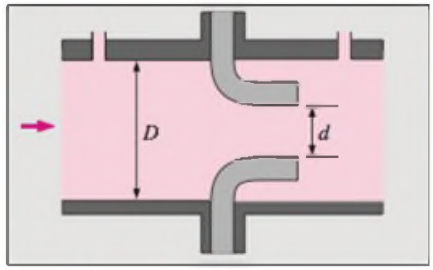
Devido ao seu projeto aerodinâmico, os coeficientes de descarga dos medidores Venturi são muito altos, variando entre 0,95 e 0,99 (os valores mais altos são para os números de Reynolds mais altos) na maioria dos escoamentos. Na falta de dados específicos, podemos tomar $C_d = 0{,}98$ para os medidores Venturi. Da mesma forma, o número de Reynolds depende da velocidade do escoamento, que não é conhecido a priori. Assim, a solução tem natureza iterativa quando as correlações de ajuste de curva são usadas para C_d.

O medidor de orifício tem o projeto mais simples e ocupa espaço mínimo, uma vez que consiste em uma placa com um orifício no meio, mas existem variações consideráveis de projeto (Figura 8–57). Alguns medidores de orifício têm aresta viva, enquanto outros são chanfrados ou arredondados. A variação repentina na área de escoamento nos medidores de orifício causa um redemoinho considerável e, portanto, perda de carga significativa ou perda de pressão permanente, como mostra a Figura 8–58. Nos medidores de bocal, a placa é substituída por um bocal e, portanto, o escoamento no bocal é aerodinâmico. Como resultado, a vena contracta praticamente é eliminada e a perda de carga é pequena. Entretanto, os medidores de bocal de escoamento são mais caros do que os medidores de orifício.

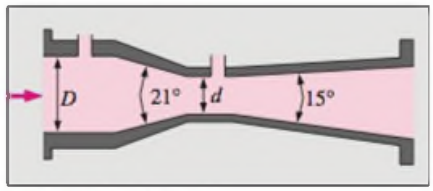
O medidor Venturi, inventado pelo engenheiro americano Clemens Herschel (1842–1930) e batizado por ele em homenagem ao italiano Giovanni Venturi (1746–1822) pelo seu trabalho pioneiro em seções cônicas de escoamento, é o



(*a*) Medidor de orifício



(*b*) Medidor de bocal



(*c*) Medidor de Venturi

FIGURA 8–56
Tipos comuns de medidores de obstrução.

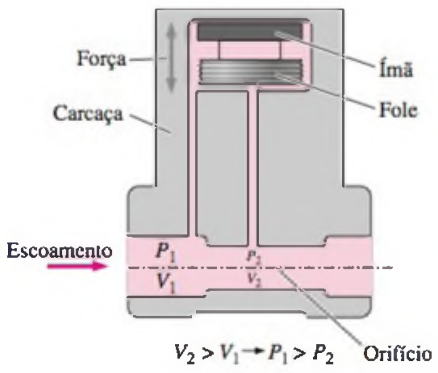


FIGURA 8–57
Um medidor de orifício e o esquema mostrando seu transdutor de pressão incorporado e leitura digital.
Cortesia da KOBOLD Instruments, Pittsburgh, PA. www.koboldusa.com. Utilizada com permissão.

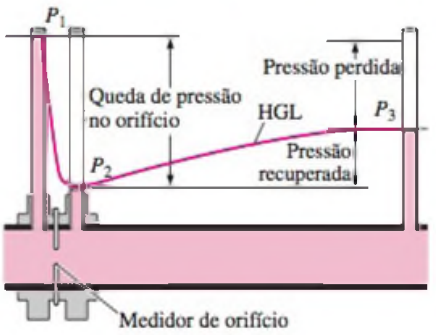


FIGURA 8–58
A variação de pressão ao longo de uma seção de escoamento com um medidor de orifício medida com tubos piezométricos; a pressão perdida e a pressão recuperada são mostradas.

medidor de vazão mais precisa desse grupo, mas também, o mais caro. Sua contração e expansão gradual evita a separação do escoamento e a turbulência, e ele sofre perdas apenas por atrito nas superfícies da parede interna. Os medidores Venturi causam perdas de carga muito baixas, como mostra a Figura 8–59 e, portanto, devem ser escolhidos para aplicações que não permitem grandes quedas de pressão. A perda de carga irreversível dos medidores Venturi devido ao atrito é de apenas cerca de 10%.

EXEMPLO 8–10 Medição da Vazão com um Medidor de Orifício

A vazão do metanol a 20°C (ρ = 788,4 kg/m^3 e μ = 5,857 × 10^{-4} kg/m · s) através de um tubo de 4 cm de diâmetro deve ser medida com um medidor de orifício, de 3 cm de diâmetro, equipado com um manômetro de mercúrio através da placa do orifício, como mostra a Figura 8–60. Se a leitura da altura diferencial do manômetro for 11 cm, determine a vazão do metanol através do tubo e a velocidade de escoamento média.

SOLUÇÃO A vazão do metanol deve ser medida com um medidor de orifício. Para determinar a queda de pressão através da placa de orifício, a vazão e a velocidade média de escoamento devem ser determinadas.

Hipóteses 1 O escoamento é estacionário e incompressível. **2** O coeficiente de descarga do medidor de orifício é C_d = 0,61.

Propriedades A densidade e a viscosidade dinâmica do metanol são dadas por ρ = 788,4 kg/m^3 e μ = 5,857 × 10^{-4} kg/m · s, respectivamente. Tomamos a densidade do mercúrio como 13.600 kg/m^3.

Análise A razão dos diâmetros e a área da garganta do orifício são:

$$\beta = \frac{d}{D} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0{,}03\ \text{m})^2}{4} = 7{,}069 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

A queda de pressão através da placa do orifício pode ser expressa por:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = (\rho_{Hg} - \rho_{med})gh$$

Assim, a relação da vazão para os medidores por obstrução torna-se:

$$\dot{V} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1-\beta^4)}} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg} - \rho_{med})gh}{\rho_{med}(1-\beta^4)}} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg}/\rho_{med} - 1)gh}{1-\beta^4}}$$

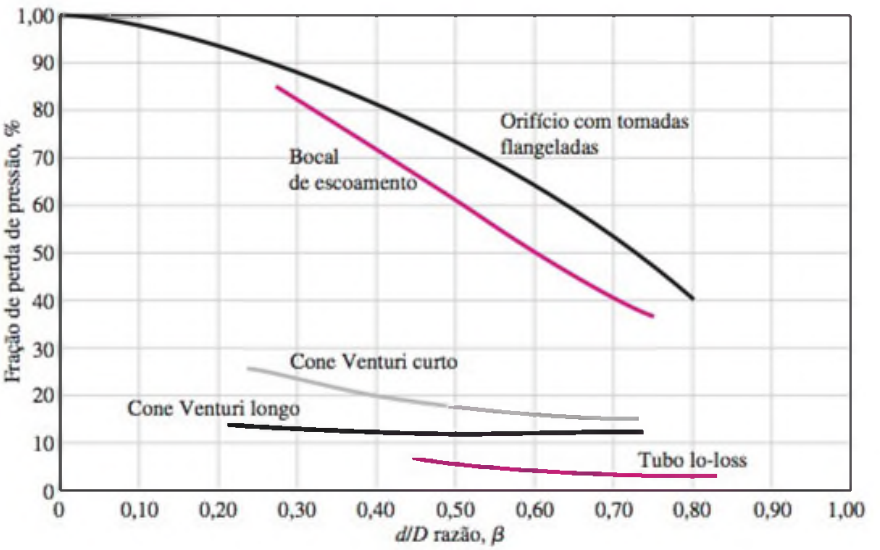


FIGURA 8–59
A fração da perda de pressão (ou carga) dos diversos medidores por obstrução.
De ASME Fluid Meters. *Utilizado com permissão da ASME International.*

Substituindo, a vazão é determinada por:

$$\dot{V} = (7{,}069 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(0{,}61)\sqrt{\frac{2(13.600/788{,}4 - 1)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}11\ \text{m})}{1 - 0{,}75^4}}$$

$$= 3{,}09 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$

que é equivalente a 3,09 L/s. A velocidade de escoamento média do tubo é determinada pela divisão da vazão pela área da seção transversal do tubo:

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{3{,}09 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}04\ \text{m})^2/4} = 2{,}46\ \text{m/s}$$

Discussão O número de Reynolds do escoamento através do tubo é:

$$\text{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{(788{,}4\ \text{kg/m}^3)(2{,}46\ \text{m/s})(0{,}04\ \text{m})}{5{,}857 \times 10^{-4}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 1{,}32 \times 10^5$$

Substituindo $\beta = 0{,}75$ e $\text{Re} = 1{,}32 \times 10^5$ na relação do coeficiente de descarga do orifício:

$$C_d = 0{,}5959 + 0{,}0312\beta^{2.1} - 0{,}184\beta^8 + \frac{91{,}71\beta^{2.5}}{\text{Re}^{0{,}75}}$$

temos $C_d = 0{,}601$, que está muito próximo do valor suposto de 0,61. Usando esse valor refinado de C_d, a vazão torna-se 3,04 L/s, que difere de nosso resultado original em apenas 1,6%. Assim, é conveniente analisar os medidores de orifício usando o valor recomendado de $C_d = 0{,}61$ para o coeficiente de descarga e, em seguida, verificar o valor suposto. Se o problema for resolvido usando um aplicativo para resolver equações como o EES, o problema pode ser formulado pela fórmula de ajuste de curva para C_d (que depende do número de Reynolds) e todas as equações podem ser solucionadas simultaneamente fazendo o aplicativo para resolver equações executar as iterações necessárias.

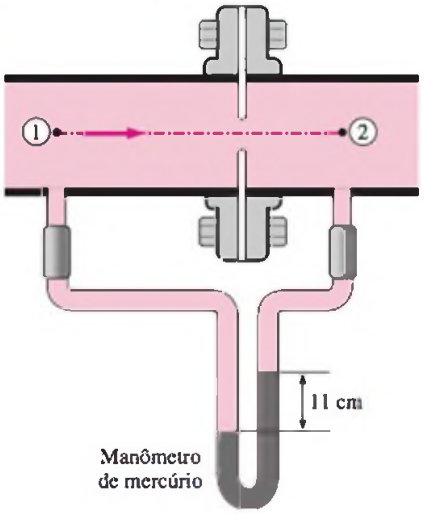


FIGURA 8–60
Esquema do medidor de orifício considerado no Exemplo 8–10.

Medidores de Vazão por Deslocamento Positivo

Quando compramos gasolina para um automóvel, estamos interessados na quantidade total de gasolina que escoa através do bocal durante o período em que o tanque é enchido e não na vazão da gasolina. Da mesma forma, estamos interessados na quantidade total de água ou gás natural que usamos em nossas casas durante um período de faturamento. Nessas e em muitas outras aplicações, a quantidade de interesse é a quantidade total de massa ou o volume de um fluido que passa através de uma seção transversal de um tubo ao longo de determinado período, em vez do valor instantâneo da vazão, e os **medidores de vazão por deslocamento positivo** são adequados para tais aplicações. Existem inúmeros tipos de medidores de deslocamento e eles se baseiam no preenchimento e na descarga contínuos da câmara de medição. Eles operam prendendo determinada quantidade de fluido de entrada, deslocando-o para o lado de descarga do medidor, e contando o número desses ciclos de descarga–recarga para determinar a quantidade total de fluido deslocado. O espaço entre o impulsor e sua carcaça deve ser cuidadosamente controlado para evitar vazamento e, assim, evitar erros.

A Figura 8–61 mostra um medidor de vazão por deslocamento positivo com dois impulsores giratórios impulsionados pelo líquido do escoamento. Cada impulsor tem três lóbulos de engrenagem, e um sinal de saída pulsado é gerado sempre que um lóbulo passa por um sensor não intrusivo. Cada pulso representa um volume conhecido de líquido que é capturado entre os lóbulos dos impulsores, e um controlador eletrônico converte os pulsos em unidades de volume. Este medidor em particular tem exatidão cotada de 0,1%, tem queda de pressão baixa e pode ser usado com líquidos de viscosidade alta ou baixa, a temperaturas de até 230°C e pressões de até 7 MPa, para vazões de até 700 gal/min (ou 50 L/s).

Os medidores de vazão mais usados para medir volumes de líquido são os **medidores de vazão com disco de nutação**, mostrados na Figura 8–62. Normalmente eles

FIGURA 8–61
Um medidor de vazão por deslocamento positivo com projeto de impulsor de três lóbulos helicoidais duplos.
Cortesia da Flow Technology, Inc. Source: www.ftimeters.com.

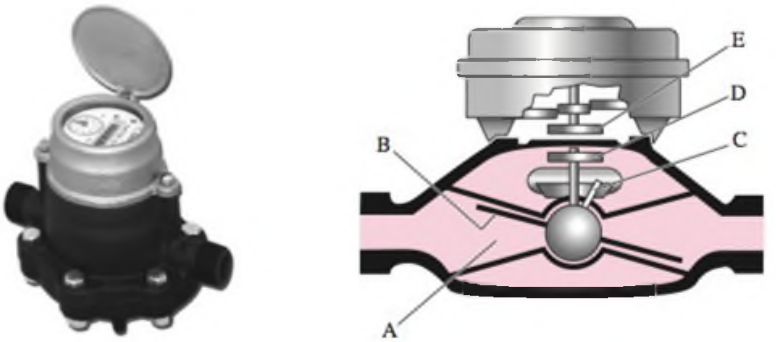


FIGURA 8–62
Um medidor de vazão com disco de nutação.
(a) Courtesia da Badger Meter, Inc. Fonte: www.badgermeter.com.

são usados como medidores de água e gasolina. O líquido entra no medidor com disco de nutação através da câmara (A). Isso faz com que o disco (B) nute ou oscile e resulte na rotação de um eixo (C) e no estímulo de um magneto (D). Esse sinal é transmitido através da carcaça do medidor para um segundo magneto (E). O volume total é obtido pela contagem do número desses sinais durante um processo de descarga.

Quantidades de escoamentos de gás, como a quantidade de gás natural usada nos prédios, normalmente são medidas usando medidores de vazão de foles que deslocam determinada quantidade de volume de gás durante cada revolução.

Medidores de Vazão Tipo Turbina

Todos sabemos por experiência própria que um impulsor mantido contra o vento gira, e a taxa de rotação aumenta à medida que a velocidade do vento aumenta. Você também já deve ter visto que as lâminas das turbinas de vento giram bem lentamente com ventos fracos, mas muito rapidamente com ventos fortes. Essas observações sugerem que a velocidade do escoamento em um tubo pode ser medida pela colocação de um impulsor que gira livremente dentro de uma seção de tubo e fazendo a calibragem necessária. Os dispositivos de medição de escoamento que funcionam de acordo com esse princípio são chamados de **medidores de vazão tipo turbina** ou também de **medidores de vazão a propulsor**, embora este último não seja muito correto uma vez que, por definição, os propulsores aumentam a energia de um fluido, enquanto as turbinas extraem energia de um fluido.

Um medidor de vazão tipo turbina consiste em uma seção de escoamento cilíndrica que abriga uma turbina (um rotor com aletas) que gira livremente, aletas fixas adicionais na entrada para "endireitar" o escoamento e um sensor que gera um pulso sempre que um ponto marcado na turbina passa por ele para determinar a taxa de rotação. A velocidade de rotação da turbina é quase proporcional à vazão do fluido. Os medidores de vazão tipo turbina dão resultados altamente precisos (tão precisos quanto 0,25%) em uma ampla variedade de vazões quando calibrados adequadamente para as condições de escoamento previstas. Os medidores de vazão tipo turbina têm um número pequeno de lâminas (às vezes apenas duas lâminas) quando usados para medir o escoamento de líquidos, mas diversas lâminas quando usados para medir o escoamento de gás para garantir a geração adequada de torque. A perda de carga causada pela turbina é muito pequena.

Os medidores de vazão tipo turbina foram muito usados para medição de escoamento desde os anos 40 por causa de sua simplicidade, custo baixo e exatidão em uma ampla variedade de condições de escoamento. Eles foram disponibilizados comercialmente para líquidos e gases e para tubos praticamente de todos os tamanhos. Os medidores de vazão tipo turbina também são muito usados para medir velocidades de escoamento em escoamentos não confinados, como vento, rios e correntes oceânicas. O dispositivo manual mostrado na Figura 8–63*b* é usado para medir a velocidade do vento.

(*a*)

(*b*)

(*c*)

FIGURA 8–63
(*a*) Um medidor de vazão à turbina em linha para medir o escoamento de líquidos, com escoamento da esquerda para a direita; (*b*) uma visão detalhada das lâminas da turbina dentro do medidor de vazão, vista do eixo de cima com escoamento para dentro da página; e (*c*) um medidor de vazão tipo turbina manual para medir a velocidade do vento, sem medir nenhum escoamento para que as lâminas da turbina fiquem visíveis. O medidor de vazão em (*c*) também mede a temperatura do ar por conveniência.
Fotos (a) e (c) de John M. Cimbala. Foto (b) Cortesia da Hoffer Flow Controls.

Medidores de Vazão com Roda de Pás

Os medidores de vazão com rodas de pás são alternativas de baixo custo para os medidores de vazão nos quais não é necessária exatidão muito alta. Nos medidores de vazão com roda de pás, a roda de pás (o rotor e as lâminas) é perpendicular ao escoamento, como mostra a Figura 8–64, em vez de paralela como no caso dos medidores de vazão tipo turbina. As pás cobrem apenas uma parte da seção transversal do escoamento (em geral, menos do que a metade) e, portanto, a perda de carga é muito menor se comparada àquela dos medidores de vazão tipo turbina, mas a profundidade da inserção da roda de pás no escoamento tem importância crítica para a exatidão. Da mesma forma, nenhum filtro é necessário, já que as rodas de pás não são sensíveis à sujeira. Um sensor detecta a passagem de cada uma das lâminas da roda de pás e transmite um sinal. Em seguida, um microprocessador converte essas informações de velocidade de rotação em vazões ou quantidade integrada de escoamento.

Medidores de Vazão de Área Variável (Rotâmetros)

Um medidor de vazão simples, confiável, barato e fácil de instalar, com queda de pressão baixa e sem conexões elétricas que permite uma leitura direta da vazão para uma ampla variedade de líquidos e gases é o **medidor de vazão de área variável**, também chamado de **rotâmetro** ou **medidor de flutuação.** Um medidor de flutuação de área variável consiste em um tubo transparente cônico afilado vertical, feito de vidro ou plástico com um flutuador dentro que se movimenta livremente, com mostra a Figura 8–65. À medida que o fluido escoa através do tubo afilado, o flutuador sobe dentro do tubo até um local onde o peso do flutuador, a força de arrasto e a força de flutuação se equilibrem e a força resultante que age sobre o flutuador seja zero. A vazão é determinada simplesmente pela comparação entre a posição do flutuador e a escala de escoamento graduada na parte de fora do tubo transparente afilado.

Sabemos por experiência que ventos fortes derrubam árvores, quebram linhas de força e fazem voar chapéus e guarda-chuvas. Isso acontece porque a força de arrasto aumenta com a velocidade do escoamento. O peso e a força de flutuação que agem sobre o flutuador são constantes, mas a força de arrasto muda com a velocidade do escoamento. Da mesma forma, a velocidade ao longo do tubo afilado diminui na direção do escoamento por conta do aumento da área de seção transversal. Existe uma determinada velocidade que gera arrasto suficiente para equilibrar o peso do flutuador e a força de flutuação, e o local onde essa velocidade ocorre ao redor do flutuador é o lugar no qual o flutuador assenta. O grau de afilamento do tubo pode ser tal que a elevação vertical mude linearmente com a vazão e, portanto, o tubo pode ser calibrado linearmente de acordo com as vazões. O tubo transparente também permite que o fluido seja visto durante o escoamento.

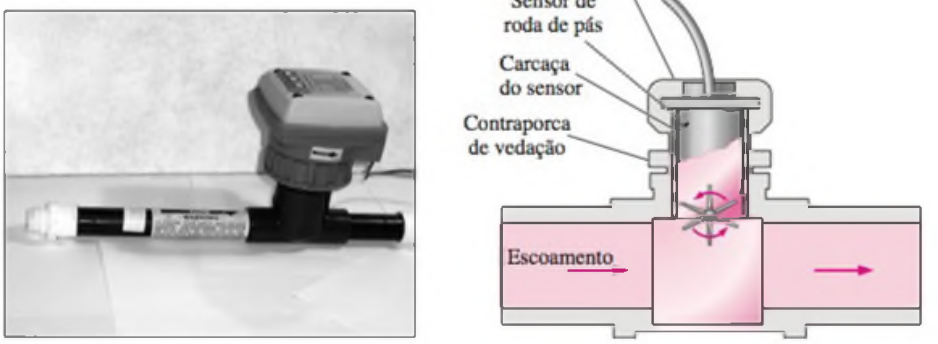


FIGURA 8–64
O medidor de vazão com roda de pás para medir o escoamento líquido, com o escoamento da esquerda para a direita, e um diagrama esquemático de sua operação.
Foto de John M. Cimbala.

FIGURA 8–65
Dois tipos de medidores de vazão de área variável: (*a*) um medidor comum com base na gravidade e (*b*) um medidor de mola oposta.
(a) Foto de Luke A. Cimbala e (b) Cortesia de Insite, Universal Flow Monitors, Inc. Utilizada com permissão.

FIGURA 8–66
A operação de um medidor de vazão ultra-sônico por tempo de trânsito equipado com dois transdutores, www.flocat.com.

Existem inúmeros tipos de medidores de vazão com área variável. O medidor de vazão com base na gravidade discutido anteriormente deve ser posicionado verticalmente, com o fluido entrando na parte inferior e saindo da parte superior. Nos medidores de vazão de mola oposta, a força de arrasto é balanceada pela força da mola e tais medidores podem ser instalados horizontalmente. Outro tipo de medidor de vazão utiliza um pistão de encaixe frouxo em vez de um flutuador.

A precisão dos medidores de vazão de área variável em geral é de ±5%. Assim, esses medidores de vazão não são apropriados para aplicações que exigem medições de precisão. Entretanto, alguns fabricantes citam precisão da ordem de 1%. Da mesma forma, esses medidores dependem da verificação visual do local do flutuador e, portanto, não podem ser usados para medir a vazão dos fluidos que são opacos ou sujos, ou dos fluidos que cobrem o flutuador, uma vez que tais fluidos bloqueiam o acesso visual. Finalmente, os tubos de vidro estão sujeitos a quebra e, portanto, não são seguros para manusear fluidos tóxicos. Em tais aplicações, os medidores de vazão de área variável devem ser instalados em locais onde o tráfego é mínimo.

Medidores de Vazão Ultra-Sônicos

É fácil observar quando uma pedra é solta sobre águas calmas que as ondas geradas se espalham em círculos concêntricos suaves em todas as direções. Mas quando uma pedra é jogada em água corrente como um rio, as ondas se movem muito mais rapidamente na direção do escoamento (as velocidades da onda e do escoamento são somadas, uma vez que estão na mesma direção) comparadas às ondas que se movimentam a montante (as velocidades da onda e do escoamento são subtraídas, uma vez que estão em direções opostas). Como resultado, as ondas parecem se espalhar a jusante, enquanto parecem bem compactadas a montante. A diferença entre o número de ondas das partes a montante e a jusante do escoamento por unidade de comprimento é proporcional à velocidade de escoamento e isso sugere que a velocidade de escoamento pode ser medida comparando a propagação das ondas nas direções à frente e atrás do escoamento. Os **medidores de vazão ultra-sônicos** operam dentro desse princípio, usando ondas de som no intervalo ultra-sônico (em geral, a uma freqüência de 1 MHz).

Os medidores de vazão ultra-sônicos (ou acústicos) operam gerando ondas de som com um transdutor e medindo a propagação daquelas ondas através de um fluido escoando. Existem dois tipos básicos de medidores de vazão ultra-sônicos: medidores de vazão *por tempo de trânsito* e por *efeito Doppler* (ou *variação de freqüência*). O medidor de vazão por tempo de trânsito transmite as ondas de som nas direções a montante e jusante e mede a diferença do tempo de percurso. Um medidor ultra-sônico de tempo de trânsito típico é mostrado de forma esquemática na Figura 8–66. Ele envolve dois transdutores que alternadamente transmitem e recebem ondas ultra-sônicas, uma na direção do escoamento e a outra na direção oposta. O tempo de percurso para cada direção pode ser medido com exatidão, e a diferença no tempo de percurso pode ser calculada. A velocidade média de escoa-

mento V no tubo é proporcional a essa diferença no tempo de percurso Δt, e pode ser determinada por:

$$V = KL\,\Delta t \qquad (8\text{–}74)$$

onde L é a distância entre os transdutores e K é uma constante.

Medidores de Vazão Ultra-sônico por Efeito Doppler

Provavelmente você já notou que quando um automóvel em alta velocidade se aproximada tocando a buzina, o som de tom alto da buzina diminui para um tom mais baixo à medida que o carro passa. Isso se deve às ondas sônicas que estão sendo comprimidas na frente do automóvel e se espalhando atrás dele. Essa mudança de freqüência é chamada de **efeito Doppler**, e forma a base da operação da maioria dos medidores de vazão ultra-sônicos.

Os **medidores de vazão ultra-sônicos por efeito Doppler** medem a velocidade média ao longo da trajetória sônica. Isso é feito prendendo um transdutor piezelétrico na superfície externa de um tubo (ou pressionando o transdutor contra o tubo nas unidades manuais). O transdutor transmite uma onda de som a uma freqüência fixa através da parede do tubo e para o líquido escoando. As ondas refletidas pelas impurezas, como partículas sólidas em suspensão ou bolhas de gás arrastadas são repetidas para um transdutor receptor. A variação na freqüência das ondas refletidas é proporcional à velocidade de escoamento, e um microprocessador determina a velocidade de escoamento, acompanhando a variação de freqüência entre os sinais transmitidos e refletidos (Figuras 8–67 e 8–68). A vazão e a quantidade total de escoamento também podem ser determinadas usando a velocidade medida e configurando adequadamente o medidor de vazão para o tubo e as condições de escoamento determinados.

A operação dos medidores de vazão ultra-sônicos depende das ondas de ultra-som serem refletidas pelas descontinuidades da densidade. Os medidores de vazão ultra-sônicos comuns exigem que o líquido tenha impurezas em concentrações acima de 25 partes por milhão (ppm) e sejam maiores do que um mínimo de 30 μm. Entretanto, as unidades ultra-sônicas avançadas também podem medir a velocidade dos líquidos limpos, detectando as ondas refletidas dos redemoinhos e turbilhões da corrente de escoamento, desde que sejam instalados em locais onde tais distúrbios não sejam simétricos e ocorram a um nível alto, tal como uma seção de escoamento logo após um cotovelo de 90°.

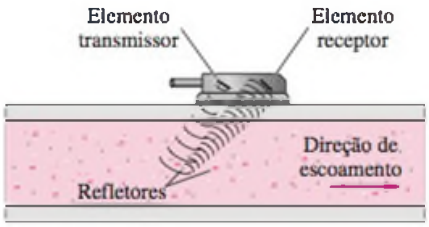


FIGURA 8–67
A operação de um medidor de vazão ultra-sônico por efeito Doppler equipado com um transdutor pressionado na superfície externa de um tubo.

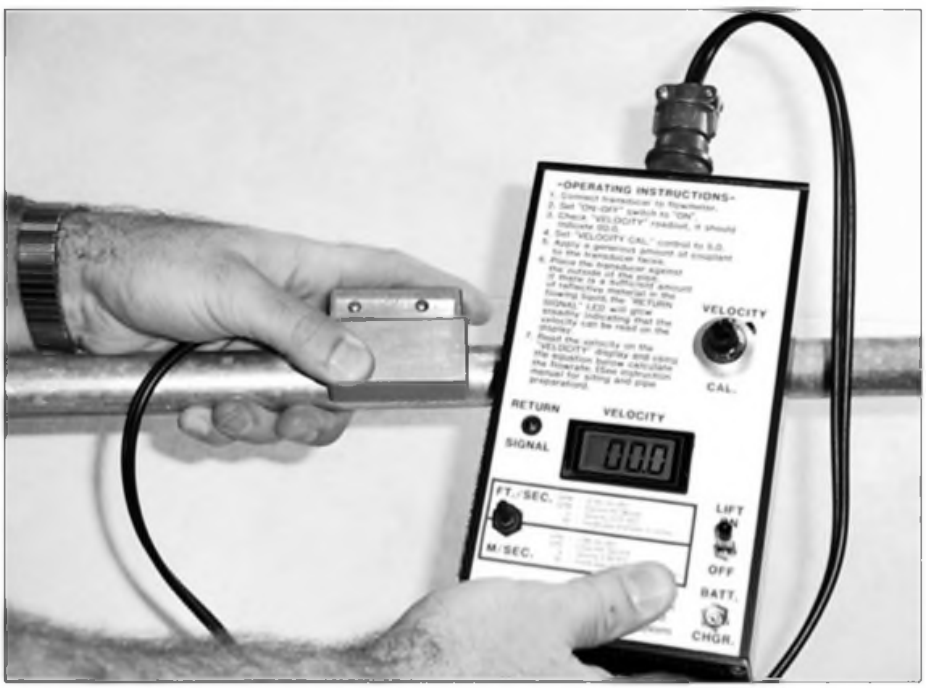


FIGURA 8–68
Os medidores de vazão ultra-sônicos permitem a medição da velocidade de escoamento sem entrar em contato com o fluido, simplesmente pressionando um transdutor na superfície externa do tubo.
Foto de J. Matthew Deepe.

Os medidores de vazão ultra-sônicos têm as seguintes vantagens:

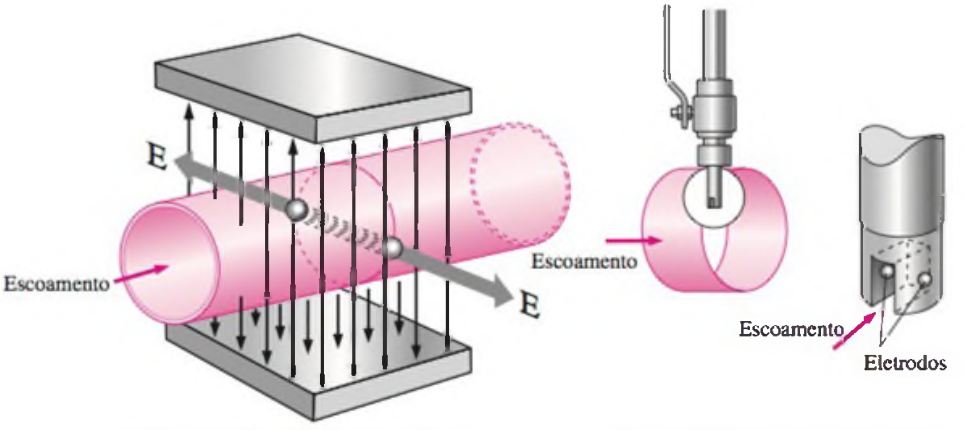
- Eles são fáceis e rápidos de instalar. Basta prendê-los na parte externa de tubos de 0,6 cm até mais de 3 m de diâmetro, e mesmo em canais abertos.
- Eles não são intrusivos. Como os medidores são presos externamente, não há necessidade de interromper a operação e fazer orifícios na tubulação e, portanto, não há paralisação da produção.
- Não há queda de pressão, uma vez que os medidores não interferem no escoamento.
- Como não há contato direto com o fluido, não há perigo de corrosão ou entupimento.
- Eles são adequados para uma ampla variedade de fluidos, desde produtos químicos tóxicos até pastas fluidas e líquidos limpos, permitindo a medição temporária ou permanente do escoamento.
- Não há partes móveis e, portanto, os medidores oferecem operação confiável e sem manutenção.
- Eles também podem medir quantidades de escoamento no escoamento reverso.
- As precisões cotadas são de 1% a 2%.

Os medidores de vazão ultra-sônicos são dispositivos não intrusivos e os transdutores ultra-sônicos podem transmitir efetivamente sinais através de paredes de tubo de cloreto de polivinil (PVC), aço, ferro e vidro. Entretanto, os tubos revestidos e de concreto não são adequados para essa técnica de medição, uma vez que eles absorvem ondas ultra-sônicas.

Medidores de Vazão Eletromagnéticos

Desde os experimentos de Faraday, em 1830, sabe-se que quando um condutor é movimentado em um campo magnético, uma força eletromotriz se desenvolve através daquele condutor como resultado da indução magnética. A lei de Faraday diz que a voltagem induzida através de um condutor à medida que ele se movimenta perpendicularmente por um campo magnético é proporcional à velocidade daquele condutor. Isso sugere que podemos determinar a velocidade de escoamento, substituindo o condutor sólido por um fluido condutor, e os **medidores de vazão eletromagnéticos** fazem exatamente isso. Os medidores de vazão eletromagnéticos são usados desde a metade dos anos 50 e têm diversos projetos, tais como os tipos de escoamento total e de inserção.

Um *medidor de vazão eletromagnético de escoamento total* é um dispositivo não intrusivo que consiste em uma bobina magnética que circunda o tubo, e dois eletrodos perfurados no tubo ao longo de um diâmetro, com as extremidades alinhadas com a superfície interna do tubo, de modo que os eletrodos estejam em contato com o fluido, mas não interfiram com o escoamento e, portanto, não causem nenhuma perda de carga (Figura 8–69*a*). Os eletrodos estão conectados a um



(*a*) Medidor de vazão eletromagnético de escoamento total

(*b*) Medidor de vazão eletromagnético de inserção

FIGURA 8–69
(*a*) Medidores de vazão eletromagnéticos de escoamento total e (*b*) de inserção, www.flocat.com.

voltímetro. As bobinas geram um campo magnético quando estão sujeitas a uma corrente elétrica e o voltímetro mede a diferença do potencial elétrico entre os eletrodos. Essa diferença de potencial é proporcional à velocidade de escoamento do fluido condutor e, portanto, a velocidade de escoamento pode ser calculada relacionando-a à voltagem gerada.

Os *medidores de vazão eletromagnéticos de inserção* operam de modo semelhante, mas o campo magnético é confinado dentro do canal de escoamento na ponta de uma haste inserida no escoamento, como mostra a Figura 8–69*b*.

Os medidores de vazão eletromagnéticos são adequados para a medição da velocidade de fluido dos metais líquidos, como o mercúrio, sódio e potássio que são usados em algumas usinas nucleares. Eles também podem ser usados para líquidos que são condutores ruins, como a água, desde que contenham uma quantidade adequada de partículas carregadas. O sangue e a água do mar, por exemplo, contêm quantidades suficientes de íons e, portanto, os medidores de vazão eletromagnéticos podem ser usados para medir suas vazões. Os medidores de vazão eletromagnéticos também podem ser usados para medir as vazões de produtos químicos, farmacêuticos, cosméticos, líquidos corrosivos, bebidas, fertilizantes e inúmeras pastas fluidas e lamas, desde que as substâncias tenham condutividades elétrica suficientemente altas. Os medidores de vazão eletromagnéticos não são adequados para o uso com água destilada ou desionizada.

Os medidores de vazão eletromagnéticos medem indiretamente a velocidade do escoamento e, portanto, uma calibração cuidadosa é importante durante a instalação. Seu uso é limitado pelo seu custo relativamente alto, pelo consumo de energia e pelas restrições aos tipos de fluidos adequados com os quais eles podem ser usados.

Medidores de Vazão de Vórtice

Provavelmente você já notou que quando uma corrente de escoamento, como um rio encontra uma obstrução como uma pedra, o fluido se separa e contorna a pedra. Mas a presença da pedra é sentida por alguma distância a jusante através dos redemoinhos gerados por ela.

A maioria dos escoamentos encontrados na prática é turbulento, e um disco ou cilindro curto colocado no escoamento coaxialmente irradia vórtices (consultar também o Capítulo 4). Observa-se que esses vórtices são irradiados periodicamente e a sua freqüência é proporcional à velocidade média de escoamento. Isso sugere que a vazão pode ser determinada pela geração de vórtices no escoamento, colocando uma obstrução ao longo do escoamento e medindo a freqüência da irradiação. Os dispositivos de medição de escoamento que funcionam de acordo com esse princípio são chamados de **medidores de vazão de vórtice**. O *número de Strouhal*, definido por $\mathrm{St} = fd/V$, onde f é a freqüência de irradiação de vórtices, d é o diâmetro característico ou largura da obstrução e V é a velocidade do escoamento que é imposto à obstrução, que também permanece constante neste caso, desde que a velocidade do escoamento seja suficientemente alta.

Um medidor de vazão de vórtice consiste em um corpo rombudo de aresta viva (suporte) colocado no escoamento e que serve como gerador de vórtice, e um detector (como um transdutor de pressão que registra a oscilação da pressão) colocado a uma distância curta a jusante da superfície interna do invólucro para medir a freqüência de irradiação. O detector pode ser um sensor ultra-sônico, eletrônico ou de fibra ótica que monitora as variações do padrão de vórtice e transmite um sinal de saída pulsante (Figura 8–70). Em seguida, um microprocessador usa as informações de freqüência para calcular e exibir a velocidade de escoamento ou vazão. A freqüência de irradiação do vórtice é proporcional à velocidade média em um intervalo amplo de números de Reynolds, e os medidores de vazão de vórtice operam de forma confiável e com exatidão para números de Reynolds entre 10^4 e 10^7.

O medidor de vazão de vórtice tem a vantagem de não ter partes móveis e, portanto, ser inerentemente confiável, versátil e muito preciso (em geral $\pm 1\%$ em uma ampla variedade de vazões), mas ele obstrui o escoamento e, portanto, causa perda de carga considerável.

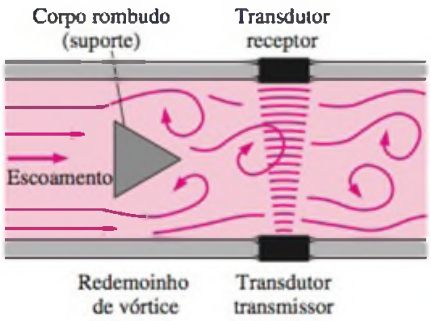


FIGURA 8–70
A operação de um medidor de vazão de vórtice, www.flocat.com.

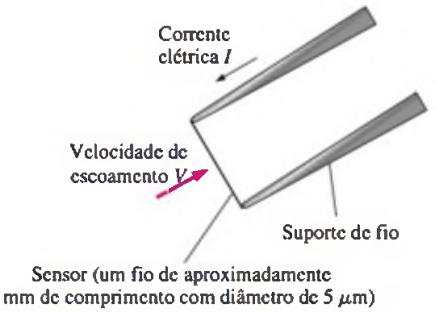


FIGURA 8–71
O sensor aquecido eletricamente e seu suporte em uma sonda de fio quente.

Anemômetros Térmicos (Fio Quente e Filme Quente)

Os **anemômetros térmicos** foram lançados no final dos anos 1950 e têm sido usados desde então em instalações e laboratórios de pesquisa de fluidos. Como o nome implica, os anemômetros térmicos envolvem um sensor aquecido eletricamente, como mostra a Figura 8–71, e utilizam o efeito térmico para medir a velocidade do escoamento. Os anemômetros térmicos têm sensores extremamente pequenos e, portanto, podem ser usados para medir a velocidade instantânea em qualquer ponto do escoamento sem atrapalhar muito o escoamento. Eles podem fazer milhares de medições de velocidade por segundo com excelente resolução espacial e temporal e, portanto, podem ser usados para estudar os detalhes das flutuações no escoamento turbulento. Eles podem medir velocidades de líquidos e gases com exatidão em um amplo intervalo — de alguns centímetros até mais de cem metros por segundo.

Um anemômetro térmico é chamado de **anemômetro de fio quente** se o elemento sensor for um fio e de **anemômetro de filme quente** se o sensor for um filme metálico fino (menor do que 0,1 μm de espessura) em geral montado em um suporte de cerâmica espesso com diâmetro de cerca de 50 μm. O anemômetro de fio quente é caracterizado por seu fio sensor muito pequeno — em geral de algumas micra de diâmetro e alguns milímetros de comprimento. Em geral o sensor é feito de platina, tungstênio ou ligas de platina e irídio, e é anexado à sonda por meio de suportes. O sensor de fio fino de um anemômetro de fio quente é muito frágil devido ao seu tamanho reduzido e pode quebrar facilmente se o líquido ou gás tiver quantidades excessivas de contaminantes ou material particulado. Isso é particularmente importante a altas velocidades. Em tais casos, devem ser usadas sondas de filme quente mais rugosas. Mas o sensor da sonda de filme quente é maior, tem resposta de freqüência significativamente mais baixa e interfere mais no escoamento. Assim, nem sempre ele é adequado para o estudo dos detalhes mais sutis do escoamento turbulento.

O princípio operacional de um anemômetro de temperatura constante (CTA), o tipo mais comum, é mostrado na Figura 8–72: o sensor é aquecido eletricamente até uma temperatura especificada (em geral em torno de 200°C). O sensor tende a se resfriar à medida que perde calor para o fluido escoando na vizinhança, mas os controles eletrônicos mantêm o sensor a uma temperatura constante variando a corrente elétrica (o que é feito variando a voltagem). Quanto maior a velocidade de escoamento, mais alta será a taxa de transferência de calor do sensor e, portanto, maior será a voltagem que precisa ser aplicada ao sensor para mantê-lo a temperatura constante. Existe uma correlação próxima entre a velocidade de escoamento e a voltagem, e a velocidade de escoamento pode ser determinada medindo a voltagem aplicada por um amplificador ou pela corrente elétrica que passa através do sensor.

O sensor é mantido a temperatura constante durante a operação e, portanto, seu conteúdo de energia térmica permanece constante. O princípio da conservação de energia exige que o aquecimento elétrico de Joule $\dot{W}_{\text{elétrico}} = I^2R_w = E^2/R_w$ do sensor seja igual à taxa total de perda de calor do sensor $\dot{Q}_{\text{total}}$, que consiste na transferência de calor por convecção, uma vez que a condução para os suportes de fio e a radiação para as superfícies da vizinhança são pequenas e podem ser desprezadas. Usando as relações adequadas da convecção forçada, o balanço de energia pode ser expresso pela **lei de King** como:

$$E^2 = a + bV^n \tag{8–75}$$

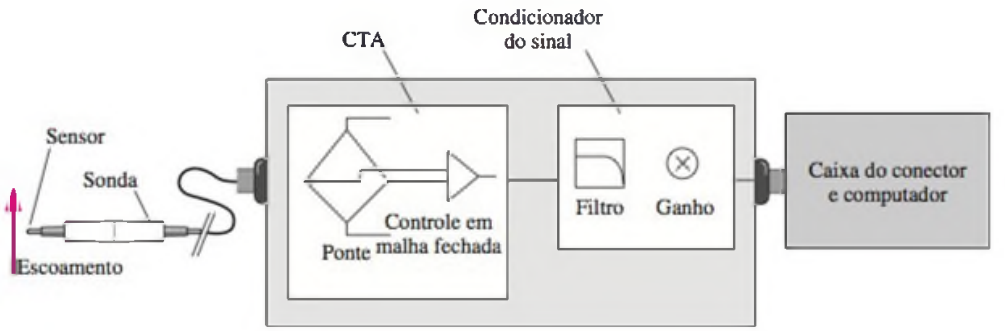


FIGURA 8–72
Esquema de um sistema de anemômetro térmico.

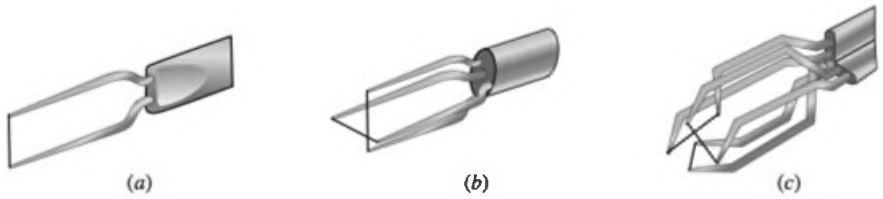


FIGURA 8–73
As sondas de anemômetro térmico com sensores simples, duplos e triplos para medir componentes de velocidade (*a*) uni (*b*) bi e (*c*) tridimensionais simultaneamente.

onde E é a voltagem, e os valores das constantes a, b e n são calibrados para determinada sonda. Depois que a voltagem for medida, essa relação dá diretamente a velocidade de escoamento V.

A maioria dos sensores de fio quente tem um diâmetro de 5 μm e um comprimento aproximado de 1 mm e são feitos de tungstênio. O fio é soldado por ponto aos dentes em forma de agulha incorporados no corpo de sonda, a qual é conectada aos componentes eletrônicos do anemômetro. Os anemômetros térmicos podem ser usados para medir componentes de velocidade bi ou tridimensionais simultaneamente usando sondas com dois ou três sensores, respectivamente, (Figura 8–73). Ao selecionar sondas, é preciso considerar o tipo e o nível de contaminação do fluido, o número das componentes de velocidade a serem medidas, a resolução espacial e temporal necessária e o local da medição.

Velocimetria Laser Doppler

A velocimetria laser Doppler (LDV), também chamada de **velocimetria laser (LV)** ou **anemometria laser Doppler (LDA)**, é uma técnica ótica para medir a velocidade de escoamento em um ponto desejado sem atrapalhar o escoamento. Ao contrário da anemometria, a LDV não envolve sondas ou fios inseridos no escoamento e, portanto, ela é um método não intrusivo. Assim como a anemometria térmica, ela pode medir com exatidão a velocidade de um volume muito pequeno e, portanto, também pode ser usada para estudar os detalhes do escoamento em um local, incluindo as flutuações turbulentas e pode varrer todo o campo de escoamento sem intrusão.

A técnica LDV foi desenvolvida na metade dos anos 60 e teve ampla aceitação por causa da alta exatidão que fornece para escoamentos de gases e líquidos; a alta resolução espacial que oferece e, nos últimos anos, sua capacidade de medir todas as três componentes de velocidade. Suas desvantagens são o custo relativamente alto; o requisito de transparência suficiente entre a fonte de laser, o local-alvo do escoamento e o fotodetector, e o requisito de alinhamento cuidadoso dos raios emitidos e refletidos para obter exatidão. Esta última desvantagem é eliminada no caso de um sistema LDV de fibra ótica, uma vez que ele é alinhado na fábrica.

O princípio operacional da LDV se baseia no envio de um raio de luz monocromático altamente coerente (todas as ondas estão em fase e no mesmo comprimento de onda) para o alvo, coletando a luz refletida pelas pequenas partículas da área-alvo, determinando a variação na freqüência da radiação refletida devido ao efeito Doppler, e relacionando essa mudança de freqüência com a velocidade de escoamento do fluido na área-alvo.

Os sistemas LDV estão disponíveis em muitas configurações diferentes. Um sistema básico LDV de raio duplo para medir uma única componente da velocidade é mostrado na Figura 8–74. No centro de todos os sistemas LDV há uma fonte de

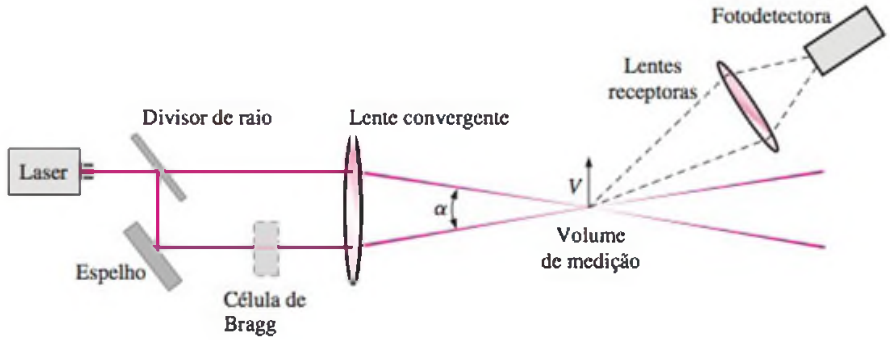


FIGURA 8–74
Um sistema LDV de raio duplo no modo de dispersão para diante.

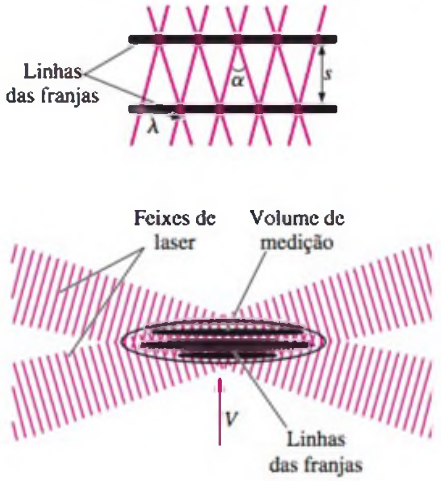


FIGURA 8–75
As franjas que se formam como resultado da interferência na intersecção dos dois raios laser de um sistema LDV (as linhas representam picos de ondas). O diagrama superior é uma visão detalhada de duas franjas.

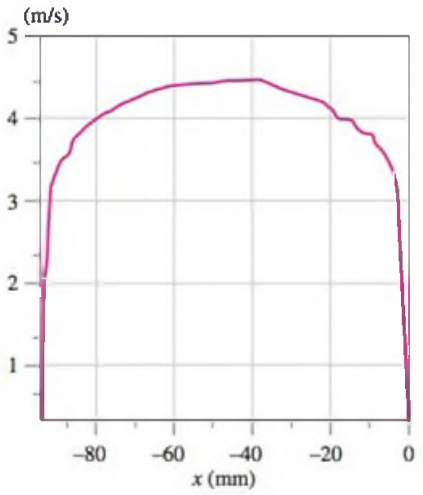


FIGURA 8–76
Um perfil de média temporal de velocidade no escoamento em um tubo turbulento é obtido por um sistema LDV.
Cortesia da Dantec Dynamics, Inc. www.dantecmt.com. Usado com permissão.

potência a laser, que em geral é um laser de hélio-néon ou argônio-íon com uma saída de potência de 10 mW a 20 W. Os lasers são a opção preferida em vez das outras fontes de luz, uma vez que os raios laser são altamente coerentes e focalizados. O laser de hélio-néon, por exemplo, emite radiação a um comprimento de onda de 0,6328 μm, que está no intervalo de cores vermelho-alaranjado. O raio laser é primeiramente dividido em dois raios paralelos de igual intensidade por um espelho semiprateado chamado de *divisor de raio*. Ambos os raios passam através de uma lente convergente que focaliza os raios em um ponto do escoamento (o *alvo*). O pequeno volume de fluido no qual os dois raios se interseptam é a região na qual a velocidade é medida e é chamado de *volume de medição* ou *volume focal*. O volume de medição se parece com um elipsóide, em geral com 0,1 mm de diâmetro e 0,5 mm de comprimento. A luz laser é espalhada pelas partículas que passam através desse volume de medição e a luz espalhada em determinada direção é coletada por lentes receptoras e passada através de um fotodetector que converte as flutuações na intensidade de luz em flutuações de um sinal de voltagem. Finalmente, um processador de sinal determina a freqüência do sinal de voltagem e, portanto, a velocidade do escoamento.

As ondas dos dois raios laser que se cruzam no volume de medição são mostradas esquematicamente na Figura 8–75. As ondas dos dois raios interferem no volume de medição, criando uma franja clara na qual eles estão em fase e, portanto, suportam um ao outro, e criando uma franja escura na qual eles estão fora de fase e, portanto, cancelam um ao outro. As franjas claras e escuras formam linhas paralelas ao plano médio entre os dois raios laser incidentes. Usando a trigonometria, pode ser mostrado que o espaçamento s entre as linhas das franjas, que podem ser vistas como comprimento de onda das franjas, é dado por $s = \lambda/[2\ \text{sen}(\alpha/2)]$, onde λ é o comprimento de onda do raio laser e α é o ângulo entre os dois raios laser. Quando uma partícula atravessa essas linhas de franja à velocidade V, a freqüência das linhas de franjas espalhadas é:

$$f = \frac{V}{s} = \frac{2V\ \text{sen}(\alpha/2)}{\lambda} \qquad \textbf{(8–76)}$$

Essa relação fundamental mostra que a velocidade do escoamento é proporcional à freqüência e é conhecida como a equação LDV. Quando uma partícula passa através do volume de medição, a luz refletida é clara, depois escura, em seguida clara etc., por causa do padrão da franja, e a velocidade de escoamento é determinada medindo-se a freqüência da luz refletida. O perfil de velocidade de uma seção transversal de um tubo pode ser obtido pelo mapeamento do escoamento transversal ao tubo (Figura 8–76).

O método LDV obviamente depende da presença de linhas de franjas espalhadas e, portanto, o escoamento deve conter uma quantidade suficiente de pequenas partículas chamadas de *sementes* ou *partículas de semeadura*. Essas partículas devem ser suficientemente pequenas para acompanhar de perto o escoamento de modo que a velocidade da partícula seja igual à velocidade do escoamento, mas suficientemente grande (com relação ao comprimento de onda da luz laser) para espalhar uma quantidade adequada de luz. As partículas com diâmetro de 1 μm em geral servem bem a essa finalidade. Alguns fluidos como a água de torneira contém naturalmente uma quantidade adequada de tais partículas, e nenhuma semeadura é necessária. Gases como o ar normalmente são semeados com fumaça ou com partículas feitas de látex, óleo ou outros materiais. Usando três pares de raio laser com comprimentos de onda diferentes, o sistema LDV também é usado para obter todas as três componentes da velocidade em qualquer ponto do escoamento.

Velocimetria por Imagem de Partícula

A velocimetria por imagem de partícula (PIV) é uma técnica a laser pulsado duplo para medir a distribuição da velocidade instantânea em um plano do escoamento pela determinação fotográfica do deslocamento das partículas no plano durante um intervalo de tempo muito curto. Ao contrário de métodos como a anemometria de fio quente e a LDV que mede a velocidade em um ponto, a PIV fornece valores de velocidade simultaneamente em toda uma seção transversal e, portanto, é uma téc-

nica de campo inteiro. A PIV combina a exatidão da LDV com a capacidade de visualização do escoamento e fornece mapeamento de campo de escoamento instantâneo. Todo o perfil de velocidade instantâneo de uma seção transversal de um tubo, por exemplo, pode ser obtido com uma única medição da PIV. Um sistema PIV pode ser visualizado como uma câmara que pode tirar um instantâneo da distribuição da velocidade em qualquer plano desejado de um escoamento. A visualização comum do escoamento dá um quadro qualitativo dos detalhes do escoamento. A PIV também oferece uma descrição *quantitativa* exata das diversas quantidades do escoamento, tal como o campo de velocidade e, portanto, a capacidade de analisar o escoamento numericamente usando os dados de velocidade fornecidos. Devido a essa capacidade de campo inteiro, a PIV também é usada para validar os códigos de dinâmica de fluidos computacional (CFD) (Capítulo 15).

A técnica PIV tem sido usada desde a metade dos anos 80, e seu uso e capacidades cresceram nos últimos anos com aperfeiçoamentos das tecnologias de câmera de captura rápida de quadros (*frame grabber*) e de dispositivo de carga acoplada (*charge-coupled device*) (CCD). A exatidão, flexibilidade e versatilidade dos sistemas PIV com sua capacidade de capturar imagens de campo inteiro com tempo de exposição de menos do que microssegundos os tornaram ferramentas extremamente valiosas no estudo dos escoamentos supersônicos, explosões, propagação de chamas, crescimento e colapso de bolhas, turbulência e escoamento não estacionário.

A técnica PIV para a medição da velocidade consiste em duas etapas principais: visualização e processamento da imagem. A primeira etapa é semear o escoamento com partículas adequadas para controlar o movimento do fluido. Em seguida, uma chapa de pulso de luz laser ilumina uma fatia fina do campo de escoamento no plano desejado, e as posições das partículas naquele plano são determinadas pela detecção da luz dispersa pelas partículas em uma câmara de vídeo ou fotográfica digital posicionada formando ângulos retos com a chapa de luz (Figura 8–77). Após um curto período de tempo Δt (tipicamente em μs), as partículas são iluminadas novamente por uma segunda chapa de pulso de luz laser e suas novas posições são registradas. Usando as informações nessas duas imagens de câmera superpostas, os deslocamentos de partículas Δs são determinados para todas as partículas, e velocidade escalar das partículas no plano da chapa de luz laser é determinada por $\Delta s/\Delta t$. A direção do movimento das partículas também é determinada por duas posições, de modo que duas componentes da velocidade no plano são calculadas. Os algoritmos incorporados dos sistemas PIV determinam as velocidades em milhares de elementos de área chamados de *regiões de interrogação* em todo o plano e exibem o campo de velocidade no monitor do computador em qualquer forma desejada (Figura 8–78).

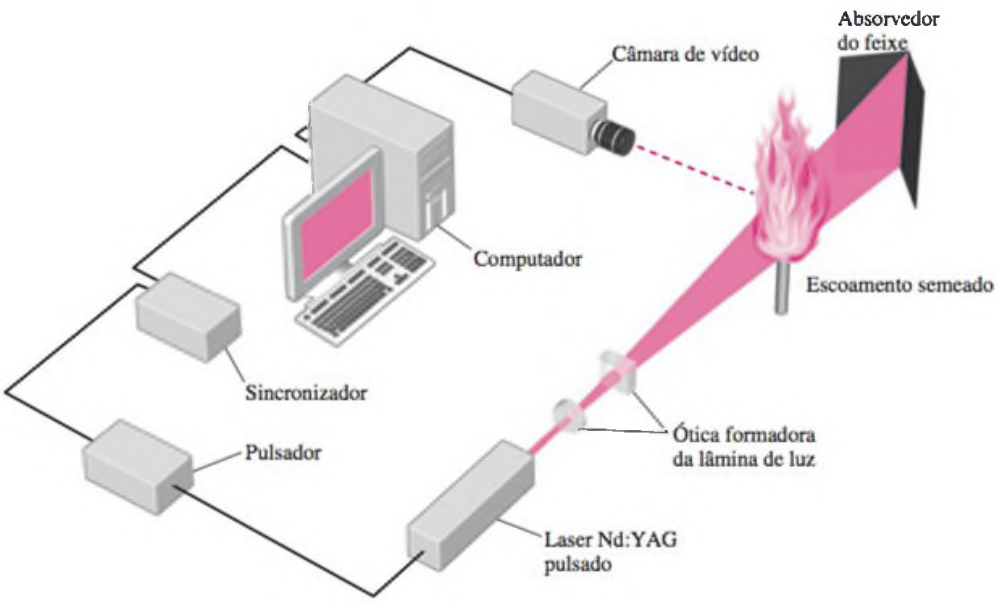


FIGURA 8–77
Um sistema PIV para estudar a estabilização da chama.
Cortesia da TSI Incorporated (www.tsi.com). Usado com permissão.

FIGURA 8–78
O campo de velocidade instantânea na região de esteira de um automóvel medido por um sistema PIV em um túnel de vento. Os vetores de velocidade são superpostos em um gráfico de contorno da pressão. A interface entre dois níveis adjacentes de escala de cinzas é uma isóbara.
Cortesia da Dantec Dynamics, Inc. www.dantecmt.com.

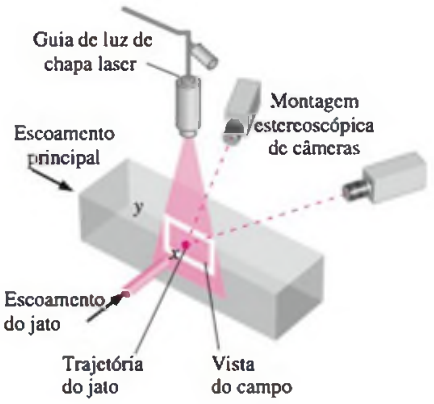


FIGURA 8–79
Um sistema PIV tridimensional configurado para estudar a mistura de um jato de ar com um escoamento de duto transversal.
Cortesia da TSI Incorporated (www.tsi.com). Usado com permissão.

A técnica PIV se baseia na luz laser dispersa pelas partículas e, portanto, o escoamento deve ser semeado, se necessário, com partículas, também chamadas de *marcadores*, para obter um sinal refletido adequado. As partículas sementes devem poder acompanhar as linhas de trajetória do escoamento para que seu movimento seja representativo do escoamento, e isso exige que a densidade da partícula seja igual à densidade do fluido (de modo que elas tenham flutuação neutra) ou que as partículas sejam tão pequenas (em geral com tamanho de μm) para que seu movimento relativo ao fluido seja insignificante. Uma variedade dessas partículas está disponível para semear escoamento de gás ou líquido. Partículas muito pequenas devem ser usadas em escoamentos de alta velocidade. As partículas de carboneto de silício (diâmetro de 1,5 μm) são adequadas para o escoamento de líquidos e gases, as partículas de dióxido de titânio (diâmetro médio de 0,2 μm) geralmente são usadas para o escoamento de gases e são adequadas para aplicações de alta temperatura, e as partículas de látex de poliestireno (diâmetro nominal de 1,0 μm) são adequadas para aplicações de baixa temperatura. As partículas metálicas revestidas (diâmetro médio de 9,0 μm) também são usadas para semear escoamentos de água para medições LDV por conta de sua alta refletividade. As bolhas de gás, bem como as gotas de alguns líquidos como o óleo de oliva ou silicone, também são usadas como partículas de semeadura após serem atomizadas até esferas com tamanho da ordem de micra.

Uma variedade de fontes de luz laser, como argônio, vapor de cobre e Nd:YAG, pode ser usada com os sistemas PIV, dependendo dos requisitos para a duração de pulsos, potência e tempo entre os pulsos. Os lasers Nd:YAG normalmente são usados nos sistemas PIV em uma ampla gama de aplicações. Um sistema de fornecimento de raio, como um braço de luz ou um sistema de fibra ótica é usado para gerar e fornecer uma chapa de laser pulsado de alta energia a uma espessura especificada.

Com a PIV, as outras propriedades do escoamento, como a vorticidade e as taxas de deformação também podem ser obtidas e os detalhes da turbulência podem ser estudados. Os avanços recentes na tecnologia PIV possibilitaram a obtenção de perfis de velocidade tridimensionais em uma seção transversal de um escoamento usando duas câmeras (Figura 8–79). Isso é feito registrando as imagens do plano-alvo simultaneamente por ambas as câmeras e ângulos diferentes, processando as informações para produzir dois mapas de velocidade bidimensionais separados, e combinando esses dois mapas para gerar o campo de velocidade tridimensional instantâneo.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Como Funcionam, ou Não Funcionam, os Medidores de Vazão de Placa de Orifício

Autor Convidado: Lorenz Sigurdson, Vortex Fluid Dynamics Lab, Universidade de Alberta

A equação de Bernoulli é a mais amada de todas as equações da mecânica de fluidos, porque ela é uma equação escalar e tem uma ampla variedade de aplicações. Um uso muito valioso é no desenvolvimento da teoria de obstrução de Bernoulli. Essa teoria permite uma estimativa da velocidade de escoamento com base na queda de pressão medida entre locais a jusante e montante de uma obstrução em um escoamento de tubo. A vazão volumétrica pode ser calculada usando a equação de Bernoulli, a conservação de massa e a geometria da obstrução. A obstrução mais barata de produzir é uma placa com um orifício. Existem centenas de milhares de medidores de vazão com placa de orifício em uso na América do Norte. Esse é o padrão aceito internacionalmente para a medição das vazões em volume. A exatidão pode tornar-se muito importante em indústrias como tubulações de gás natural, nas quais a mercadoria é comprada e vendida com base nas medições desses medidores. Alguns tubos transportam mais de um milhão de dólares por hora em gás natural.

Para finalidades práticas, a calibração do medidor é necessária porque, embora o tubo e o diâmetro do orifício sejam conhecidos, o escoamento separa-se da borda do orifício e cria um tubo de escoamento mais estreito do que o diâmetro do orifício. O escoamento é acelerado através dessa vena contracta. A Figura 8–80 mostra o escoamento a montante do orifício visualizado com o uso de um fio de fumaça para introduzir listras em um medidor de vazão transparente. A calibração assume que não há pulsação no escoamento do tubo. Entretanto, isso não acontece na prática se houver um compressor alternativo na tubulação, ou uma válvula solta batendo. A Figura 8–81 mostra o que pode acontecer para a vena contracta nessas circunstâncias, se a freqüência da pulsação estiver próxima de uma freqüência de ressonância das estruturas de escoamento turbulento. O diâmetro da vena contracta é reduzido. Pare a leitura e pergunte a si mesmo: "Isso causará uma predição da vazão seja superestimada ou subestimada?".

A conservação da massa e a vena contracta mais estreita significam uma velocidade média mais alta nela do que sem pulsação. A equação de Bernoulli diz que a pressão será mais baixa lá como resultado, significando uma queda de pressão maior e uma predição superestimada. Erros tão grandes quanto 40% foram encontrados em níveis altos de pulsação. Para a tubulação de gás natural mencionada, isso significaria pagar (ou ganhar) $400.000 por hora! As instabilidades características que foram encontradas anteriormente em escoamentos de cisalhamento, escoamento num injetor e escoamentos recolantes (Sigurdson, 1995; Sigurdson e Chapple, 1997) também existem a montante da placa de orifício. Felizmente, os projetistas de instalações de medidores agora podem evitar as freqüências de pulsação perigosamente ressonantes associadas a essas instabilidades, minimizando assim o erro do medidor de vazão.

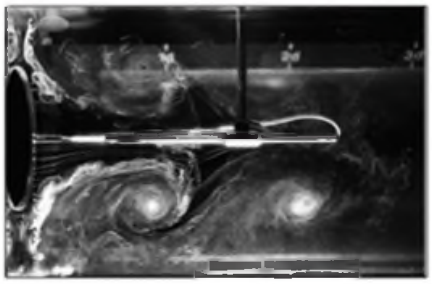


FIGURA 8–80
Foto de listras com fio de fumaça do medidor de vazão de placa com orifício sem nenhuma pulsação e número de Reynolds = 9000. D_v indica o diâmetro estimado da vena contracta. Uma sonda de fio quente pode ser vista ao longo do eixo central do tubo.
De Sigurdson e Chapple (1998).

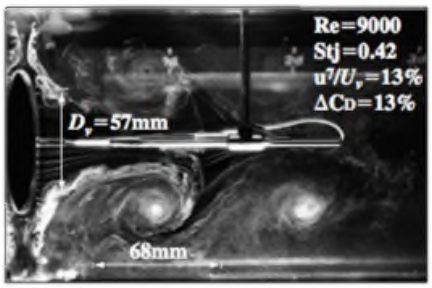


FIGURA 8–81
A foto da listra de fio de fumaça da placa de orifício com a presença pulsação, mostrando um efeito grande. O medidor tem erro de 13%. Número de Reynolds = 9000. O diâmetro da vena contracta D_v é reduzido em relação ao caso sem pulsação da Figura 8–80.
De Sigurdson e Chapple (1998).

Referências

Sigurdson, L. W., "The Structure and Control of a Turbulent Reattaching Flow", *J. Fluid Mechanics*, 298, p. 139–165, 1995.

Sigurdson, L. W. e Chapple, D., "Visualization of Acoustically Pulsated Flow through an Orifice Plate Flow Meter", *Proc. 1st Pacific Image Processing and Flow Visualization Conf.*, Honolulu, HI, fev. 23–26, 1997.

Sigurdson, L. W. e Chapple, D., "A Turbulent Mechanism for Pulsation—Induced Orifice Plate Flow Meter Error", *Proc. 13th Australasian Fluid Mechanics Conf.*, 13-18 de dezembro, 1998, Monash U., Melbourne, Australia, Thompson, M. C. e Hourigan, K., eds., 1, p. 67–70, 1998.

RESUMO

No *escoamento interno*, um tubo é completamente preenchido com um fluido. O *escoamento laminar* é caracterizado por linhas de corrente suaves e movimento altamente ordenado, e o *escoamento turbulento* é caracterizado por flutuações na velocidade e movimento altamente desordenado. O *número de Reynolds* é definido por:

$$\mathrm{Re} = \frac{\text{Forças inerciais}}{\text{Forças viscosas}} = \frac{V_{méd} D}{\nu} = \frac{\rho V_{méd} D}{\mu}$$

Nas condições mais práticas, o escoamento de um tubo é laminar para $\mathrm{Re} < 2300$, turbulento para $\mathrm{Re} > 4000$ e de transição entre esses valores.

A região do escoamento na qual os efeitos das forças de cisalhamento viscosas são sentidas é chamada de *camada limite de velocidade*. A região da entrada do tubo até o ponto no qual a camada limite incorpora o eixo central é chamada de *região de entrada hidrodinâmica*, e o comprimento dessa região é chamado de *comprimento de entrada hidrodinâmico* L_h. Ela é dada por:

$$L_{h,\,\text{laminar}} \cong 0{,}05\,\mathrm{Re}\,D \quad \text{e} \quad L_{h,\,\text{turbulento}} \cong 10D$$

O coeficiente de atrito na região de escoamento totalmente desenvolvido permanece constante. As velocidades *máxima* e *média* do escoamento laminar totalmente desenvolvido em um tubo circular são:

$$u_{máx} = 2V_{méd} \quad \text{e} \quad V_{méd} = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L}$$

A *vazão em volume* e a *queda de pressão* no escoamento laminar de um tubo horizontal são:

$$\dot{V} = V_{méd} A_c = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L} \quad \text{e} \quad \Delta P = \frac{32\mu L V_{méd}}{D^2}$$

Esses resultados para os tubos horizontais também podem ser usados para os tubos inclinados, desde que ΔP seja substituído por $\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta$:

$$V_{méd} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta) D^2}{32\mu L} \quad \text{e}$$

$$\dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen}\theta)\pi D^4}{128\mu L}$$

A *perda de pressão* e a *perda de carga* de todos os tipos de escoamentos internos (laminar ou turbulento em tubos circulares ou não circulares, superfícies suaves ou rugosas) são expressas como:

$$\Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} \quad \text{e} \quad h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

onde $\rho V^2/2$ é a *pressão dinâmica* e a quantidade adimensional f é o *fator de atrito*. Para escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo circular, o fator de atrito é $f = 64/\mathrm{Re}$.

Para tubos não circulares, o diâmetro das relações anteriores é substituído pelo *diâmetro hidráulico* definido como $D_h = 4A_c/p$, onde A_c é a área de seção transversal do tubo e p é seu perímetro molhado.

No escoamento turbulento completamente desenvolvido, o fator de atrito depende do número de Reynolds e da *rugosidade relativa* ε/D. O fator de atrito do escoamento turbulento é dado pela *equação de Colebrook*, expressa como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

O gráfico dessa fórmula é conhecido como diagrama de Moody. O projeto e a análise dos sistemas de tubos envolvem a determinação da perda de carga, da vazão ou do diâmetro do tubo. As iterações aborrecidas desses cálculos podem ser evitadas pelas fórmulas aproximadas de Swamee-Jain expressas como:

$$h_L = 1{,}07 \frac{\dot{V}^2 L}{g D^5} \left\{ \ln\left[\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + 4{,}62 \left(\frac{\nu D}{\dot{V}} \right)^{0{,}9} \right] \right\}^{-2}$$

$$10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$$
$$3000 < \mathrm{Re} < 3 \times 10^8$$

$$\dot{V} = -0{,}965 \left(\frac{g D^5 h_L}{L} \right)^{0{,}5} \ln\left[\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \left(\frac{3{,}17 \nu^2 L}{g D^3 h_L} \right)^{0{,}5} \right]$$

$$\mathrm{Re} > 2000$$

$$D = 0{,}66 \left[\varepsilon^{1{,}25} \left(\frac{L\dot{V}^2}{g h_L} \right)^{4{,}75} + \nu \dot{V}^{9{,}4} \left(\frac{L}{g h_L} \right)^{5{,}2} \right]^{0{,}04}$$

$$10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$$
$$5000 < \mathrm{Re} < 3 \times 10^8$$

As perdas que ocorrem às componentes da tubulação, como conexões, válvulas, curvas, cotovelos, tês, entradas, saídas, extensões e contrações são chamadas de *perdas menores*. Em geral, as perdas menores são expressas em termos do *coeficiente de perda* K_L. A perda de carga de uma componente é determinada por:

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g}$$

Depois que todos os coeficientes de perda estão disponíveis, a perda total de carga de um sistema de tubos é determinada de:

$$h_{L,\,\text{total}} = h_{L,\,\text{maior}} + h_{L,\,\text{menor}} = \sum_i f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_j K_{L,j} \frac{V_j^2}{2g}$$

Se todo o sistema de tubulação tiver um diâmetro constante, a perda de carga total se reduz a:

$$h_{L,\,\text{total}} = \left(f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g}$$

A análise de um sistema de tubulação se baseia em dois princípios simples: (1) A conservação da massa em todo o sistema deve ser satisfeita e (2) a queda de pressão entre dois pontos deve ser igual para todas as trajetórias entre os dois pontos.

Quando os tubos estão conectados *em série*, a vazão em todo o sistema permanece constante, independentemente dos diâmetros dos tubos individuais. Para um tubo que se divide em dois (ou mais) *tubos paralelos* e, em seguida, é reunido em uma junção a jusante, a vazão total é a soma das vazões dos tubos individuais, mas a perda de carga de cada ramificação é a mesma.

Quando um sistema de tubos envolve uma bomba e/ou uma turbina, a equação da energia do escoamento estacionário é expressa como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, }u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, }e} + h_L$$

Quando a carga útil da bomba $h_{\text{bomba, }u}$ é conhecida, a potência mecânica que precisa ser fornecida pela bomba ao fluido e a potência elétrica consumida pelo motor da bomba para uma vazão especificada são determinadas com:

$$\dot{W}_{\text{bomba, eixo}} = \frac{\rho \dot{V} g h_{\text{bomba, }u}}{\eta_{\text{bomba}}} \quad \text{e} \quad \dot{W}_{\text{elétrico}} = \frac{\rho \dot{V} g h_{\text{bomba, }u}}{\eta_{\text{bomba-motor}}}$$

onde $\eta_{\text{bomba-motor}}$ é a *eficiência da combinação bomba-motor*, que é o produto das eficiências da bomba e do motor.

O gráfico da perda de carga *versus* a vazão $\dot{V}$ é chamado de *curva do sistema*. A carga produzida por uma bomba não é constante, e as curvas $h_{\text{bomba, }u}$ e η_{bomba} *versus* $\dot{V}$ são chamadas de *curvas características*. Uma bomba instalada em um sistema de tubulação opera no *ponto operacional*, que é o ponto de intersecção entre a curva do sistema e a curva característica.

As técnicas e os dispositivos de medição de escoamento podem ser consideradas em três grandes categorias: (1) técnicas e dispositivos de medição da vazão em volume (ou massa), como medidores de vazão por obstrução, medidores tipo turbina, medidores de vazão de deslocamento positivo, rotâmetros e medidores ultra-sônicos, (2) técnicas de medição de velocidade puntual como as sondas estáticas de Pitot, as sondas de fios quentes e a LDV e (3) técnicas de medição da velocidade de todo o campo, como a PIV.

Este capítulo deu ênfase ao escoamento através dos tubos. Um tratamento detalhado dos inúmeros tipos de bombas e turbinas, incluindo seus princípios operacionais e parâmetros de desempenho, é dado no Capítulo 14.

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. H. S. Bean (ed.). *Fluid Meters: Their Theory and Applications*, 6. ed. Nova Iorque: American Society of Mechanical Engineers, 1971.
2. M. S. Bhatti e R. K. Shah. "Turbulent and Transition Flow Convective Heat Transfer in Ducts". Em *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, ed. S. Kakaç, R. K. Shah e W. Aung. Nova Iorque: Wiley Interscience, 1987.
3. C. F. Colebrook. "Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition between the Smooth and Rough Pipe Laws", *Journal of the Institute of Civil Engineers London*. 11 (1939), p. 133–156.
4. C. T. Crowe, J. A. Roberson e D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*, 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
5. F. Durst, A. Melling, and J. H. Whitelaw. *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*, 2. ed. Nova Iorque: Academic, 1981.
6. R. W. Fox e A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: Wiley, 1999.
7. *Fundamentals of Orifice Meter Measurement*. Houston, TX: Daniel Measurement and Control, 1997.
8. S. E. Haaland. "Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flow", *Journal of Fluids Engineering*, março de 1983, p. 89–90.
9. I. E. Idelchik. *Handbook of Hydraulic Resistance*, 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
10. W. M. Kays e M. E. Crawford. *Convective Heat and Mass Transfer*, 3. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1993.
11. R. W. Miller. *Flow Measurement Engineering Handbook*, 3. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1997.
12. L. F. Moody. "Friction Factors for Pipe Flows", *Transactions of the ASME* 66 (1944), p. 671–684.
13. B. R. Munson, D. F. Young e T. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4. ed. Nova Iorque: Wiley, 2002.
14. O. Reynolds. "On the Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and the Law of Resistance in Parallel Channels". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174 (1883), p. 935–982.
15. H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*, 7. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1979.
16. R. K. Shah e M. S. Bhatti. "Laminar Convective Heat Transfer in Ducts". Em *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, ed. S. Kakaç, R. K. Shah, and W. Aung. Nova Iorque: Wiley Interscience, 1987.
17. P. L. Skousen. *Valve Handbook*. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1998.
18. P. K. Swamee e A. K. Jain. "Explicit Equations for Pipe-Flow Problems", *Journal of the Hydraulics Division. ASCE* 102, n. HY5 (maio de 1976), p. 657–664.
19. G. Vass. "Ultrasonic Flowmeter Basics", *Sensors*, 14, n. 10 (1997).
20. A. J. Wheeler e A. R. Ganji. *Introduction to Engineering Experimentation*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996).
21. F. M. White. *Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2003.
22. W. Zhi-qing. "Study on Correction Coefficients of Laminar and Turbulent Entrance Region Effects in Round Pipes", *Applied Mathematical Mechanics*, 3 (1982), p. 433.

PROBLEMAS*

Escoamento Laminar e Turbulento

8–1C Por que os líquidos em geral são transportados em tubos circulares?

8–2C Qual é o significado típico do número de Reynolds? Como ele é definido para (*a*) fluxo em um tubo circular de diâmetro interno D e (*b*) fluxo em um duto retangular de seção transversal $a \times b$?

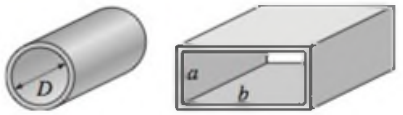


FIGURA P8–2C

8–3C Considere uma pessoa caminhando primeiro no ar e depois na água à mesma velocidade. Para qual movimento o número de Reynolds será mais alto?

8–4C Mostre que o número de Reynolds para o escoamento em um tubo circular de diâmetro D pode ser expresso como $\mathrm{Re} = 4\dot{m}/(\pi D\mu)$.

8–5C Qual fluido à temperatura ambiente exige uma bomba maior para escoar a uma velocidade especificada em determinado tubo: água ou óleo de motor? Por quê?

8–6C Qual é o valor geralmente aceito para o número de Reynolds acima do qual o escoamento em tubos suaves é turbulento?

8–7C Considere o escoamento do ar e da água em tubos de mesmo diâmetro, à mesma temperatura e à mesma velocidade média. Qual fluxo tem mais chances de ser turbulento? Por quê?

8–8C O que é o diâmetro hidráulico? Como é determinado? A que ele é igual para um tubo circular de diâmetro D?

8–9C Como o comprimento de entrada hidrodinâmico é definido para o escoamento em um tubo? O comprimento de entrada é maior no escoamento laminar ou turbulento?

8–10C Considere o escoamento laminar de um tubo circular. A tensão de cisalhamento da parede τ_w será maior perto da entrada ou da saída do tubo? Por quê? Qual seria sua resposta se a o escoamento fosse turbulento?

8–11C Como a rugosidade da superfície afeta a queda de pressão em um tubo se o escoamento for turbulento? Qual seria sua resposta se a o escoamento fosse laminar?

Escoamento Completamente Desenvolvido em Tubos

8–12C Como a tensão de cisalhamento da parede τ_w varia ao longo da direção de escoamento na região completamente desenvolvida do (*a*) escoamento laminar e (*b*) escoamento turbulento?

8–13C Qual propriedade de fluido é responsável pelo desenvolvimento da camada limite de velocidade? Para quais tipos de fluidos não há camada limite de velocidade em um tubo?

8–14C Na região completamente desenvolvida do escoamento em um tubo circular, o perfil de velocidade mudará na direção do escoamento?

8–15C Como o fator de atrito do escoamento em um tubo está relacionado à perda de pressão? Como a perda de pressão está relacionada ao requisito de potência de bombeamento para determinada vazão em massa?

8–16C Uma pessoa afirma que a tensão de cisalhamento no centro de um tubo circular durante o escoamento laminar completamente desenvolvido é zero. Você concorda com isso? Explique.

8–17C Uma pessoa afirma que no escoamento turbulento completamente desenvolvido em um tubo, a tensão de cisalhamento está no máximo na superfície do tubo. Você concorda com isso? Explique.

8–18C Considere o escoamento completamente desenvolvido em um tubo circular com efeitos de entrada desprezíveis. Se o comprimento do tubo for dobrado, a perda de carga (*a*) dobrará, (*b*) mais do que dobrará, (*c*) menos do que dobrará, (*d*) será reduzida pela metade ou (*e*) permanecerá constante.

8–19C Uma pessoa afirma que a vazão volumétrica de um tubo circular com escoamento laminar pode ser determinada medindo a velocidade na linha central da região completamente desenvolvida, multiplicando-a pela área de seção transversal e dividindo o resultado por 2. Você concorda? Explique.

8–20C Uma pessoa diz que a velocidade média em um tubo circular no escoamento laminar completamente desenvolvido pode ser determinada simplesmente medindo a velocidade em $R/2$ (metade do caminho entre a superfície da parede e o eixo central). Você concorda? Explique.

8–21C Considere o escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo circular. Se o diâmetro do tubo for reduzido pela metade enquanto a vazão e o comprimento do tubo forem mantidos constantes, a perda de carga (*a*) dobrará, (*b*) triplicará, (*c*) quadruplicará, (*d*) aumentará por um fator de 8 ou (*e*) aumentará por um fator de 16.

8–22C Qual é o mecanismo físico que faz com que o fator de atrito seja mais alto no escoamento turbulento?

8–23C O que é a viscosidade turbulenta? Pelo que ela é causada?

8–24C A perda de carga de determinado tubo circular é dada por $h_L = 0{,}0826fL(\dot{V}^2/D^5)$, onde f é o fator de atrito (adimensional), L é o comprimento do tubo, $\dot{V}$ é a vazão volumétrica e D é o diâmetro do tubo. Determine se 0,0826 é uma constante dimensional ou adimensional. Essa equação é dimensionalmente homogênea como está?

8–25C Considere o escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo circular. Se a viscosidade do fluido é reduzida pela metade por aquecimento enquanto a vazão é mantida constante, como mudará a perda de carga?

8–26C Como a perda de carga está relacionada à perda de pressão? Para determinado fluido, explique como você converteria a perda de carga em perda de pressão.

8–27C Considere o escoamento laminar do ar em um tubo circular com superfícies perfeitamente suaves. Você acha que o fator de atrito desse escoamento será zero? Explique.

8–28C Explique por que o fator de atrito é independente do número de Reynolds para números de Reynolds muito grandes.

---

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

8–29 Óleo com densidade de 850 kg/m³ e viscosidade cinemática de 0,00062 m²/s é descarregado por um tubo horizontal com 5 mm de diâmetro e 40 m de comprimento de um tanque de armazenamento que está aberto para a atmosfera. A altura do nível do líquido acima do centro do tubo é de 3 m. Desprezando as perdas menores, determine a vazão do óleo através do tubo.

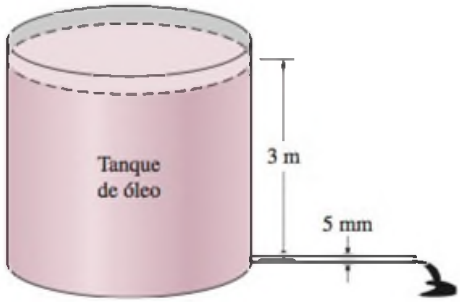


FIGURA P8–29

8–30 Água a 10°C (ρ = 999,7 kg/m³ e μ = 1,307 × 10⁻³ kg/m · s) escoa estacionariamente em um tubo com 0,20 cm de diâmetro e 15 m de comprimento a uma velocidade média de 1,2 m/s. Determine (*a*) a queda de pressão, (*b*) a perda de carga e (*c*) o requisito de potência de bombeamento para superar essa queda de pressão. *Respostas*: (a) 188 kPa (b) 19,2 m (c) 0,71 W

8–31 Água a 15°C (ρ = 999,1 kg/m³ e μ = 1,138 × 10⁻³ kg/m · s) escoa em regime permanente em um tubo horizontal com 0,30 cm de diâmetro e 4 cm de comprimento feito de aço inoxidável a uma taxa de 8 L/s. Determine (*a*) a queda de pressão, (*b*) a perda de carga e (*c*) o requisito de potência de bombeamento para superar essa queda de pressão.

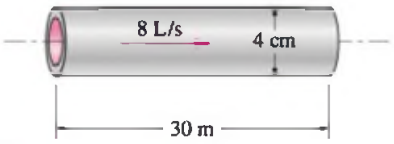


FIGURA P8–31

8–32 No escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo circular, a velocidade em $R/2$ (a meio caminho entre a superfície da parede e o eixo central) é medida como 6 m/s. Determine a velocidade no centro do tubo. *Resposta*: 8 m/s

8–33 O perfil de velocidade no escoamento laminar completamente desenvolvimento em um tubo circular de raio interno R = 2 cm em m/s é dado por $u(r) = 4(1 - r^2/R^2)$. Determine as velocidades média e máxima do tubo e a vazão em volume.

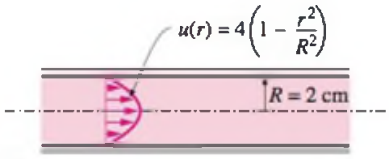


FIGURA P8–33

8–34 Repita o Problema 8–33 para um tubo de raio interno de 7 cm.

8–35 Considere um coletor solar de ar que tem 1 m de largura e 5 m de comprimento e espaçamento constante de 3 cm entre a tampa de vidro e a chapa do coletor. O ar escoa a uma temperatura média de 45°C e taxa de 0,15 m³/s através da lateral com 1 m de largura do coletor e ao longo da passagem de 5 m de comprimento. Desprezando os efeitos da entrada e da rugosidade, determine a queda de pressão do coletor. *Resposta*: 32,3 Pa

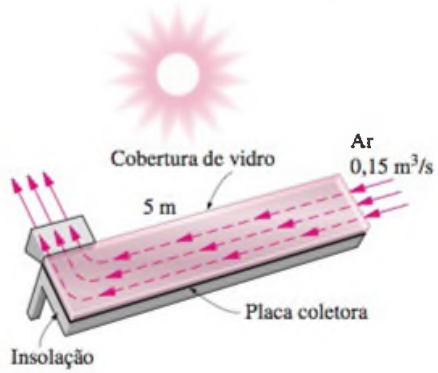


FIGURA P8–35

8–36 Considere o escoamento de óleo com ρ = 894 kg/m³ e μ = 2,33 kg/m · s em uma tubulação com 40 cm de diâmetro a uma velocidade média de 0,5 m/s. Uma seção de 300 m de comprimento da tubulação passa através das águas geladas de um lago. Desprezando os efeitos da entrada, determine a potência de bombeamento necessária para superar as perdas e manter o escoamento do óleo no tubo.

8–37 Considere o escoamento laminar de um fluido através de um canal quadrado com superfícies suaves. Agora a velocidade média do fluido é dobrada. Determine a variação da perda de carga do fluido. Considere que o regime de escoamento permaneça inalterado.

8–38 Repita o Problema 8–37 para o escoamento turbulento em tubos suaves para os quais o fator de atrito é dado por $f = 0{,}184\text{Re}^{-0{,}2}$. Qual seria sua resposta para um escoamento totalmente turbulento em um tubo rugoso?

8–39 O ar entra em uma seção de 7 m de comprimento de um duto retangular de seção transversal de 15 cm × 20 cm, feita de aço comercial, a 1 atm e 35°C, à velocidade média de 7 m/s. Desprezando os efeitos da entrada, determine a potência de ventilador necessária para superar as perdas de pressão nessa seção do duto. *Resposta*: 4,9 W

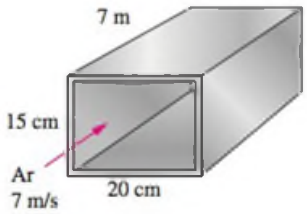


FIGURA P8–39

8–40 Óleo com ρ = 876 kg/m³ e μ = 0,24 kg/m · s escoa através de um tubo com 1,5 cm de diâmetro que descarrega na atmosfera a 88 kPa. A medida da pressão absoluta 15 m antes da saída é 135 kPa. Determine a vazão do óleo através do tubo considerando que o tubo seja (*a*) horizontal, (*b*) inclinado 8° para cima e (*c*) inclinado 8° para baixo com relação à direção horizontal.

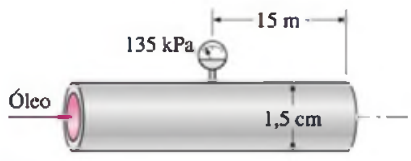


FIGURA P8–40

8–41 Glicerina a 40°C com $\rho = 1{,}252$ kg/m³ e $\mu = 0{,}27$ kg/m · s escoa através de um tubo com 2 cm de diâmetro e 25 m de comprimento que descarrega na atmosfera a 100 kPa. A vazão através do tubo é de 0,035 L/s. (*a*) Determine a pressão absoluta a 25 m antes da saída do tubo. (*b*) Com que ângulo θ o tubo deve ser inclinado para baixo com relação à direção horizontal para que a pressão em todo o tubo seja a pressão atmosférica e a vazão seja a mesma?

8–42 Em um sistema de aquecimento de ar, o ar aquecido a 40°C e 105 kPa absoluta é distribuído através de um duto retangular de 0,2 m × 0,3 m feito de aço comercial a uma taxa de 0,5 m³/s. Determine a queda de pressão e a perda de carga através de uma seção de 40 m de comprimento do duto. *Respostas*: 128 Pa, 93,8 m

8–43 Glicerina a 40°C com $\rho = 1.252$ kg/m³ e $\mu = 0{,}27$ kg/m · s escoa através de um tubo suave horizontal com 5 cm de diâmetro e velocidade média de 3,5 m/s. Determine a queda de pressão por 10 m do tubo.

8–44 Reconsidere o Problema 8–43. Usando o EES ou outro aplicativo, investigue o efeito do diâmetro do tubo sobre a queda de pressão para a mesma vazão constante. Faça o diâmetro variar de 1 a 10 cm em incrementos de 1 cm. Tabule e mostre os resultados graficamente, tire conclusões.

8–45 Amônia líquida a –20°C escoa através de uma seção de 30 m de comprimento de um tubo de cobre com 5 mm de diâmetro a uma taxa de 0,15 kg/s. Determine a queda de pressão, a perda de carga e a potência de bombeamento necessária para superar as perdas por atrito no tubo. *Respostas*: 4,792 kPa, 734 m, 1,08 kW

8–46 Trocadores de calor de carcaça e tubo com centenas de tubos abrigados em uma carcaça são muito usados na prática para transferência de calor entre dois fluidos. Um desses trocadores de calor é usado em um sistema ativo de aquecimento solar de água que transfere calor de uma solução anticongelante de água que escoa através da carcaça e do coletor solar para a água fresca, que escoa através dos tubos a uma temperatura média de 60°C e a uma taxa de 15 L/s. O trocador de calor contém 80 tubos de cobre com 1 cm de diâmetro interno e 1,5 m de comprimento. Desprezando as perdas da entrada, saída e carga, determine a queda de pressão através de um único tubo e a potência de bombeamento necessária para o fluido no lado do tubo do trocador de calor.

Após operar por um longo tempo, uma crosta de 1 mm de espessura se acumula nas superfícies internas com rugosidade equivalente de 0,4 mm. Para a mesma entrada de potência de bombeamento, determine a redução percentual na vazão da água através dos tubos.

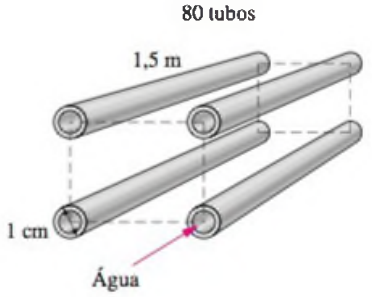


FIGURA P8–46

Perdas Menores

8–47C O que é perda menor em escoamento de tubo? Como é definido o coeficiente de perda menor K_L?

8–48C Defina o comprimento equivalente da perda menor no escoamento de tubo. Como ela se relaciona ao coeficiente de perda menor?

8–49C O efeito do arredondamento de uma entrada de tubo sobre o coeficiente de perda é (*a*) desprezível, (*b*) um pouco significativo ou (*c*) muito significativo.

8–50C O efeito do arredondamento de uma saída de tubo sobre o coeficiente de perda é (*a*) desprezível, (*b*) um pouco significativo ou (*c*) muito significativo.

8–51C Qual tem um coeficiente de perda maior durante o escoamento no tubo: expansão gradual ou contração gradual? Por quê?

8–52C Um sistema de tubos envolve curvas agudas e, portanto, grandes perdas de carga menores. Uma forma de reduzir a perda de carga seria substituir as curvas agudas por cotovelos circulares. Qual seria a outra forma?

8–53C Durante um projeto de reajuste de um sistema de escoamento de fluido para reduzir a potência de bombeamento, é proposta a instalação de aletas nos cotovelos chanfrados, ou a substituição das curvas agudas dos cotovelos chanfrados de 90° por curvas suaves. Qual abordagem resultará em maior redução da potência de bombeamento necessária?

8–54 Água deve ser retirada de um reservatório de água com 3 m de altura perfurando um orifício com 1,5 cm de diâmetro na superfície inferior. Desprezando o efeito do fator de correção da energia cinética, determine a vazão da água através do orifício se (*a*) a entrada do orifício for bem arredondada e (*b*) a entrada tiver arestas vivas.

8–55 Considere o escoamento de um reservatório de água através de um orifício circular de diâmetro D na parede lateral a uma distância vertical H da superfície livre. A vazão através de um orifício real com uma entrada em aresta viva ($K_L = 0{,}5$) será consideravelmente menor do que a vazão calculada considerando escoamento "sem atrito" e, portanto, perda zero no orifício. Desprezando o efeito do fator de correção da energia cinética, obtenha uma relação para o "diâmetro equivalente" do orifício com aresta viva para uso nas relações de escoamento sem atrito.

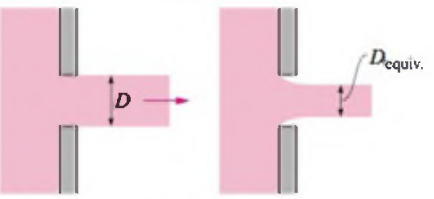


FIGURA P8–55

8–56 Repita o Problema 8–55 para uma entrada ligeiramente arredondada ($K_L = 0{,}12$).

8–57 Um tubo horizontal tem uma expansão abrupta de $D_1 = 8$ cm para $D_2 = 16$ cm. A velocidade da água na seção menor é de 10 m/s e o escoamento é turbulento. A pressão na seção menor é de $P_1 = 300$ kPa. Tomando o fator de correção da energia cinética como 1,06 na entrada e na saída, determine a pressão a jusante P_2 e estime o erro que teria ocorrido se a equação de Bernoulli tivesse sido usada. *Respostas*: 322 kPa, 25 kPa

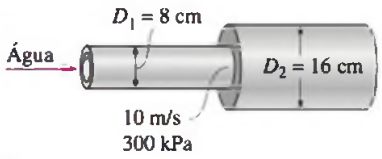


FIGURA P8–57

Sistemas de Tubulação e Seleção de Bomba

8–58C Um sistema de bombeamento envolve dois tubos de diâmetros diferentes (mas com comprimento, material e rugosidade iguais) conectados em série. Como você compara (*a*) as vazões e (*b*) as quedas de pressão nesses dois tubos?

8–59C Um sistema de tubulação envolve dois tubos de diâmetros diferentes (mas com comprimento, material e rugosidade iguais) conectados em paralelo. Como você compara (*a*) as vazões e (*b*) as quedas de pressão nesses dois tubos?

8–60C Um sistema de tubulação envolve dois tubos de diâmetros idênticos, mas com comprimentos diferentes conectados em paralelo. Como você compara as quedas de pressão desses dois tubos?

8–61 A água é bombeada de um grande reservatório mais baixo para um reservatório mais alto. Alguém afirma que se a perda de carga for desprezível, a carga de bomba necessária será igual à diferença de elevação entre as superfícies livres dos dois reservatórios. Você concorda?

8–62C Um sistema de tubulação equipado com uma bomba opera estacionariamente. Explique como o ponto operacional (a vazão e a perda de carga) é estabelecido.

8–63C Para um sistema de tubulação, defina a curva do sistema, a curva característica e o ponto operacional em um diagrama de carga *versus* vazão.

8–64 Água a 20°C deve ser bombeada de um reser-vatório (z_A = 2 m) para outro reservatório a uma elevação mais alta (z_B = 9 m) através de dois tubos de plástico com 25 m de comprimento conectados em paralelo. Os diâmetros dos dois tubos são 3 cm e 5 cm. A água deve ser bombeada por uma unidade de bomba-motor com eficiência de 68%, que consome 7 kW de energia elétrica durante a operação. As perdas menores e a perda de carga dos tubos que conectam os tubos paralelos aos dois reservatórios são consideradas desprezíveis. Determine a vazão total entre os reservatórios e as vazões através de cada um dos tubos paralelos.

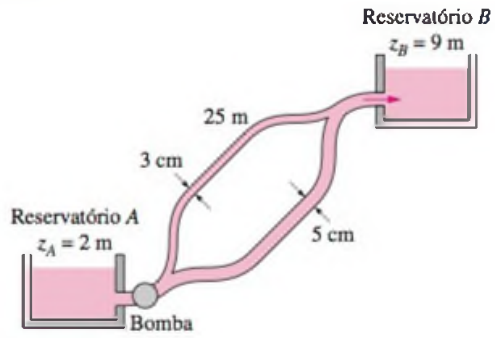


FIGURA P8–64

8–65 Um tanque de 3 m de diâmetro está inicialmente cheio com água até 2 m acima do centro de um orifício com diâmetro de 10 cm e aresta viva. A superfície da água do tanque é aberta para a atmosfera e o orifício drena para a atmosfera. Desprezando o efeito do fator de correção da energia cinética calcule (*a*) a velocidade inicial na saída do tanque e (*b*) o tempo necessário para esvaziar o tanque. O coeficiente de perda do orifício causa um aumento significativo no tempo de drenagem do tanque?

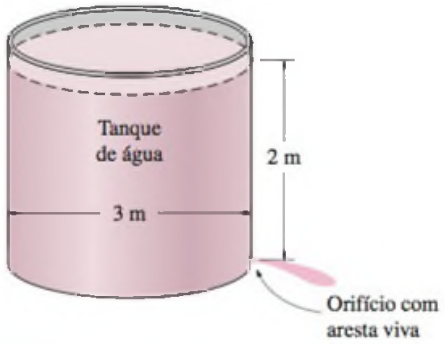


FIGURA P8–70

8–66 Um tanque de 3 m de diâmetro está inicialmente cheio com água até 2 m acima do centro de um orifício com diâmetro de 10 cm e aresta viva. A superfície da água do tanque é aberta para a atmosfera e o orifício drena para a atmosfera através de um tubo com 100 m de comprimento. O coeficiente de atrito do tubo pode ser considerado como 0,015 e o efeito do fator de correção da energia cinética pode ser desprezado. Determine (*a*) a velocidade inicial na saída do tanque e (*b*) o tempo necessário para esvaziar o tanque.

8–67 Reconsidere o Problema 8–66. Para drenar o tanque mais rapidamente, uma bomba é instalada próxima à saída do tanque. Determine quanta entrada de potência de bomba é necessária para estabelecer uma velocidade média da água de 4 m/s quando o tanque está cheio até z = 2 m. Considere também que a velocidade de descarga permaneça constante e estime o tempo necessário para drenar o tanque.

Alguém sugere que o fato da bomba estar localizada no início ou no final do tubo não faz diferença, e que o desempenho será igual em ambos os casos, mas outra pessoa argumenta que a colocação da bomba perto do final do tubo pode causar cavitação. A temperatura da água é 30°C, de modo que a pressão do vapor d'água é P_v = 4,246 kPa = 0,43 m-H_2O e o sistema está localizado no nível do mar. Investigue se há possibilidade de cavitação e se devemos nos preocupar com a localização da bomba.

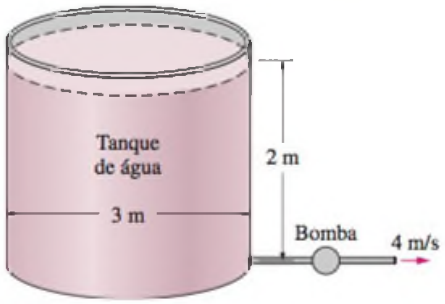


FIGURA P8–67

8–68 Óleo a 20°C escoa através de um funil de vidro vertical que consiste em um reservatório cilíndrico de 15 cm de altura e um tubo de 1 cm de diâmetro e 25 cm de altura. O funil sempre é mantido cheio pela adição de óleo do tanque. Supondo que os efeitos da entrada sejam desprezíveis, determine a vazão do óleo através do funil e calcule a "eficácia do funil", que pode ser definida como a razão entre a vazão real através do funil e a vazão máxima para o caso "sem atrito". *Respostas*: 4,09 × 10^{-6} m^3/s, 1,86%.

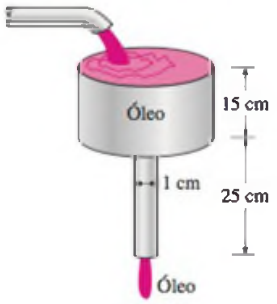


FIGURA P8–68

8–69 Repita o Problema 8–68 supondo que (*a*) o diâmetro do tubo seja o dobro e (*b*) o comprimento do tubo seja o dobro.

8–70 Água a 15°C é drenada de um reservatório grande usando dois tubos horizontais de plástico conectados em série. O primeiro tubo tem 20 m de comprimento e diâmetro de 10 cm, enquanto o segundo tubo tem 35 m de comprimento e 4 cm de diâmetro. O nível da água no reservatório é de 18 m acima do eixo central do tubo. A entrada do tubo tem aresta viva, e a contração entre os dois tubos é repentina. Desprezando o efeito do fator de correção da energia cinética, determine a vazão de descarga da água do reservatório.

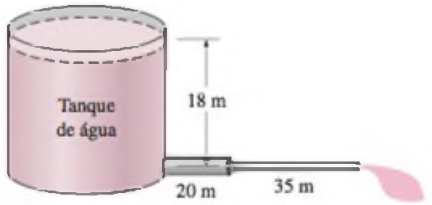


FIGURA P8–70

8–71 Um tanque de água cheio com água aquecida por aquecimento solar a 40°C deve ser usada para banhos de chuveiro em um acampamento usando o escoamento por gravidade. O sistema inclui 20 m de tubulação de ferro galvanizado de 1,5 cm de diâmetro com quatro curvas chanfradas (90°) sem aletas e uma válvula de globo totalmente aberta. Se a água deve escoar a uma taxa de 0,7 L/s através do chuveiro, determine qual deve ser a altura do nível da água no tanque com relação ao nível de saída do chuveiro. Despreze as perdas na entrada e no chuveiro, e despreze o efeito do fator de correção da energia cinética.

8–72 Dois reservatórios de água *A* e *B* estão conectados entre si através de um tubo de ferro fundido de 40 m de comprimento e 2 cm de diâmetro com uma entrada em aresta viva. O tubo também envolve uma válvula de retenção de batente e uma válvula de gaveta totalmente aberta. O nível da água em ambos os reservatórios é igual, mas o reservatório *A* é pressurizado por ar comprimido, enquanto o reservatório *B* está aberto para a atmosfera a 88 kPa. Se a vazão inicial através do tubo for de 1,2 L/s, determine a pressão absoluta do ar na parte superior do reservatório *A*. Tome a temperatura da água como 10°C. *Resposta*: 733 kPa.

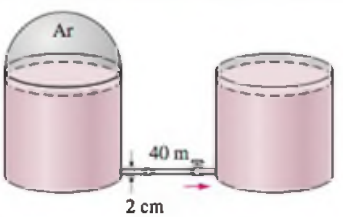


FIGURA P8–72

8–73 Um tanque ventilado deve ser enchido com óleo combustível com $\rho = 920$ kg/m^3 e $\mu = 0{,}045$ kg/m · s de um reservatório subterrâneo, usando uma mangueira plástica de 20 m de comprimento e 5 cm de diâmetro, com uma entrada ligeiramente arredondada e duas curvas suaves de 90°. A diferença de elevação entre o nível do óleo do reservatório e a parte superior do tanque onde a mangueira é descarregada é de 5 m. A capacidade do tanque é de 18 m^3 e o tempo de preenchimento é de 30 min. Considerando que o fator de correção da energia cinética na descarga da mangueira seja 1,05 e supondo uma eficiência geral da bomba de 82%, determine a entrada necessária de potência na bomba.

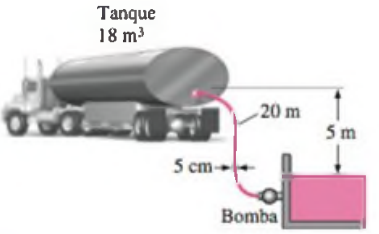


FIGURA P8–73

8–74 Dois tubos com comprimento e materiais idênticos estão conectados em paralelo. O diâmetro do tubo *A* é o dobro do diâmetro do tubo *B*. Considerando o fator de atrito igual em ambos os casos e desprezando as perdas menores, determine a vazão nos dois tubos.

8–75 Determinada parte da tubulação de ferro fundido de um sistema de distribuição de água envolve uma seção paralela. Ambos os tubos paralelos têm um diâmetro de 30 cm, e o escoamento é completamente turbulento. Um dos ramais (tubo *A*) tem 1000 m de comprimento, enquanto o outro ramal (tubo *B*) tem 3000 m de comprimento. Se a vazão através do tubo *A* for de 0,4 m^3/s, determine a vazão através do tubo *B*. Despreze as perdas menores e considere que a temperatura da água seja de 15°C. Mostre que o escoamento é completamente turbulento e, portanto, o atrito não depende do número de Reynolds. *Resposta*: 0,231 m^3/s

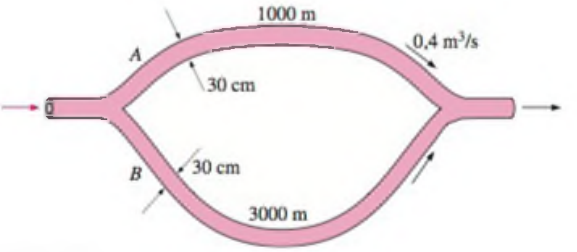


FIGURA P8–75

8–76 Repita o Problema 8–75 considerando que o tubo *A* tenha uma válvula de gaveta fechada até a metade ($K_L = 2{,}1$), enquanto o tubo *B* tenha uma válvula de globo totalmente aberta ($K_L = 10$) e que as outras perdas menores seja desprezíveis. Suponha que o escoamento seja totalmente turbulento.

8–77 Um sistema de aquecimento distrital geotérmico envolve o transporte da água geotérmica a 110°C de um poço geotérmico para uma cidade com a mesma altitude por uma distância de 12 km, a uma vazão de 1,5 m^3/s, em tubos de aço inoxidável com 60 cm de diâmetro. As pressões do fluido na superfície do poço e no ponto de chegada da cidade devem ser iguais. As perdas menores são desprezíveis devido à grande razão maior entre comprimento e diâmetro e ao número relativamente pequeno de componentes que causam perdas menores. (*a*) Assumindo que a eficiência da bomba-motor seja de 74%, determine o consumo de energia elétrica do sistema para o bombeamento. Você recomendaria o uso de uma única bomba grande ou de diversas bombas

menores com mesma potência total de bombeamento espalhadas pela tubulação? Explique. (*b*) Determine o custo diário do consumo de energia do sistema se o custo unitário da eletricidade for de $0,06/kWh. (*c*) A queda da temperatura da água geotérmica é estimada como 0,5°C durante esse escoamento longo. Determine se o aquecimento por atrito durante o escoamento pode compensar essa queda da temperatura.

8–78 Repita o Problema 8–77 para tubos de ferro fundido de mesmo diâmetro.

8–79 Em prédios grandes, a água quente de um tanque de água circula através de um laço, para que o usuário não tenha que esperar até que toda a água da tubulação longa drene antes que a água quente comece a sair. Determinado laço de recirculação envolve tubos de ferro fundido com 40 m de comprimento e 1,2 cm de diâmetro, com seis curvas suaves rosqueadas de 90° e dois distribuidores totalmente abertos. Se a velocidade média do escoamento através do laço for de 2,5 m/s, determine a entrada necessária de potência para a bomba de recirculação. Tome a temperatura média da água como 60°C e a eficiência da bomba como 80%. *Resposta*: 0,217 kW

8–80 Reconsidere o Problema 8–79. Usando o EES (ou outro aplicativo) investigue o efeito da velocidade média de escoamento sobre a entrada de potência para a bomba de recirculação. Faça a velocidade da água variar de 0 a 3 m/s em incrementos de 0,3 m/s. Tabule e mostre graficamente os resultados.

8–81 Repita o Problema 8–79 para tubos plásticos.

Medições de Vazão e de Velocidade

8–82C Quais são as principais considerações ao selecionar um medidor de vazão para medir a vazão de um fluido?

8–83C Explique como a vazão é medida com um tubo estático de Pitot e discuta suas vantagens e desvantagens com relação ao custo, queda de pressão, confiabilidade e exatidão.

8–84C Explique como a vazão é medida com medidores de vazão do tipo por obstrução. Compare os medidores de orifício, de bocais de escoamento e os medidores Venturi com relação ao custo, tamanho, perda de carga e exatidão.

8–85C Como operam os medidores de vazão de deslocamento positivo? Por que eles são usados para medir gasolina, água e gás natural?

8–86C Explique como a vazão é medida com um medidor de vazão tipo turbina e discuta como ele se compara aos outros tipos de medidores de vazão com relação ao custo, perda de carga e exatidão.

8–87C Qual é o princípio operacional dos medidores de vazão de área variável (rotâmetros)? Como eles se comparam aos outros tipos de medidor de vazão com relação ao custo, perda de carga e confiabilidade?

8–88C Qual é a diferença entre os princípios operacionais dos anemômetros térmicos e laser Doppler?

8–89C Qual é a diferença entre a velocimetria laser Doppler (LDV) e a velocimetria por imagem de partícula (PIV)?

8–90 A vazão da amônia a 10°C (ρ = 624,6 kg/m^3 e μ = 1,697 × 10^{-4} kg/m · s) através de um tubo com 3 cm de diâmetro deve ser medida com um bocal de escoamento com diâmetro de 1,5 cm equipado com um medidor de pressão diferencial. Se a pressão diferencial for medida como 4 kPa, determine a vazão da amônia através do tubo e a velocidade de escoamento média.

8–91 A vazão da água através de um tubo com diâmetro de 10 cm deve ser determinada medindo a velocidade da água em diversos locais ao longo de uma seção transversal. Para o conjunto de medidas dadas na tabela, determine a vazão.

r, cm	V, m/s
0	6,4
1	6,1
2	5,2
3	4,4
4	2,0
5	0,0

8–92 A vazão da água a 20°C (ρ = 998 kg/m^3 e μ = 1,002 × 10^{-3} kg/m · s) através de um tubo com 50 cm de diâmetro é medida com um medidor de orifício com uma abertura de 30 cm de diâmetro como 250 L/s. Determine a diferença de pressão indicada pelo medidor de orifício e a perda de carga.

8–93 Um medidor Venturi equipado com um medidor de pressão diferencial é usado para medir a vazão da água a 15°C (ρ = 999,1 kg/m^3) através de um tubo horizontal com 5 cm de diâmetro. O diâmetro do gargalo no Venturi é de 3 cm, e a queda de pressão medida é de 5 kPa. Tomando o coeficiente de descarga como 0,98, determine a vazão em volume da água e a velocidade média através do tubo. *Respostas*: 2,35 L/s e 1,20 m/s

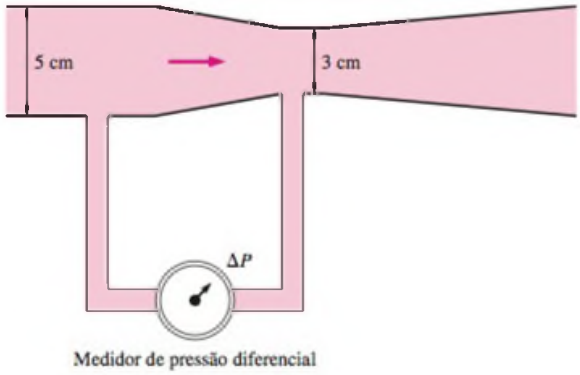


FIGURA P8–93

8–94 Reconsidere o Problema 8–93. Fazendo a queda de pressão variar entre 1 kPa e 10 kPa, calcule a vazão a intervalos de 1 kPa, e mostre-a graficamente *versus* queda de pressão.

8–95 A vazão de massa do ar a 20°C (ρ = 1,204 kg/m^3) através de um duto com 15 cm de diâmetro é medida com um medidor Venturi equipado com um manômetro de água. O gargalo no Venturi tem um diâmetro de 6 cm, e o manômetro tem altura diferencial máxima de 40 cm. Supondo que o coeficiente de descarga seja 0,98, determine a vazão em massa do ar que esse medidor Venturi pode medir. *Resposta*: 0,273 kg/s

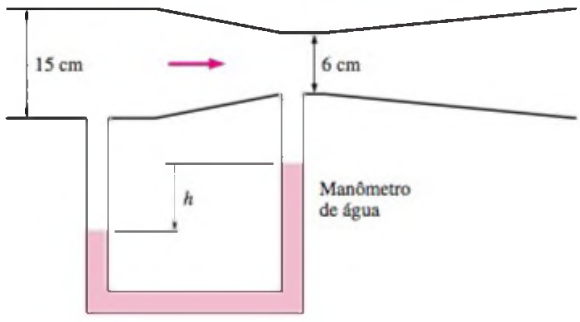


FIGURA P8–95

8–96 Repita o Problema 8–95 para um gargalho no Venturi com diâmetro de 7,5 cm.

8–97 Um medidor Venturi vertical equipado com um medidor de pressão diferencial é mostrado na Figura P8–97 e usado para medir a vazão de propano líquido a 10°C (ρ = 514,7 kg/m^3) através de um tubo horizontal com 8 cm de diâmetro. Para um coeficiente de descarga de 0,98, determine a vazão em volume de propano através do tubo.

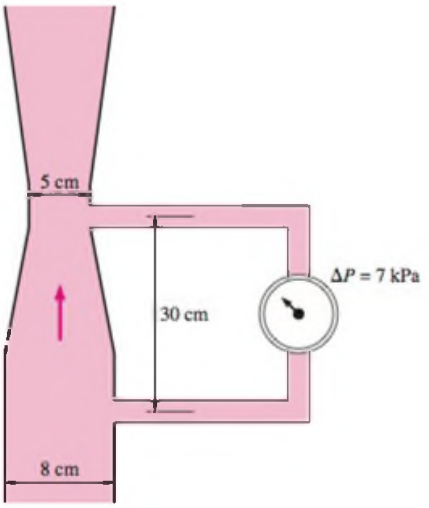


FIGURA P8–97

8–98 Um bocal de escoamento equipado com um medidor de pressão diferencial é usado para medir a vazão da água a 10°C (ρ = 999,7 kg/m^3 e μ = 1,307 × 10^{-3} kg/m · s) através de um tubo horizontal com 3 cm de diâmetro. O diâmetro de saída do bocal é de 1,5 cm, e a queda de pressão medida é de 3 kPa. Determine a vazão volumétrica da água, a velocidade média através do tubo e a perda de carga.

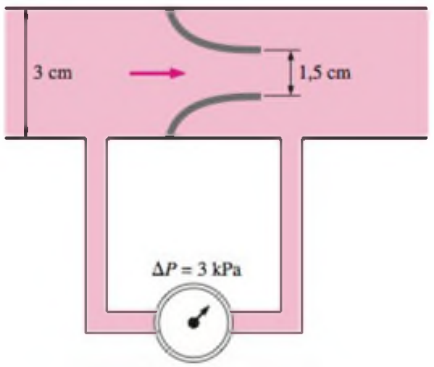


FIGURA P8–98

8–99 Um tanque de querosene de 16 L (ρ = 820 kg/m^3) é enchido com uma mangueira com 2 cm de diâmetro equipada com um medidor de bocal de 1,5 cm de diâmetro. Se forem precisos 20 s para encher o tanque, determine a diferença de pressão indicada pelo medidor de bocal.

8–100 A vazão da água a 20°C (ρ = 998 kg/m^3 e μ = 1,002 × 10^{-3} kg/m · s) através de um tubo com diâmetro de 4 cm de diâmetro é medida com um medidor de bocal equipado com um manômetro de ar e água invertido. Se o manômetro indicar uma altura diferencial da água de 32 cm, determine a vazão volumétrica da água e a perda de carga causada pelo medidor de bocal.

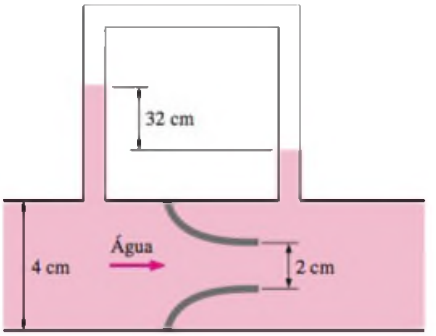


FIGURA P8–100

Problemas de Revisão

8–101 Os requisitos de ar comprimido de uma fábrica são atendidos por um compressor de 150 hp que retira ar do exterior através de um duto com 8 m de comprimento e 20 cm de diâmetro feito de folhas finas de ferro galvanizado. O compressor tira ar a uma taxa de 0,27 m^3/s às condições externas de 15°C e 95 kPa. Desprezando todas as perdas menores, determine a potência útil usada pelo compressor para superar as perdas por atrito nesse duto. *Resposta*: 9,66 W

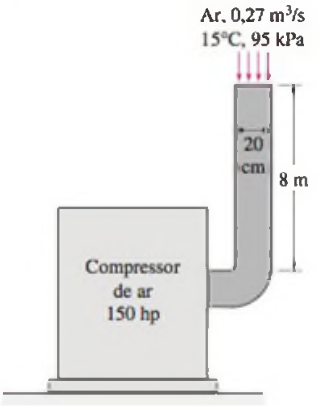


FIGURA P8–101

8–102 Uma casa construída às margens de um rio deve ser resfriada no verão utilizando a água fria do rio. Uma seção de 15 m de comprimento de um duto de aço inoxidável circular com 20 cm de diâmetro passa através da água. O ar escoa através da seção sub aquática do duto a 3 m/s a uma temperatura média de 15°C. Para uma eficiência geral do ventilador de 62%, determine a potência de ventilador necessária para superar a resistência ao escoamento nessa seção do duto.

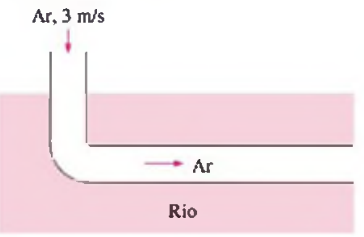


FIGURA P8–102

8–103 O perfil de velocidade do escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo circular é dado em m/s por $u(r) = 6(1 - 100r^2)$, onde r é a distância radial do eixo central do tubo em m. Determine (*a*) o raio do tubo, (*b*) a velocidade média através do tubo e (*c*) a velocidade máxima no tubo.

8–104 Considere o escoamento de um reservatório através de um tubo horizontal de comprimento L e diâmetro D que penetra na parede lateral a uma distância vertical H da superfície livre. A vazão através de um tubo real com seção reentrante ($K_L = 0{,}8$) será consideravelmente menor do que a vazão através do orifício calculada supondo um escoamento "sem atrito" e, portanto, perda zero. Obtenha uma relação para o "diâmetro equivalente" do tubo reentrante para uso nas relações de escoamento sem atrito através de um orifício e determine seu valor para um fator de atrito do tubo, comprimento e diâmetro de 0,018, 10 m e 0,04 m, respectivamente. Considere que o fator de atrito do tubo permaneça constante e que o efeito do fator de correção da energia cinética seja desprezível.

8–105 Água deve ser retirada de um reservatório de água com 5 m de altura perfurando um orifício bem arredondado com 3 cm de diâmetro com perda desprezível na superfície inferior e anexando uma curva horizontal de 90° com comprimento desprezível. Tomando o fator de correção da energia cinética como 1,05, determine a vazão da água através da curva se (*a*) a curva for suave e flangeada e (*b*) a curva for chanfrada e sem aletas. *Respostas*: (a) 0,00603 m³/s; (b) 0,00478 m³/s

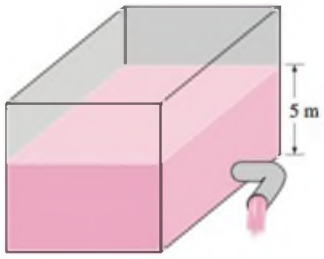


FIGURA P8–105

8–106 Em um sistema de aquecimento distrital geotérmico, 10.000 kg/s de água quente devem ser levados a uma distância de 10 km em um tubo horizontal. As perdas menores são desprezíveis, e a única perda de energia significativa é a proveniente do atrito no tubo. O fator de atrito pode ser tomado como 0,015. A especificação de um tubo de diâmetro maior reduziria a velocidade da água, a carga de velocidade, o atrito do tubo e, portanto, o consumo de energia. Mas um tubo maior também teria um custo inicial maior de compra e instalação. Em outras palavras, existe um diâmetro de tubo ideal que minimizará a soma do custo do tubo e do custo da energia elétrica futura.

Considere que o sistema funcionará 24 h/dia, todos os dias durante 30 anos. Durante esse tempo o custo da eletricidade permanecerá constante a $0,06/kWh. Suponha que o desempenho do sistema permaneça constante durante décadas (isso pode não ser verdadeiro, particularmente se água altamente mineralizada passar através da tubulação, e a formação de crosta for possível). A bomba tem uma eficiência geral de 80%. O custo da compra, instalação e isolamento de um tubo de 10 km depende do diâmetro D e é dado por $Custo = \$10^6\ D^2$, onde D está em m. Considerando inflação e taxas de juros zero para simplificar, valor de recuperação e custo de manutenção zero, determine o diâmetro ideal do tubo.

8–107 Água a 15°C deve ser descarregada de um reservatório a uma taxa de 18 L/s usando dois tubos de ferro fundido horizontais em série e uma bomba entre eles. O primeiro tubo tem 20 m de comprimento e diâmetro de 6 cm, enquanto o segundo tubo tem 35 m de comprimento e 4 cm de diâmetro. O nível da água no reservatório é de 30 m acima do eixo central do tubo. A entrada do tubo tem aresta viva, e as perdas associadas à conexão da bomba são desprezíveis. Desprezando o efeito do fator de correção da energia cinética, determine a carga de bombeamento necessária e a potência de bombeamento mínima para manter a vazão indicada.

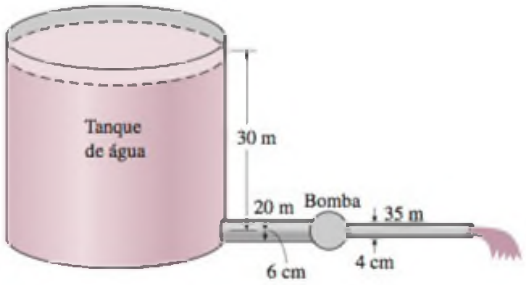


FIGURA P8–107

8–108 Reconsidere o Problema 8–107. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito do diâmetro do segundo tubo sobre a altura de bombeamento necessária para manter a vazão indicada. Faça o diâmetro variar de 1 cm a 10 cm em incrementos de 1 cm. Tabule e mostre graficamente os resultados.

8–109 Dois tubos com diâmetro e materiais idênticos estão conectados em paralelo. O comprimento do tubo A é o dobro do comprimento do tubo B. Assumindo que o escoamento seja completamente turbulento em ambos os tubos e, portanto, que o fator de atrito não dependa do número de Reynolds, e desprezando as perdas menores, determine a razão entre as vazões nos dois tubos. *Resposta*: 0,707

8–110 Um tubo que transporta óleo a 40°C a uma taxa de 3 m³/s se divide em dois tubos paralelos feitos de aço comercial que se reconectam a jusante. O tubo A tem 500 m de comprimento e diâmetro de 30 cm enquanto que o tubo B tem 800 m de comprimento e diâmetro de 45 cm. As perdas menores são consideradas desprezíveis. Determine a vazão através de cada um dos tubos paralelos.

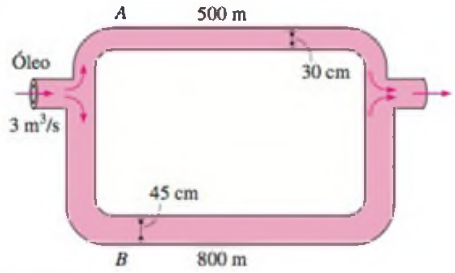


FIGURA P8–110

8–111 Repita o Problema 8–110 para o escoamento de água quente de um sistema de aquecimento distrital a 100°C.

8–112 Em uma usina hidrelétrica a água a 20°C é fornecida para a turbina a uma taxa de 0,8 m³/s através de um tubo de ferro fundido com 200 m de comprimento e 0,35 m de diâmetro. A diferença de elevação entre a superfície livre do reservatório e a descarga da turbina é de 70 m, e a eficiência combinada de turbina-gerador é de 84%. Desprezando as perdas menores por conta da razão grande entre comprimento e diâmetro, determine a saída de potência elétrica dessa usina.

8–113 No Problema 8–112, o diâmetro do tubo é triplicado para reduzir as perdas do tubo. Determine o aumento percentual na saída de potência liquida como resultado dessa modificação.

8–114 Um tubo circular de água tem uma expansão abrupta do diâmetro $D_1 = 15$ cm para $D_2 = 20$ cm. A pressão e a velocidade média da água no tubo menor são $P_1 = 120$ kPa e 10 m/s, respec-

tivamente, e o escoamento é turbulento. Aplicando as equações da continuidade, do momento e da energia e desprezando os efeitos dos fatores de correção para a energia cinética e para o fluxo de momento mostre que o coeficiente de perda para a expansão repentina é $K_L = (1 - D_1^2/D_2^2)^2$ e calcule K_L e P_2 para este caso.

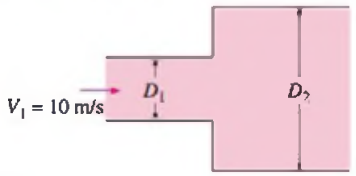


FIGURA P8–114

8–115 A água em uma piscina acima do solo a 20°C, com 10 m de diâmetro e 2 m de altura deve ser esvaziada destampando um tubo plástico horizontal com 3 cm de diâmetro e 25 m de comprimento anexado à parte inferior da piscina. Determine a taxa inicial de descarga da água através do tubo e o tempo necessário para esvaziar a piscina completamente, considerando que a entrada do tubo seja bem arredondada, com perda desprezível. Tome o fator de atrito do tubo como 0,022. Usando a velocidade de descarga inicial, verifique se esse é um valor razoável para o fator de atrito. *Respostas*: 1,01 L/s; 86,7 h

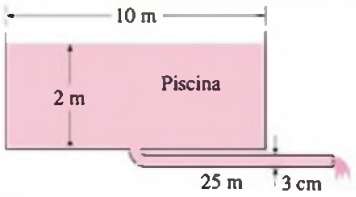


FIGURA P8–115

8–116 Reconsidere o Problema 8–115. Usando o EES (ou outro aplicativo), investigue o efeito do diâmetro do tubo de descarga sobre o tempo necessário para esvaziar completamente a piscina. Faça o diâmetro variar de 1 cm a 10 cm em incrementos de 1 cm. Tabule e mostre em um gráfico os resultados.

8–117 Repita o Problema 8–115 para uma entrada em aresta viva no tubo com $K_L = 0{,}5$. Essa "perda menor" é verdadeiramente "menor" ou não?

8–118 Um sistema que consiste em dois tanques cilíndricos interconectados com $D_1 = 30$ cm e $D_2 = 12$ cm deve ser usado para determinar o coeficiente de descarga de um orifício curto com diâmetro $D_0 = 5$ mm. No início ($t = 0$ s), as alturas do fluido nos tanques são $h_1 = 50$ cm e $h_2 = 15$ cm, como mostra a Figura P8–117. Se são precisos 170 s para que os níveis do fluido dos dois tanques se igualem e o escoamento pare, determine o coeficiente de descarga do orifício. Despreze todas as outras perdas associadas a esse escoamento.

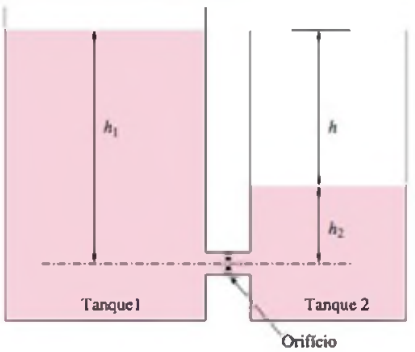


FIGURA P8–118

8–119 Um líquido altamente viscoso é descarregado de um grande contêiner através de um tubo com diâmetro pequeno em escoamento laminar. Desprezando os efeitos da entrada e as cargas de velocidade, obtenha uma relação para a variação da profundidade do fluido no tanque com o tempo.

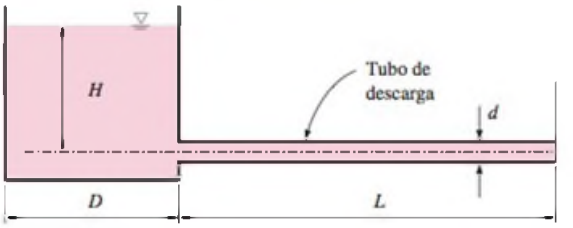


FIGURA P8–119

8–120 Um aluno deve determinar a viscosidade cinemática de um óleo usando o sistema mostrado no Problema 8–119. A altura inicial do fluido no tanque é $H = 40$ cm, o diâmetro do tubo é $d = 6$ mm, o comprimento do tubo é $L = 0{,}65$ m e o diâmetro do tanque é $D = 0{,}63$ m. O aluno observa que são precisos 2.842 s para que o nível do fluido no tanque caia até 36 cm. Encontre a viscosidade do fluido.

Problemas de Projeto e Ensaio

8–121 Caixas eletrônicas, como computadores, normalmente são resfriadas por um ventilador. Escreva um ensaio sobre o resfriamento por ar forçado das caixas eletrônicas e sobre a seleção do ventilador para dispositivos eletrônicos.

8–122 Projete um experimento para medir a viscosidade dos líquidos usando um funil vertical com um reservatório cilíndrico de altura h e uma seção estreita de escoamento de diâmetro D e comprimento L. Fazendo hipóteses apropriadas, obtenha uma relação para a viscosidade em termos de quantidades facilmente mensuráveis, como a densidade e a vazão de volume. Existe necessidade de usar um fator de correção?

8–123 Uma bomba deve ser selecionada para uma queda de água em um jardim. A água é represada em um lago na parte inferior e a diferença de elevação entre a superfície livre do lago e o local onde a água é descarregada é de 3 m. A vazão da água deve ser de pelo menos 8 L/s. Selecione uma unidade de motor-bomba apropriada para essa tarefa, e identifique os três fabricantes com números de modelo e preços do produto. Faça uma seleção e explique por que você selecionou aquele determinado produto. Estime também o custo do consumo anual de energia dessa unidade, assumindo operação contínua.

8–124 Durante um acampamento você observa que a água é descarregada de um reservatório alto para um riacho no vale através de um tubo plástico com 30 cm de diâmetro. A diferença de elevação entre a superfície livre do reservatório e o riacho é de 70 m. Você tem a idéia de gerar potência com essa água. Projete uma usina que produzirá o máximo de potência com esse recurso. Investigue também o efeito da geração de potência sobre a taxa de descarga da água. Qual taxa de descarga maximizará a produção de energia?

CAPÍTULO

9

ANÁLISE DIFERENCIAL DE ESCOAMENTO DE FLUIDO

Neste capítulo deduzimos as equações diferenciais de movimento de fluido, ou seja, a conservação da massa (a *equação da continuidade*) e a Segunda Lei de Newton (*equação de Navier-Stokes*). Essas equações se aplicam a todos os pontos no campo de escoamento e assim nos fornecem soluções para todos os detalhes do escoamento em qualquer ponto do *domínio do escoamento*. Infelizmente, a maioria das equações diferenciais encontradas na mecânica dos fluidos são muito difíceis de resolver e freqüentemente requerem o auxílio de um computador. Além disso, essas equações devem ser combinadas, quando necessário, com equações adicionais, tais como uma equação de estado e uma equação para transporte de energia e/ou de espécies. Fornecemos aqui um procedimento passo a passo para resolver esse conjunto de equações diferenciais de movimento de fluido e obter soluções analíticas para vários exemplos simples. Introduzimos também o conceito de *função corrente*; curvas de função corrente constantes tornam-se *linhas de corrente* nos campos de escoamentos bidimensionais.

OBJETIVOS

Ao terminar de ler este capítulo você deve ser capaz de:

- Deduzir as equações diferenciais de conservação de massa e quantidade de movimento
- Calcular a função corrente e o campo de pressão, e desenhar linhas de corrente para um campo de velocidades conhecido
- Obter soluções analíticas das equações de movimento para campos de escoamento simples

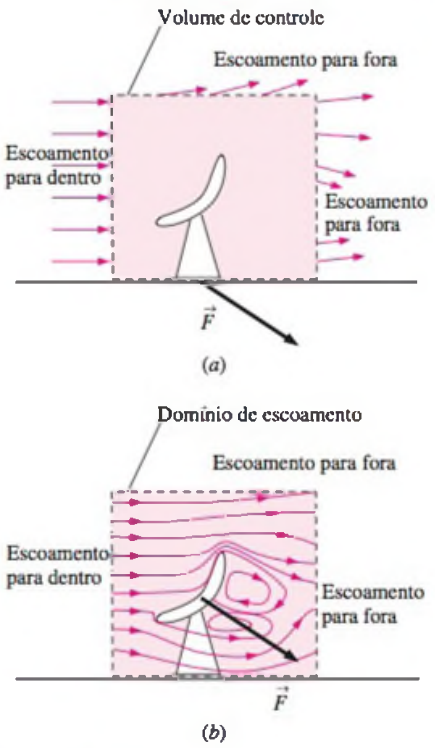


FIGURA 9–1
(*a*) Na análise de volume de controle, o interior do volume de controle é tratado como uma caixa-preta, mas, (*b*) na análise diferencial, *todos* os detalhes do escoamento são resolvidos em *cada* ponto do domínio do escoamento.

9–1 • INTRODUÇÃO

No Capítulo 5, deduzimos versões para volume de controle das leis de conservação de massa e energia, e no Capítulo 6 fizemos a mesma coisa para o momento linear. A técnica do volume de controle é útil quando estamos interessados nas características gerais de um escoamento, tais como a vazão em massa que entra e que sai do volume de controle ou as forças aplicadas a corpos. Na Figura 9–1 está esboçado um exemplo para o caso do vento fluindo ao redor de uma antena de satélite. É tomado um volume de controle retangular envolvendo as vizinhanças da antena do satélite, conforme mostra o desenho. Se conhecermos a velocidade do ar ao longo de toda a superfície de controle, podemos calcular a força de reação na antena do satélite sem nem mesmo conhecer qualquer detalhe sobre sua geometria. O interior do volume de controle é na verdade tratado como uma "caixa-preta" na análise do volume de controle — *não podemos* obter informações detalhadas sobre propriedades do escoamento como velocidade ou pressão em pontos *dentro* do volume de controle.

A **análise diferencial**, por outro lado, envolve a aplicação de equações diferenciais de movimento do fluido *em todos os pontos* no campo de escoamento sobre uma região chamada de **domínio de escoamento**. Você pode pensar na técnica diferencial como a análise de milhões de minúsculos volumes de controle empilhados lado a lado e uns sobre os outros ocupando todo o campo de escoamento. No limite, à medida que o número de minúsculos volumes de controle tende ao infinito e o tamanho de cada volume de controle se aproxima de um ponto, as equações de conservação se simplificam tornando-se um conjunto de equações diferenciais parciais que são válidas em qualquer ponto no escoamento. Ao serem resolvidas, essas equações diferenciais fornecem detalhes sobre a velocidade, massa específica, pressão etc. em *cada* ponto de *todo* o domínio do escoamento. Por exemplo, na Figura 9–1*b*, a análise diferencial do escoamento de ar ao redor da antena do satélite produz as formas das linhas de corrente, uma distribuição de pressão detalhada ao redor da antena etc. Com base nesses detalhes, podemos integrar para determinar as características gerais do escoamento tal como a força sobre a antena do satélite.

Em um problema de escoamento de fluido como aquele ilustrado na Figura 9–1 no qual as mudanças na densidade e temperatura do ar não são significativas, é suficiente resolver duas equações diferenciais de movimento — conservação da massa e Segunda Lei de Newton (conservação do momento linear). Para um fluido incompressível tridimensional, há *quatro incógnitas* (componentes da velocidade u, v, w, e pressão P) e *quatro equações* (uma da conservação da massa, que é uma equação escalar, e três da Segunda Lei de Newton, que é uma equação vetorial). Conforme veremos, as equações são **acopladas**, o que significa que algumas das variáveis aparecem nas quatro equações; o conjunto de equações diferenciais deve ser, portanto, resolvido simultaneamente para as quatro incógnitas. Além disso, as **condições de contorno** para as variáveis devem ser especificadas em *todas as fronteiras do domínio do escoamento*, incluindo entradas, saídas e paredes. Finalmente, se o escoamento for em regime não permanente, temos que estender nossa solução ao longo do tempo conforme o campo de escoamento varia. Como você pode ver, a análise diferencial do escoamento de um fluido pode se tornar muito complicada e difícil. Os computadores representam uma tremenda ajuda aqui, como discutiremos no Capítulo 15. No entanto, podemos fazer muito analiticamente, e começaremos deduzindo a equação diferencial para a conservação da massa.

9–2 • CONSERVAÇÃO DA MASSA – A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Aplicando o teorema de transporte de Reynolds (Capítulo 4), temos a seguinte expressão geral para conservação da massa aplicada a um volume de controle:

Conservação da massa para um VC:

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (9\text{–}1)$$

Lembre-se de que a Equação 9–1 é válida para volumes de controle fixos e móveis, desde que o vetor velocidade seja a velocidade *absoluta* (vista por um observador fixo). Quando houver entradas e saídas bem definidas, a Equação 9–1 pode ser reescrita como:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \sum_e \dot{m} - \sum_s \dot{m} \qquad (9\text{–}2)$$

Em resumo, a taxa de variação total da massa dentro do volume de controle é igual à taxa na qual a massa flui para dentro do volume de controle, menos a taxa na qual a massa flui para fora do volume de controle. A Equação 9–2 se aplica a *qualquer* volume de controle, independentemente de seu tamanho. Para gerarmos uma equação diferencial para conservação da massa, imaginamos o volume de controle encolhendo até um tamanho infinitesimal, com dimensões *dx*, *dy*, e *dz* (Figura 9–2). No limite, o volume de controle inteiro encolhe para um *ponto* no escoamento.

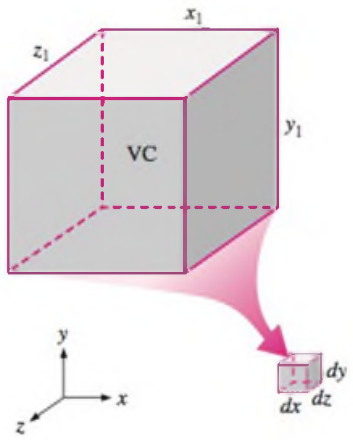


FIGURA 9–2
Para deduzirmos uma equação diferencial para a conservação da massa, imaginamos um volume de controle encolhendo até um tamanho infinitesimal.

Dedução Usando o Teorema do Divergente

A maneira mais rápida e direta de deduzir a forma diferencial da equação de conservação da massa é aplicar o **teorema do divergente** à Equação 9–1. O teorema do divergente também é chamado de **teorema de Gauss**, em homenagem ao matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855). O teorema do divergente nos permite transformar uma integral de volume do divergente de um vetor em uma integral da área sobre a superfície que define o volume. Para qualquer vetor $\vec{G}$, o **divergente** de $\vec{G}$ é definido por $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$, e o teorema do divergente pode ser escrito como:

Teorema do divergente:
$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G}\, dV = \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (9\text{–}3)$$

O círculo na integral da área é usado para enfatizar o fato de que a integral deve ser calculada sobre *toda a área fechada A* que envolve o volume *V*. Note que a superfície de controle da Equação 9–1 *é* uma área fechada, apesar de nem sempre acrescentarmos o círculo ao símbolo da integral. A Equação 9–3 se aplica a *qualquer* volume, assim escolhemos o volume de controle da Equação 9–1. Também fazemos $\vec{G} = \rho \vec{V}$ já que $\vec{G}$ pode ser qualquer vetor. A substituição da Equação 9–3 na Equação 9–1 converte a integral da área em uma integral de volume:

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) dV$$

Combinamos agora as duas integrais de volume em uma:

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right)\right] dV = 0 \qquad (9\text{–}4)$$

Finalmente, argumentamos que a Equação 9–4 deve valer para *qualquer* volume de controle independentemente de seu tamanho ou forma. Isso é possível somente se o integrando (os termos dentro dos colchetes) for identicamente igual a zero. Daí, temos uma equação diferencial geral para a conservação da massa, mais conhecida como **equação da continuidade**:

Equação da continuidade:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0 \qquad (9\text{–}5)$$

A Equação 9–5 é a forma compressível da equação da continuidade, já que nós não consideramos que o escoamento fosse incompressível. Ela é válida em qualquer ponto no domínio do escoamento.

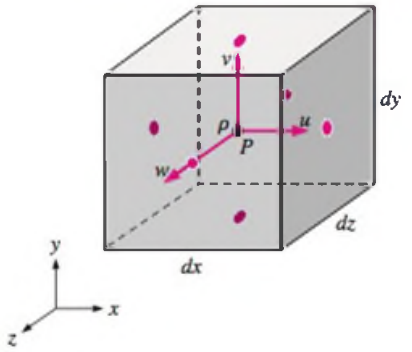


FIGURA 9–3
Um pequeno volume de controle em forma de caixa centrado no ponto P é usado para a dedução da equação diferencial para conservação da massa em coordenadas cartesianas; os pontos azuis indicam o centro de cada face.

Dedução Usando um Volume de Controle Infinitesimal

Deduzimos a equação da continuidade de uma maneira diferente, começando com um volume de controle no qual aplicamos a conservação da massa. Considere um volume de controle infinitesimal com a forma de uma caixa alinhada com os eixos das coordenadas cartesianas (Figura 9–3). As dimensões da caixa são dx, dy e dz, e o centro da caixa, mostrado na figura, está em algum ponto arbitrário P a partir da origem (a caixa pode estar localizada em qualquer lugar no campo de escoamento). No centro da caixa definimos a densidade como ρ e as componentes da velocidade como u, v e w, conforme mostra a figura. Em localizações distantes do centro da caixa, usamos uma **expansão em séries de Taylor** em relação ao centro da caixa (ponto P). [A expansão em séries tem esse nome em homenagem ao seu criador, o matemático inglês Brook Taylor (1685–1731).] Por exemplo, o centro da face direita da caixa está localizado a uma distância $dx/2$ do meio da caixa na direção x; o valor de ρu naquele ponto é:

$$(\rho u)_{\text{centro de face direita}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \cdots \qquad (9\text{–}6)$$

Porém, à medida que a caixa que representa o volume de controle vai se encolhendo, aproximando-se de um ponto, os termos de segunda ordem e de ordem mais alta tornam-se insignificantes. Por exemplo, vamos supor que $dx/L = 10^{-3}$, onde L é algum comprimento característico do domínio do escoamento. Então $(dx/L)^2 = 10^{-6}$, um fator mil vezes menor do que dx/L. Na verdade, quanto menor for dx, melhor é a hipótese de que os termos de segunda ordem são desprezíveis. Aplicando essa expansão truncada em séries de Taylor à densidade vezes a componente normal de velocidade no ponto central de cada uma das seis faces da caixa, temos:

Centro da face direita: $$(\rho u)_{\text{centro da face direita}} \cong \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

Centro da face esquerda: $$(\rho u)_{\text{centro da face esquerda}} \cong \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

Centro da face frontal: $$(\rho w)_{\text{centro da face frontal}} \cong \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}$$

Centro da face detrás: $$(\rho w)_{\text{centro da face detrás}} \cong \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}$$

Centro da face superior: $$(\rho v)_{\text{centro da face superior}} \cong \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

Centro da face inferior: $$(\rho v)_{\text{centro da face inferior}} \cong \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

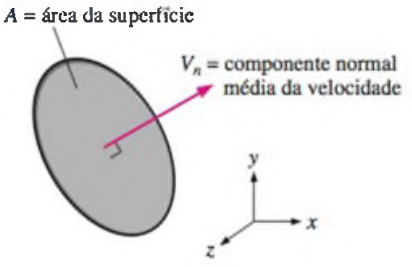


FIGURA 9–4
A vazão em massa através de uma superfície é igual a $\rho V_n A$.

A vazão em massa que entra ou sai através de uma das faces é igual à massa específica vezes a componente normal de velocidade no ponto central da face vezes a área da face. Em outras palavras, $\dot{m} = \rho V_n A$ em cada face, onde V_n é o valor da velocidade normal através da face e A é a área da face (Figura 9–4). A vazão em massa através de cada face de nosso volume de controle infinitesimal está ilustrada na Figura 9–5. Poderíamos elaborar expansões em séries de Taylor truncadas no centro de cada face para as demais componentes da velocidade (não-normal) também, mas isso é desnecessário pois essas componentes são *tangenciais* à face em consideração. Por exemplo, o valor de ρv no centro da face direita pode ser estimado por uma expansão similar, mas como v é tangente à face direita da caixa, ela não contribui para a vazão de massa para dentro e para fora daquela face.

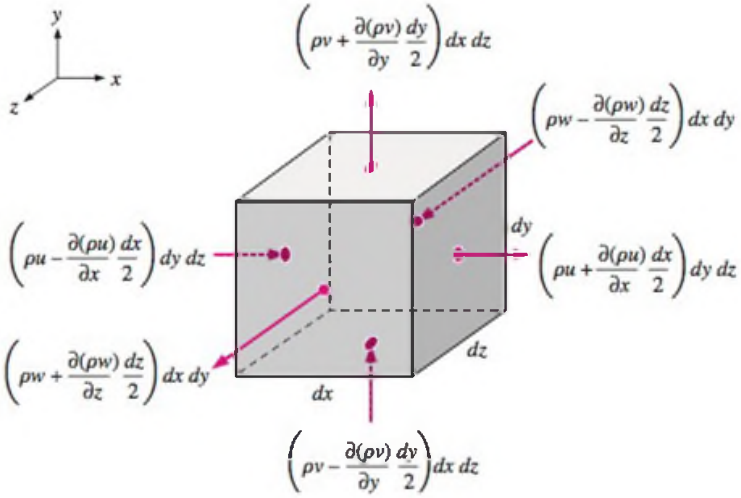


FIGURA 9–5
A vazão em massa que entra e que sai através de cada face do volume de controle diferencial; os pontos azuis indicam o centro de cada face.

À medida que o volume de controle se encolhe para um ponto, o valor da integral do volume no lado esquerdo da Equação 9–2 torna-se

Taxa de variação da massa dentro do VC:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV \cong \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz \qquad (9\text{–}7)$$

pois o volume da caixa é $dx\, dy\, dz$. Aplicamos agora as aproximações da Figura 9–5 ao lado direito da Equação 9–2. Fazemos a soma de todas as vazões em massa que entram e que saem do volume de controle através das faces. As faces esquerda, inferior e detrás contribuem para o fluxo de massa *que entra*, e o primeiro termo no lado direito da Equação 9–2 torna-se:

Vazão em massa para dentro do VC:

$$\sum_{e} \dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz}_{\text{face esquerda}} + \underbrace{\left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz}_{\text{face inferior}} + \underbrace{\left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy}_{\text{face detrás}}$$

Semelhantemente, as faces direita, superior e da frente contribuem para a *saída* de massa, e o segundo termo no lado direito da Equação 9–2 torna-se:

Vazão em massa para fora do VC:

$$\sum_{s} \dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz}_{\text{face direita}} + \underbrace{\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz}_{\text{face superior}} + \underbrace{\left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy}_{\text{face da frente}}$$

Substituímos a Equação 9–7 e essas duas equações para vazão em massa na Equação 9–2. Muitos termos são cancelados; após combinar e simplificar os termos restantes, ficamos com:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

O volume da caixa, $dx\, dy\, dz$, aparece em cada termo e pode ser eliminado. Após um rearranjo, ficamos com a seguinte equação diferencial para conservação da massa em coordenadas cartesianas:

Equação da continuidade em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad (9\text{–}8)$$

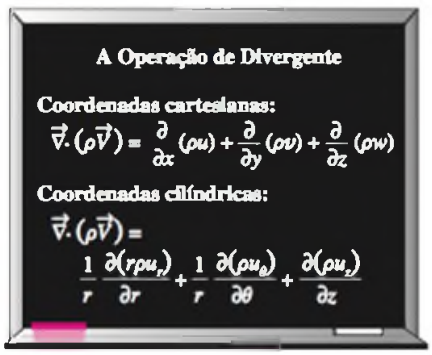


FIGURA 9–6
A operação de divergente em coordenadas cartesianas e cilíndricas.

A Equação 9–8 é a forma compressível da equação da continuidade em coordenadas cartesianas. Ela pode ser escrita em uma forma mais compacta reconhecendo a operação de divergente (Figura 9–6), resultando em uma equação exatamente igual à Equação 9–5.

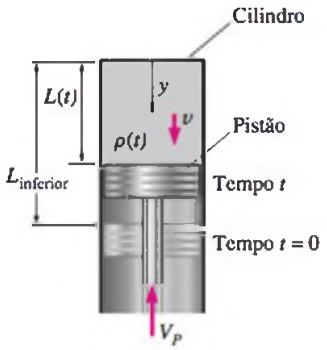


FIGURA 9–7
Combustível e ar sendo comprimidos por um pistão em um cilindro de um motor de combustão interna.

EXEMPLO 9–1 Compressão de uma Mistura Ar-combustível

Uma mistura ar-combustível é comprimida por um pistão em um cilindro de um motor de combustão interna (Figura 9–7). A origem da coordenada y está no topo do cilindro, e o eixo y aponta para baixo como ilustra a figura. Supõe-se que o pistão se mova para cima com velocidade constante V_P. A distância L entre o topo do cilindro e o pistão decresce com o tempo de acordo com a aproximação linear $L = L_{\text{inferior}} - V_P t$, onde L_{inferior} é a posição do pistão quando ele está na parte inferior de seu ciclo no instante $t = 0$, conforme indica a Figura 9–7. Em $t = 0$, a densidade da mistura ar-combustível no cilindro é, em qualquer ponto, igual a $\rho(0)$. Estime a densidade da mistura ar-combustível em função do tempo e dos parâmetros fornecidos durante o ciclo de subida do pistão.

SOLUÇÃO A densidade da mistura ar-combustível deve ser estimada em função do tempo e dos parâmetros dados no enunciado do problema.

Hipóteses **1** A densidade varia com o tempo, não com o espaço; em outras palavras, a densidade é uniforme através do cilindro em qualquer instante, mas muda com o tempo: $\rho = \rho(t)$. **2** A componente da velocidade v varia com y e t, mas não com x ou z; em outras palavras, $v = v(y, t)$ somente. **3** $u = w = 0$. **4** Não escapa nenhuma massa do cilindro durante a compressão.

Análise Inicialmente, precisamos estabelecer uma expressão para a componente da velocidade v em função de y e t. É claro que $v = 0$ em $y = 0$ (no ponto onde o cilindro está na altura máxima), e $v = -V_P$ em $y = L$. Para simplificarmos, consideramos que v varia linearmente entre essas duas condições-limite,

Componente vertical da velocidade:
$$v = -V_P \frac{y}{L} \tag{1}$$

onde L é uma função do tempo, conforme foi dado. A equação da continuidade compressível em coordenadas cartesianas (Equação 9–8) é apropriada para a solução deste problema.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}}_{0 \text{ pois } u = 0} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{0 \text{ pois } w = 0} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

Porém, pela hipótese 1, a densidade não é função de y e pode portanto ser tirada da derivada em relação à y. Substituindo v pela Equação 1 para v e L pela expressão dada, diferenciando, e simplificando, obtemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v}{\partial y} = -\rho \frac{\partial}{\partial y}\left(-V_P \frac{y}{L}\right) = \rho \frac{V_P}{L} = \rho \frac{V_P}{L_{\text{inferior}} - V_P t} \tag{2}$$

Pela hipótese 1 novamente, substituímos $\partial\rho/\partial t$ por $d\rho/dt$ na Equação 2. Após separarmos as variáveis, obtemos uma expressão que pode ser integrada analiticamente:

$$\int_{\rho=\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{t=0}^{t} \frac{V_P}{L_{\text{inferior}} - V_P t}\, dt \quad \rightarrow \quad \ln \frac{\rho}{\rho(0)} = \ln \frac{L_{\text{inferior}}}{L_{\text{inferior}} - V_P t} \tag{3}$$

Finalmente, então, temos a expressão desejada para ρ em função do tempo:

$$\rho = \rho(0) \frac{L_{\text{inferior}}}{L_{\text{inferior}} - V_P t} \tag{4}$$

Mantendo a convenção de resultados adimensionais, a Equação 4 pode ser reescrita como

$$\frac{\rho}{\rho(0)} = \frac{1}{1 - V_P t / L_{\text{inferior}}} \quad \rightarrow \quad \rho^* = \frac{1}{1 - t^*} \tag{5}$$

onde $\rho^* = \rho/\rho\ (0)$ e $t^* = V\rho t/L_{\text{inferior}}$. O gráfico da Equação 5 está na Figura 9–8.
Discussão Em $t^* = 1$, o pistão atinge o topo do cilindro e ρ se torna infinita. Em um motor real de combustão interna, o pistão pára antes de alcançar o topo do cilindro, formando aquilo que é chamado de volume de folga, que tipicamente constitui 4% a 12% do volume máximo do cilindro. A hipótese de massa específica uniforme dentro do cilindro é o elo mais fraco nesta análise simplificada. Na realidade, ρ pode ser uma função tanto do espaço quanto do tempo.

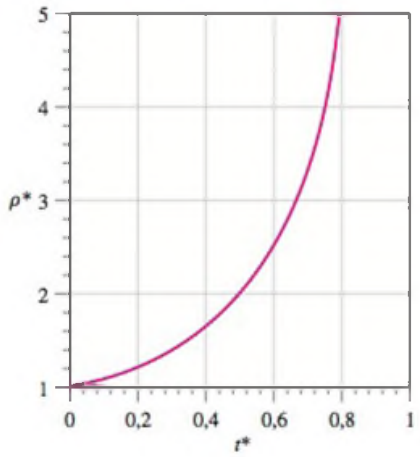


FIGURA 9–8
Densidade adimensional como uma função do tempo adimensional para o Exemplo 9–1.

Forma Alternativa da Equação da Continuidade

Expandimos a Equação 9–5 usando a regra do produto no termo do divergente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\rho}_{\text{Derivada material de } \rho} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \qquad \textbf{(9–9)}$$

Identificando a *derivada material* na Equação 9–9 (veja o Cap 4), e dividindo por ρ, escrevemos a equação da continuidade compressível em uma forma alternativa:

Forma alternativa da equação da continuidade:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \qquad \textbf{(9–10)}$$

A Equação 9–10 mostra que, à medida que, seguimos um elemento de fluido através do campo de escoamento (chamamos isso de **elemento material**), sua densidade muda conforme $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ muda (Figura 9–9). Por outro lado, se as mudanças na densidade do elemento material forem muito pequenas comparadas com os valores dos gradientes de velocidade em $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ à medida que o elemento se move, $\rho^{-1}D\rho/Dt \cong 0$, e o escoamento é aproximado como **incompressível**.

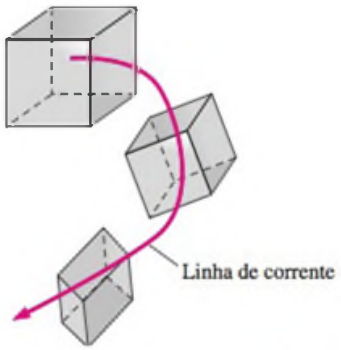


FIGURA 9–9
À medida que um elemento material se move através de um campo de escoamento, sua densidade muda de acordo com a Equação 9–10.

Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas

Muitos problemas em mecânica dos fluidos são resolvidos de forma mais conveniente usando **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) (freqüentemente chamadas de **coordenadas polares cilíndricas**), em lugar das coordenadas cartesianas. Para maior simplicidade, introduzimos primeiro as coordenadas cilíndricas em duas dimensões (Figura 9–10*a*). Por convenção, r é a distância radial a partir da origem até um ponto qualquer (P), e θ é o ângulo medido em relação ao eixo x (θ é sempre definido como matematicamente positivo na direção anti-horária). As componentes da velocidade, u_r e u_θ, e os vetores unitários, $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\theta$, também são mostrados na Figura 9–10*a*. Em três dimensões, imagine um deslocamento de tudo o que está na Figura 9–10*a* para fora da página ao longo do eixo z (normal ao plano xy) por uma certa distância z. Tentamos desenhar isso na Figura 9–10*b*. Em três dimensões, temos uma terceira componente da velocidade, u_z, e um terceiro vetor unitário, $\vec{e}_z$, também representado na Figura 9–10*b*.

As seguintes transformações de coordenadas são obtidas da Figura 9–10:

Transformações de coordenadas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \theta = \text{tg}^{-1}\frac{y}{x} \qquad \textbf{(9–11)}$$

A coordenada z é a mesma em coordenadas cilíndricas e coordenadas cartesianas.

Para obtermos uma expressão para a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas, temos duas escolhas. Primeiro, podemos usar a Equação 9–5 diretamente, já que ela foi deduzida sem levar em conta nossa escolha do sistema de coordenadas. Nós simplesmente procuramos a expressão para o operador divergente em coordenadas cilíndricas em um livro de cálculo vetorial (por exemplo, Spiegel, 1968; veja também Figura 9–6). Segundo, podemos desenhar um elemento de fluido infinitesi-

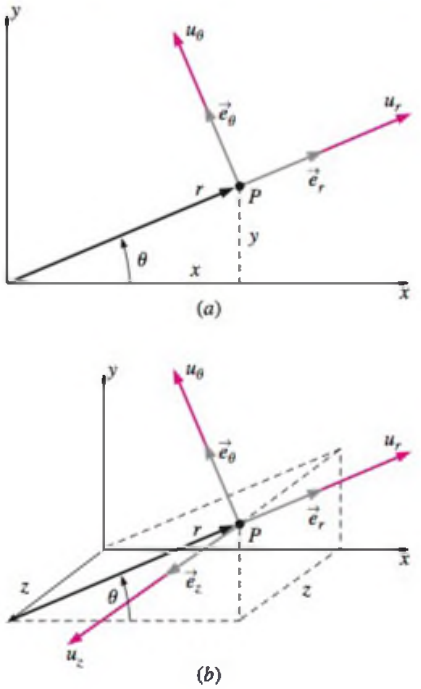


FIGURA 9–10
Componentes da velocidade e vetores unitários em coordenadas cilíndricas: (*a*) escoamento bidimensional no plano *xy* ou no plano *rθ*, (*b*) escoamento tridimensional.

mal tridimensional em coordenadas cilíndricas e analisar as vazões em massa que entram e que saem do elemento, similar ao que fizemos antes em coordenadas cartesianas. De qualquer modo, acabamos obtendo:

Equação da continuidade em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(9–12)}$$

Detalhes do segundo método podem ser encontrados em Fox and McDonald (1998).

Casos Especiais da Equação da Continuidade

Consideramos agora dois casos especiais, ou simplificações, da equação da continuidade. Particularmente, consideramos primeiro o escoamento estacionário compressível, e depois o escoamento incompressível.

Caso Especial 1: Escoamento em Regime Permanente Compressível

Se o escoamento é compressível mas em regime permanente, $\partial/\partial t$ de qualquer variável é igual a zero. Assim, a Equação 9–5 se reduz a:

Equação da continuidade estacionária: $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$ **(9–13)**

Em coordenadas cartesianas, a Equação 9–13 se reduz a:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(9–14)}$$

Em coordenadas cilíndricas, a Equação 9–13 se reduz a:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(9–15)}$$

Caso Especial 2: Escoamento Incompressível

Se o escoamento é aproximado como incompressível, a densidade não é uma função do tempo ou do espaço. Assim $\partial\rho/\partial t \cong 0$ na Equação 9–5, e ρ pode ser tirado para fora do operador divergente. A Equação 9–5, portanto, se reduz a:

Equação da continuidade incompressível: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ **(9–16)**

O mesmo resultado é obtido se iniciarmos com a Equação 9–10 e admitirmos que, para um escoamento incompressível, a densidade não muda de forma apreciável quando se segue uma partícula de fluido, conforme afirmamos anteriormente. Assim, a derivada material de ρ é aproximadamente zero, e a Equação 9–10 se reduz imediatamente à Equação 9–16.

Você deve ter observado que *não restaram derivadas do tempo na Equação 9–16*. Concluímos assim que *mesmo que o escoamento seja não permanente, a Equação 9–16 se aplica em qualquer instante no tempo*. Fisicamente, isso significa que à medida que o campo de velocidade muda em uma parte de um campo de escoamento incompressível, todo o resto do campo de escoamento se ajusta imediatamente à mudança de maneira que a Equação 9–16 seja sempre satisfeita. Para um escoamento compressível, isso não ocorre. Na verdade, uma perturbação em uma parte do escoamento não é nem sequer sentida pelas partículas de fluido a uma certa distância até que a onda sonora da perturbação atinja aquela distância. Ruídos muito intensos, como aqueles produzidos por uma arma de fogo ou explosão, geram uma **onda de choque** que na realidade se propaga *mais rapidamente* do que a velocidade do som. (A onda de choque produzida por uma explosão está ilustrada na Figura 9–11.) Ondas de choque e outras manifestações do escoamento compressível são discutidas no Capítulo 12.

Em coordenadas cartesianas, a Equação 9–16 é:

FIGURA 9–11
A perturbação de uma explosão não é sentida até que a onda de choque atinja o observador.

Equação da continuidade incompressível em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (9\text{–}17)$$

A Equação 9–17 é a forma da equação da continuidade que você provavelmente encontrará com mais freqüência. Ela se aplica ao escoamento em regime permanente ou não permanente, incompressível, tridimensional, e seria muito bom você memorizá-la.

Em coordenadas cilíndricas, a Equação 9–16 é:

Equação da continuidade incompressível em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z)}{\partial z} = 0 \qquad (9\text{–}18)$$

EXEMPLO 9–2 Projeto de um Duto Convergente Compressível

Um duto convergente bidimensional está sendo projetado para um túnel de vento de alta velocidade. A parede inferior do duto deve ser plana e horizontal, e a parede superior deve ser curvada de tal forma que a velocidade axial do vento u aumente de forma aproximadamente linear desde $u_1 = 100$ m/s na seção (1) até $u_2 = 300$ m/s na seção (2) (Figura 9–12). Ao mesmo tempo, a densidade do ar ρ deve cair de forma aproximadamente linear de $\rho_1 = 1{,}2$ kg/m^3 na seção (1) até $\rho_2 = 0{,}85$ kg/m^3 na seção (2). O duto convergente tem 2,0 m de comprimento e altura de 2,0 m na seção (1). (*a*) Preveja a *componente y* da velocidade, $v(x, y)$, no duto. (*b*) Desenhe o gráfico da forma aproximada do duto, ignorando o atrito nas paredes. (*c*) Qual deverá ser a altura do duto na seção (2), a saída do duto?

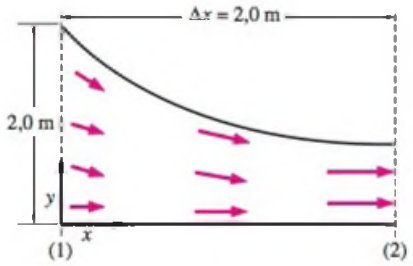


FIGURA 9–12
Duto convergente, projetado para um túnel de vento de alta velocidade (sem escala).

SOLUÇÃO Dadas a componente u da velocidade e densidade ρ, devemos prever a componente v da velocidade, desenhar o gráfico da forma aproximada do duto, e prever a altura na saída do duto.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente e bidimensional, no plano xy. **2** O atrito nas paredes é ignorado. **3** A velocidade axial u aumenta linearmente com x, e a densidade ρ diminui linearmente com x.

Propriedades O fluido é o ar à temperatura ambiente (25°C). A velocidade do som é aproximadamente 346 m/s, assim o escoamento é subsônico, mas compressível.

Análise (*a*) Escrevemos expressões para u e ρ, forçando-as a serem lineares em x:

$$u = u_1 + C_u x \quad \text{onde} \quad C_u = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = \frac{(300 - 100)\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{m}} = 100\ \text{s}^{-1} \qquad (1)$$

e

$$\rho = \rho_1 + C_\rho x \quad \text{onde} \quad C_\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta x} = \frac{(0{,}85 - 1{,}2)\ \text{kg/m}^3}{2{,}0\ \text{m}} \qquad (2)$$

$$= -0{,}175\ \text{kg/m}^4$$

A equação da continuidade permanente (Equação 9–14) para esse escoamento compressível bidimensional se simplifica tornando-se,

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial (\rho w)}{\partial z}}_{0\ \text{(2-D)}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \qquad (3)$$

Substituindo as Equações 1 e 2 na Equação 3 e observando que C_u e C_ρ são constantes,

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial [(\rho_1 + C_\rho x)(u_1 + C_u x)]}{\partial x} = -(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho) - 2C_u C_\rho x$$

A integração com relação a y resulta em,

$$\rho v = -(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho) y - 2C_u C_\rho xy + f(x) \qquad (4)$$

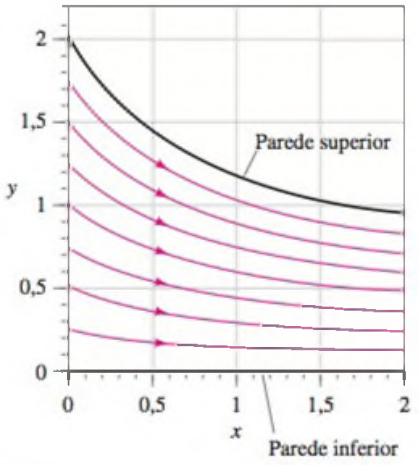


FIGURA 9–13
Linhas de corrente para o duto convergente do Exemplo 9–2.

Observe que como a integração é uma integração *parcial*, nós acrescentamos uma função arbitrária de x em lugar de simplesmente uma constante de integração. Em seguida, aplicamos as condições de contorno. Concluímos que, como a parede inferior é plana e horizontal, v deve ser igual a zero em $y = 0$ para qualquer x. Isso só é possível se $f(x) = 0$. Isolando v na Equação 4 obtemos,

$$v = \frac{-(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy}{\rho} \quad \rightarrow \quad \boxed{v = \frac{-(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy}{\rho_1 + C_\rho x}} \qquad (5)$$

(*b*) Usando as Equações 1 e 5 e a técnica descrita no Capítulo 4, desenhamos várias linhas de corrente entre $x = 0$ e $x = 2{,}0$ m na Figura 9–13. A linha de corrente que começa em $x = 0$, $y = 2{,}0$ m aproxima a parede superior do duto.
(*c*) Na seção (2), a linha de corrente superior cruza $y = 0{,}941$ m em $x = 2{,}0$ m. Assim, a altura prevista para o duto na seção (2) é **0,941 m**.
Discussão Você pode verificar que a combinação das Equações 1, 2 e 5 satisfaz a equação da continuidade. No entanto, isso isoladamente não garante que a densidade e as componentes da velocidade realmente *obedeçam* a essas equações se o duto fosse construído conforme desenhado aqui. O escoamento real depende da *queda de pressão* entre as seções (1) e (2); somente uma única queda de pressão pode desenvolver a aceleração desejada do escoamento. A temperatura também pode mudar consideravelmente nesse tipo de escoamento compressível no qual o ar acelera aproximando-se das velocidades sônicas.

EXEMPLO 9–3 Incompressibilidade de um Escoamento Bidimensional em Regime Não Permanente

Considere o campo de velocidade do Exemplo 4–5 — um campo de velocidade bidimensional em regime não permanente definido por $\vec{V} = (u, v) = (0{,}5 + 0{,}8x)\vec{i} + [1{,}5 + 2{,}5 \text{ sen } (\omega t) - 0{,}8y]\vec{j}$, onde a freqüência angular ω é igual a 2π rad/s (uma freqüência física de 1 Hz). Certifique-se de que esse campo de escoamento pode ser aproximado como incompressível.

SOLUÇÃO Devemos verificar que um dado campo de velocidade é incompressível.
Hipóteses 1 O escoamento é bidimensional, o que implica que não há componente z da velocidade e não há variação de u ou v com z.
Análise As componentes de velocidade nas direções x e y, são, respectivamente:

$$u = 0{,}5 + 0{,}8x \qquad \text{e} \qquad v = 1{,}5 + 2{,}5 \text{ sen } (\omega t) - 0{,}8y$$

Se o escoamento for incompressível, vale a Equação 9–16. Mais especificamente, em coordenadas cartesianas vale a Equação 9–17. Vamos verificar:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0{,}8} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-0{,}8} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{0 \text{ pois 2-D}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 0{,}8 - 0{,}8 = 0$$

Assim, vemos que a equação da continuidade incompressível é de fato satisfeita em qualquer instante no tempo, e **esse campo de escoamento pode ser aproximado como incompressível.**
Discussão Embora haja um termo não permanente em v, ele não depende de y e desaparece na equação da continuidade.

EXEMPLO 9–4 Determinando a Componente da Velocidade Que Falta

São conhecidas duas componentes da velocidade de um campo de escoamento tridimensional permanente, incompressível, que são, $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ e $w = axz + byz^2$, onde a, b, e c são constantes. Está faltando a componente y da velocidade (Figura 9–14). Encontre uma expressão para v como uma função de x, y, e z.

SOLUÇÃO Vamos determinar a componente y da velocidade, v, usando as expressões dadas para u e w.
Hipóteses **1** O escoamento é estacionário. **2** O escoamento é incompressível.
Análise Como o escoamento é permanente e incompressível, e estamos trabalhando em coordenadas cartesianas, aplicamos a Equação 9–17 ao campo de escoamento:

Condição para incompressibilidade:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2ax} - \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{ax + 2byz} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -3ax - 2byz$$

Em seguida integramos com relação a y. Como a integração é uma integração *parcial*, acrescentamos uma função arbitrária de x e z em lugar de uma simples constante de integração.

Solução: $$v = -3axy - by^2z + f(x,z)$$

Discussão Qualquer função de x e z produz um v que satisfaz a equação da continuidade incompressível, já que não há derivadas de v com relação a x ou z na equação da continuidade.

FIGURA 9–14
A equação da continuidade pode ser usada para determinar uma componente de velocidade que falta.

EXEMPLO 9–5 Escoamento Turbilhonar Bidimensional, Incompressível

Considere um escoamento bidimensional, incompressível em coordenadas cilíndricas; a componente tangencial da velocidade é $u_\theta = K/r$, onde K é uma constante. Isso representa uma classe de escoamentos turbilhonares. Determine uma expressão para a outra componente de velocidade, u_r.

SOLUÇÃO Para uma dada componente de velocidade tangencial, vamos determinar uma expressão para a componente radial da velocidade.
Hipóteses **1** O escoamento é bidimensional no plano xy ($r\theta$) (a velocidade não é uma função de z, e $u_z = 0$ em qualquer ponto). **2** O escoamento é incompressível.
Análise A equação da continuidade incompressível (Equação 9–18) para esse caso bidimensional se simplifica para:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial z}}_{0\ (2\text{-D})} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \qquad (1)$$

A expressão dada para u_θ não depende de θ, e portanto a Equação 1 se reduz a:

$$\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad ru_r = f(\theta, t) \qquad (2)$$

onde introduzimos uma função arbitrária de θ e t em lugar de uma constante de integração, pois nós executamos uma integração *parcial* com relação a r. Isolando u_r:

$$u_r = \frac{f(\theta, t)}{r} \qquad (3)$$

Portanto, *qualquer componente radial de velocidade da forma dada pela Equação 3 gera um campo de velocidade bidimensional, incompressível que satisfaz a equação da continuidade.*

Vamos discutir alguns casos específicos. O caso mais simples é quando $f(\theta,t) = 0$ ($u_r = 0$, $u_\theta = K/r$). Isso produz a **linha de tubilhões** discutida no Capítulo 4, conforme foi desenhado na Figura 9–15*a*. Um outro caso simples é quando $f(\theta,t) = C$, onde C é uma constante. Isso resulta em uma velocidade radial cujo módulo diminui com $1/r$. Para C negativo, imagine um escoamento em espiral de linha de turbilhões-sumidouros, no qual os elementos do fluido não apenas giram ao redor da origem, mas também são sugados por um sumidouro na origem (na verdade, uma linha de sumidouros ao longo do eixo z). Isso está ilustrado na Figura 9–15*b*.

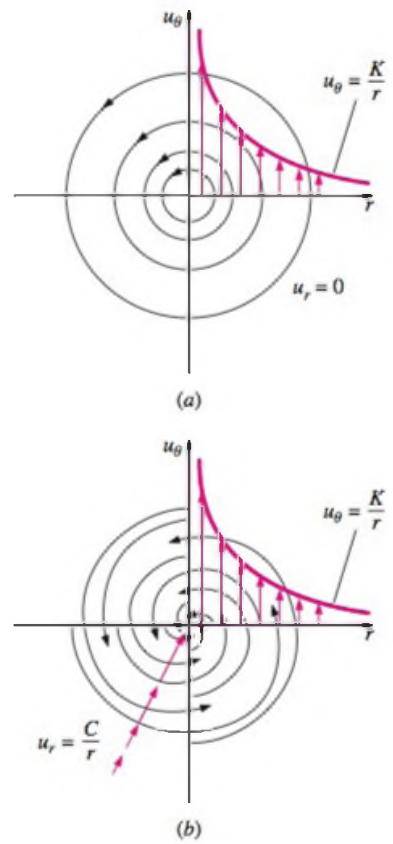


FIGURA 9–15
Linhas de corrente e perfis de velocidade para (*a*) um escoamento de linha de turbilhões e (*b*) um escoamento em espiral de linha de vórtices-sumidouros.

Discussão Outros escoamentos mais complicados podem ser obtidos fazendo $f(\theta, t)$ igual a alguma outra função. Para qualquer função $f(\theta, t)$, o escoamento satisfaz a equação da continuidade bidimensional incompressível em um dado instante no tempo.

EXEMPLO 9–6 Comparação da Continuidade e Taxa de Deformação Volumétrica

Lembre-se da *taxa de deformação volumétrica*, definida no Capítulo 4. Em coordenadas cartesianas

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (1)$$

Mostre que a taxa de deformação volumétrica é zero para um escoamento incompressível. Discuta a interpretação física da taxa de deformação volumétrica para escoamentos incompressíveis e compressíveis.

SOLUÇÃO Vamos mostrar que a taxa de deformação volumétrica é zero em um escoamento incompressível, e vamos discutir seu significado físico em escoamentos incompressíveis e compressíveis.

Análise Se o escoamento for incompressível, vale a Equação 9–16. Mais especificamente, vale a Equação 9–17, em coordenadas cartesianas. Comparando a Equação 9–17 com a Equação 1:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = 0 \qquad \text{para escoamentos incompressíveis}$$

Portanto, a *taxa de deformação volumétrica é zero em um campo de escoamento incompressível*. Na verdade, você pode *definir* incompressibilidade por $DV/Dt = 0$. Fisicamente, à medida que seguimos um elemento de fluido, partes dele podem se esticar enquanto outras partes encolher, e o elemento pode transladar, distorcer e girar, mas seu volume permanece constante ao longo de todo o caminho através do campo de escoamento (Figura 9–16*a*). Isso é verdadeiro independentemente de o escoamento ser ou não permanente, contanto que ele seja incompressível. Se o escoamento fosse compressível, a taxa de deformação volumétrica não seria zero, o que implica que os elementos do fluido podem expandir em volume (dilatar) ou encolher em volume enquanto se movem pelo campo de escoamento (Figura 9–16*b*). Especificamente, considere a Equação 9–10, uma forma alternativa da equação da continuidade para escoamento compressível. Por definição, $\rho = m/V$, onde m é a massa de um elemento de fluido. Para um elemento material, (seguindo o elemento de fluido enquanto ele se move através do campo de escoamento), m deve ser constante. Aplicando um pouco de álgebra na Equação 9–10 obtemos

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{V}{m}\frac{D(m/V)}{Dt} = -\frac{V}{m}\frac{m}{V^2}\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

Discussão O resultado é geral — não está limitado a coordenadas cartesianas. Ele se aplica tanto a escoamentos permanente quanto não permanente.

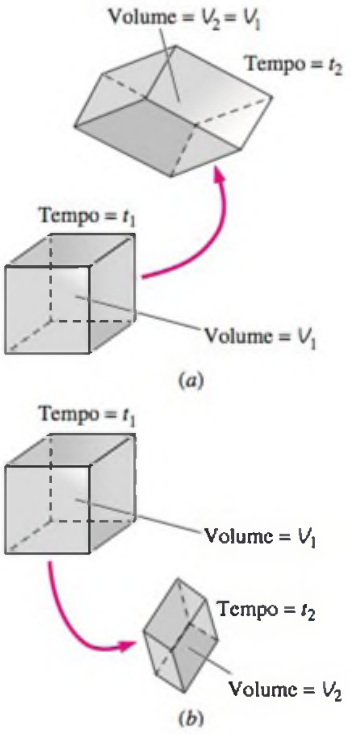


FIGURA 9–16
(*a*) Em um campo de escoamento incompressível, os elementos de fluido podem transladar, distorcer e girar, mas não crescem nem encolhem em volume; (*b*) em um campo de escoamento compressível, os elementos de fluido podem crescer ou encolher em volume enquanto transladam, distorcem e giram.

EXEMPLO 9–7 Condições para Escoamento Incompressível

Considere um campo de velocidade permanente dado por $\vec{V} = (u, v, w) = a(x^2y + y^2)\vec{i} + bxy^2\vec{j} + cx\vec{k}$, onde a, b, e c são constantes. Sob quais condições esse campo de escoamento é incompressível?

SOLUÇÃO Vamos determinar uma relação entre as constantes a, b, e c que garanta a incompressibilidade.

Hipóteses 1 O escoamento é em regime permanente. **2** O escoamento é incompressível (sob certas restrições a serem determinadas).
Análise Aplicamos a Equação 9–17 ao campo de velocidade dado:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2axy} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{2bxy} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{0} = 0 \quad \rightarrow \quad 2axy + 2bxy = 0$$

Portanto, para garantir a incompressibilidade, as constantes a e b devem ser iguais em valor, mas com sinais opostos.

Condição para incompressibilidade: $a = -b$

Discussão Se a não fosse igual a $-b$, esse ainda poderia ser um campo de escoamento válido, mas a densidade teria que variar com a posição no campo de escoamento. Em outras palavras, o escoamento seria *compressível*, e a Equação 9–14 precissaria ser satisfeita em lugar da Equação 9–17.

9–3 • A FUNÇÃO CORRENTE

A Função Corrente em Coordenadas Cartesianas

Considere o caso simples de um escoamento incompressível, bidimensional no plano xy. A equação da continuidade (Equação 9–17) em coordenadas cartesianas se reduz a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(9–19)}$$

Uma transformação inteligente de variáveis nos permite reescrever a Equação 9–19 em termos de *uma* variável dependente (ψ) em lugar de *duas* variáveis dependentes (u e v). Definimos a **função corrente** ψ como:

Função corrente incompressível, bidimensional em coordenadas cartesianas:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \textbf{(9–20)}$$

A função corrente e a função potencial de velocidade correspondente (Capítulo 10) foram introduzidas pela primeira vez pelo matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813). A substituição da Equação 9–20 na Equação 9–19 resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial x} = 0$$

que é identicamente satisfeita para qualquer função suave $\psi(x, y)$, porque a ordem da diferenciação (y depois x ou x depois y) é irrelevante.

Você pode perguntar por que resolvemos colocar o sinal negativo em v e não em u. (Poderíamos ter definido a função corrente com os sinais invertidos, e a continuidade ainda seria identicamente satisfeita.) A resposta é que embora o sinal seja arbitrário, a definição da Equação 9–20 leva ao escoamento da esquerda para a direita à medida que ψ aumenta na direção y, que usualmente é preferível. Muitos livros de mecânica dos fluidos definem ψ dessa maneira, embora algumas vezes ψ seja definido com sinais opostos (por exemplo, em controle de qualidade do ar ambiental, Heinsohn e Cimbala, 2003).

O que ganhamos com essa transformação? Primeiro, conforme já mencionamos, uma única variável (ψ) substitui *duas* variáveis (u e v) — uma vez conhecido ψ, podemos gerar u e v através da Equação 9–20, e temos a certeza de que a solução satisfaz a continuidade, Equação 9–19. Em segundo lugar, resulta que a função corrente tem um significado físico útil (Figura 9–17). Ou seja,

As curvas onde ψ é constante são **linhas de corrente** do escoamento.

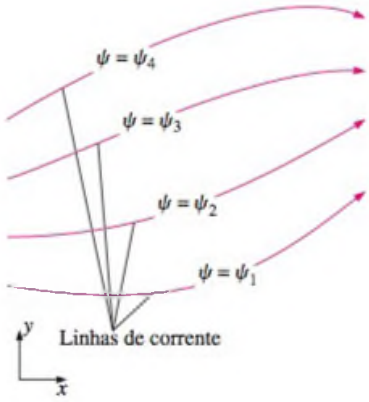


FIGURA 9–17
Curvas onde a função corrente é constante representam linhas de corrente do escoamento.

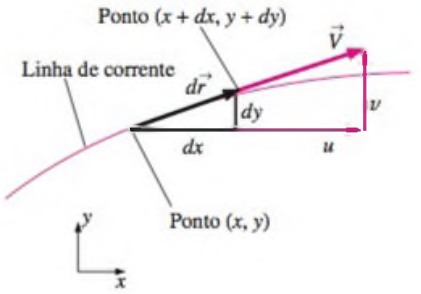


FIGURA 9–18
O comprimento do arco $d\vec{r} = (dx, dy)$ e o vetor velocidade local $\vec{V} = (u, v)$ ao longo de uma linha de corrente bidimensional no plano xy.

Isso é facilmente constatado considerando-se uma linha de corrente no plano xy, como mostra a Figura 9–18. Lembre-se do Capítulo 4 que ao longo de uma linha de corrente como essa,

Ao longo de uma linha de corrente: $$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \rightarrow \quad \underbrace{-v\,dx}_{\partial\psi/\partial x} + \underbrace{u\,dy}_{\partial\psi/\partial y} = 0$$

onde aplicamos a Equação 9–20, a definição de ψ. Portanto:

Ao longo de uma linha de corrente: $$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0 \qquad \textbf{(9–21)}$$

Mas para qualquer função suave ψ de duas variáveis x e y, sabemos pela regra da cadeia da matemática que a variação total de ψ do ponto (x, y) até um outro ponto $(x + dx, y + dy)$ a uma distância infinitesimal é:

Variação total de ψ: $$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \qquad \textbf{(9–22)}$$

Comparando a Equação 9–21 com a Equação 9–22, vemos que $d\psi = 0$ ao longo de uma linha de corrente; portanto provamos a afirmação de que ψ é constante ao longo das linhas de corrente.

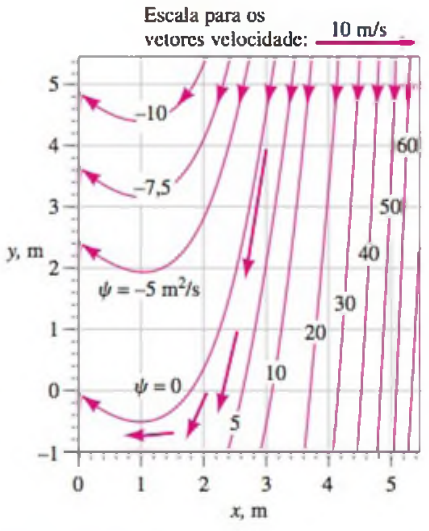


FIGURA 9–19
As linhas de corrente para o campo de velocidade do Exemplo 9–8; o valor da constante ψ é indicado para cada linha de corrente, e são mostrados vetores velocidade em quatro localizações.

EXEMPLO 9–8 Cálculo do Campo de Velocidade por Meio da Função Corrente

Um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível no plano xy tem uma função corrente dada por $\psi = ax^3 + by + cx$, onde a, b, e c são constantes: $a = 0{,}50\ (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$, $b = -2{,}0$ m/s, e $c = -1{,}5$ m/s. (*a*) Obtenha as expressões para as componentes da velocidades u e v. (*b*) Verifique se o campo de escoamento satisfaz a equação da continuidade incompressível. (*c*) Faça o gráfico de várias linhas de corrente do escoamento no quadrante superior direito.

SOLUÇÃO Para uma dada função corrente, vamos calcular as componentes de velocidade, verificar a incompressibilidade e desenhar o gráfico das linhas de corrente do escoamento.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente. **2** O escoamento é incompressível (essa hipótese deve ser verificada). **3** O escoamento é bidimensional no plano xy, o que implica que $w = 0$ e que nem u nem v dependem de z.

Análise (a) Usamos a Equação 9–20 para obter expressões para u e v diferenciando a função corrente:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = b \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -3ax^2 - c$$

(*b*) Como u não depende de x, e v não depende de y, vemos imediatamente que a equação da continuidade incompressível bidimensional (Equação 9–19) é satisfeita. Na verdade, como ψ é função suave em x e y, a equação da continuidade incompressível bidimensional no plano xy é automaticamente satisfeita pela própria definição de ψ. Concluímos que **o escoamento é de fato incompressível.**

(*c*) Para fazermos o gráfico das linhas de corrente, resolvemos a equação dada para y como função de x e ψ, ou x como uma função de y e ψ. Nesse caso, o primeiro é mais fácil, e temos:

Equação para uma linha de corrente: $$y = \frac{\psi - ax^3 - cx}{b}$$

O gráfico dessa equação está na Figura 9–19 para vários valores de ψ, e para os valores fornecidos de a, b, e c. O escoamento é aproximadamente reto e para baixo, para valores grandes de x, mas se curva para cima para $x < 1$ m.

Discussão Você pode verificar que $v = 0$ em $x = 1$ m. De fato, v é negativa para $x > 1$ m e positiva para $x < 1$ m. A direção do escoamento pode também ser determinada escolhendo-se um ponto arbitrário no escoamento, digamos, $(x = 3$ m, $y = 4$ m), e calculando a velocidade lá. Obtemos $u = -2{,}0$ m/s e

$v = -12{,}0$ m/s nesse ponto, e qualquer uma delas mostra que o fluido escoa para a parte inferior esquerda nessa região do campo de escoamento. Para maior clareza, é colocado no gráfico da Figura 9–19 também o vetor velocidade nesse ponto; está claro que ele é paralelo à linha de corrente próxima daquele ponto. São colocados no gráfico também vetores velocidade em três outros pontos.

EXEMPLO 9–9 Cálculo da Função Corrente para um Campo de Velocidade Conhecido

Considere um campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível com $u = ax + b$ e $v = -ay + cx$, onde a, b, e c são constantes: $a = 0{,}50\ s^{-1}$, $b = 1{,}5$ m/s, e $c = 0{,}35\ s^{-1}$. Determine uma expressão para a função corrente e faça o gráfico de algumas linhas de corrente do escoamento no quadrante superior direito.

SOLUÇÃO Para um dado campo de velocidade, vamos determinar uma expressão para ψ e vamos fazer o gráfico de várias linhas de corrente para os valores dados das constantes a, b, e c.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente. **2** O escoamento é incompressível. **3** O escoamento é bidimensional no plano xy, o que implica que $w = 0$ e que nem u nem v dependem de z.

Análise Iniciamos escolhendo uma das duas partes da Equação 9–20 que define a função corrente (não importa qual parte escolhemos — a solução será idêntica).

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = ax + b$$

Em seguida integramos com relação a y, observando que essa é uma integração *parcial*, portanto acrescentamos uma função arbitrária da outra variável, x, em lugar de uma constante de integração:

$$\psi = axy + by + g(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Agora escolhemos a outra parte da Equação 9–20, diferenciamos a Equação 1, e rearranjamos da seguinte forma:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ay - g'(x) \qquad \textbf{(2)}$$

onde $g'(x)$ representa dg/dx já que g é uma função de uma só variável, x. Temos agora duas expressões para a componente de velocidade v; a equação dada no enunciado do problema e a Equação 2. Igualamos as duas e integramos com relação a x para encontrar $g(x)$,

$$v = -ay + cx = -ay - g'(x) \quad \rightarrow \quad g'(x) = -cx \quad \rightarrow \quad g(x) = -c\frac{x^2}{2} + C \qquad \textbf{(3)}$$

Observe que acrescentamos aqui uma constante de integração arbitrária C, já que g é uma função apenas de x. Finalmente, substituindo a Equação 3 na Equação 1, obtemos a expressão final para ψ:

Solução: $$\psi = axy + by - c\frac{x^2}{2} + C \qquad \textbf{(4)}$$

Para desenharmos as linhas de corrente, observamos que a Equação 4 representa uma *família* de curvas, uma única curva para cada valor da constante ($\psi - C$). Como C é arbitrária, é comum defini-la igual a zero, embora se possa atribuir a ela qualquer valor desejado. Para simplificarmos, fazemos $C = 0$ e resolvemos a Equação 4 para y como uma função de x, resultando:

Equação para as linhas de corrente: $$y = \frac{\psi + cx^2/2}{ax + b} \qquad \textbf{(5)}$$

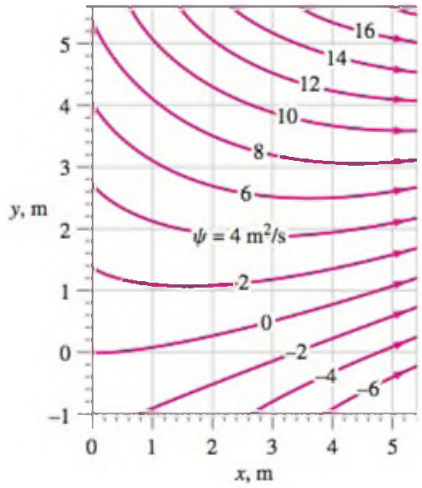


FIGURA 9–20
Linhas de corrente para o campo de velocidade do Exemplo 9–9; o valor da constante ψ é indicado para cada linha de corrente.

Para os valores dados das constantes *a*, *b*, e *c*, desenhamos o gráfico da Equação 5 para vários valores de ψ na Figura 9–20; essas curvas onde ψ é constante são linhas de corrente do escoamento. Na Figura 9–20 vemos que este é um escoamento suavemente convergente no quadrante superior direito.

Discussão É sempre bom verificar sua álgebra. Neste exemplo, você poderia substituir a Equação 4 na Equação 9–20 para verificar que são obtidas as componentes da velocidade corretas.

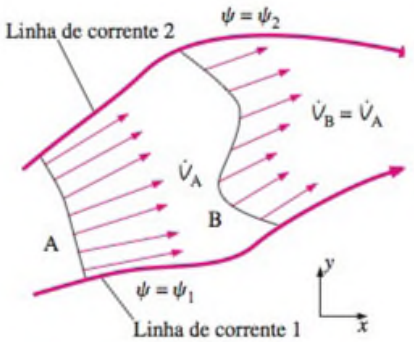


FIGURA 9–21
Para linhas de corrente bidimensionais no plano *xy*, a vazão em volume $\dot{V}$ por unidade de largura entre as duas linhas de corrente é a mesma na fatia de qualquer seção transversal.

Há um outro fato fisicamente importante sobre a função corrente:

A diferença no valor de c de uma linha de corrente para outra é igual à vazão em volume por unidade de largura entre as duas linhas de corrente.

Essa afirmação está ilustrada na Figura 9–21. Considere duas linhas de corrente, ψ_1 e ψ_2, e imagine um escoamento bidimensional no plano *xy*, de largura unitária para dentro da página (1 m na direção–*z*). Por definição, *nenhum escoamento pode cruzar uma linha de corrente*. Portanto, o fluido que estiver ocupando o espaço entre essas duas linhas de corrente permanece confinado entre essas duas linhas de corrente. Conclui-se que a vazão em massa através da fatia de qualquer seção transversal entre as linhas de corrente é a mesma em qualquer instante no tempo. A fatia da seção transversal pode ter qualquer forma, contanto que ela comece na linha de corrente 1 e termine na linha de corrente 2. Na Figura 9–21, por exemplo, a fatia A é um arco suave de uma linha de corrente até a outra enquanto a fatia B é ondulada. Para um escoamento bidimensional permanente, incompressível, no plano *xy*, a vazão em volume $\dot{V}$ entre as duas linhas de corrente (por unidade de largura) deve ser portanto uma constante. Se as duas linhas de corrente se distanciarem, como ocorre da seção transversal A até a seção transversal B, a velocidade média entre as duas linhas de corrente diminui de forma correspondente, de maneira que a vazão em volume permanece a mesma ($\dot{V}_A = \dot{V}_B$). Na Figura 9–19 do Exemplo 9–8, foram desenhados os gráficos dos vetores velocidade em quatro localizações no campo de escoamento entre as linhas de corrente $\psi = 0$ m^2/s e $\psi = 5$ m^2/s. Você pode ver claramente que à medida que as linhas de corrente divergem uma da outra, o vetor velocidade diminui em módulo. Da mesma forma, quando as linhas de corrente *convergem*, a velocidade média entre elas deve aumentar.

Provamos essas afirmações matematicamente considerando um volume de controle limitado pelas duas linhas de corrente da Figura 9–21 e pela seção transversal A e seção transversal B (Figura 9–22). Um comprimento infinitesimal *ds* ao longo da fatia B está ilustrado na Figura 9–22*a*, juntamente com seu vetor normal unitário $\vec{n}$. Para maior clareza, uma vista ampliada dessa região está desenhada na Figura 9–22*b*. Conforme mostra a figura, as duas componentes de *ds* são *dx* e *dy*; portanto o vetor normal unitário é:

$$\vec{n} = \frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}$$

A vazão de volume por unidade de largura através do segmento *ds* da superfície de controle é:

$$d\dot{V} = \vec{V} \cdot \vec{n}\,\underbrace{dA}_{ds} = (u\vec{i} + v\vec{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}\right) ds \qquad \textbf{(9–23)}$$

onde $dA = ds$ vezes $1 = ds$, onde o 1 indica uma largura unitária para dentro da página, independentemente do sistema de unidades utilizado. Quando expandimos o produto escalar da Equação 9–23 e aplicamos a Equação 9–20, obtemos:

$$d\dot{V} = u\,dy - v\,dx = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx = d\psi \qquad \textbf{(9–24)}$$

Encontramos a vazão em volume total através da área da seção transversal B integrando a Equação 9–24 da linha de corrente 1 até a linha de corrente 2:

$$\dot{V}_B = \int_B \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \int_B d\dot{V} = \int_{\psi=\psi_1}^{\psi=\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad \textbf{(9–25)}$$

Portanto, a vazão em volume por unidade de largura através da fatia B é igual à diferença entre os valores das duas funções correntes que limitam a fatia B. Considere agora o volume de controle inteiro da Figura 9–22*a*. Como nós sabemos que não há nenhum escoamento cruzando as linhas de corrente, a conservação da massa requer que a vazão de volume para dentro do volume de controle através da fatia A seja idêntica à vazão de volume para fora do volume de controle através da fatia B. Finalmente, como nós podemos escolher uma fatia de seção transversal de qualquer forma ou posição entre as duas linhas de corrente, a afirmação está provada.

Quando lidamos com funções correntes, a direção do escoamento é obtida por aquilo que podemos chamar de "convenção do lado esquerdo". Ou seja, se você estiver olhando para baixo ao longo do eixo *z*, para o plano *xy* (Figura 9–23) e estiver se movendo na direção do escoamento, a função corrente aumentará à sua esquerda.

O valor de ψ aumenta à esquerda da direção do escoamento no plano *xy*.

Na Figura 9–23, por exemplo, a função corrente aumenta à esquerda da direção do escoamento, independentemente de quanto o escoamento gira e torce. Observe também que quando as linhas de corrente estão distanciadas (parte inferior direita da Figura 9–23), o valor da velocidade (velocidade do fluido) naquela vizinhança é pequena em relação a velocidades em localizações onde as linhas de corrente estão próximas entre si (região do meio da Figura 9–23). Isso é facilmente explicado pela conservação da massa. À medida que as linhas de corrente convergem, a área da seção transversal entre elas diminui, e a velocidade deve aumentar para manter a vazão entre as linhas de corrente.

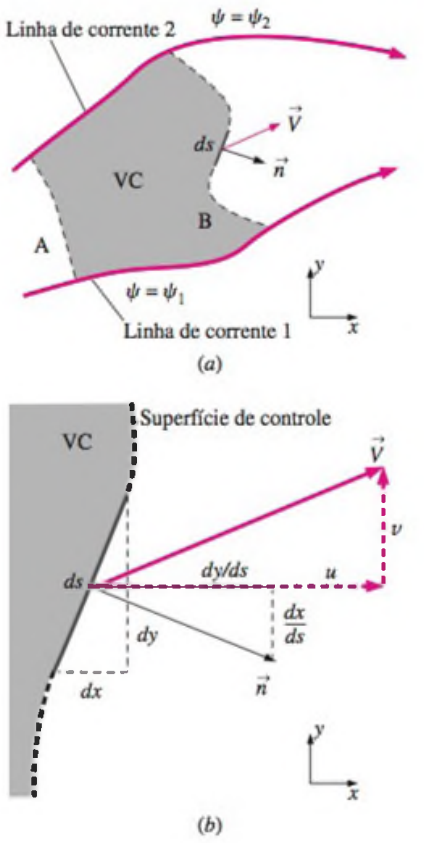


FIGURA 9–22
(*a*) Volume de controle limitado pelas linhas de corrente ψ_1 e ψ_2 e pelas fatias A e B no plano *xy*; (*b*) vista ampliada da região ao redor do comprimento infinitesimal *ds*.

EXEMPLO 9–10 Velocidade Relativa Deduzida com Base nas Linhas de Corrente

O **escoamento Hele-Shaw** é produzido forçando-se um líquido através de um pequeno espaçamento entre placas paralelas. Um exemplo do escoamento Hele-Shaw está ilustrado na Figura 9–24 para escoamento sobre uma placa inclinada. As linhas de emissão são geradas introduzindo-se um corante em pontos igualmente espaçados a montante do campo de visão. Como o escoamento é permanente, as linhas de emissão coincidem com as linhas de corrente. O fluido é a água e as placas de vidro estão separadas por uma distância de 1,0 mm. Discuta como você pode afirmar com base no padrão de linhas de corrente se a velocidade do escoamento em determinada região do campo de escoamento é (relativamente) grande ou pequena.

SOLUÇÃO Para este conjunto de linhas de corrente, vamos discutir como podemos prever a velocidade relativa do fluido.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente. **2** O escoamento é incompressível. **3** O escoamento modela o escoamento potencial bidimensional no plano xy.

Análise Quando linhas de corrente igualmente espaçadas de uma função corrente se distanciam umas das outras, isso indica que a velocidade do escoamento diminuiu naquela região. Da mesma forma, se as linhas de corrente se aproximam umas das outras, a velocidade de escoamento aumenta naquela região. Na Figura 9–24 deduzimos que o escoamento muito a montante da placa é reto e uniforme, porque as linhas de corrente estão igualmente espaçadas. O

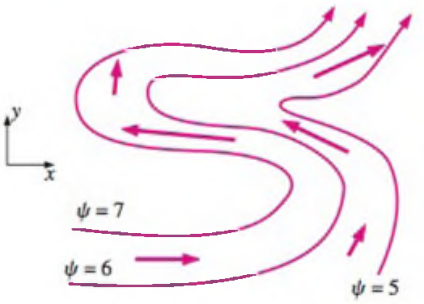


FIGURA 9–23
Ilustração da "convenção do lado esquerdo". No plano *xy*, o valor de uma função corrente sempre aumenta à esquerda da direção do escoamento.

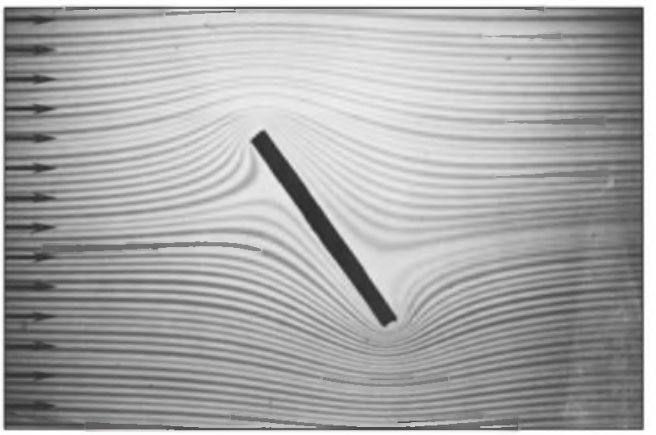


FIGURA 9–24
Linhas de emissão produzidas por escoamento Hele-Shaw sobre uma placa inclinada. As linhas de emissão modelam linhas de corrente de escoamento potencial (Capítulo 10) sobre uma placa inclinada bidimensional com a mesma forma de seção transversal.

Cortesia de Howell Peregrine, School of Mathematics, Universidade de Bristol. Usada com permissão.

fluido desacelera à medida que ele se aproxima do lado debaixo da placa, especialmente próximo ao ponto de estagnação, como está indicado pelo amplo espaço entre as linhas de corrente. O escoamento acelera rapidamente atingindo velocidades muito altas ao redor de cantos agudos da placa, conforme indicam as linhas de corrente pouco espaçadas.

Discussão As linhas de emissão do escoamento Hele-Shaw são similares àquelas do escoamento potencial, que é discutido no Capítulo 10.

EXEMPLO 9–11 Vazão em Volume Deduzido com Base nas Linhas de Corrente

Água é sugada através de uma passagem estreita na parede inferior de um canal. A água no canal flui da esquerda para a direita a uma velocidade uniforme $V = 1{,}0$ m/s. A abertura é perpendicular ao plano xy, e se estende ao longo do eixo z por todo o canal, que tem uma largura $w = 2{,}0$ m. O escoamento é, portanto, aproximadamente bidimensional no plano xy. Várias linhas de corrente do escoamento foram desenhadas e identificadas na Figura 9–25.

A linha de corrente grossa na Figura 9–25 é chamada de **linha de corrente divisória** porque ela divide o escoamento em duas partes. Ou seja, toda a água abaixo dessa linha de corrente divisória é sugada para a abertura, enquanto toda a água acima da linha de corrente divisória continua seu caminho a jusante. Qual é a vazão em volume da água que está sendo sugada através da abertura? Estime o valor da velocidade no ponto A.

SOLUÇÃO Para um dado conjunto de linhas de corrente, vamos determinar a vazão de volume através da abertura e estimar a velocidade do fluido em um ponto.

Hipóteses **1** O escoamento é estacionário. **2** O escoamento é incompressível. **3** O escoamento é bidimensional, no plano xy. **4** O atrito ao longo da parede inferior é desprezível.

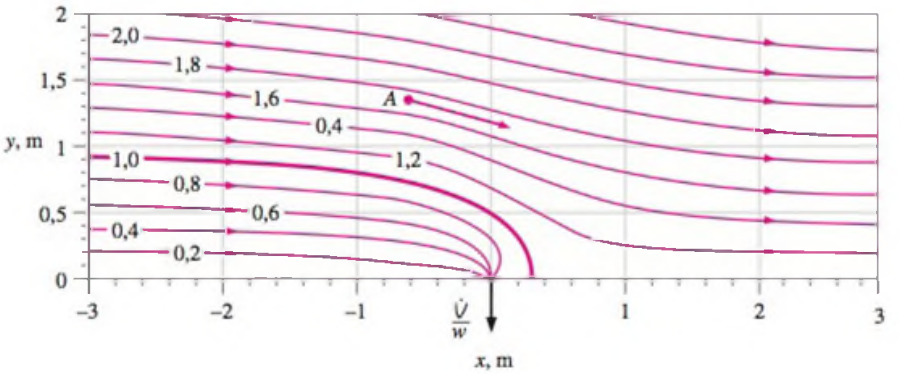


FIGURA 9–25
Linhas de corrente para escoamento livre ao longo de uma parede com uma abertura de sucção estreita; valores da linha de corrente são mostrados em unidades de m^2/s; a linha de corrente grossa é a linha de corrente divisória. A direção do vetor velocidade no ponto A é determinada pela convenção do lado esquerdo.

Análise Pela Equação 9–25, a vazão em volume por unidade de largura entre a parede inferior ($\psi_{\text{parede}} = 0$) e a linha de corrente divisória ($\psi_{\text{divisória}} = 1{,}0\ \text{m}^2/\text{s}$) é:

$$\frac{\dot{V}}{w} = \psi_{\text{divisória}} - \psi_{\text{parede}} = (1{,}0 - 0)\ \text{m}^2/\text{s} = 1{,}0\ \text{m}^2/\text{s}$$

Todo esse escoamento deve passar através da abertura. Como o canal tem 2,0 m de largura, a vazão em volume total através da abertura é:

$$\dot{V} = \frac{\dot{V}}{w} w = (1{,}0\ \text{m}^2/\text{s})(2{,}0\ \text{m}) = \mathbf{2{,}0\ m^3/s}$$

Para estimarmos a velocidade no ponto *A*, medimos a distância δ entre as duas linhas de corrente que cercam o ponto *A*. Vemos que a linha de corrente 1,8 está aproximadamente a 0,21 m de distância da linha de corrente 1,6 na vizinhança do ponto *A*. A vazão em volume por unidade de largura (para dentro da página) entre essas duas linhas de corrente é igual à diferença do valor da função corrente. Podemos, portanto, estimar a velocidade no ponto *A* por:

$$V_A \cong \frac{\dot{V}}{w\delta} = \frac{1}{\delta}\frac{\dot{V}}{w} = \frac{1}{\delta}(\psi_{1,8} - \psi_{1,6}) = \frac{1}{0{,}21\ \text{m}}(1{,}8 - 1{,}6)\ \text{m}^2/\text{s} = \mathbf{0{,}95\ m/s}$$

Nossa estimativa se aproxima muito bem à velocidade do escoamento livre conhecida (1,0 m/s), indicando que o fluido nas vizinhanças do ponto *A* flui aproximadamente à mesma velocidade do escoamento livre, mas aponta ligeiramente para baixo.

Discussão As linhas de corrente da Figura 9–25 foram geradas por superposição de uma corrente uniforme e uma linha de sumidouro, considerando-se escoamento (potencial) irrotacional. Discutiremos essa superposição no Capítulo 10.

A Função Corrente em Coordenadas Cilíndricas

Para escoamento bidimensional, podemos também definir a função corrente em coordenadas cilíndricas, o que é mais conveniente para muitos problemas. Observe que por *bidimensional* queremos dizer que há somente duas coordenadas espaciais relevantes independentes — sem nenhuma dependência na terceira componente. Há duas possibilidades. A primeira é escoamento planar, exatamente como aquele das Equações 9–19 e 9–20, mas em termos de (r, θ) e (u_r, u_θ) em lugar de (x, y) e (u, v) (veja a Figura 9–10*a*). Nesse caso, não há dependência da coordenada z. Simplificamos a equação da continuidade incompressível, Equação 9–18, para escoamento planar bidimensional no plano $r\theta$,

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad \textbf{(9–26)}$$

Definimos a função corrente da seguinte forma:

Função corrente planar incompressível, em coordenadas cilíndricas:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \textbf{(9–27)}$$

Observamos novamente que os sinais são invertidos em alguns livros-texto. Você pode substituir a Equação 9–27 na Equação 9–26 para se convencer de que a Equação 9–26 é identicamente satisfeita para qualquer função suave $\psi(r, \theta)$, já que a ordem de diferenciação (r depois θ ou θ depois r) é irrelevante para uma função suave.

O segundo tipo de escoamento bidimensional em coordenadas cilíndricas é o **escoamento axissimétrico**, no qual r e z são as variáveis espaciais relevantes, u_r e u_z são as componentes não nulas da velocidade, e não há dependência de θ (Figura 9–26). Exemplos de escoamento axissimétrico incluem o escoamento ao redor de esferas, balas, e a frente de muitos objetos tais como torpedos e mísseis, que seriam

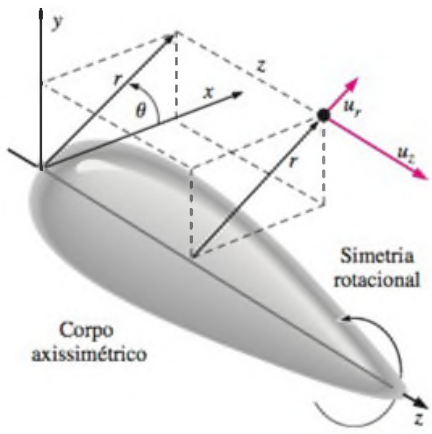


FIGURA 9–26
Escoamento sobre um corpo axissimétrico em coordenadas cilíndricas com simetria rotacional em relação ao eixo z; nem a geometria nem o campo de velocidade dependem de θ, e $u_\theta = 0$.

axissimétricos em todos os pontos se não existissem as alhetas. Para um escoamento incompressível axissimétrico, a equação da continuidade é:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(9–28)}$$

A função corrente ψ é definida de tal forma que ela satisfaz a Equação 9–28 exatamente, contanto, é claro, que ψ seja uma função suave de r e z,

Função corrente incompressível, axissimétrica em coordenadas cilíndricas:

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{e} \quad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \textbf{(9–29)}$$

Observamos também que há uma outra maneira de descrever escoamentos axissimétricos, ou seja, usando coordenadas cartesianas (x, y) e (u, v), mas forçando a coordenada x a ser o eixo de simetria. Isso pode causar confusão porque as equações de movimento precisam ser modificadas adequadamente para levar em conta a axissimetria. Contudo, freqüentemente essa é a abordagem usada em aplicativos de CFD (*Computational Fluid Dynamics* — dinâmica dos fluidos computacional). A vantagem é que uma vez definida uma grade no plano xy, a *mesma* grade pode ser usada tanto para o escoamento planar (escoamento no plano xy sem dependência de z) quanto para o escoamento axissimétrico (escoamento no plano xy com simetria rotacional em relação ao eixo x). Não discutiremos as equações para essa descrição alternativa dos escoamentos axissimétricos.

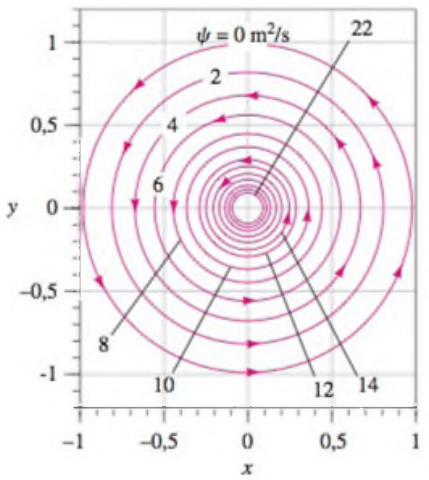


FIGURA 9–27
Linhas de corrente para o campo de velocidade do Exemplo 9–12, com $K = 10\ \text{m}^2/\text{s}$ e $C = 0$; o valor da constante ψ é indicado para várias linhas de corrente.

EXEMPLO 9–12 Função Corrente em Coordenadas Cilíndricas

Considere uma linha de turbilhões, definida como um escoamento em regime permanente, planar, incompressível no qual as componentes de velocidade são $u_r = 0$ e $u_\theta = K/r$, onde K é uma constante. Esse escoamento está representado na Figura 9–15*a*. Deduza uma expressão para a função corrente $\psi(r, \theta)$, e demonstre que as linhas de corrente são círculos.

SOLUÇÃO Para um dado campo de velocidade em coordenadas cilíndricas, vamos deduzir uma expressão para a função corrente.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente. **2** O escoamento é incompressível. **3** O escoamento é planar no plano r_θ.

Análise Usamos a definição de função corrente dada pela Equação 9–27. Podemos escolher qualquer componente para começar; escolhemos a componente tangencial:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\theta = -\frac{K}{r} \quad \rightarrow \quad \psi = -K \ln r + f(\theta) \qquad \textbf{(1)}$$

Agora usamos a outra componente da Equação 9–27:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} f'(\theta) \qquad \textbf{(2)}$$

onde a "linha" indica uma derivada com relação a θ. Igualando u_r das informações fornecidas com a Equação 2, vemos que:

$$f'(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad f(\theta) = C$$

onde C é uma constante de integração arbitrária. A Equação 1 é portanto:

Solução: $$\psi = -K \ln r + C \qquad \textbf{(3)}$$

Finalmente, vemos pela Equação 3 que as curvas onde ψ é constante são produzidas fazendo r igual a um valor constante. Como as curvas com r constante são círculos, por definição, as linhas de corrente (curvas com ψ constante) devem portanto ser círculos centrados na origem, como mostra a Figura 9–15*a*.

Para valores dados de C e ψ, isolamos r na Equação 3 para desenhar as linhas de corrente:

Equação para linhas de corrente: $$r = e^{-(\psi - C)/K} \quad (4)$$

Para $K = 10\ m^2/s$ e $C = 0$, as linhas de corrente com $\psi = 0$ a 22 estão no gráfico da Figura 9–27.

Discussão Observe que para um incremento uniforme no valor de ψ, as linhas de corrente se aproximam cada vez mais umas das outras, perto da origem à medida que a velocidade tangencial aumenta. Isso é um resultado direto da afirmação de que a diferença no valor de ψ de uma linha de corrente para outra é igual à vazão em volume por unidade de largura entre as duas linhas de corrente.

A Função Corrente Compressível*

Estendemos o conceito de uma função corrente ao escoamento em regime permanente, *compressível*, bidimensional no plano xy. A equação da continuidade compressível (Equação 9–14) em coordenadas cartesianas se reduz ao seguinte para o escoamento bidimensional em regime permanente:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (9\text{–}30)$$

Introduzimos uma **função corrente compressível**, que representamos por ψ_ρ,

Função corrente estacionário, compressível, bidimensional em coordenadas cartesianas:

$$\rho u = \frac{\partial \psi_\rho}{\partial y} \quad \text{e} \quad \rho v = -\frac{\partial \psi_\rho}{\partial x} \quad (9\text{–}31)$$

Por definição, ψ_ρ da Equação 9–31 satisfaz a Equação 9–30 exatamente, desde que ψ_ρ seja uma função suave de x e y. Muitas das características da função corrente compressível são iguais àquelas da função corrente incompressível ψ discutida anteriormente. Por exemplo, curvas com ψ_ρ constante são também linhas de corrente. No entanto, a diferença em ψ_ρ de uma linha de corrente para outra é a *vazão em massa* por unidade de largura e não a vazão em volume por unidade de largura. Embora não tão popular quanto sua contraparte incompressível, a função corrente compressível é usada em alguns códigos CFD comerciais.

9–4 ▪ CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR – EQUAÇÃO DE CAUCHY

Com a aplicação do teorema de transporte de Reynolds (Capítulo 4), temos a expressão geral para conservação do momento linear quando aplicada a um volume de controle:

$$\sum \vec{F} = \int_{VC} \rho \vec{g}\, dV + \int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V})\, dV + \int_{SC} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \quad (9\text{–}32)$$

onde σ_{ij} é o **tensor da tensão** introduzido no Capítulo 6. As componentes de σ_{ij} nas faces positivas de um volume de controle retangular infinitesimal estão mostradas na Figura 9–28. A Equação 9–32 se aplica a volumes de controle fixos e móveis, desde que $\vec{V}$ seja a velocidade absoluta (como vista por um observador fixo). Para o caso especial de escoamento com entradas e saídas bem definidas, a Equação 9–32 pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{corpo}} + \sum \vec{F}_{\text{superfície}} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V})\, dV + \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_e \beta \dot{m} \vec{V} \quad (9\text{–}33)$$

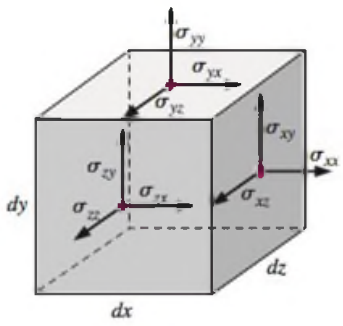


FIGURA 9–28
Componentes positivas do tensor da tensão em coordenadas cartesianas nas faces positivas (direita, superior e frontal) de um volume de controle retangular infinitesimal. Os pontos azuis indicam o centro de cada face. As componentes positivas nas faces negativas (esquerda, inferior e traseira) estão na direção oposta àquelas mostradas aqui.

* Esta seção pode ser ignorada sem perda da continuidade.

onde $\vec{V}$ nos dois últimos termos é tomada como a velocidade média em uma entrada ou saída, e β é o fator de correção de fluxo de momento (Capítulo 6). Em outras palavras, a força total agindo no volume de controle é igual à taxa na qual o momento muda dentro do volume de controle mais a taxa na qual o momento flui para fora do volume de controle menos a taxa na qual o momento flui para dentro do volume de controle. A Equação 9–33 se aplica a *qualquer* volume de controle, independentemente de seu tamanho. Para gerar uma equação diferencial para conservação do momento, imaginamos o volume de controle encolhendo até um tamanho infinitesimal. No limite, o volume de controle inteiro encolhe para um *ponto* no escoamento (Figura 9–2). Adotamos aqui a mesma abordagem usada para a conservação da massa; ou seja, mostramos mais de uma maneira de deduzir a forma diferencial da conservação da quantidade de movimento.

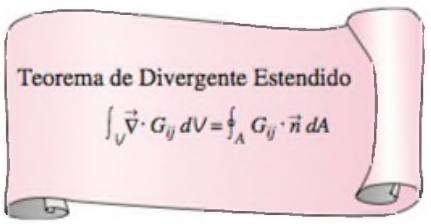


FIGURA 9–29
Uma forma estendida do teorema do divergente é útil não somente para vetores, mas também para tensores. Na equação, G_{ij} é um tensor de segunda ordem, V é um volume e A é a área da superfície que delimita e define o volume.

Dedução Usando o Teorema do Divergente

A maneira mais direta (e mais elegante) de deduzir a forma diferencial da conservação do momento é aplicar o teorema do divergente da Equação 9–3. Uma forma mais geral do teorema do divergente se aplica não somente a vetores, mas também a outras grandezas como os tensores, como ilustra a Figura 9–29. Especificamente, se substituirmos G_{ij} no teorema do divergente estendido da Figura 9–29 pela grandeza $(\rho\vec{V})\vec{V}$, um tensor de segunda ordem, o último termo na Equação 9–32 torna-se:

$$\int_{SC} (\rho\vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V})\, dV \qquad \textbf{(9–34)}$$

onde $\vec{V}\vec{V}$ é um vector produto chamado de *produto exterior* do vetor velocidade por ele mesmo. (O produto exterior de dois vetores *não* é o mesmo que o produto interior ou escalar, nem é o mesmo que o produto vetorial dos dois vetores.) Semelhantemente, se substituirmos G_{ij} na Figura 9–29 pelo tensor da tensão σ_{ij}, o segundo termo no lado direito da Equação 9–32 torna-se:

$$\int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}\, dV \qquad \textbf{(9–35)}$$

Portanto, as duas integrais de superfície da Equação 9–32 tornam-se integrais de volume aplicando as Equações 9–34 e 9–35. Combinamos e rearranjamos os termos, e reescrevemos a Equação 9–32 como:

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) - \rho\vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \right] dV = 0 \qquad \textbf{(9–36)}$$

Finalmente, argumentamos que a Equação 9–36 deve valer para *qualquer* volume de controle, independentemente de seu tamanho ou forma. Isso é possível somente se o integrando (entre colchetes) for identicamente igual a zero. Assim, temos uma equação diferencial geral para conservação do momento, conhecida como **equação de Cauchy**:

Equação de Cauchy:
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \qquad \textbf{(9–37)}$$

A Equação 9–37 recebe esse nome em homenagem ao engenheiro e matemático francês Augustin Louis de Cauchy (1789–1857). Ela é válida para escoamento compressível e incompressível, pois não fizemos nenhuma hipótese sobre incompressibilidade. Ela é válida em qualquer ponto no domínio do escoamento (Figura 9–30). Note que a Equação 9–37 é uma equação *vetorial*, e portanto representa três equações escalares, uma para cada eixo de coordenadas nos problemas tridimensionais.

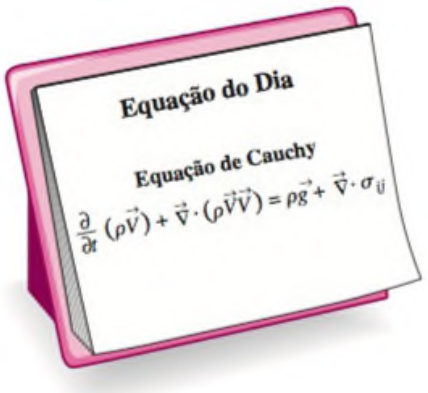


FIGURA 9–30
A *equação de Cauchy* é uma forma diferencial da lei da conservação da momento. Ela se aplica a qualquer tipo de fluido.

Dedução Usando um Volume de Controle Infinitesimal

Vamos deduzir a equação de Cauchy de outra maneira, usando um volume de controle infinitesimal ao qual aplicamos a conservação do momento (Equação 9–33). Vamos considerar o mesmo volume de controle em forma de caixa usado para deduzir a equação da continuidade (Figura 9–3). No centro da caixa, como antes, definimos a densidade como ρ e as componentes de velocidade como u, v, e w. Definimos também o tensor da tensão como σ_{ij} no centro da caixa. Para simplificar, consideramos a componente x da Equação 9–33, obtida fazendo-se $\sum \vec{F}$ igual à sua componente x, $\sum F_x$, e $\vec{V}$ igual à sua componente x, u. Isso não somente simplifica os diagramas, mas também nos permite trabalhar com uma equação escalar, ou seja:

$$\sum F_x = \sum F_{x,\,\text{corpo}} + \sum F_{x,\,\text{superfície}} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dV + \sum_s \beta \dot{m} u - \sum_e \beta \dot{m} u \qquad (9\text{–}38)$$

À medida que o volume de controle encolhe para um ponto, o primeiro termo no lado direito da Equação 9–38 torna-se:

Taxa de mudança do momento na direção x dentro do volume de controle:

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dV \cong \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dx\, dy\, dz \qquad (9\text{–}39)$$

pois o volume do elemento infinitesimal é $dx\, dy\, dz$. Aplicamos as expansões truncadas, de primeira ordem das séries de Taylor em pontos distantes do centro do volume de controle para aproximar o fluxo de momento que entra e que sai na direção x. A Figura 9–31 mostra esses fluxos de momento no ponto central de cada uma das seis faces do volume de controle infinitesimal. Somente a componente *normal* de velocidade em cada face precisa ser considerada, pois as componentes de velocidade tangencial não contribuem para o fluxo de massa para fora ou para dentro da face, e, portanto, também não há nenhum fluxo de momento através da face.

Somando todos os fluxos que saem e subtraindo todos os fluxos que entram mostrados na Figura 9–31, obtemos uma aproximação para os dois últimos termos da Equação 9–38:

Fluxo total do momento na direção x que sai através da superfície de controle:

$$\sum_s \beta \dot{m} u - \sum_e \beta \dot{m} u \cong \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w u) \right) dx\, dy\, dz \qquad (9\text{–}40)$$

onde β é igual a um em todas as faces, consistente com nossa aproximação de primeira ordem.

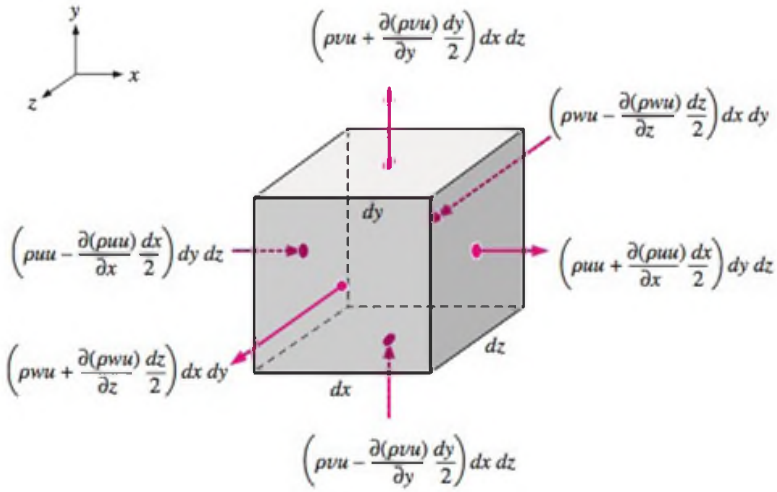


FIGURA 9–31
Fluxo que entra e que sai da componente x do momento através de cada face de um volume de controle infinitesimal; os pontos azuis indicam o centro de cada face.

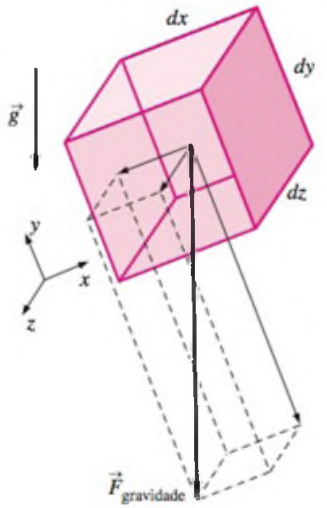


FIGURA 9–32
Em geral, o vetor gravidade não está necessariamente alinhado com qualquer eixo em particular. e há três componentes da força de volume agindo em um elemento de fluido infinitesimal.

Em seguida, somamos todas as forças que estão agindo sobre nosso volume de controle infinitesimal na direção x. Conforme fizemos no Capítulo 6, precisamos considerar tanto as forças de volume quanto as forças de superfície. A força da gravidade (peso) é a única força de volume que levamos em conta. Para o caso geral no qual o sistema de coordenadas pode não estar alinhado com o eixo z (ou, aliás, com qualquer eixo de coordenadas), como está esboçado na Figura 9–32, o vetor gravidade é escrito como:

$$\vec{g} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} + g_z\vec{k}$$

Assim, na direção x, a força de volume sobre o volume de controle é:

$$\sum F_{x,\,\text{corpo}} = \sum F_{x,\,\text{gravidade}} \cong \rho g_x\, dx\, dy\, dz \qquad \textbf{(9–41)}$$

Em seguida, consideramos a força de superfície na direção x. Lembre-se de que o tensor da tensão σ_{ij} tem dimensões de força por unidade de área. Assim, para obter uma força, temos que multiplicar cada componente de tensão pela área da superfície da face sobre a qual ela age. Precisamos considerar apenas aquelas componentes que apontam na direção x (ou $-x$). (As outras componentes do tensor da tensão, embora possam ser diferentes de zero, não contribuem para a força resultante na direção x.) Usando expansões truncadas da série de Taylor, desenhamos todas as forças de superfície que contribuem para uma componente x de força de superfície agindo sobre nosso elemento infinitesimal de fluido (Figura 9–33).

Somando todas as forças de superfície ilustradas na Figura 9–33, obtemos uma aproximação para a força de superfície agindo sobre o elemento infinitesimal de fluido na direção x:

$$\sum F_{x,\,\text{superfície}} \cong \left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zx}\right) dx\, dy\, dz \qquad \textbf{(9–42)}$$

Agora substituímos as Equações 9–39 até 9–42 na Equação 9–38, observando que o volume do elemento infinitesimal de fluido, $dx\, dy\, dz$, aparece em todos os termos e pode ser eliminado. Após alguns rearranjos obtemos a forma diferencial da equação de momento na direção x:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zx} \qquad \textbf{(9–43)}$$

De uma forma similar, geramos formas diferenciais das equações de momento nas direções y e z:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \rho g_y + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zy} \qquad \textbf{(9–44)}$$

e

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \rho g_z + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} \qquad \textbf{(9–45)}$$

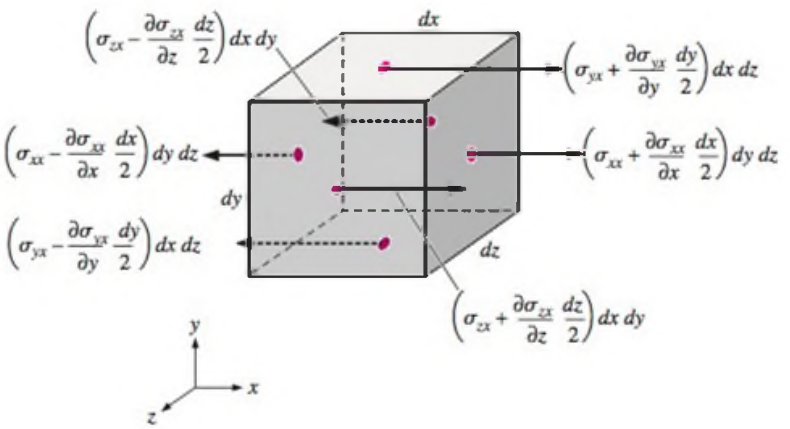


FIGURA 9–33
Esboço ilustrando as forças de superfície agindo na direção x devido à componente apropriada do tensor de tensão em cada face do volume de controle infinitesimal; os pontos azuis indicam o centro de cada face.

respectivamente. Finalmente, combinamos as Equações 9–43 até 9–45 em uma equação vetorial:

Equação de Cauchy:
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}$$

Essa equação é idêntica à equação de Cauchy (Equação 9–37); dessa maneira confirmamos que nossa dedução usando o elemento infinitesimal de fluido produz o mesmo resultado de nossa dedução usando o teorema do divergente. Note que o produto $\vec{V}\vec{V}$ é um tensor de segunda ordem (Figura 9–34).

Forma Alternativa da Equação de Cauchy

Aplicando a regra do produto ao primeiro termo no lado esquerdo da Equação 9–37, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) = \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{9–46}$$

O segundo termo da Equação 9–37 pode ser escrito como:

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \tag{9–47}$$

Assim eliminamos o tensor de segunda ordem representado por $\vec{V}\vec{V}$. Após alguns rearranjos, substituindo as Equações 9–46 e 9–47 na Equação 9–37 resulta:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})\right] + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}$$

Mas a expressão dentro dos colchetes nessa equação é identicamente igual a zero pela equação da continuidade, Equação 9–5. Combinando os dois termos restantes no lado esquerdo, escrevemos:

Forma alternativa da equação de Cauchy:
$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij} \tag{9–48}$$

onde reconhecemos a expressão entre colchetes como a aceleração material — a aceleração seguindo uma partícula de fluido (veja o Capítulo 4).

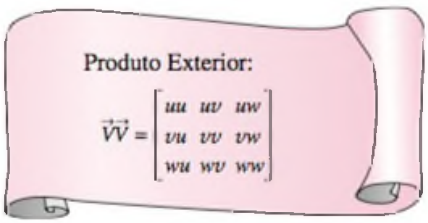


FIGURA 9–34
O produto exterior do vetor $\vec{V} = (u, v, w)$ por si mesmo é um tensor de segunda ordem. O produto mostrado está em coordenadas cartesianas e é ilustrado como uma matriz de nove componentes.

Dedução Usando a Segunda Lei de Newton

Podemos deduzir a equação de Cauchy ainda por um terceiro método. Ou seja, tomamos o elemento infinitesimal de fluido como um *elemento material* em lugar de um volume de controle. Em outras palavras, pensamos no fluido dentro do elemento diferencial como um minúsculo *sistema* de identidade fixa, movendo-se com o escoamento (Figura 9–35). A aceleração desse elemento de fluido é $\vec{a} = D\vec{V}/Dt$ por definição da aceleração material. Pela Segunda Lei de Newton aplicada a um elemento material de fluido:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\,dx\,dy\,dz\frac{D\vec{V}}{Dt} \tag{9–49}$$

No instante no tempo representado na Figura 9–35, a força sobre o elemento infinitesimal de fluido é encontrada da mesma maneira como calculamos anteriormente no volume de controle infinitesimal. Assim, a força total agindo sobre o elemento de fluido é a soma das Equações 9–41 e 9–42, estendida à forma vetorial. Substituindo-as na Equação 9–49 e dividindo por $dx\,dy\,dz$, geramos novamente a forma alternativa da equação de Cauchy,

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij} \tag{9–50}$$

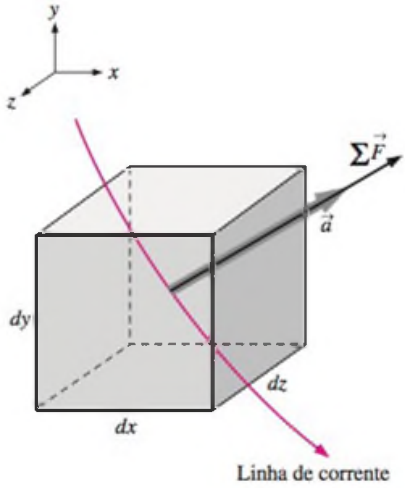


FIGURA 9–35
Se o elemento infinitesimal de fluido é um elemento material, ele se move com o escoamento, e a Segunda Lei de Newton se aplica diretamente.

A Equação 9–50 é idêntica à Equação 9–48. Pensando melhor, poderíamos ter começado com a Segunda Lei de Newton desde o início, evitando alguns cálculos algébricos. No entanto, a dedução da equação de Cauchy pelos três métodos certamente reforça nossa confiança na validade da equação!

Devemos ter muito cuidado ao expandir o último termo da Equação 9–50, que é o divergente de um tensor de segunda ordem. Em coordenadas cartesianas, as três componentes de equação de Cauchy são:

$$\textit{Componente } x: \quad \rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \tag{9–51a}$$

$$\textit{Componente } y: \quad \rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \tag{9–51b}$$

$$\textit{Componente } z: \quad \rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \tag{9–51c}$$

Concluímos esta seção observando que não podemos resolver quaisquer problemas de mecânica dos fluidos usando a equação de Cauchy isoladamente (mesmo quando combinada com a continuidade). O problema é que o tensor de tensão σ_{ij} precisa ser expresso em termos das incógnitas primárias no problema, ou seja, densidade, pressão, e velocidade. Isso é feito para o tipo mais comum de fluido na Seção 9–5.

9–5 • A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

Introdução

A equação de Cauchy (Equação 9–37 ou sua forma alternativa Equação 9–48) não nos é muito útil na forma como está, porque o tensor da tensão σ_{ij} contém nove componentes, dos quais seis são independentes (devido à simetria). Assim, além da densidade e das três componentes da velocidade, há seis incógnitas adicionais, para um total de dez incógnitas. (Em coordenadas cartesianas as incógnitas são ρ, u, v, w, σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yy}, σ_{yz} e σ_{zz}). Por outro lado, até agora discutimos apenas quatro equações — continuidade (uma equação) e equação de Cauchy (três equações). Naturalmente, para que seja possível uma solução matemática, o número de equações deve ser igual ao número de incógnitas, e portanto precisamos de mais seis equações. Essas equações são chamadas de **equações constitutivas**, e elas nos permitem escrever as componentes do tensor da tensão em termos do campo de velocidade e do campo de pressão.

A primeira coisa que faremos é separar as tensões de pressão e as tensões viscosas. Quando um fluido está em repouso, a única tensão agindo em *qualquer* superfície de *qualquer* elemento de fluido é a pressão hidrostática local P, que sempre age *para dentro* e *normal* à superfície (Figura 9–36). Assim, independentemente da orientação do eixo de coordenadas, para um fluido em repouso o tensor da tensão se reduz a:

$$\textit{Fluido em repouso:} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \tag{9–52}$$

A pressão hidrostática P na Equação 9–52 é a mesma que a **pressão termodinâmica** com a qual estamos familiarizados no nosso estudo da termodinâmica. P está relacionada com a temperatura e a densidade através de algum tipo de **equação de estado** (por exemplo, a lei dos gases ideais). Como observação podemos dizer que isso complica ainda mais a análise de um escoamento de fluido compressível porque introduzimos ainda uma outra incógnita, ou seja, a temperatura T. Essa nova incógnita requer uma outra equação — a forma diferencial da equação da energia — que não será discutida neste texto.

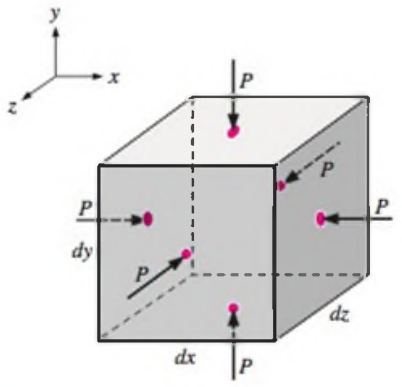


FIGURA 9–36
Para fluidos em repouso, a única tensão sobre um elemento de fluido é a pressão hidrostática, que sempre age para dentro e normal a qualquer superfície.

Quando um fluido está se *movendo*, a pressão ainda age para dentro e é normal, mas podem existir também tensões viscosas. Generalizamos a Equação 9–52 para fluidos em movimento por:

Fluidos em movimento:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \qquad (9\text{–}53)$$

onde introduzimos um novo tensor, τ_{ij}, chamado de **tensor de tensão viscosa** ou **tensor de tensão de desvio**. Matematicamente, não melhoramos a situação porque substituímos as seis componentes desconhecidas de σ_{ij} por seis componentes desconhecidas de τ_{ij}, e acrescentamos *outra* incógnita, a pressão P. Felizmente, no entanto, há equações constitutivas que expressam τ_{ij} em termos do campo de velocidade e propriedades mensuráveis do fluido como a viscosidade. A forma real das relações constitutivas depende do tipo de fluido, conforme discutimos rapidamente.

Como nota aparte, observamos que existem algumas sutilezas associadas com a pressão na Equação 9–53. Se o fluido é *incompressível*, não temos equação de estado (ela é substituída pela equação ρ = constante), e não podemos mais definir P como pressão termodinâmica. Em vez disso, definimos P na Equação 9–53 como a **pressão mecânica,**

Pressão mecânica:

$$P_m = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \qquad (9\text{–}54)$$

Vemos pela Equação 9–54 que *a pressão mecânica é a tensão normal média agindo para dentro em um elemento de fluido*. Ela é chamada também de **pressão média** por alguns autores. Assim, ao lidar com escoamentos de fluido incompressível, a variável pressão P é sempre interpretada como a pressão mecânica P_m. Porém, para campos de escoamento *compressíveis*, a pressão P na Equação 9–53 *é* a pressão termodinâmica, mas a tensão normal média presente nas superfícies de um elemento de fluido não é necessariamente a mesma que P (a variável pressão P e a pressão mecânica P_m não são necessariamente equivalentes). Você pode consultar Panton (1996) ou Kundu (1990) para uma discussão mais detalhada da pressão mecânica.

Fluidos Newtonianos *versus* Fluidos Não Newtonianos

O estudo da deformação de fluidos em escoamento é chamado de **reologia**; o comportamento reológico de vários fluidos está representado na Figura 9–37. Neste livro, nós nos concentramos nos **fluidos newtonianos**, definidos como *fluidos para os quais a tensão de cisalhamento é linearmente proporcional à taxa de deformação de cisalhamento*. Os fluidos newtonianos (tensão proporcional à taxa de deformação) são análogos aos sólidos elásticos (Lei de Hooke: tensão proporcional à deformação). Muitos fluidos comuns, como o ar e outros gases, água, querosene, gasolina, e outros líquidos à base de óleo, são fluidos newtonianos. Fluidos para os quais a tensão de cisalhamento *não* está linearmente relacionada com a taxa de deformação de cisalhamento são chamados de **fluidos não newtonianos**. Como exemplos podemos incluir lamas e suspensões coloidais, soluções de polímeros, sangue, pasta e massa de bolo. Alguns fluidos não newtonianos apresentam uma característica de "memória" — a tensão de cisalhamento depende não somente da taxa de deformação local, mas também de sua *história*. Um fluido que retorna (totalmente ou parcialmente) à sua forma original depois que a tensão aplicada foi removida é chamado de **viscoelástico**.

Alguns fluidos não newtonianos são chamados de **fluidos de cisalhamento diluto** ou **fluidos pseudoplásticos**, porque quanto mais o fluido é cisalhado, menos viscoso ele se torna. Um bom exemplo disso é a tinta. A tinta é muito viscosa quando tirada da lata ou quando apanhada por um pincel, porque a taxa de cisalhamento é pequena. No entanto, quando aplicamos a tinta na parede, a fina camada

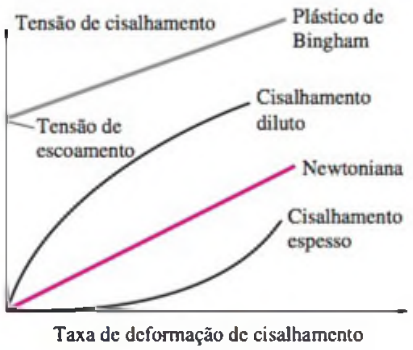


FIGURA 9–37
Comportamento reológico dos fluidos — a tensão de cisalhamento como uma função da taxa de deformação de cisalhamento.

FIGURA 9–38
Quando um engenheiro cai na areia movediça (um *fluido dilatante*), quanto mais rapidamente ele tentar se mover, mais viscoso se torna o fluido.

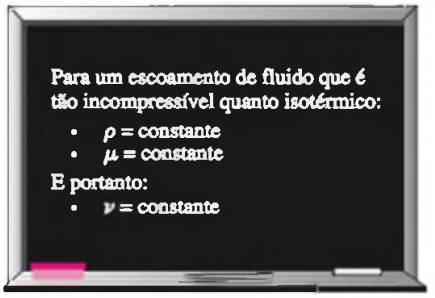


FIGURA 9–39
A aproximação de escoamento incompressível implica densidade constante, e a aproximação isotérmica implica viscosidade constante.

de tinta entre o pincel e a parede é submetida a uma grande tensão de cisalhamento, e ela se torna muito menos viscosa. **Fluidos plásticos** são aqueles nos quais o efeito de diminuição de cisalhamento é extremo. Em alguns fluidos é necessária uma tensão finita chamada de tensão de escoamento para que o fluido comece a fluir; esses fluidos são chamados de **fluidos plásticos de Bingham**. Certas pastas como o creme antiacne e o creme dental são exemplos de fluidos plásticos de Bingham. Se você segura o tubo virado para baixo, o creme não flui apesar de existir uma tensão não-nula devido à gravidade. No entanto, se você aperta o tubo (aumentando bastante a tensão), o creme flui como um fluido muito viscoso. Outros fluidos mostram o efeito oposto e são chamados de **fluidos de cisalhamento espessado** ou **fluidos dilatantes**; quanto mais o fluido é cisalhado, *mais* viscoso ele se torna. O melhor exemplo é a areia movediça, uma mistura grossa de areia e água. Como todos nós já vimos nos filmes de Hollywood, é fácil você se mover *lentamente* através da areia movediça, porque a viscosidade é baixa; mas se você entrar em pânico e tentar se mover rapidamente, a resistência viscosa aumenta consideravelmente e você fica "preso" (Figura 9–38). Os fluidos de cisalhamento espessado são usados em alguns equipamentos de exercício físico — quanto mais rápido você puxa, mais resistência encontra.

Dedução da Equação de Navier-Stokes para Escoamento Incompressível, Isotérmico

A partir deste ponto, limitamos nossa discussão aos fluidos newtonianos, em que por definição o tensor da tensão é linearmente proporcional ao tensor da taxa de deformação. O resultado geral (para escoamento compressível) é um pouco complicado e não foi incluído aqui. Em vez disso, consideramos escoamento incompressível (ρ = constante). Consideramos também escoamento aproximadamente isotérmico — ou seja, as mudanças locais de temperatura são pequenas ou inexistentes; isso elimina a necessidade de uma equação diferencial de energia. Uma outra conseqüência dessa última hipótese é que as propriedades do fluido, como por exemplo a viscosidade dinâmica μ e a viscosidade cinemática ν, são constantes também (Figura 9–39). Com essas hipóteses, pode-se demonstrar (Kundu, 1990) que o tensor de tensão viscosa se reduz a:

Tensor de tensão viscosa para um fluido newtoniano incompressível com propriedades constantes:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{9–55}$$

onde ε_{ij} é o tensor da taxa de deformação definido no Capítulo 4. A Equação 9–55 mostra que a tensão é linearmente proporcional à deformação. Em coordenadas cartesianas, estão listadas as nove componentes do tensor de tensão viscosa, seis das quais são independentes devido à simetria:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{9–56}$$

Em coordenadas cartesianas o tensor de tensão da Equação 9–53 se torna então:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{9–57}$$

Agora substituímos a Equação 9–57 nas três componentes cartesianas da equação de Cauchy. Vamos primeiro considerar a *componente x*. A Equação 9–51a torna-se:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \textbf{(9–58)}$$

Observe que como a pressão consiste apenas em uma tensão normal, ela contribui com apenas um termo para a Equação 9–58. No entanto, como o tensor da tensão viscosa consiste em tensão normal e tensão de cisalhamento, ele contribui com *três* termos. (A propósito, esse é um resultado direto quando se toma o divergente de um tensor de segunda ordem.)

Notamos que enquanto as componentes de velocidade forem funções suaves de x, y, e z, a ordem de diferenciação é irrelevante. Por exemplo, a primeira parte do último termo na Equação 9–58 pode ser reescrita como:

$$\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Após alguns rearranjos adequados dos termos viscosos na Equação 9–58:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

O termo entre parênteses é zero devido à equação da continuidade para escoamento incompressível (Equação 9–17). Reconhecemos também os três últimos termos como o **laplaciano** da componente de velocidade u em coordenadas cartesianas (Figura 9–40). Assim, escrevemos a componente x da equação do momento como:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\nabla^2 u \quad \textbf{(9–59a)}$$

De uma maneira similar, escrevemos as componentes y e z da equação do momento como:

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\nabla^2 v \quad \textbf{(9–59b)}$$

e

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\nabla^2 w \quad \textbf{(9–59c)}$$

respectivamente. Finalmente, combinamos as três componentes em uma equação vetorial; o resultado é a **equação de Navier-Stokes** para escoamento incompressível com viscosidade constante.

Equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} \quad \textbf{(9–60)}$$

Embora tenhamos deduzido as componentes da Equação 9–60 em coordenadas cartesianas, a forma vetorial da Equação 9–60 é válida em qualquer sistema ortogonal de coordenadas. Esta equação famosa recebeu esse nome em homenagem ao engenheiro francês Louis Marie Henri Navier (1785–1836) e ao matemático inglês Sir George Gabriel Stokes (1819–1903), porque ambos desenvolveram os termos viscosos, embora de forma independente um do outro.

A equação de Navier-Stokes é a pedra fundamental da mecânica dos fluidos (Figura 9–41). Ela pode parecer muito inofensiva, mas trata-se de uma equação diferencial parcial não permanente, não-linear, de segunda ordem. Se fôssemos capazes de resolver essa equação para escoamentos de qualquer geometria, este livro

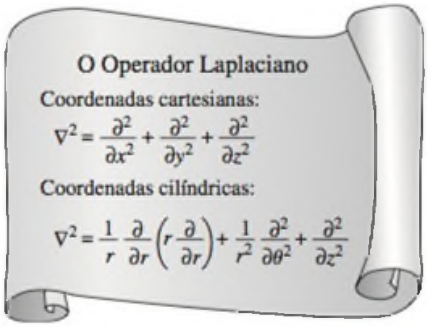


FIGURA 9–40
O operador laplaciano, mostrado aqui em coordenadas cartesianas e cilíndricas, aparece no termo viscoso da equação de Navier-Stokes incompressível.

FIGURA 9–41
A equação de Navier-Stokes é a pedra fundamental da mecânica dos fluidos.

seria reduzido à metade. Infelizmente, soluções analíticas não podem ser obtidas exceto para campos de escoamento muito simples. Não está muito longe da verdade dizer que o restante deste livro é dedicado à resolução da Equação 9–60! Realmente, muitos pesquisadores passaram a carreira inteira tentando resolver a equação de Navier-Stokes.

A Equação 9–60 tem quatro incógnitas (três componentes da velocidade e a pressão), embora ela represente apenas três equações (três componentes, porque ela é uma equação vetorial). Obviamente, precisamos de uma outra equação para tornar o problema solucionável. A quarta equação é a equação da continuidade incompressível (Equação 9–16). Antes de tentarmos resolver esse conjunto de equações diferenciais, precisamos escolher um sistema de coordenadas e expandir as equações naquele sistema de coordenadas.

Equações da Continuidade e de Navier-Stokes em Coordenadas Cartesianas

A equação da continuidade (Equação 9–16) e a equação de Navier-Stokes (Equação 9–60) são expandidas em coordenadas cartesianas (x, y, z) e (u, v, w):

Equação da continuidade incompressível:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{9–61a}$$

Componente x da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{9–61b}$$

Componente y da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{9–61c}$$

Componente z da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{9–61d}$$

Equações da Continuidade e de Navier-Stokes em Coordenadas Cilíndricas

A equação da continuidade (Equação 9–16) e a equação de Navier-Stokes (Equação 9–60) são expandidas em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e (u_r, u_θ, u_z):

Equação da continuidade incompressível:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(u_z)}{\partial z}=0 \tag{9–62a}$$

Componente r da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right] \tag{9–62b}$$

Componente θ da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\rho g_\theta+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right] \tag{9–62c}$$

Componente z da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] \quad \text{(9–62d)}$$

Os termos "extras" em ambos os lados das componentes r e θ da equação de Navier-Stokes (Equações 9–62b e 9–62c) aparecem devido à natureza especial das coordenadas cilíndricas. Ou seja, quando nos movemos na direção θ, o vetor unitário $\vec{e}_r$ também muda de direção; portanto as componentes r e θ estão *acopladas* (Figura 9–42). (Esse efeito de acoplamento não está presente nas coordenadas cartesianas, e portanto não há termos "extras" nas Equações 9–61.)

Para completar, as seis componentes independentes do tensor de tensão viscosa são listadas aqui em coordenadas cilíndricas:

$$\tau_{ij}=\begin{pmatrix}\tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz}\\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z}\\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\mu\dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \mu\left[r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u_\theta}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] & \mu\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right)\\ \mu\left[r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u_\theta}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] & 2\mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\dfrac{u_r}{r}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)\\ \mu\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) & 2\mu\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\end{pmatrix} \quad \text{(9–63)}$$

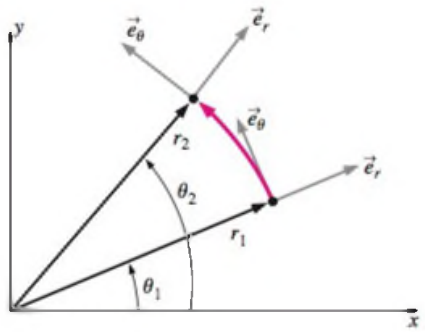


FIGURA 9–42
Os vetores unitários $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\theta$ em coordenadas cilíndricas estão *acoplados*: o movimento na direção θ faz $\vec{e}_r$ mudar de direção, e produz termos extras nas componentes r e θ da equação de Navier-Stokes.

9–6 • ANÁLISE DIFERENCIAL DOS PROBLEMAS DE ESCOAMENTO DE FLUIDOS

Nesta seção mostramos como aplicar as equações diferenciais de movimento em coordenadas cartesianas e coordenadas cilíndricas. Há dois tipos de problemas para os quais as equações diferenciais (continuidade e Navier-Stokes) são úteis:

- Cálculo do campo de pressão para um campo de velocidade conhecido, e
- Cálculo dos campos de velocidade e pressão para um escoamento de geometria conhecida e condições de contorno conhecidas.

Para maior simplicidade, consideramos somente o escoamento incompressível, eliminando o cálculo de ρ como variável. Além disso, a forma da equação de Navier-Stokes deduzida na Seção 9–5 é válida somente para fluidos newtonianos com propriedades constantes (viscosidade, condutividade térmica etc.). Finalmente, consideramos que as variações de temperatura são desprezíveis, de forma que T não é uma variável. Restam-nos quatro variáveis ou incógnitas (pressão mais três componentes de velocidade), e temos quatro equações diferenciais (Figura 9–43).

Escoamento incompressível tridimensional

Quatro variáveis ou incógnitas:

- Pressão P
- Três componentes da velocidade $\vec{V}$

Quatro equações de movimento:

- Continuidade,
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$
- Três componentes de Navier–Stokes,
  $\rho\dfrac{D\vec{V}}{Dt}=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}$

FIGURA 9–43
Um campo de escoamento geral tridimensional, mas incompressível com propriedades constantes, requer quatro equações para determinar quatro incógnitas.

Cálculo do Campo de Pressão para um Campo de Velocidade Conhecido

O primeiro conjunto de exemplos envolve o cálculo do campo de pressão para um campo de velocidade conhecido. Como a pressão não aparece na equação da continuidade, podemos teoricamente gerar um campo de velocidade com base somente na conservação da massa. No entanto, como a velocidade aparece na equação da continuidade e na equação de Navier-Stokes, essas duas equações estão *acopladas*. Além disso, a pressão aparece nas três componentes da equação de Navier-Stokes, e portanto os campos de velocidade e pressão também são acoplados. Esse acoplamento profundo entre velocidade e pressão nos permite calcular o campo de pressão para um campo de velocidade conhecido.

EXEMPLO 9–13 Cálculo do Campo de Pressão em Coordenadas Cartesianas

Considere o campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível do Exemplo 9–9, isto é, $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx)\vec{j}$. Calcule a pressão em função de x e y.

SOLUÇÃO Para um dado campo de velocidade, vamos calcular o campo de pressão.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente. **2** O fluido é incompressível com propriedades constantes. **3** O escoamento é bidimensional no plano xy. **4** A gravidade não age nas direções x ou y.

Análise Primeiro verificamos se o campo de velocidade dado satisfaz a equação da continuidade bidimensional incompressível:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{a} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-a} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{0\ (2\text{-D})} = a - a = 0 \qquad (1)$$

Portanto, a continuidade é certamente satisfeita para o campo de velocidade dado. Se a continuidade *não* fosse satisfeita, teríamos que interromper aqui a nossa análise, pois aquele campo de velocidade não seria fisicamente possível, e não poderíamos calcular um campo de pressão.

Em seguida, consideramos a componente y da equação de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{0\ (\text{estacionário})} + u\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{(ax+b)c} + v\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{(-ay+cx)(-a)} + w\underbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}_{0\ (2\text{-D})}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\rho g_y}_{0} + \mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{0\ (2\text{-D})}\right)$$

A equação do momento na direção y se reduz a:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho(-acx - bc - a^2y + acx) = \rho(-bc - a^2y) \qquad (2)$$

A equação do momento na direção y é satisfeita, contanto que possamos gerar um campo de pressão que satisfaça a Equação 2. De maneira similar, a equação do momento na direção x se reduz a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho(-a^2x - ab) \qquad (3)$$

A equação do momento na direção x também é satisfeita, contanto que possamos gerar um campo de pressão que satisfaça a Equação 3.

Para que exista uma solução de escoamento em regime permanente, P não pode ser uma função do tempo. Além disso, um campo de escoamento fisicamente realístico em regime permanente e incompressível requer um campo de pressão $P(x, y)$ que seja uma função suave de x e y (não pode haver nenhuma descontinuidade súbita em P ou nas derivadas de P). Matematicamente, isso significa que a ordem de diferenciação (x depois y ou y depois x) não deve importar (Figura 9–44). Verificamos se isso ocorre fazendo uma diferenciação cruzada das Equações 2 e 3, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0 \qquad (4)$$

A Equação 4 mostra que P é uma função suave de x e y. Portanto, *o campo de velocidade dado satisfaz a equação de Navier-Stokes permanente, bidimensional, incompressível.*

Se neste ponto da análise, a diferenciação cruzada da pressão resultasse em duas relações incompatíveis, em outras palavras, se a equação na Figura 9–44 não fosse satisfeita, concluiríamos que o campo de velocidade não poderia satisfazer a equação de Navier-Stokes incompressível permanente, bidimensional, e abandonaríamos nossa tentativa de calcular um campo de pressão permanente.

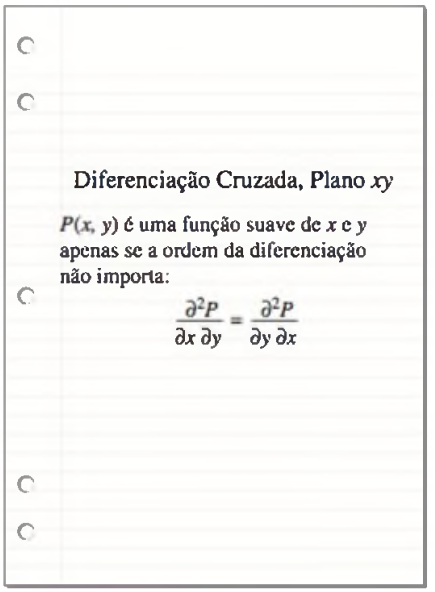


FIGURA 9–44
Para um campo de escoamento bidimensional no plano xy, a diferenciação cruzada revela se a pressão P é uma função suave.

Para calcularmos $P(x, y)$, integramos parcialmente a Equação 2 (com relação a y) para obter uma expressão para $P(x, y)$:

Campo de pressão, do momento na direção y:

$$P(x, y) = \rho\left(-bcy - \frac{a^2y^2}{2}\right) + g(x) \tag{5}$$

Observe que acrescentamos uma função arbitrária da outra variável x em lugar de uma constante de integração, pois esta é uma integração parcial. Tomamos então a derivada parcial da Equação 5 com relação a x para obter:n

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g'(x) = \rho(-a^2x - ab) \tag{6}$$

onde igualamos nosso resultado com a Equação 3, por consistência. Agora integramos a Equação 6 para obter a função $g(x)$:

$$g(x) = \rho\left(-\frac{a^2x^2}{2} - abx\right) + C_1 \tag{7}$$

onde C_1 é uma constante de integração arbitrária. Finalmente, substituímos a Equação 7 na Equação 5 para obter nossa expressão final para $P(x, y)$. O resultado é:

$$P(x, y) = \rho\left(-\frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^2y^2}{2} - abx - bcy\right) + C_1 \tag{8}$$

Discussão Para praticar, e também para verificar nossos cálculos, você deveria derivar a Equação 8 com relação a y e x, e comparar com as Equações 2 e 3. Além disso, tente obter a Equação 8 começando com a Equação 3 em vez da Equação 2; você deveria obter a mesma resposta.

Note que a equação final (Equação 8) para pressão no Exemplo 9–13 contém uma constante arbitrária C_1. Isso ilustra um ponto importante sobre o campo de pressão em um escoamento incompressível; ou seja,

O campo de velocidade em um escoamento incompressível não é afetado pelo valor absoluto da pressão, mas somente pelas diferenças de pressão.

Isso não deve nos surpreender, se examinarmos a equação de Navier-Stokes, onde P aparece somente como um *gradiente*, nunca por si só. Uma outra maneira de explicar essa afirmação é que não é o valor absoluto da pressão que importa, mas sim as *diferenças* de pressão (Figura 9–45). Um resultado direto da afirmação é que podemos calcular o campo de pressão a menos de uma constante arbitrária, mas para determinar aquela constante (C_1 no Exemplo 9–13), temos que medir (ou obter de alguma outra forma) P em algum ponto no campo de escoamento. Em outras palavras, precisamos de uma condição de contorno da pressão.

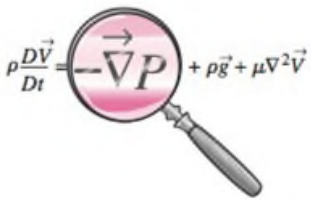


FIGURA 9–45
Como a pressão aparece somente como um gradiente na equação de Navier-Stokes incompressível, o valor da pressão absoluta não é relevante — somente as *diferenças* de pressão é que importam.

Ilustramos esse ponto com um exemplo gerado usando **Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD)**, onde a equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes são resolvidas numericamente (Capítulo 15). Considere o escoamento descendente de ar através de um canal no qual há um bloqueio não simétrico (Figura 9–46). (Note que o domínio de escoamento computational se estende muito além a montante e a jusante do que mostra a Figura 9–46.) Calculamos dois casos que são idênticos exceto quanto às condições de pressão. No caso 1 definimos como zero a pressão manométrica bem distante a jusante do bloqueio. No caso 2 definimos a pressão manométrica na mesma posição como 500 Pa. A pressão manométrica no centro superior do campo de visão e no centro inferior do campo de visão são mostradas na Figura 9–46 para ambos os casos, conforme gerado para as duas soluções de CFD. Você pode ver que o campo de pressão para o caso 2 é idêntico àquele do caso 1, exceto que a pressão em qualquer ponto foi aumentada em 500 Pa. A Figura 9–46 mostra também um gráfico do vetor velocidade e das linhas de cor-

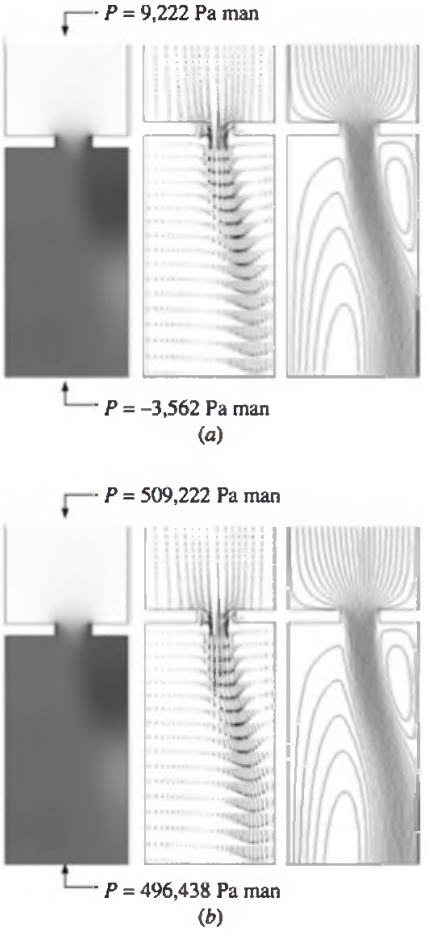


FIGURA 9–46
Gráfico de contorno de pressão, gráfico do vetor velocidade, e linhas de corrente para escoamento descendente de ar através de um canal com bloqueio: (*a*) caso 1; (*b*) caso 2 — idêntico ao caso 1, exceto que P em todos os pontos foi aumentada de 500 Pa. Nos gráficos de contorno em escala de cinzas, escuro representa baixa pressão e claro representa alta pressão.

rente para cada caso. Os resultados são idênticos, confirmando nossa afirmação de que o campo de velocidade não é afetado pelo valor absoluto da pressão, mas somente pelas *diferenças* de pressão. Subtraindo a pressão na parte inferior da pressão na parte superior, vemos que $\Delta P = 12{,}784$ Pa para ambos os casos.

A afirmação sobre diferenças de pressão *não* é válida para campos de escoamento *compressíveis*, onde P é a pressão termodinâmica e não a pressão mecânica. Nesses casos, P está acoplada com a densidade e com a temperatura através de uma equação de estado, e o valor absoluto da pressão *é* importante. Uma solução de escoamento compressível requer não somente equações de conservação de massa e do momento, mas também uma equação de conservação de energia e uma equação de estado.

Aproveitamos esta oportunidade para comentar um pouco mais os resultados de CFD mostrados na Figura 9–46. Você pode aprender muito sobre a física do escoamento de fluidos estudando escoamentos relativamente simples como este. Note que a maior parte da queda de pressão ocorre através da garganta do canal. Isso é causado pela separação do escoamento a jusante do bloqueio; o ar em movimento rápido não pode contornar um canto agudo, e o escoamento se separa das paredes quando ele sai pela abertura. As linhas de corrente indicam grandes regiões de recirculação em ambos os lados do canal a jusante do bloqueio. A pressão é baixa nessas regiões de recirculação. Os vetores velocidade indicam um perfil de velocidades em forma de um sino invertido saindo pela abertura — bem semelhante a um jato de saída. Devido à natureza assimétrica da geometria, o jato vira para a direita, e o escoamento volta a encostar na parede direita muito antes do que na parede esquerda. A pressão aumenta um pouco na região onde o jato bate na parede direita, como poderíamos prever. Finalmente, observe que à medida que o ar acelera para escapar através do orifício, as linhas de corrente convergem (conforme discutido na Seção 9–3). À medida que o jato de ar se espalha a jusante, as linhas de corrente divergem um pouco. Observe também que as linhas de corrente nas zonas de recirculação estão bastante separadas, indicando que as velocidades são relativamente pequenas lá; isso é confirmado pelos gráficos do vetor velocidade.

Finalmente, observamos que a maioria dos softwares de CFD *não* calculam a pressão pela integração da equação de Navier-Stokes como fizemos no Exemplo 9–13. Em vez disso, é usado algum tipo de **algoritmo de correção de pressão**. A maioria dos algoritmos normalmente usados funciona combinando a equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes de maneira que a pressão aparece na equação da continuidade. Os algoritmos de correção de pressão mais populares resultam em uma forma da **equação de Poisson** para a mudança de pressão ΔP de uma iteração (n) para a próxima $(n + 1)$:

Equação de Poisson para ΔP: $$\nabla^2(\Delta P) = \text{RHS}_{(n)} \qquad (9\text{–}64)$$

Depois, à medida que o computador executa as iterações buscando a solução, a equação da continuidade modificada é usada para "corrigir" o campo de pressão na iteração $(n + 1)$ a partir de seus valores na iteração (n):

Correção para P: $$P_{(n+1)} = P_{(n)} + \Delta P$$

Os detalhes associados com o desenvolvimento de algoritmos de correção de pressão estão além do escopo deste livro. Um exemplo para escoamentos bidimensionais é desenvolvido em Gerhart, Gross e Hochstein (1992).

EXEMPLO 9–14 Calculando o Campo de Pressão em Coordenadas Cilíndricas

Considere o campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível do Exemplo 9–5 com a função $f(\theta, t)$ igual a 0. Isso representa uma linha de vórtices cujo eixo está ao longo da coordenada z (Figura 9–47). As componentes da velocidade são $u_r = 0$ e $u_\theta = K/r$, onde K é uma constante. Calcule a pressão como uma função de r e θ.

SOLUÇÃO Para um dado campo de velocidade, vamos calcular o campo de pressão.

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente. **2** O fluido é incompressível com propriedades constantes. **3** O escoamento é bidimensional no plano r_θ. **4** A gravidade não age na direção r nem na direção θ.

Análise O campo de escoamento deve satisfazer as equações da continuidade e do momento, Equações 9–62. Para escoamento em regime permanente, bidimensional, incompressível:

Continuidade incompressível:
$$\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\theta)}{\partial\theta}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial(u_z)}{\partial z}}_{0} = 0$$

Portanto, a equação da continuidade incompressível é satisfeita. Agora examinamos a componente θ da equação de Navier-Stokes (Equação 9–62c):

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial u_\theta}{\partial t}}_{\text{(estacionário)}} + \underbrace{u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}}_{(0)\left(-\frac{K}{r^2}\right)} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}}_{\left(\frac{K}{r^2}\right)(0)} + \underbrace{\frac{u_r u_\theta}{r}}_{0} + \underbrace{u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}}_{0\ \text{(2-D)}}\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} + \underbrace{\rho g_\theta}_{0} + \mu\left(\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)}_{\frac{K}{r^3}} - \underbrace{\frac{u_\theta}{r^2}}_{\frac{K}{r^3}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}}_{0} + \underbrace{\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}}_{0\ \text{(2-D)}}\right)$$

A componente θ da equação do momento se reduz a:

Componente θ do momento:
$$\frac{\partial P}{\partial\theta} = 0 \qquad (1)$$

Portanto, a componente θ da equação do momento será satisfeita, contanto que possamos gerar um campo de pressão apropriado que satisfaça a Equação 1. De uma forma similar, a componente r da equação do momento (Equação 9–62b) se reduz a:

Componente r do momento:
$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\frac{K^2}{r^3} \qquad (2)$$

Portanto, a componente r da equação do momento também é satisfeita, contanto que possamos gerar um campo de pressão que satisfaça a Equação 2.

Para que exista uma solução de escoamento em regime permanente, P não pode ser uma função do tempo. Além disso, um campo de escoamento fisicamente realista, em regime permanente, incompressível requer um campo de pressão $P(r, \theta)$ que seja uma função suave de r e θ. Matematicamente, isso significa que a ordem de diferenciação (r depois θ ou θ depois r) não deve importar (Figura 9–48). Verificamos se isso é verdade fazendo uma diferenciação cruzada da pressão:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) = 0 \qquad (3)$$

A Equação 3 mostra que P pode ser uma função suave de r e θ. Portanto, *o campo de velocidade dado satisfaz a equação de Navier-Stokes permanente, bidimensional, incompressível.*

Integramos a Equação 1 com relação a θ para obter uma expressão para $P(r, \theta)$,

Campo de pressão da componente θ do momento:
$$P(r, \theta) = 0 + g(r) \qquad (4)$$

Note que nós acrescentamos uma função arbitrária da outra variável r, em lugar de uma constante de integração, porque esta é uma integração parcial. Tomamos a derivada parcial da Equação 4 com relação a r para obter:

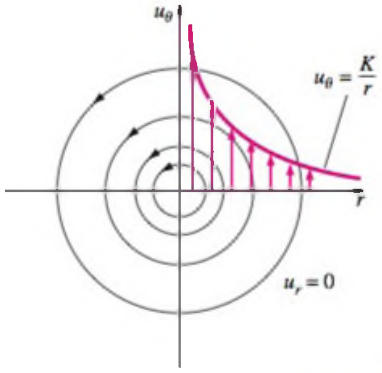


FIGURA 9–47
Linhas de corrente e perfis de velocidade para uma linha de vórtices.

Diferenciação Cruzada, Plano $r\theta$

$P(r, \theta)$ é uma função suave de r e θ apenas se a ordem da diferenciação não importa:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta} = \frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}$$

FIGURA 9–48
Para um campo de escoamento bidimensional no plano $r\theta$, a diferenciação cruzada revela se a pressão P é uma função suave.

$$\frac{\partial P}{\partial r} = g'(r) = \rho \frac{K^2}{r^3} \tag{5}$$

onde igualamos nosso resultado com a Equação 2 por consistência. Integramos a Equação 5 para obter a função $g(r)$:

$$g(r) = -\frac{1}{2}\rho \frac{K^2}{r^2} + C \tag{6}$$

onde C é uma constante de integração arbitrária. Finalmente, substituímos a Equação 6 na Equação 4 para obter nossa expressão final para $P(r, \theta)$. O resultado é:

$$P(r, \theta) = -\frac{1}{2}\rho \frac{K^2}{r^2} + C \tag{7}$$

Assim, o campo de pressão para uma linha de turbilhões decresce segundo $1/r^2$ à medida que nos aproximamos da origem. (A própria origem é um ponto de singularidade.) Esse campo de escoamento é um modelo simplificado de um tornado ou furacão, e a baixa pressão no centro é o "olho do furacão" (Figura 9–49). Notamos que esse campo de escoamento é irrotacional e portanto pode ser usada a equação de Bernoulli para calcular a pressão. Assim, se chamamos de P_∞ a pressão muito distante da origem ($r \to \infty$), onde a velocidade local se aproxima de zero, a equação de Bernoulli mostra que a qualquer distância r da origem:

Equação de Bernoulli: $$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_\infty \quad \rightarrow \quad P = P_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{K^2}{r^2} \tag{8}$$

A Equação 8 coincide com nossa solução (Equação 7) da equação completa de Navier-Stokes se considerarmos a constante C igual a P_∞. Uma região de escoamento rotacional próxima da origem evitaria a singularidade ali e resultaria em um modelo mais realístico de um tornado.

Discussão Para praticar, tente obter a Equação 7 começando com a Equação 2 em lugar da Equação 1; você deveria obter a mesma resposta.

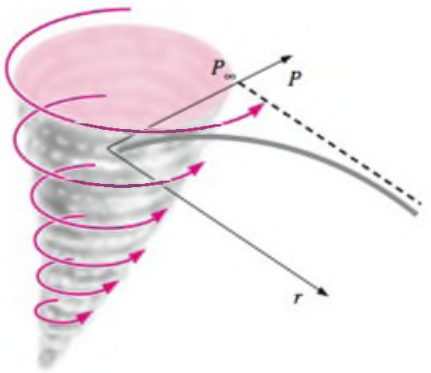


FIGURA 9–49
A linha de turbilhões bidimensional é uma aproximação simples de um tornado; a pressão mais baixa está no centro dos vórtices.

Soluções Exatas das Equações da Continuidade e de Navier-Stokes

Os exemplos restantes resolvidos são soluções exatas do conjunto de equações diferenciais formado pela equação da continuidade incompressível e pela equação de Navier-Stokes. Conforme você verá, esses problemas são necessariamente simples, para que possam ser resolvidos. Na maioria deles são consideradas condições de contorno no infinito e condições totalmente desenvolvidas para que os termos advectivos no lado esquerdo da equação de Navier-Stokes desapareçam. Além disso, o escoamento é laminar, bidimensional, e em regime permanente ou dependente do tempo de uma maneira predefinida. Há seis passos básicos no procedimento usado para resolver esses problemas, conforme está listado na Figura 9–50. O passo 2 é especialmente crítico, pois as condições de contorno determinam a unicidade da solução. O passo 4 não é possível analiticamente exceto para problemas simples. No passo 5, deve haver condições de contorno suficientes para resolver todas as constantes de integração produzidas no passo 4. O passo 6 envolve a verificação de que todas as equações diferenciais e condições de contorno estejam satisfeitas. Nós o aconselhamos a seguir todos esses passos, mesmo em casos onde alguns deles parecem ser triviais, para aprender o procedimento.

Passo 1: Analise o problema e a geometrica (esboços são úteis), identificando todas as dimensões e parâmetros relevantes.

Passo 2: Liste todas as hipóteses, aproximações, simplificações e condições de contorno apropriadas.

Passo 3: Simplifique as equações diferenciais (continuidade e Navier-Strokes) tanto quanto possível.

Passo 4: Integre as equações, obtendo uma ou mais constantes de integração.

Passo 5: Aplique as condições de contorno para encontrar constantes de integração.

Passo 6: Verifique seus resultados.

FIGURA 9–50
Procedimento para resolver as equações da continuidade e de Navier-Stokes incompressíveis.

Embora os exemplos mostrados aqui sejam simples, eles ilustram adequadamente o procedimento usado para resolver essas equações diferenciais. No Capítulo 15 discutimos como os computadores nos ajudaram a resolver a equação de Navier-Stokes *numericamente* para escoamentos muito mais complicados usando CFD. Você verá que as mesmas técnicas são usadas lá — especificação da geometria, aplicação

de condições de contorno, integração das equações diferenciais etc., embora os passos não sejam sempre seguidos na mesma ordem.

Condições de Contorno

Como as condições de contorno são tão críticas para uma solução adequada, discutiremos os tipos de condições de contorno comumente encontradas em análises de escoamento de fluidos. A condição de contorno mais utilizada é a **condição de não-escorregamento**, que estabelece que para um fluido em contato com uma parede sólida, *a velocidade do fluido deve ser igual à velocidade da parede*,

Condição de contorno de não-escorregamento: $$\vec{V}_{\text{fluido}} = \vec{V}_{\text{parede}} \qquad (9\text{–}65)$$

Em outras palavras, como está implícito no nome, não há "escorregamento" entre o fluido e a parede. As partículas de fluido adjacentes à parede aderem à superfície da parede e se movem com a mesma velocidade da parede. Um caso especial da Equação 9–65 é o de uma parede estacionária com $\vec{V}_{\text{parede}} = 0$; *o fluido adjacente a uma parede permanente tem velocidade zero*. Para os casos nos quais os efeitos da temperatura são também considerados, a temperatura do fluido deve ser igual à temperatura da parede, isto é, $T_{\text{fluido}} = T_{\text{parede}}$. Você deve ter o cuidado de aplicar a condição de não-escorregamento de acordo com o seu *sistema de referência* escolhido. Considere, por exemplo, o filme fino de óleo entre um pistão e a parede do cilindro (Figura 9–51). Por meio de um sistema de referência permanente, o fluido adjacente ao cilindro está em repouso, e o fluido adjacente ao pistão em movimento tem velocidade $\vec{V}_{\text{fluido}} = \vec{V}_{\text{parede}} = V_P\vec{i}$. No entanto, por meio de um sistema de referência *movendo-se com o pistão*, o fluido adjacente ao pistão tem velocidade zero, mas o fluido adjacente ao cilindro tem velocidade $\vec{V}_{\text{fluido}} = \vec{V}_{\text{parede}} = -V_P\vec{i}$. Uma exceção à condição de não-escorregamento ocorre em escoamentos de gases rarefeitos, como por exemplo durante a reentrada de uma nave espacial na atmosfera ou no estudo do movimento de partículas extremamente pequenas (menores que um micron). Nesses tipos de escoamentos o ar pode realmente deslizar ao longo da parede, mas esses escoamentos estão além do escopo deste livro.

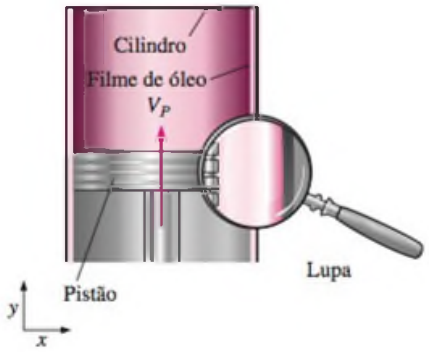


FIGURA 9–51
Um pistão movendo-se com uma velocidade V_P em um cilindro. Um filme fino de óleo é cisalhado entre o pistão e o cilindro; é mostrada uma vista ampliada do filme de óleo. A *condição de contorno de não-escorregamento* exige que a velocidade do fluido adjacente a uma parede seja igual à velocidade da parede.

Quando dois fluidos (fluido A e fluido B) se juntam em uma interface, as **condições de contorno de interface** são:

Condições de contorno de interface: $$\vec{V}_{\text{A}} = \vec{V}_{\text{B}} \quad \text{e} \quad \tau_{s,\text{A}} = \tau_{s,\text{B}} \qquad (9\text{–}66)$$

onde, além da condição de que as velocidades dos dois fluidos sejam iguais, a tensão de cisalhamento τ_s agindo sobre uma partícula de fluido adjacente à interface na direção paralela à interface deve também coincidir entre os dois fluidos (Figura 9–52). Note que na figura, $\tau_{s,\text{A}}$ está desenhada *acima* da partícula de fluido no fluido A, enquanto $\tau_{s,\text{B}}$ está desenhada *abaixo* da partícula de fluido no fluido B, e nós levamos em consideração a *direção* do cisalhamento cuidadosamente. Devido à convenção de sinais na tensão de cisalhamento, a direção das setas na Figura 9–52 é oposta (uma conseqüência da Terceira Lei de Newton). Observamos que embora a velocidade seja contínua através da interface, sua taxa de variação *não* é. E também, se forem considerados os efeitos da temperatura, $T_{\text{A}} = T_{\text{B}}$ na interface, mas pode haver uma descontinuidade na taxa de variação da temperatura na interface também.

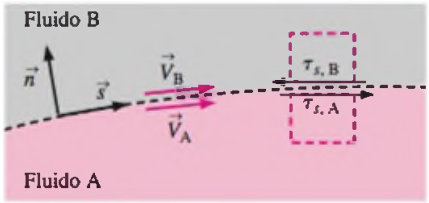


FIGURA 9–52
Em uma interface entre dois fluidos, as velocidades dos dois fluidos devem ser iguais. Além disso, a tensão de cisalhamento paralela à interface deve ser a mesma em ambos os fluidos.

E a pressão em uma interface? Se os efeitos da tensão superficial forem desprezíveis ou se a interface for aproximadamente plana, $P_{\text{A}} = P_{\text{B}}$. No entanto, se a interface for curvada acentuadamente, como ocorre no menisco de um líquido subindo em um tubo capilar, a pressão em um lado da interface pode ser substancialmente diferente da pressão no outro lado. Você deve se lembrar do Capítulo 2 que o salto de pressão através de uma interface é inversamente proporcional ao raio de curvatura da interface, como resultado dos efeitos da tensão superficial.

Uma forma degenerada da condição de contorno de interface ocorre na *superfície livre* de um líquido, indicando que o fluido A é um líquido e o fluido B é um gás (usualmente o ar). Ilustramos um caso simples na Figura 9–53 onde o fluido A é água líquida e o fluido B é o ar. A interface é plana, os efeitos da tensão superficial

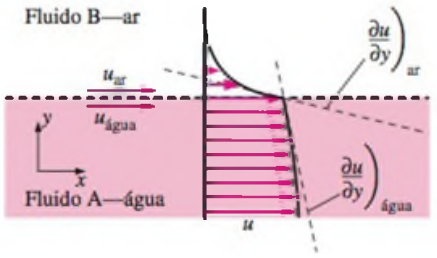


FIGURA 9–53
Ao longo de uma *superfície livre* horizontal de água e ar, as velocidades da água e do ar devem ser iguais e as tensões de cisalhamento devem ser iguais. No entanto, como $\mu_{ar} << \mu_{água}$, uma boa aproximação é que a tensão de cisalhamento na superfície da água é despezivelmente pequena.

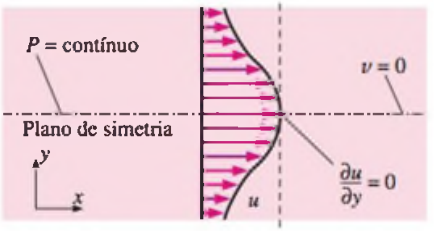


FIGURA 9–54
As condições de contorno ao longo de um plano de simetria são definidas para garantir que o campo de escoamento em um lado do plano de simetria seja uma *imagem espelhada* do campo de escoamento no outro lado, como é mostrado aqui para um plano horizontal de simetria.

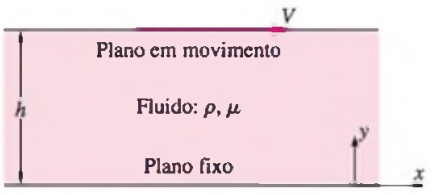


FIGURA 9–55
Geometria do Exemplo 9–15: escoamento viscoso entre duas placas infinitas; a placa superior movendo-se e a placa inferior fixa.

são desprezíveis, mas a água está se movendo horizontalmente (como a água fluindo em um rio calmo). Nesse caso, as velocidades do ar e da água devem se igualar na superfície e a tensão de cisalhamento agindo sobre uma partícula de água na superfície da água deve ser igual à tensão de cisalhamento agindo sobre uma partícula de ar logo acima da superfície. De acordo com a Equação 9–66:

Condições de contorno na interface água-ar:

$$u_{água} = u_{ar} \quad \text{e} \quad \tau_{s,\,água} = \mu_{água}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{água} = \tau_{s,\,ar} = \mu_{ar}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ar} \qquad (9\text{–}67)$$

Um rápido exame nas tabelas de propriedades de fluidos revela que $\mu_{água}$ é mais de 50 vezes maior do que μ_{ar}. Para que as tensões de cisalhamento sejam iguais, a Equação 9–67 exige que a taxa de variação $(\partial u/\partial y)_{ar}$ seja mais de 50 vezes maior do que $(\partial u/\partial y)_{água}$. Portanto, é razoável aproximar a tensão de cisalhamento agindo na superfície da água como desprezivelmente pequena comparada com as tensões de cisalhamento em qualquer outro ponto na água. Uma outra maneira de dizer isso é que a água em movimento arrasta com ela o ar com pouca resistência por parte do ar; em contrapartida, o ar não consegue retardar o movimento da água significativamente. Resumindo, para o caso de um líquido em contato com um gás, e com efeitos de tensão superficial desprezíveis, as **condições de contorno de superfície livre** são:

Condições de contorno de superfície livre: $P_{líquido} = P_{gás}$ e $\tau_{s,\,líquido} \cong 0$ (9–68)

Dependendo do tipo de problema, surgem outras condições de contorno. Por exemplo, freqüentemente precisamos definir **condições de contorno de entrada** nos limites de um domínio de escoamento onde o fluido entra no domínio. Da mesma forma, definimos **condições de contorno de saída** em uma saída de fluxo. As **condições de contorno simétricas** são úteis ao longo de um eixo ou plano de simetria. Por exemplo, as condições de contorno simétricas apropriadas ao longo de um plano horizontal de simetria estão ilustradas na Figura 9–54. Para problemas de escoamento não permanente precisamos definir também **condições iniciais** (no instante de início, usualmente $t = 0$).

Nos Exemplos 9–15 até 9–19, aplicamos condições de contorno das Equações 9–65 até 9–68 onde for necessário. Essas e outras condições de contorno são discutidas com muito mais detalhes no Capítulo 15 onde as aplicamos às soluções de CFD.

EXEMPLO 9–15 Escoamento Couette Completamente Desenvolvido

Considere o escoamento em regime permanente, incompressível, laminar de um fluido newtoniano no espaço estreito entre duas placas paralelas infinitas (Figura 9–55). A placa superior está se movendo à velocidade V, e a placa inferior está fixa. A distância entre essas duas placas é h, e a gravidade age na direção negativa do eixo z (para dentro do plano da Figura 9–55). Não há nenhuma outra pressão aplicada a não ser a pressão hidrostática em virtude da gravidade. Esse escoamento é chamado de **escoamento Couette**. Calcule os campos de velocidade e pressão, e estime a força de cisalhamento por unidade de área agindo na placa inferior.

SOLUÇÃO Para uma dada geometria e conjunto de condições de contorno, vamos calcular os campos de velocidade e de pressão, e depois estimar a força de cisalhamento por unidade de área agindo na placa inferior.

Hipóteses **1** As placas são infinitas em x e z. **2** O escoamento é permanente, isto é, $\partial/\partial t$ de qualquer coisa é zero. **3** Este é um escoamento paralelo (consideramos que a componente y da velocidade, v, é zero). **4** O fluido é incompressível e newtoniano com propriedades constantes, e o escoamento é laminar. **5** A pressão P = constante com relação a x. Em outras palavras, não há nenhum gradiente de pressão aplicado empurrando o escoamento na direção x; o escoamento se estabelece por si mesmo devido às tensões viscosas causadas pelo

movimento da placa superior. **6** O campo de velocidade é puramente bidimensional, o que significa aqui que $w = 0$ e $\partial/\partial z$ de qualquer componente da velocidade é zero. **7** A gravidade age na direção negativa de z (para dentro do plano da página na Figura 9–55). Expressamos isso matematicamente como, $\vec{g} = -g\vec{k}$, ou $g_x = g_y = 0$ e $g_z = -g$.

Análise Para obtermos os campos de velocidade e de pressão, seguimos o procedimento passo a passo representado na Figura 9–50.

Passo 1 *Analisar o problema e a geometria.* Veja a Figura 9–55.

Passo 2 *Listar hipóteses e condições de contorno.* Nós numeramos e listamos sete hipóteses. As condições de contorno vem da imposição da condição de não-escorregamento: (1) Na placa inferior ($y = 0$), $u = v = w = 0$. (2) Na placa superior ($y = h$), $u = V$, $v = 0$, e $w = 0$.

Passo 3 *Simplificar as equações diferenciais.* Começamos com a equação da continuidade incompressível em coordenadas cartesianas, Equação 9–61a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{hipótese 6}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

A Equação 1 nos diz que u não é uma função de x. Em outras palavras, não importa onde colocamos nossa origem — o escoamento é o mesmo em qualquer posição x. A frase **completamente desenvolvido** é usada freqüentemente para descrever essa situação (Figura 9–56). Isso pode também ser obtido diretamente da hipótese 1, que nos diz que não há nada especial sobre qualquer posição x porque as placas têm comprimento infinito. Além disso, como u não é uma função do tempo (hipótese 2) ou z (hipótese 6), concluímos que u é no máximo uma função de y,

Resultado da continuidade: $u = u(y)$ apenas **(2)**

Simplificamos agora a equação do momento na direção x (Equação 9–61b) o máximo possível. É uma boa prática listar a razão para cancelar um termo, conforme fazermos aqui:

$$\rho\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{hipótese 2}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{continuidade}} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{hipótese 6}}\Big) = -\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{hipótese 5}} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{hipótese 7}}$$

$$+ \mu\Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{continuidade}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{hipótese 6}}\Big) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \qquad (3)$$

Note que a aceleração material (lado esquerdo da Equação 3) é zero, o que implica que as partículas de fluido não estão acelerando de forma nenhuma neste campo de escoamento, nem por aceleração local (não permanente), nem por aceleração advectiva. Como os termos de aceleração advectiva é que tornam a equação de Navier-Stokes não-linear, isso simplifica muito o problema. Na verdade, todos os outros termos na Equação 3 desapareceram exceto um termo viscoso isolado, que deve ser igual a zero. Observe também que mudamos de uma derivada parcial ($\partial/\partial y$) para uma derivada total (d/dy) na Equação 3 como resultado direto da Equação 2. Não mostramos os detalhes aqui, mas você pode mostrar de uma forma similar que todos os termos exceto o termo da pressão na equação do momento na direção y (Equação 9–61c) tornam-se iguais a zero, forçando o termo isolado a ser também zero:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

Em outras palavras, P não é uma função de y. Como P também não é uma função do tempo (hipótese 2) ou x (hipótese 5), P é no máximo uma função de z,

Resultado do momento na direção y: $P = P(z)$ apenas **(5)**

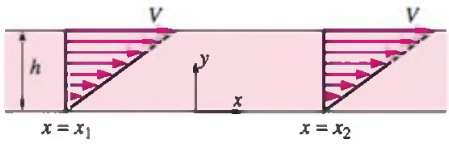


FIGURA 9–56
Uma região *completamente desenvolvida* de um campo de escoamento é uma região onde o perfil de velocidades não muda com a distância a jusante. Escoamentos completamente desenvolvidos são encontrados em canais e tubos longos e retos. O escoamento Couette completamente desenvolvido é mostrado aqui — o perfil de velocidade em x_2 é idêntico ao perfil em x_1.

Finalmente, pela hipótese 6 a componente z da equação de Navier-Stokes (Equação 9–61d) é simplificada tornando-se:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{6}$$

onde usamos a Equação 5 para converter de uma derivada parcial para uma derivada total.

Passo 4 *Resolver as equações diferenciais.* As equações da continuidade e da quantidade de movimento y já foram "resolvidas", resultando nas Equações 2 e 5, respectivamente. A Equação 3 (momento na direção x) é integrada duas vezes para obter:

$$u = C_1 y + C_2 \tag{7}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. A Equação 6 (momento na direção z) é integrada uma vez, resultando em:

$$P = -\rho g z + C_3 \tag{8}$$

Passo 5 *Aplicar condições de contorno.* Começamos com a Equação 8. Como não especificamos condições de contorno para a pressão, C_3 pode permanecer como uma constante arbitrária. (Lembre-se de que para escoamento incompressível, a pressão absoluta só pode ser especificada se P for conhecida em algum lugar do escoamento.) Por exemplo, se fizermos $P = P_0$ em $z = 0$, então $C_3 = P_0$ e a Equação 8 torna-se:

Solução final para o campo de pressão: $$P = P_0 - \rho g z \tag{9}$$

Os leitores atentos notarão que a Equação 9 representa uma simples **distribuição de pressão hidrostática** (pressão diminuindo linearmente enquanto z aumenta). Concluímos que, pelo menos para este problema, *a pressão hidrostática age de maneira independente do escoamento.* De forma mais generalizada, podemos fazer a seguinte afirmação (veja também a Figura 9–57):

Para campos de escoamento incompressíveis sem superfícies livres, a pressão hidrostática não contribui para a dinâmica do campo de escoamento.

De fato, no Capítulo 10 nós mostramos como a pressão hidrostática pode de fato ser *removida* das equações de movimento por meio do uso de uma pressão modificada.

Em seguida aplicamos condições de contorno (1) e (2) do passo 2 para obter as constantes C_1 e C_2.

Condição de contorno (1): $u = C_1 \times 0 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$

e

Condição de contorno (2): $u = C_1 \times h + 0 = V \quad \rightarrow \quad C_1 = V/h$

Finalmente, a Equação 7 torna-se:

Resultado final para o campo de velocidade: $$u = V\frac{y}{h} \tag{10}$$

O campo de velocidade revela um perfil simples de velocidade linear de $u = 0$ na placa inferior até $u = V$ na placa superior, conforme está representado na Figura 9–58.

Passo 6 *Verificar os resultados.* Usando as Equações 9 e 10, você pode verificar que todas as equações diferenciais e condições de contorno são satisfeitas.

Para calcularmos a força de cisalhamento por unidade de área agindo na placa inferior, consideramos um elemento retangular de fluido cuja face inferior está

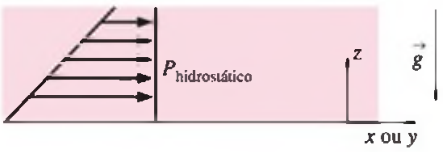


FIGURA 9–57
Para campos de escoamento incompressíveis *sem superfícies livres*, a pressão hidrostática não contribui para a dinâmica do campo de escoamento.

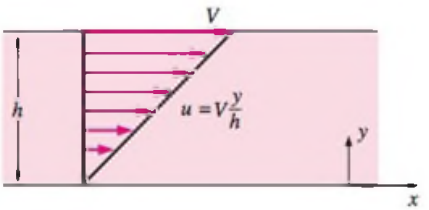


FIGURA 9–58
O perfil de velocidade linear do Exemplo 9–15: escoamento Couette entre placas paralelas.

em contato com a placa inferior (Figura 9–59). São mostradas tensões viscosas matematicamente positivas. Nesse caso, essas tensões estão na direção correta, pois o fluido acima do elemento diferencial puxa-o para a direita enquanto a parede abaixo do elemento puxa-o para a esquerda. Pela Equação 9–56, determinamos as componentes do tensor de tensão viscosa:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu\dfrac{V}{h} & 0 \\ \mu\dfrac{V}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Como a dimensão da tensão, por definição, é força por unidade de área, a força por unidade de área agindo na face inferior do elemento de fluido é igual a $\tau_{yx} = \mu V/h$ e ela age na direção negativa de x, conforme está representado. A força de cisalhamento por unidade de área na *parede* é igual e oposta a esta (Terceira Lei de Newton); daí:

Força de cisalhamento por unidade de área agindo na parede:

$$\frac{\vec{F}}{A} = \mu\frac{V}{h}\vec{i} \quad (12)$$

A direção dessa força está de acordo com nossa intuição, isto é, o fluido tenta puxar a parede inferior para a direita, devido aos efeitos viscosos (atrito).

Discussão A componente z da equação do momento linear está *desacoplada* das demais equações; isso explica por que obtemos uma distribuição de pressão hidrostática na direção z, apesar de o fluido não estar estático, mas movendo-se. A Equação 11 revela que o tensor de tensão viscosa é constante *em todos os pontos* no campo de escoamento, não apenas na parede inferior (note que nenhuma das componentes de τ_{ij} é uma função da posição).

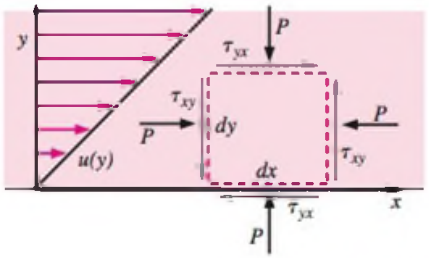


FIGURA 9–59
Tensões agindo sobre um elemento de fluido infinitesimal bidimensional retangular cuja face inferior está em contato com a placa inferior do Exemplo 9–15.

Você pode estar questionando a utilidade dos resultados finais do Exemplo 9–15. Afinal, quando vamos encontrar duas placas paralelas infinitas, uma das quais está se movendo? Na realidade *há* vários escoamentos práticos para os quais a solução do escoamento Couette é uma aproximação muito boa. Um escoamento desse tipo ocorre dentro de um **viscosímetro rotacional** (Figura 9–60), um instrumento usado para medir viscosidade. Ele consta de dois cilindros concêntricos de comprimento L — um cilindro interno sólido de raio R_i girando dentro de um cilindro externo oco e estacionário de raio R_o. (L está para dentro da página na Figura 9–60; o eixo z está para fora da página.) O espaço entre os dois cilindros é muito pequeno e contém o fluido cuja viscosidade se deseja medir. A região ampliada da Figura 9–60 é um arranjo aproximadamente idêntico ao da Figura 9–55, pois o espaço é pequeno, isto é $(R_o - R_i) << R_o$. Em uma medida de viscosidade, mede-se a velocidade angular do cilindro interno, w, e mede-se o torque aplicado, $T_{aplicado}$, necessário para girar o cilindro. Pelo Exemplo 9–15, sabemos que a tensão de cisalhamento viscoso agindo sobre um elemento de fluido adjacente ao cilindro interno é aproximadamente igual a:

$$\tau = \tau_{yx} \cong \mu\frac{V}{R_o - R_i} = \mu\frac{\omega R_i}{R_o - R_i} \quad (9\text{–}69)$$

onde a velocidade V da placa móvel superior na Figura 9–55 é substituída pela velocidade anti-horária ωR_i da parede rotativa do cilindro interno. Na região ampliada na parte inferior da Figura 9–60, τ age para a direita no elemento de fluido adjacente à parede do cilindro interno; daí, a força por unidade de área agindo no cilindro interno nesta posição age para a esquerda com intensidade dada pela Equação 9–69. O torque *horário* total agindo sobre a parede do cilindro interno devido à viscosidade do fluido é portanto igual a essa tensão de cisalhamento vezes a área da parede, vezes o braço de momento:

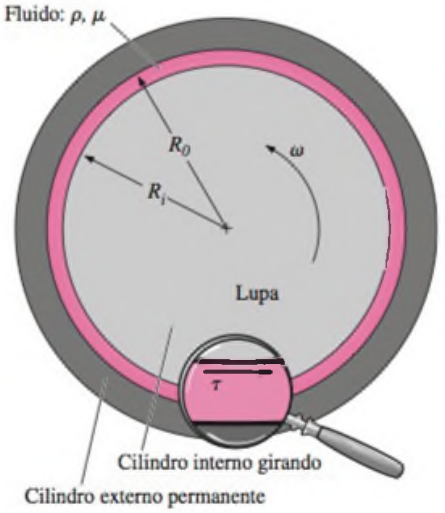


FIGURA 9–60
Um viscosímetro rotacional; o cilindro interno gira a uma velocidade angular ω, e é aplicado um torque $T_{aplicado}$, por meio do qual calcula-se a viscosidade do fluido.

$$T_{viscoso} = \tau A R_i \cong \mu \frac{\omega R_i}{R_o - R_i}\left(2\pi R_i L\right)R_i \qquad (9\text{–}70)$$

Sob condições permanentes, o torque horário $T_{viscoso}$ é equilibrado pelo torque anti-horário aplicado $T_{aplicado}$. Igualando esses dois torques e resolvendo a Equação 9–70 para a viscosidade do fluido, resulta:

Viscosidade do fluido:
$$\mu = T_{aplicado}\frac{(R_o - R_i)}{2\pi\omega R_i^3 L}$$

Pode ser feita uma análise similar em um mancal sem carga no qual flui um óleo viscoso no pequeno espaço entre a parte interna rotativa e a carcaça externa estacionária. (Quando o mancal está sob carga, os cilindros interno e externo não são mais concêntricos e neste caso é necessária uma análise mais complicada.)

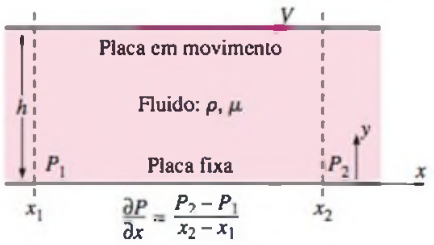


FIGURA 9–61
Geometria do Exemplo 9–16: escoamento viscoso entre duas placas infinitas com um gradiente constante de pressão aplicado $\partial P/\partial x$; a placa superior está se movendo e a placa inferior está estacionária.

EXEMPLO 9–16 Escoamento Couette com um Gradiente de Pressão Aplicado

Considere a mesma geometria do Exemplo 9–15, mas, em lugar de uma pressão constante com relação a x, é aplicado um gradiente de pressão na direção x (Figura 9–61). Especificamente, o gradiente de pressão na direção x, $\partial P/\partial x$, tem um valor constante dado por

Gradiente de pressão aplicado:
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = \text{constante} \qquad (1)$$

onde x_1 e x_2 são duas localizações arbitrárias ao longo do eixo x, e P_1 e P_2 são as pressões naquelas duas localizações. Tudo o mais é igual ao Exemplo 9–15. (*a*) Calcule o campo de velocidade e de pressão. (*b*) Desenhe um gráfico de uma família de perfis de velocidade na forma adimensional.

SOLUÇÃO Vamos calcular o campo de velocidade e de pressão para o escoamento representado na Figura 9–61 e desenhar uma família de perfis de velocidade na forma adimensional.

Hipóteses As hipóteses são idênticas àquelas do Exemplo 9–15, exceto que a hipótese 5 é substituída por **5**. É aplicado um gradiente de pressão constante na direção x de forma que a pressão muda linearmente com relação a x de acordo com a Equação 1.

Análise (*a*) Seguimos o mesmo procedimento do Exemplo 9–15. A maior parte das operações algébricas é idêntica, portanto para economizarmos espaço discutiremos apenas as diferenças.

Passo 1 Veja a Figura 9–61.

Passo 2 O mesmo que no Exemplo 9–15 exceto quanto à hipótese 5.

Passo 3 A equação da continuidade é simplificada da mesma maneira que no Exemplo 9–15:

Resultado da continuidade: $u = u(y)$ apenas (2)

A equação do momento na direção x é simplificada da mesma maneira que no Exemplo 9–15 exceto que permanece o termo do gradiente de pressão. O resultado é:

Resultado do momento na direção x:
$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (3)$$

Da mesma maneira, as equações do momento nas direções y e z são simplificadas resultando:

Resultado do momento na direção y:
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

e

Resultado do momento na direção z:
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \qquad (5)$$

Não podemos converter de uma derivada parcial para uma derivada total na Equação 5, porque P é uma função de x e z neste problema, diferentemente do Exemplo 9–15 onde P era uma função apenas de z.

Passo 4 Integramos a Equação 3 (momento na direção x) duas vezes, observando que $\partial P/\partial x$ é uma constante:

Integração do momento na direção x:
$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2 \qquad (6)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. A Equação 5 (momento na direção z) é integrada uma vez, resultando em:

Integração do momento na direção z:
$$P = -\rho g z + f(x) \qquad (7)$$

Note que, como P agora é uma função de x e z, acrescentamos uma função de x em lugar de uma constante de integração na Equação 7. Essa é uma integração *parcial* em relação a z, e precisamos ter cuidado ao executar integrações parciais (Figura 9–62).

Passo 5 Pela Equação 7, vemos que a pressão varia hidrostaticamente na direção z, e nós especificamos uma mudança linear na pressão na direção x. Portanto a função $f(x)$ deve ser igual a uma constante mais $\partial P/\partial x$ vezes x. Se fizermos $P = P_0$ ao longo da reta $x = 0$, $z = 0$ (o eixo y), a Equação 7 torna-se:

Resultado final para o campo de pressão:
$$\boldsymbol{P = P_0 + \frac{\partial P}{\partial x}x - \rho g z} \qquad (8)$$

Em seguida aplicamos as condições de contorno de velocidade (1) e (2) do passo 2 do Exemplo 9–15 para obtermos as constantes C_1 e C_2.

Condição de contorno (1):
$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \times 0 + C_1 \times 0 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

e

Condição de contorno (2):
$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2 + C_1 \times h + 0 = V \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{V}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h$$

Finalmente, a Equação 6 torna-se:
$$\boldsymbol{u = \frac{Vy}{h} + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 - hy)} \qquad (9)$$

A Equação 9 indica que o campo de velocidade consiste na superposição de duas partes: um perfil de velocidade linear de $u = 0$ na placa inferior até $u = V$ na placa superior, e uma distribuição parabólica que depende da intensidade do gradiente de pressão aplicado. Se o gradiente de pressão for zero, a parte parabólica da Equação 9 desaparece e o perfil é linear, exatamente como no Exemplo 9–15; isso está representado pela linha tracejada na Figura 9–63. Se o gradiente de pressão for negativo (pressão diminuindo na direção x, fazendo o escoamento ser empurrado da esquerda para a direita), $\partial P/\partial x < 0$ e o perfil de velocidade se parece com aquele desenhado na Figura 9–63. Um caso especial ocorre quando $V = 0$ (placa superior estacionária); a parte linear da Equação 9 desaparece, e o perfil de velocidade é parabólico e simétrico em relação ao centro do canal ($y = h/2$); isso está representado pela linha pontilhada na Figura 9–63.

Passo 6 Você pode usar as Equações 8 e 9 para verificar que todas as equações diferenciais e condições de contorno estão satisfeitas.

(*b*) Usamos a análise dimensional para gerar os grupos adimensionais (grupos Π). Descrevemos o problema em termos da componente de velocidade u como uma função de y, h, V, μ, e $\partial P/\partial x$. Há seis variáveis (incluindo a variável dependente u), e como há três dimensões primárias representadas no problema

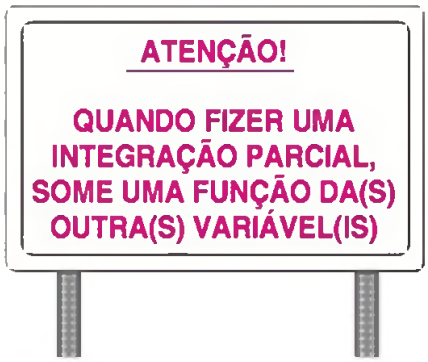


FIGURA 9–62
Um alerta sobre integração parcial.

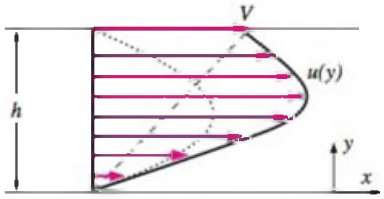


FIGURA 9–63
O perfil de velocidade do Exemplo 9–16: escoamento Couette entre placas paralelas com um gradiente negativo de pressão aplicado; a linha tracejada indica o perfil para um gradiente de pressão zero, e a linha pontilhada indica o perfil para um gradiente negativo de pressão com a placa superior permanente ($V = 0$).

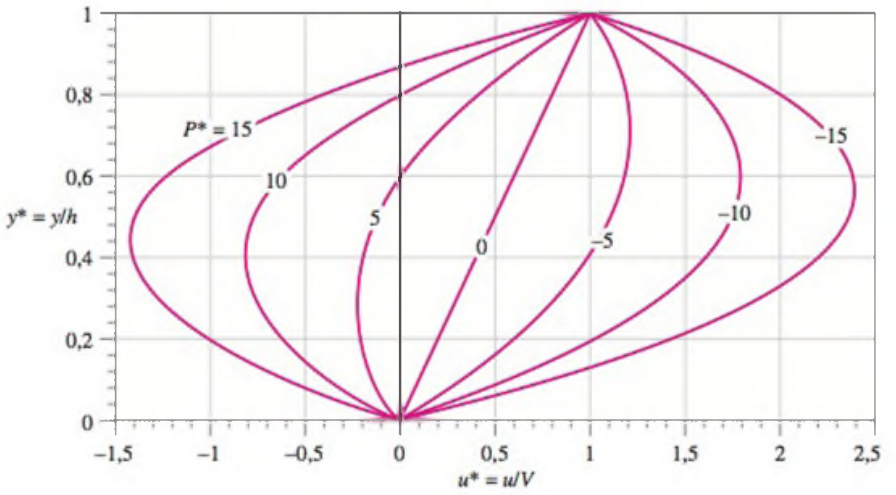


FIGURA 9–64
Perfis de velocidade não dimensionais para o escoamento Couette com um gradiente de pressão aplicado; são mostrados os perfis para vários valores de gradiente de pressão adimensional.

(massa, comprimento, e tempo), esperamos encontrar 6 − 3 = 3 grupos adimensionais. Quando escolhemos h, V, e μ como nossas variáveis repetidas, obtemos o seguinte resultado usando o método das variáveis repetidas (os detalhes ficam por conta do leitor — esta é uma boa revisão do assunto do Capítulo 7):

Resultado da análise dimensional:
$$\frac{u}{V} = f\left(\frac{y}{h}, \frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial P}{\partial x}\right) \qquad (10)$$

Usando esses três grupos adimensionais, reescrevemos a Equação 9 como:

Forma adimensional do campo velocidade:
$$u^* = y^* + \frac{1}{2}P^* y^*(y^* - 1) \qquad (11)$$

onde os parâmetros adimensionais são:

$$u^* = \frac{u}{V} \qquad y^* = \frac{y}{h} \qquad P^* = \frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Na Figura 9–64, u^* é colocada no gráfico como uma função de y^* para vários valores de P^*, usando a Equação 11.

Discussão Quando o resultado é colocado na forma adimensional, vemos que a Equação 11 representa uma *família* de perfis de velocidade. Vemos também que quando o gradiente de pressão é *positivo* (escoamento empurrado da direita para a esquerda) e de intensidade suficiente, podemos ter um *escoamento reverso* na parte inferior do canal. Para todos os casos, as condições de contorno se reduzem a $u^* = 0$ em $y^* = 0$ e $u^* = 1$ em $y^* = 1$. Se há um gradiente de pressão, mas ambas as paredes são permanentes, o escoamento é chamado de escoamento de canal bidimensional, ou **escoamento planar de Poiseuille** (Figura 9–65). Notamos, no entanto, que muitos autores reservam o nome *escoamento Poiseuille* para o escoamento completamente desenvolvido em *tubo* — o análogo axissimétrico do escoamento em canal bidimensional (veja o Exemplo 9–18).

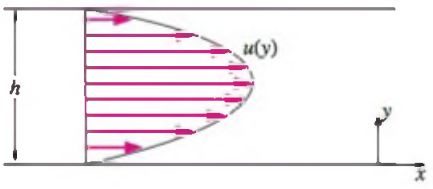


FIGURA 9–65
O perfil de velocidade para canal de escoamento bidimensional completamente desenvolvido (escoamento planar de Poiseuille).

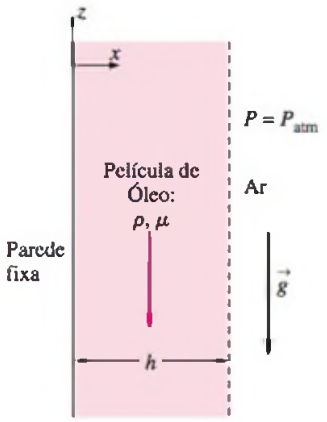


FIGURA 9–66
Geometria do Exemplo 9–17: um filme viscoso de óleo caindo por gravidade ao longo de uma parede vertical.

EXEMPLO 9–17 Película de Óleo Fluindo para Baixo em uma Parede Vertical por Gravidade

Considere um escoamento em regime permanente, incompressível, paralelo e laminar, de uma película de óleo escoando lentamente para baixo em uma parede vertical infinita (Figura 9–66). A espessura da película de óleo é h, e a gravidade age na direção negativa de z (para baixo na Figura 9–66). Não há pressão aplicada (forçada) impulsionando o escoamento — o óleo cai apenas por gravidade. Calcule os campos de velocidades de pressão na película de óleo e desenhe o perfil de velocidade normalizado. Você pode desprezar as variações na pressão hidrostática do ar ao redor.

SOLUÇÃO Para uma dada geometria e um dado conjunto de condições de contorno, vamos calcular os campos velocidade e pressão e desenhar o gráfico do perfil de velocidade.

Hipóteses **1** A parede é infinita no plano *yz* (*y* está contido no plano da página, para um sistema de coordenadas orientado à direita). **2** O escoamento é em regime permanente (todas as derivadas parciais com relação ao tempo são nulas). **3** O escoamento é paralelo (a componente *x* da velocidade, *u*, é zero em qualquer ponto). **4** O fluido é incompressível e newtoniano com propriedades constantes, e o escoamento é laminar. **5** A pressão $P = P_{atm}$ = constante na superfície livre. Em outras palavras, não há gradiente de pressão aplicado empurrando o escoamento; o escoamento se estabelece por si mesmo devido a um equilíbrio entre as forças gravitacionais e as forças viscosas. Além disso, como não há força de gravidade na direção horizontal, $P = P_{atm}$ *em qualquer ponto*. **6** O campo de velocidade é puramente bidimensional, o que implica que a componente de velocidade $v = 0$ e todas as derivadas parciais com relação a *y* são zero. **7** A gravidade age na direção negativa de *z*. Expressamos isso matematicamente como $\vec{g} = -g\vec{k}$, ou $g_x = g_y = 0$ e $g_z = -g$.

Análise Obtemos os campos velocidade e pressão seguindo o procedimento passo a passo para as soluções diferenciais de escoamento de fluido. (Figura 9–50).

Passo 1 *Identificar o problema e a geometria.* Veja a Figura 9–66.

Passo 2 *Listar hipóteses e condições de contorno.* Listamos sete hipóteses. As condições de contorno são: (1) Não há escorregamento na parede; em $x = 0$, $u = v = w = 0$. (2) Na superfície livre ($x = h$), há cisalhamento desprezível (Equação 9–68), que para uma superfície livre vertical nesse sistema de coordenadas significa $\partial w/\partial x = 0$ em $x = h$.

Passo 3 *Escrever e simplificar as equações diferenciais.* Começamos com a equação da continuidade incompressível em coordenadas cartesianas:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{hipótese 6}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

A Equação 1 nos diz que *w* não é uma função de *z*; isto é, não importa onde colocamos nossa origem — o escoamento é o mesmo em *qualquer* posição *z*. Em outras palavras, o escoamento é *completamente desenvolvido*. Como *w* não é uma função do tempo (hipótese 2), *z* (Equação 1) ou *y* (hipótese 6), concluímos que *w* é no máximo uma função de *x*:

Resultado da continuidade: $w = w(x)$ apenas **(2)**

Agora simplificamos cada componente da equação de Navier-Stokes tanto quanto possível. Como $u = v = 0$ em qualquer ponto, e a gravidade não age nas direções *x* ou *y*, as equações do momento nas direções *x* e *y* são satisfeitas exatamente (na verdade, todos os termos são zero em ambas as equações). A equação do momento na direção *z* se reduz a:

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{\text{hipótese 2}} + \underbrace{u\frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{v\frac{\partial w}{\partial y}}_{\text{hipótese 6}} + \underbrace{w\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{continuidade}}\right) = \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial z}}_{\text{hipótese 5}} + \underbrace{\rho g_z}_{-\rho g}$$

$$+ \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{\text{hipótese 6}} + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}_{\text{continuidade}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu} \qquad \textbf{(3)}$$

A aceleração material (lado esquerdo da Equação 3) é zero, o que implica que as partículas de fluido não estão acelerando neste campo de escoamento, nem por aceleração local, nem por aceleração advectiva. Como os termos da aceleração advectiva tornam a equação de Navier-Stokes não-linear, isso simplifica muito o problema. Mudamos de uma derivada parcial ($\partial/\partial x$) para uma derivada total (d/dx) na Equação 3 como resultado direto da Equação 2,

FIGURA 9–67
Nos Exemplos 9–15 até 9–18, as equações de movimento são reduzidas de *equações diferenciais parciais* para *equações diferenciais ordinárias*, tornando-as muito mais fáceis de resolver.

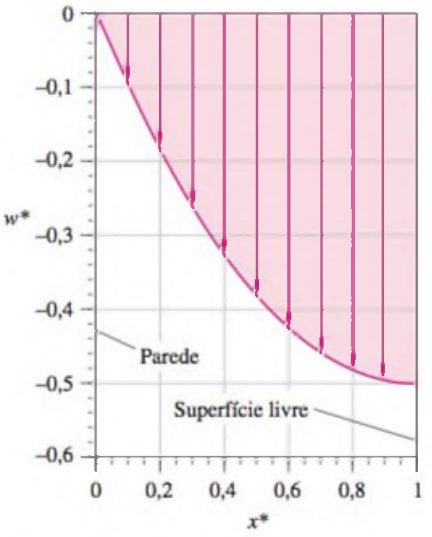


FIGURA 9–68
O perfil de velocidade normalizado do Exemplo 9–17: uma película de óleo descendo por uma parede vertical.

reduzindo a equação diferencial parcial (EDP) a uma equação diferencial ordinária (EDO). As EDOs (equações diferenciais ordinárias) são naturalmente muito mais fáceis de resolver do que as EDPs (equações diferenciais parciais) (Figura 9–67).

Passo 4 *Resolver as equações diferenciais.* As equações da continuidade e do momento nas direções x e y já foram "resolvidas". A Equação 3 (do momento na direção z) é integrada duas vezes para obter:

$$w = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (4)$$

Passo 5 *Aplicar condições de contorno.* Aplicamos condições de contorno (1) e (2) do passo 2 para obter as constantes C_1 e C_2:

Condição de contorno (1): $w = 0 + 0 + C_2 = 0 \qquad C_2 = 0$

e

Condição de contorno (2): $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=h} = \frac{\rho g}{\mu} h + C_1 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{\rho g h}{\mu}$

Finalmente, a Equação 4 torna-se:

Campo de velocidade: $$w = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g}{\mu} hx = \frac{\rho g x}{2\mu}(x - 2h) \qquad (5)$$

Como $x < h$ na película, w é negativo em qualquer ponto, como era esperado (o escoamento é para baixo). O campo de pressão é trivial, ou seja, **$P = P_{atm}$ em qualquer ponto.**

Passo 6 *Verificar os resultados.* Você pode verificar que todas as equações diferenciais e condições de contorno estão satisfeitas.

Normalizamos a Equação 5 por inspeção: fazemos $x^* = x/h$ e $w^* = w\mu/(\rho g h^2)$. A Equação 5 torna-se

Perfil de velocidade normalizado: $$w^* = \frac{x^*}{2}(x^* - 2) \qquad (6)$$

Desenhamos o gráfico do campo de velocidade normalizado na Figura 9–68.

Discussão O perfil de velocidade tem uma grande taxa de variação junto da parede devido à condição de não-escorregamento ali ($w = 0$ em $x = 0$), mas tem taxa de variação zero na superfície livre, onde a condição de contorno é tensão de cisalhamento zero ($\partial w/\partial x = 0$ em $x = h$). Poderíamos ter introduzido um fator de -2 na definição de w^* de modo que w^* seria igual a 1 em vez de $-\frac{1}{2}$ na superfície livre.

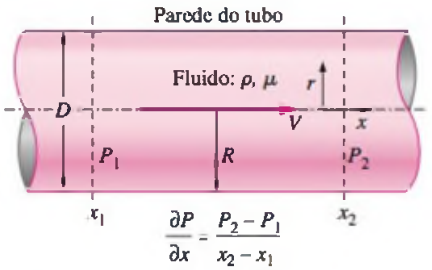


FIGURA 9–69
Geometria do Exemplo 9–18: escoamento permanente laminar em um tubo redondo longo com um gradiente de pressão $\partial P/\partial x$ aplicado empurrando o fluido através do tubo. O gradiente de pressão é usualmente causado por uma bomba e/ou gravidade.

O procedimento de solução usado nos Exemplos 9–15 até 9–17 em coordenadas cartesianas pode também ser usado em qualquer outro sistema de coordenadas. No Exemplo 9–18 apresentamos o problema clássico do escoamento completamente desenvolvido em um tubo redondo, para o qual usamos coordenadas cilíndricas.

EXEMPLO 9–18 **Escoamento Completamente Desenvolvido em um Tubo Redondo — Escoamento Poiseuille**

Considere o escoamento laminar, em regime permanente, incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo infinitamente longo de diâmetro D ou raio $R = D/2$ (Figura 9–69). Ignoramos os efeitos da gravidade. É aplicado um gradiente constante de pressão $\partial P/\partial x$ na direção x,

Gradiente de pressão aplicado: $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = \text{constante} \qquad (1)$$

onde x_1 e x_2 são duas localizações arbitrárias ao longo do eixo x, e P_1 e P_2 são as pressões naquelas duas localizações. Note que adotamos um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x em lugar de z como componente axial, ou seja, (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u). Deduza uma expressão para o campo de velocidade dentro do tubo e estime a força de cisalhamento viscoso por unidade de área de superfície agindo na parede do tubo.

SOLUÇÃO Para o escoamento dentro de um tubo redondo vamos calcular o campo de velocidade, e então estimar a tensão de cisalhamento viscoso agindo na parede do tubo.

Hipóteses **1** O tubo é infinitamente longo na direção x. **2** O escoamento é permanente (todas as derivadas parciais em relação ao tempo são zero). **3** Este é um escoamento paralelo (a componente r da velocidade, u_r, é zero). **4** O fluido é incompressível e newtoniano com propriedades constantes, e o escoamento é laminar. **5** Um gradiente constante de pressão é aplicado na direção x de modo que a pressão muda linearmente com relação a x de acordo com a Equação 1. **6** O campo de velocidade é axissimétrico sem turbilhão, implicando que $u_\theta = 0$ e todas as derivadas parciais com relação a θ são zero. **7** Ignoramos os efeitos da gravidade.

Análise Para obtermos o campo de velocidade, seguimos o procedimento passo a passo mostrado na Figura 9–50.

Passo 1 *Identificar o problema e a geometria.* Veja Figura 9–69.

Passo 2 *Listar hipóteses e condições de contorno.* Listamos sete hipóteses. A primeira condição de contorno vem da imposição da condição de não-escorregamento na parede do tubo: (1) em $r = R$, $\vec{V} = 0$. A segunda condição de contorno vem do fato de que o eixo central do tubo é um eixo de simetria: (2) em $r = 0$, $du/dr = 0$.

Passo 3 *Escrever e simplificar as equações diferenciais.* Começamos com a equação da continuidade incompressível em coordenadas cilíndricas, uma versão modificada da Equação 9–62a:

$$\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta}}_{\text{hipótese 6}} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

A Equação 2 nos diz que u não é uma função de x. Em outras palavras, não importa onde colocamos nossa origem — o escoamento é o mesmo em qualquer posição x. Isso também pode ser inferido diretamente da hipótese 1, que nos diz que não há nada especial sobre qualquer posição x já que o tubo é infinitamente longo — o escoamento é completamente desenvolvido. Além disso, como u não é uma função do tempo (hipótese 2) ou θ (hipótese 6), concluímos que u é no máximo uma função de r,

Resultado da continuidade: $$u = u(r) \text{ apenas} \qquad (3)$$

Agora simplificamos a equação do momento axial (uma versão modificada da Equação 9–62d) tanto quanto possível:

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{hipótese 2}} + \underbrace{u_r\frac{\partial u}{\partial r}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}}_{\text{hipótese 6}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{continuidade}}\right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{hipótese 7}} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_{\text{hipótese 6}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{continuidade}}\right)$$

Equação de Navier–Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\boxed{(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}}\right)=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}$$

Termo não-linear

FIGURA 9–70
Para soluções de escoamento incompressível nas quais os termos advectivos na equação de Navier-Stokes são iguais a zero, a equação torna-se *linear*, já que o termo advectivo é o único termo não-linear na equação.

ou

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{4}$$

Assim como nos Exemplos 9–15 até 9–17, a aceleração material (todo o lado esquerdo da equação do momento na direção x) é zero, implicando que as partículas de fluido não estão acelerando de forma nenhuma nesse campo de escoamento, e linearizando a equação de Navier-Stokes (Figura 9–70). Substituímos os operadores de derivada parcial das derivadas de u pelos operadores de derivada total devido à Equação 3.

De uma forma similar, cada termo na componente r da equação do momento (Equação 9–62b), exceto o termo do gradiente de pressão, é zero, forçando aquele único termo a ser também zero:

Componente r do momento: $$\frac{\partial P}{\partial r}=0 \tag{5}$$

Em outras palavras, P não é uma função de r. Como P não é uma função do tempo (hipótese 2) ou θ (hipótese 6), P pode ser no máximo uma função de x:

Resultado do momento radial: $P = P(x)$ apenas (6)

Portanto, podemos substituir o operador da derivada parcial para o gradiente de pressão na Equação 4 pelo operador da derivada total, já que P varia somente com x. Finalmente, todos os termos da componente θ da equação de Navier-Stokes (Equação 9–62c) se tornam zero.

Passo 4 *Resolver as equações diferenciais.* As equações da continuidade e do movimento radial já foram "resolvidas", resultando nas Equações 3 e 6, respectivamente. A componente θ da equação do momento desapareceu, e assim nos resta a Equação 4 (momento na direção x). Após multiplicar ambos os lados por r, integramos uma vez para obter:

$$r\frac{du}{dr}=\frac{r^2}{2\mu}\frac{dP}{dx}+C_1 \tag{7}$$

onde C_1 é uma constante de integração. Note que o gradiente de pressão dP/dx é uma constante aqui. Dividindo ambos os lados da Equação 7 por r, integramos uma segunda vez para obter:

$$u=\frac{r^2}{4\mu}\frac{dP}{dx}+C_1\ln r+C_2 \tag{8}$$

onde C_2 é uma segunda constante de integração.

Passo 5 *Aplicar condições de contorno.* Primeiro, aplicamos a condição de contorno (2) à Equação 7:

Condição de contorno (2): $0 = 0 + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$

Uma maneira alternativa para interpretar essa condição de contorno é que u deve permanecer finita no eixo central do tubo. Isso é possível somente se a constante C_1 for igual a 0, pois ln(0) não é definido na Equação 8. Agora aplicamos a condição de contorno (1):

Condição de contorno (1): $$u=\frac{R^2}{4\mu}\frac{dP}{dx}+0+C_2=0 \quad \rightarrow \quad C_2=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{dP}{dx}$$

Finalmente, a Equação 7 torna-se:

Velocidade axial máxima: $$u=\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(r^2-R^2) \tag{9}$$

O perfil de velocidade axial tem portanto a forma de um paraboloide, como está representado na Figura 9–71.

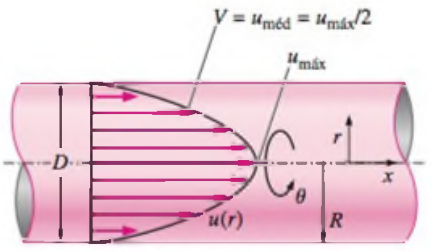


FIGURA 9–71
Perfil de velocidade axial do Exemplo 9–18: escoamento permanente laminar em um tubo longo redondo com um gradiente constante de pressão dP/dx aplicado, empurrando o fluido através do tubo.

Passo 6 *Verificar os resultados.* Você pode verificar que todas as equações diferenciais e condições de contorno são satisfeitas.

Calculamos também algumas outras propriedades do escoamento laminar completamente desenvolvido em tubo. Por exemplo, a velocidade axial máxima obviamente ocorre no centro do tubo (Figura 9–71). Fazendo $r = 0$ na Equação 9 resulta:

Velocidade axial máxima:
$$u_{máx} = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dP}{dx} \tag{10}$$

A vazão em volume através do tubo é encontrada integrando-se a Equação 9 através de toda a área da seção transversal do tubo:

$$\dot{V} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} ur\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{4\mu}\frac{dP}{dx}\int_{r=0}^{R}(r^2 - R^2)r\,dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{dP}{dx} \tag{11}$$

Como a vazão em volume é também igual à velocidade axial média vezes a área da seção transversal, podemos facilmente determinar a velocidade axial média V:

Velocidade axial média:
$$V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{(-\pi R^4/8\mu)\,(dP/dx)}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dP}{dx} \tag{12}$$

Comparando as Equações 10 e 12 vemos que para escoamento laminar completamente desenvolvido em tubo, a velocidade axial média é igual exatamente à metade da velocidade axial máxima.

Para calcularmos a força de cisalhamento viscoso por unidade de área agindo na parede do tubo, consideramos um elemento infinitesimal de fluido adjacente à parte inferior da parede do tubo (Figura 9–72). São mostradas tensões de pressão e tensões viscosas matematicamente positivas. Da Equação 9–63 (modificada para nosso sistema de coordenadas), escrevemos o tensor de tensão viscosa como:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rx} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta x} \\ \tau_{xr} & \tau_{x\theta} & \tau_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu\dfrac{\partial u}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Usamos a Equação 9 para u, e fazemos $r = R$ na parede do tubo; a componente τ_{rx} da Equação 13 se reduz a:

Tensão de cisalhamento viscoso na parede do tubo:
$$\tau_{rx} = \mu\frac{du}{dr} = \frac{R}{2}\frac{dP}{dx} \tag{14}$$

Para escoamento da esquerda para a direita, dP/dx é negativo, assim a tensão de cisalhamento viscoso na parte inferior do elemento de fluido na parede está na direção oposta àquela indicada na Figura 9–72. (Isso concorda com nossa intuição, já que a parede do tubo exerce uma força de retardamento no fluido.) A força de cisalhamento por unidade de área na *parede* é igual e oposta a esta, portanto:

Força de cisalhamento viscoso por unidade de área agindo na parede:
$$\frac{\vec{F}}{A} = -\frac{R}{2}\frac{dP}{dx}\vec{i} \tag{15}$$

A direção dessa força também concorda com nossa intuição, ou seja, o fluido tenta puxar a parede inferior para a direita, devido ao atrito, quando dP/dx é negativa.

Discussão Como $du/dr = 0$ no eixo central do tubo, $\tau_{rx} = 0$ ali. Sugerimos que você tente obter a Equação 15 usando uma abordagem de volume de controle,

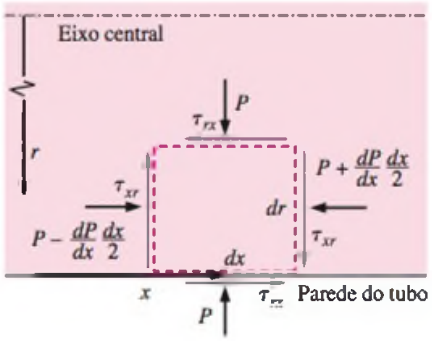


FIGURA 9–72
Tensões de pressão e de cisalhamento viscoso agindo em um elemento infinitesimal de fluido cuja face inferior está em contato com a parede do tubo.

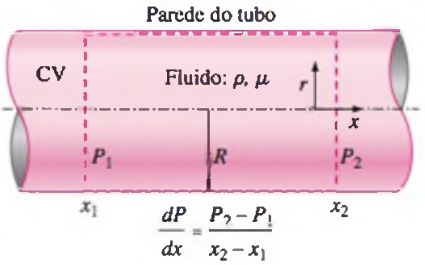


FIGURA 9–73
Volume de controle usado para obter a Equação 15 do Exemplo 9–18 por um método alternativo.

considerando o seu volume de controle como o fluido no tubo entre duas localizações x quaisquer, x_1 e x_2 (Figura 9–73). Você deveria obter a mesma resposta. (Sugestão: como o escoamento é completamente desenvolvido, o perfil de velocidade axial na posição 1 é idêntico àquele na posição 2.) Note que quando a vazão em volume através do tubo excede um valor crítico, ocorrem instabilidades no escoamento, e a solução apresentada aqui não é mais válida. Especificamente, o escoamento no tubo torna-se *turbulento* em vez de laminar; o escoamento turbulento em um tubo é discutido com mais detalhes no Capítulo 8. Esse problema também é resolvido no Capítulo 8 usando uma abordagem alternativa.

Até aqui, todas as nossas soluções Navier-Stokes foram para escoamento em regime permanente. Você pode imaginar como as soluções devem ser mais complicadas se permitirmos que o escoamento seja em regime não permanente, e o termo da derivada em relação ao tempo na equação de Navier-Stokes não desaparecer. No entanto, há alguns problemas de escoamento em regime não permanente que podem ser resolvidos analiticamente. Apresentamos um desses problemas no Exemplo 9–19.

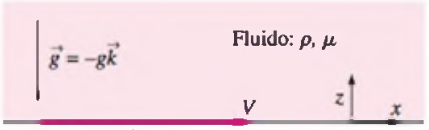


FIGURA 9–74
Geometria e estrutura do Exemplo 9–19; a coordenada y está para dentro da página.

EXEMPLO 9–19 Movimento Súbito de uma Placa Plana Infinita

Considere um fluido viscoso newtoniano sobre uma placa plana infinita no plano xy em $z = 0$ (Figura 9–74). O fluido está em repouso até o instante $t = 0$, quando a placa subitamente começa a se mover com a velocidade V na direção x. A gravidade age na direção $-z$. Determine os campos de pressão e velocidade.

SOLUÇÃO Os campos de velocidade e pressão devem ser calculados para o caso do fluido sobre uma placa plana infinita que subitamente começa a se mover.

Hipóteses **1** A placa é infinita nas direções x e y; portanto não há nada especial sobre qualquer posição x ou y em particular. **2** O escoamento é *paralelo* em qualquer ponto ($w = 0$). **3** A pressão P = constante com relação a x. Em outras palavras, não há nenhum gradiente de pressão aplicado empurrando o escoamento na direção x; o escoamento ocorre devido a tensões viscosas causadas pela placa em movimento. **4** O fluido é incompressível e newtoniano com propriedades constantes, e o escoamento é laminar. **5** O campo de velocidade é bidimensional no plano xz; portanto, $v = 0$, e todas as derivadas parciais com relação a y são iguais a zero. **6** A gravidade age na direção $-z$.

Análise Para obtermos os campos de velocidade e pressão, seguimos o procedimento passo a passo apresentado na Figura 9–50.

Passo 1 *Identificar o problema e a geometria.* (Veja a Figura 9–74.)

Passo 2 *Listar hipóteses e condições de contorno.* Listamos seis hipóteses. As condições de contorno são: (1) em $t = 0$, $u = 0$ em qualquer ponto (não há escoamento até que a placa comece a se mover); (2) em $z = 0$, $u = V$ para todos os valores de x e y (condição de não-escorregamento na placa); (3) quando $z \to \infty$, $u = 0$ (distante da placa, o efeito do movimento da placa não é sentido); e (4) em $z = 0$, $P = P_{placa}$ (a pressão na placa é constante em qualquer posição x ou y ao longo da placa).

Passo 3 *Escrever e simplificar as equações diferenciais.* Começamos com a equação da continuidade incompressível em coordenadas cartesianas (Equação 9–61a):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{hipótese 5}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{hipótese 2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

A Equação 1 nos diz que u não é uma função de x. Além disso, como u não é uma função de y (hipótese 5), concluímos que u é no máximo uma função de z e t:

Resultado da continuidade: $u = u(z, t)$ apenas **(2)**

A equação do momento na direção y se reduz a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

pelas hipóteses 5 e 6 (todos os termos com v, a componente y da velocidade, desaparecem, e a gravidade não age na direção y). A Equação 3 simplesmente nos diz que a pressão não é uma função de y; daí:

Resultado do momento na direção y: $P = P(z, t)$ apenas (4)

De forma similar, a equação do momento na direção z se reduz a

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \qquad (5)$$

Simplificamos agora a equação do momento na direção x (Equação 9–61b) tanto quanto possível.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{continuidade}} + v\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{hipótese 5}} + w\underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{hipótese 2}}\right) = \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{hipótese 3}} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{hipótese 6}}$$

$$+ \mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{continuidade}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{hipótese 5}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \rightarrow \quad \rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (6)$$

É conveniente combinar a viscosidade e a densidade na viscosidade cinemática, definida como $v = \mu/\rho$. A Equação 6 se reduz à bem conhecida **equação da difusão unidimensional** (Figura 9–75)

Resultado do momento na direção x: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = v\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (7)

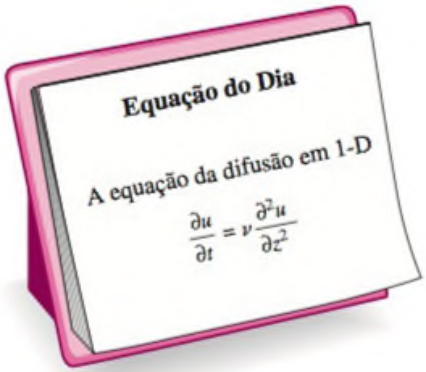


FIGURA 9–75
A equação da difusão unidimensional é *linear*, mas ela é uma *equação diferencial parcial* (EDP). É encontrada em muitos campos da ciência e engenharia.

Passo 4 *Resolver as equações diferenciais.* As equações da continuidade e do momento na direção y já foram "resolvidas", resultando nas Equações 2 e 4, respectivamente. A Equação 5 (momento na direção z) é integrada uma vez, resultando em

$$P = -\rho g z + f(t) \qquad (8)$$

onde acrescentamos uma função do tempo em lugar de uma constante de integração pois P é uma função de duas variáveis, z e t (veja a Equação 4). A Equação 7 (momento na direção x) é uma equação diferencial parcial linear cuja solução é obtida combinando-se as duas variáveis independentes z e t em uma variável independente. O resultado é chamado de **solução de similaridade**, cujos detalhes estão além do escopo deste livro. Note que a equação da difusão unidimensional ocorre em muitos outros campos da engenharia, como a difusão de espécies (difusão de massa) e difusão de calor (condução); os detalhes sobre a solução podem ser encontrados em livros sobre esses assuntos. A solução da Equação 7 está intimamente ligada à condição de contorno de que a placa é movimentada impulsivamente, e o resultado é:

Integração do momento na direção x: $u = C_1\left[1 - \text{ferr}\left(\dfrac{z}{2\sqrt{vt}}\right)\right]$ (9)

onde **ferr** na Equação 9 é a **função erro** (Çengel, 2003), definida por

Função erro: $\text{ferr}(\xi) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta$ (10)

A função erro é usada comumente em teoria de probabilidades e está colocada em gráfico na Figura 9–76. As tabelas da função erro podem ser encontradas em muitos livros-texto, e algumas calculadoras e planilhas podem calcular a função erro diretamente. Ela é fornecida também como uma função no aplicativo EES.

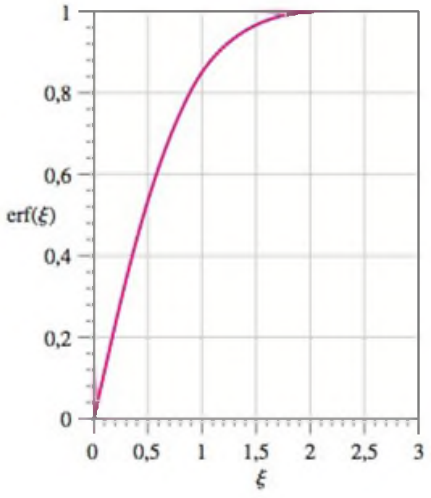


FIGURA 9–76
A função erro varia de 0 em $\xi = 0$ até 1 quando $\xi \rightarrow \infty$.

Passo 5 *Aplicar condições de contorno.* Começamos com a Equação 8 para a pressão. A condição de contorno (4) requer que $P = P_{\text{placa}}$ em $z = 0$ sempre, e a Equação 8 torna-se:

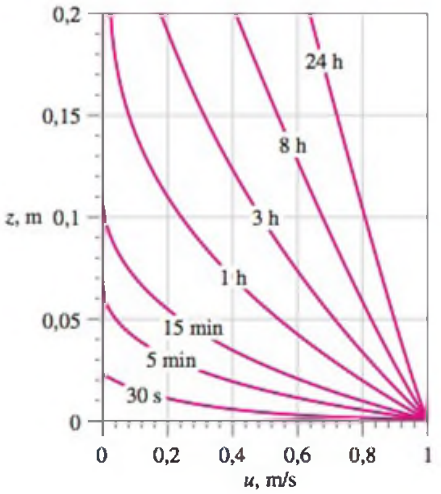


FIGURA 9–77
Perfis de velocidade do Exemplo 9–19: escoamento da água sobre uma placa infinita movida impulsivamente; $\nu = 1{,}004 \times 10^{-6}$ m²/s e $V = 1{,}0$ m/s.

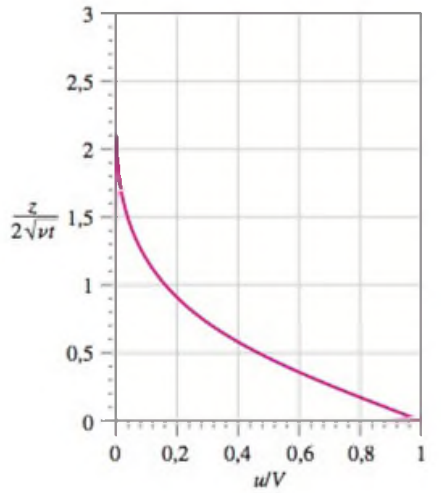


FIGURA 9–78
Perfil de velocidade normalizado do Exemplo 9–19: escoamento laminar de um fluido viscoso acima de uma placa infinita movida impulsivamente.

Condição de contorno (4): $P = 0 + f(t) = P_{\text{parede}} \quad \rightarrow \quad f(t) = P_{\text{parede}}$

Em outras palavras, a função arbitrária do tempo, $f(t)$, acaba não sendo uma função de forma alguma, sendo meramente uma constante. Assim:

Resultado final para o campo de pressão: $$P = P_{\text{parede}} - \rho g z \qquad (11)$$

que é simplesmente a pressão hidrostática. Concluímos que a *pressão hidrostática age independentemente do escoamento.* As condições de contorno (1) e (3) do passo 2 já foram aplicadas para obter a solução da equação do momento na direção x no passo 4. Como erf(0) = 0, a segunda condição de contorno resulta em:

Condição de contorno (2): $u = C_1(1 - 0) = V \quad \rightarrow \quad C_1 = V$

e a Equação 9 torna-se:

Resultado final para o campo de velocidade: $$u = V\left[1 - \text{ferr}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right] \qquad (12)$$

Vários perfis de velocidade estão desenhados na Figura 9–77 para o caso específico da água à temperatura ambiente ($\nu = 1{,}004 \times 10^{-6}$ m²/s) com $V = 1{,}0$ m/s. Em $t = 0$, não há escoamento. Com o tempo, o movimento da placa é sentido cada vez mais longe no fluido, conforme esperávamos. Observe quanto tempo leva para que a difusão viscosa penetre no fluido — após 15 minutos de escoamento, o efeito da placa se movendo não é detectado além de aproximadamente 10 cm acima da parede!

Definimos as variáveis normalizadas u^* e z^* como:

Variáveis normalizadas: $$u^* = \frac{u}{V} \quad \text{e} \quad z^* = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}$$

Depois reescrevemos a Equação 12 em termos de parâmetros adimensionais:

Campo de velocidade normalizado: $$u^* = 1 - \text{erf}(z^*) \qquad (13)$$

A combinação da unidade menos a função erro ocorre freqüentemente em engenharia e ela recebe o nome especial de **função erro complementar** e seu símbolo é **ferrc**. Portanto a Equação 13 também pode ser escrita como:

Forma alternativa do campo de velocidade: $$u^* = \text{erfc}(z^*) \qquad (14)$$

A beleza da normalização é que *esta equação* para u^* como uma função de z^* é válida para *qualquer* fluido (com viscosidade cinemática ν) acima de uma placa que se move com uma velocidade V *qualquer* e em *qualquer* posição z no fluido em *qualquer* instante t! O perfil de velocidade normalizado da Equação 13 está representado na Figura 9–78. Todos os perfis da Figura 9–77 se reduzem ao único perfil da Figura 9–78; um perfil desses é chamado de **perfil de similaridade.**

Passo 6 *Verificar os resultados.* Você pode verificar se todas as equações diferenciais e condições de contorno são satisfeitas.

Discussão O tempo necessário para que o momento se difunda no fluido parece muito maior do que poderíamos esperar baseados na nossa intuição. Isso é porque a solução apresentada aqui é válida somente para escoamento laminar. Ocorre que se a velocidade da placa for grande o suficiente, ou se houver vibrações significativas na placa ou distúrbios no fluido, o escoamento se tornará turbulento. Em um escoamento turbulento, grandes turbilhões misturam fluido que se move rapidamente próximo da parede, com fluido que se move lentamente, longe da parede. Esse processo de mistura ocorre mais rapidamente, de maneira que a difusão turbulenta é usualmente ordens de grandeza mais rápida do que a difusão laminar.

Os Exemplos 9–15 até 9–19 são para escoamento laminar incompressível. O mesmo conjunto de equações diferenciais (equação da continuidade incompressível e Navier-Stokes) é válido para escoamento incompressível *turbulento*. No entanto, as

soluções de escoamento turbulento são muito mais complicadas porque o escoamento contém turbilhões tridimensionais aleatórios, em regime não permanente, que misturam o fluido. Além disso, esses turbilhões podem variar em tamanho por várias ordens de grandeza. Em um campo de escoamento turbulento, nenhum dos termos das equações pode ser ignorado (com exceção do termo da gravidade em alguns casos), e portanto nossa única esperança de obter uma solução é através dos cálculos numéricos em um computador. A Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD) é discutida no Capítulo 15.

RESUMO

Neste capítulo deduzimos as formas diferenciais da conservação da massa (a *equação da continuidade*) e da conservação do momento (a equação de Na*vier-Stokes*). Para escoamento incompressível de um fluido newtoniano com propriedades constantes, a equação da continuidade é:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

e a equação de Navier-Stokes é:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V}$$

Para escoamento incompressível bidimensional, definimos também uma função corrente ψ. Em coordenadas cartesianas:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Mostramos que a diferença no valor de ψ de uma linha de corrente para outra é igual à vazão em volume por unidade de largura entre as duas linhas de corrente e que as curvas com ψ constante são linhas de corrente do escoamento.

Fornecemos vários exemplos mostrando como as equações diferenciais de movimento de fluido são usadas para gerar uma expressão para o campo de pressão para um dado campo de velocidade e para gerar expressões para campos de velocidade e pressão para um escoamento com geometria e condições de contorno especificadas. O procedimento de solução aprendido aqui pode ser estendido para escoamentos muito mais complicados cujas soluções requerem o uso de um computador.

A equação de Navier-Stokes é a pedra fundamental da mecânica dos fluidos. Embora tenhamos as equações diferenciais necessárias que descrevem o escoamento dos fluidos (equação da continuidade e equação de Navier-Stokes), *resolvê-las* é outra história. Para algumas geometrias simples (usualmente infinitas), as equações se reduzem a equações que podemos resolver analiticamente. Para geometrias mais complicadas, as equações são equações diferenciais parciais não-lineares, acopladas, de segunda ordem, que não podem ser resolvidas com lápis e papel. Temos então de recorrer a soluções *aproximadas* (Capítulo 10) ou soluções *numéricas* (Capítulo 15).

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. R. W. Fox e A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: Wiley, 1998.
2. P. M. Gerhart, R. J. Gross, e J. I. Hochstein. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1992.
3. R. J. Heinsohn e J. M. Cimbala. *Indoor Air Quality Engineering*. Nova Iorque: Marcel-Dekker, 2003.
4. Y. A. Cengel. *Heat Transfer: A Practical Approach*, 2. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2003.
5. P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. San Diego, CA: Academic Press, 1990.
6. R. L. Panton. *Incompressible Flow*, 2. ed. Nova Iorque: Wiley, 1996.
7. M. R. Spiegel. *Vector Analysis, Schaum's Outline Series, Theory and Problems*. Nova Iorque: McGraw-Hill Trade, 1968.
8. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.

PROBLEMAS*

Problemas Gerais e de Fundamentos Matemáticos

9–1C Explique as diferenças fundamentais entre um *domínio de escoamento* e um *volume de controle*.

9–2C O que significa quando dizemos que duas ou mais equações diferenciais são *acopladas*?

9–3C Quantas incógnitas há para um campo de escoamento tridimensional, em regime não permanente, incompressível, no qual as variações de temperatura são insignificantes? Liste as equações necessárias para encontrar essas incógnitas.

9–4C Quantas incógnitas há para um campo de escoamento tridimensional, em regime não permanente, compressível, no qual as variações de temperatura e densidade *são* significativas? Liste as equações necessárias para encontrar essas incógnitas. (Sugestão: Suponha que as outras propriedades do escoamento como a viscosidade e a condutividade térmica possam ser tratadas como constantes.)

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

9–5C O *teorema do divergente* é expresso como:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{G}\,dV = \oint_A \vec{G}\cdot\vec{n}\,dA$$

onde $\vec{G}$ é um vetor, V é um volume, e A é a área da superfície que delimita e define o volume. Expresse o teorema do divergente em palavras.

9–6 Transforme a posição $\vec{x} = (4, 3, -4)$ de coordenadas cartesianas (x, y, z) para coordenadas cilíndricas (r, θ, z) incluindo as unidades. Os valores de $\vec{x}$ estão em unidades de metros.

9–7 Uma *expansão em séries de Taylor* da função $f(x)$ ao redor de alguma posição x_0 é dada por:

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} dx + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} dx^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_{x=x_0} dx^3 + \cdots$$

Considere a função $f(x) = \exp(x) = e^x$. Suponha que conheçamos o valor de $f(x)$ at $x = x_0$, isto é, sabemos o valor de $f(x_0)$, e queremos estimar o valor dessa função em alguma posição x próxima de x_0. Gere os primeiros quatro termos da expansão em série de Taylor para a função dada (até a ordem dx^3 como na equação acima). Para $x_0 = 0$ e $dx = -0{,}1$, use a sua expansão truncada em série de Taylor para estimar $f(x_0 + dx)$. Compare o seu resultado com o valor exato de $e^{-0,1}$. Quantos dígitos de precisão você consegue com a sua série truncada de Taylor?

9–8 Seja $\vec{G}$ o vetor dado por $\vec{G} = 2xz\vec{i} - \frac{1}{2}x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$. Calcule o divergente de $\vec{G}$, e simplifique o máximo possível. Há alguma coisa especial no seu resultado? *Resposta:* 0

9–9 Seja $\vec{G}$ o vetor dado por $\vec{G} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ e seja V o volume de um cubo de aresta unitária com seu vértice na origem, limitado por $x = 0$ a 1, $y = 0$ a 1, e $z = 0$ a 1 (Figura P9–9). A área A é a área da superfície do cubo. Execute ambas as integrais do teorema do divergente e verifique se elas são iguais. Mostre todo o seu trabalho.

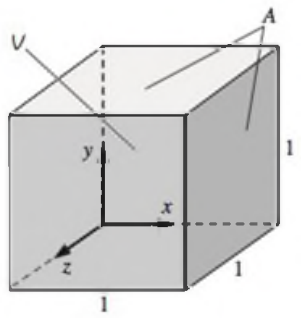


FIGURA P9–9

9–10 A *regra do produto* pode ser aplicada ao divergente do escalar f vezes o vetor $\vec{G}$ como: $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{G}) = \vec{G}\cdot\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}\cdot\vec{G}$. Expanda ambos os lados desta equação em coordenadas cartesianas e verifique se ela está correta.

9–11 O produto exterior de dois vetores é um tensor de segunda ordem com nove componentes. Em coordenadas cartesianas, ele é:

$$\vec{F}\vec{G} = \begin{bmatrix} F_xG_x & F_xG_y & F_xG_z \\ F_yG_x & F_yG_y & F_yG_z \\ F_zG_x & F_zG_y & F_zG_z \end{bmatrix}$$

A *regra do produto* aplicada ao divergente do produto de dois vetores $\vec{F}$ e $\vec{G}$ pode ser escrita como $\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\vec{G}) = \vec{G}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) + (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{G}$. Expanda ambos os lados desta equação em coordenadas cartesianas e verifique se ela está correta.

9–12 Use a regra do produto do Problema 9–11 para demonstrar que $\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$.

9–13 OEm muitas ocasiões precisamos transformar uma velocidade de coordenadas cartesianas (x, y, z) para coordenadas cilíndricas (r, θ, z) (ou vice-versa). Usando a Figura P9–13 como guia, transforme as componentes cilíndricas de velocidade (u_r, u_θ, u_z) em componentes cartesianas de velocidade (u, v, w). (Sugestão: como a componente z da velocidade permanece a mesma nessa transformação, precisamos apenas considerar o plano xy, como na Figura P9–13.)

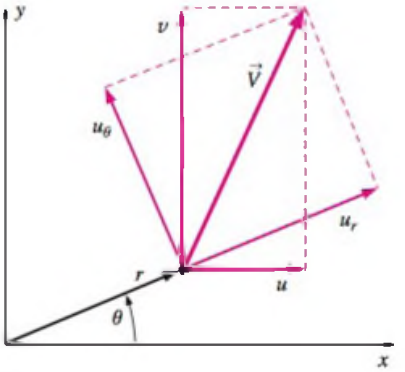


FIGURA P9–13

9–14 Usando a Figura P9–13 como guia, transforme as componentes de velocidade cartesianas (u, v, w) em componentes cilíndricas de velocidade (u_r, u_θ, u_z). (Sugestão: como a componente z da velocidade permanece a mesma nessa transformação, precisamos considerar apenas o plano xy.)

9–15 Beth está estudando um escoamento rotativo em um túnel de vento. Ela mede as componentes u e v da velocidade usando um anemômetro de fio quente. Em $x = 0{,}50$ m e $y = 0{,}20$ m, $u = 10{,}3$ m/s e $v = -5{,}6$ m/s. Infelizmente, o programa de análise de dados requer que os dados estejam em coordenadas cilíndricas (r, θ) e (u_r, u_θ). Ajude Beth a transformar seus dados em coordenadas cilíndricas. Especificamente, calcule r, θ, u_r, e u_θ no ponto dado.

9–16 Um campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível, tem componentes cartesianas de velocidade $u = Cy/(x^2 + y^2)$ e $v = -Cx/(x^2 + y^2)$, onde C é uma constante. Transforme essas componentes cartesianas de velocidade em componentes cilíndricas de velocidade u_r e u_θ, simplificando o máximo possível. Você deveria reconhecer esse escoamento. Que tipo de escoamento é ele? *Resposta:* 0, $-C/r$, linha de vórtices

9–17 Considere o escoamento em espiral de linha de vórtices/sumidouros no plano xy– ou r_θ conforme está representado na Figura P9–17. As componentes cilíndricas bidimensionais da velocidade (u_r, u_θ) para esse campo de escoamento são $u_r = C/2\pi r$ e $u_\theta = \Gamma/2\pi r$, onde C e Γ são constantes (m é negativa e Γ é positiva). Transforme essas componentes cilíndricas bidimensionais da velocidade em componentes cartesianas bidimensionais de velocidade (u, v). A sua resposta final não deverá conter r ou θ — somente x e y. Para verificar seus cálculos algébricos, calcule V^2 usando coordenadas cartesianas, e compare com V^2 obtida das componentes de velocidade fornecidas em componentes cilíndricas.

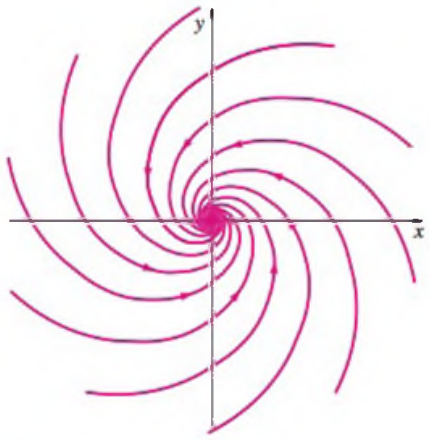


FIGURA P9–17

Equação da Continuidade

9–18C Se o campo de escoamento é compressível, o que podemos dizer sobre a *derivada material* da densidade? E se o campo de escoamento for incompressível?

9–19C Neste capítulo nós deduzimos a equação da continuidade de duas maneiras: usando o teorema do divergente e somando as vazões em massa através de cada face de um volume de controle infinitesimal. Explique por que o primeiro método é muito menos complicado do que o segundo.

9–20 Um duto divergente bidimensional está sendo projetado para difundir o ar que sai em alta velocidade de um túnel de vento. O eixo x é o eixo central do duto (ele é simétrico em relação ao eixo x), e as paredes superior e inferior devem ser curvadas de maneira que a velocidade axial u do vento decresça de forma aproximadamente linear de $u_1 = 300$ m/s na seção 1 para $u_2 = 100$ m/s na seção 2 (Figura P9–20). Ao mesmo tempo, a densidade ρ do ar deve aumentar de forma aproximadamente linear de $\rho_1 = 0{,}85$ kg/m^3 na seção 1 até $\rho_2 = 1{,}2$ kg/m^3 na seção 2. O duto divergente tem 2,0 m de comprimento e 1,60 m de altura na seção 1 (na Figura P9–20 está representada somente a metade superior; a meia-altura na seção 1 tem 0,80 m). (*a*) Calcule a componente y da velocidade, $v(x, y)$, no duto. (*b*) Faça um gráfico da forma aproximada do duto, ignorando o atrito nas paredes. (*c*) Qual deverá ser a meia-altura do duto na seção 2?

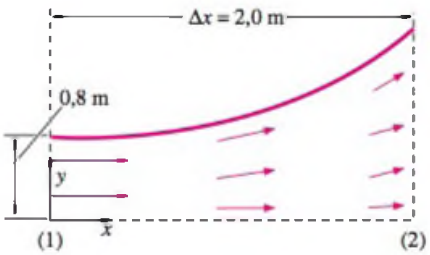


FIGURA P9–20

9–21 Repita o Exemplo 9–1 (gás comprimido em um cilindro por um pistão), mas sem usar a equação da continuidade. Em vez disso, considere a definição fundamental da densidade, como a massa dividida pelo volume. Verifique se a Equação 5 do Exemplo 9–1 está correta.

9–22 A forma compressível da equação da continuidade é $(\partial\rho/\partial t) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) = 0$. Expanda essa equação tanto quanto possível em coordenadas cartesianas (x, y, z) e (u, v, w).

9–23 No Exemplo 9–6 deduzimos a equação para taxa de deformação volumétrica $(1/V)(DV/Dt) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. Escreva isso como uma equação em palavras e discuta o que acontece com o volume de um elemento de fluido à medida que ele se move por um campo de escoamento de fluido incompressível (Figura P9–23).

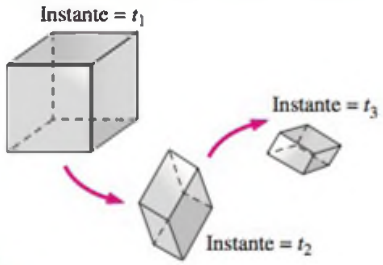


FIGURA P9–23

9–24 Verifique se o escoamento em espiral de linha de vórtices/sumidouros no plano $r\theta$ do Problema 9–17 satisfaz a equação da continuidade bidimensional incompressível. O que acontece com a conservação da massa na origem? Discuta.

9–25 Verifique se o campo de velocidade bidimensional, incompressível, permanente do Problema 9–16 satisfaz a equação da continuidade. Trabalhe em coordenadas cartesianas e mostre todo o seu trabalho.

9–26 Considere o campo de velocidade permanente, bidimensional dado por $\vec{V} = (u, v) = (1.3 + 2{,}8x)\vec{i} + (1.5 - 2{,}8y)\vec{j}$. Verifique se esse campo de escoamento é incompressível.

9–27 Imagine escoamento incompressível, permanente, bidimensional que é *puramente radial* no plano xy ou $r\theta$. Em outras palavras, a componente de velocidade u_r é diferente de zero, mas u_θ é zero em todos os pontos (Figura P9–27). Qual é a forma mais geral da componente u_r de velocidade que não viola a conservação da massa?

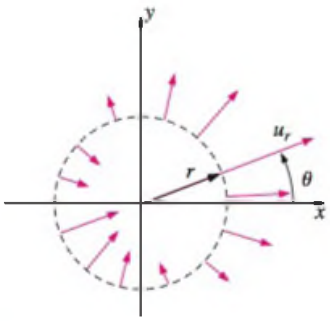


FIGURA P9–27

9–28 Considere o seguinte campo de velocidade permanente, tridimensional em coordenadas cartesianas: $\vec{V} = (u, v, w) = (axy^2 - b)\vec{i} + cy^3\vec{j} + dxy\vec{k}$, onde a, b, c, e d são constantes. Sob que condições esse campo de escoamento é incompressível? *Resposta: $a = -3c$*

9–29 A componente de velocidade u de um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível é $u = ax + b$, onde a e b são constantes. A componente de velocidade v é desconhecida. Encontre uma expressão para v em função de x e y.

9–30 Imagine um escoamento permanente, bidimensional, incompressível que é *puramente circular* no plano xy ou $r\theta$. Em outras palavras, a componente de velocidade u_θ é diferente de zero, mas u_r é zero em qualquer ponto (Figura P9–30). Qual é a forma mais geral da componente da velocidade u_θ que não viola a conservação da massa?

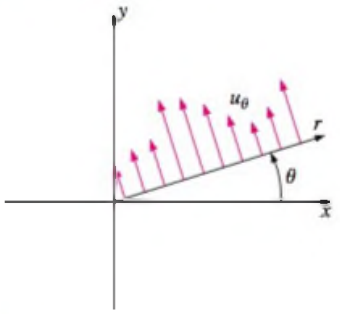


FIGURA P9–30

9–31 A componente da velocidade u de um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível $u = ax + by$, onde a e b são constantes. A componente da velocidade v é desconhecida. Encontre uma expressão para v como uma função de x e y. *Resposta: –ay + f(x)*

9–32 A componente da velocidade u de um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível é $u = ax^2 - bxy$, onde a e b são constantes. A componente da velocidade v é desconhecida. Encontre uma expressão para v como uma função de x e y.

9–33 Considere o escoamento permanente de água através de um bocal axissimétrico de mangueira de jardim (Figura P9–33). A componente axial da velocidade aumenta linearmente de $u_{z,\text{ entrada}}$ a $u_{z,\text{ saída}}$ conforme está representado na figura. Entre $z = 0$ e $z = L$, a componente é dada por $u_z = u_{z,\text{ entrada}} + [(u_{z,\text{ saída}} - u_{z,\text{ entrada}})/L]z$. Encontre uma expressão para a componente da velocidade *radial* u_r entre $z = 0$ e $z = L$. Você pode ignorar os efeitos de atrito nas paredes.

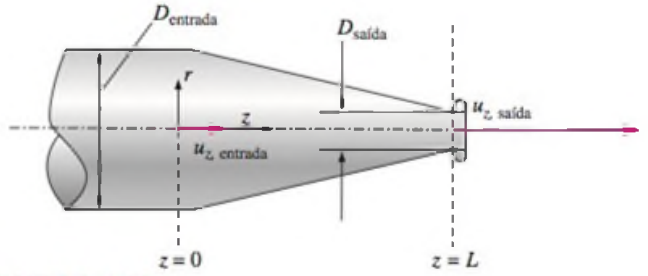


FIGURA P9–33

9–34 São conhecidas duas componentes da velocidade de um campo de escoamento em regime permanente, incompressível: $u = ax + bxy + cy^2$ e $v = axz - byz^2$, onde a, b, e c são constantes. Está faltando a componente w. Encontre uma expressão para w como uma função de x, y, e z.

Função Corrente

9–35C O que é significativo nas curvas com função corrente constante? Explique por que a função corrente é útil na mecânica dos fluidos.

9–36C Que restrições ou condições são impostas na função corrente ψ de maneira que ela satisfaça exatamente a equação da continuidade bidimensional incompressível por definição? Por que essas restrições são necessárias?

9–37C Considere o escoamento bidimensional no plano xy. Qual é o significado da diferença do valor da função corrente ψ de uma linha de corrente para outra?

9–38 Há muitas ocasiões em que um escoamento livre razoavelmente uniforme de velocidade V na direção x encontra um longo cilindro circular de raio a alinhado normal ao escoamento (Figura P9–38). Exemplos desse tipo incluem o escoamento do ar ao redor de uma antena de automóvel, o vento soprando contra o mastro de uma bandeira ou um poste telefônico, o vento atingindo os fios da rede elétrica, e correntes oceânicas batendo sobre vigas redondas submersas que suportam as plataformas submarinas. Em todos esses casos, o escoamento na parte detrás do cilindro é separado e não permanente e usualmente turbulento. No entanto, o escoamento na metade da frente do cilindro é muito mais permanente e previsível. Na verdade, exceto quanto a uma camada muito fina próximo à superfície do cilindro, o campo de escoamento pode ser aproximado pela seguinte função corrente permanente, bidimensional no plano xy ou plano $r\theta$, com o cilindro centrado na origem: $\psi = V \text{ sen } \theta(r - a^2/r)$. Encontre expressões para as componentes da velocidade radial e tangencial.

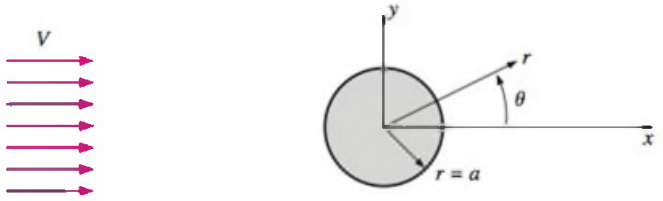


FIGURA P9–38

9–39 Considere um *escoamento Couette* completamente desenvolvido, entre duas placas paralelas e infinitas separadas pela distância h, com a placa superior em movimento e a placa inferior fixa conforme está ilustrado na Figura P9–39. O escoamento é permanente, incompressível, e bidimensional no plano xy. O campo de velocidade é dado por $\vec{V} = (u, v) = (Vy/h)\vec{i} + 0\vec{j}$. Encontre uma expressão para a função corrente ψ ao longo da reta vertical tracejada na Figura P9–40. Por conveniência, faça $\psi = 0$ ao longo da parede inferior do canal. Qual é o valor de ψ ao longo da parede superior? *Respostas: Vy2/2h, Vh/2*

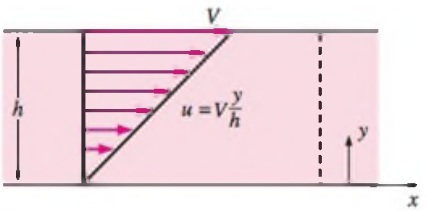


FIGURA P9–39

9–40 Como continuação do Problema 9–39, calcule a vazão em volume por unidade de largura para dentro do plano da página da Figura P9–39 com base nos primeiros princípios (integração do campo de velocidade). Compare o seu resultado com aquele obtido diretamente de uma função corrente. Discuta.

9–41 Considere o escoamento em canal, completamente desenvolvido, bidimensional entre duas placas paralelas infinitas separadas pela distância h, com a placa superior e a inferior ambas fixas, e um gradiente de pressão dP/dx impulsionando o escoamento conforme ilustra a Figura P9–41. (dP/dx é constante e negativa.) O escoamento é permanente, incompressível e bidimensional no plano xy. As componentes de velocidade são dadas por $u = (1/2\mu)(dP/dx)(y^2 - hy)$ e $v = 0$, onde μ é a viscosidade do fluido. Encontre uma expressão para a função corrente ψ ao longo da reta vertical tracejada na Figura P9–41. Por conveniência, faça $\psi = 0$ ao longo da parede inferior do canal. Qual é o valor de ψ ao longo da parede superior?

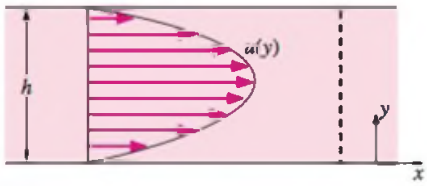


FIGURA P9–41

9–42 Como continuação do Problema 9–41, calcule a vazão em volume por unidade de largura para dentro da página da Figura P9–41 com base nos primeiros princípios (integração do campo de velocidade). Compare o seu resultado com aquele obtido diretamente da função corrente. Discuta.

9–43 Considere o escoamento em canal da Figura P9–41. O fluido é água a 20°C. Para o caso no qual $dP/dx = -20.000$ N/m^3 e $h = 1{,}20$ mm, faça o gráfico de várias linhas de corrente usando valores igualmente espaçados da função corrente. As linhas de corrente são igualmente espaçadas? Discuta por que sim e por que não.

9–44 No controle de poluição do ar, precisa-se frequentemente medir a qualidade de uma corrente de ar em movimento. Nessas medições, uma sonda de amostragem é alinhada com o escoamento do ar conforme mostra a Figura P9–44. Uma bomba de sucção extrai o ar através da sonda a uma vazão em volume $\dot{V}$ conforme mostra a figura. Para uma amostragem precisa, a velocidade do ar através da sonda deverá ser a mesma da corrente de ar (*amostragem isocinética*). Porém, se a sucção aplicada for muito forte, como está ilustrado na Figura P9–44, a velocidade do ar através da sonda é *maior* do que aquela da corrente de ar (*amostragem superisocinética*). Para simplificar considere um caso no qual a altura da sonda de amostragem é $h = 4{,}5$ mm e sua largura (para dentro da página da Figura P9–44) é $W = 52$ mm. Os valores da função corrente correspondentes às linhas de corrente divisórias superior e inferior são $\psi_l = 0{,}105$ m^2/s e $\psi_u = 0{,}150$ m^2/s, respectivamente. Calcule a vazão em volume através da sonda (em unidades de m^3/s) e a velocidade média do ar sugado pela sonda.

Respostas: 0,00234 m^3/s; 10,0 m/s

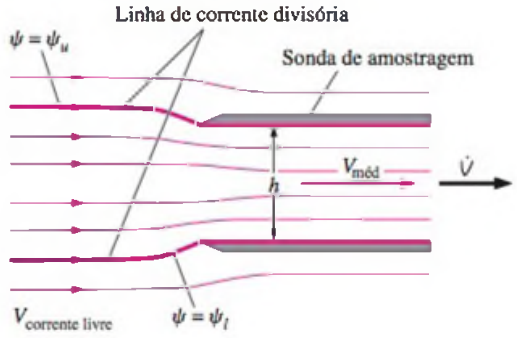


FIGURA P9–44

9–45 Suponha que a sucção aplicada à sonda de amostragem do Problema 9–44 fosse muito fraca em vez de muito forte. Faça um desenho de como deveriam ser as linhas de corrente nesse caso. Como você chamaria esse tipo de amostragem? Identifique as linhas de corrente divisórias superior e inferior.

9–46 Considere a sonda de amostragem de ar do Problema 9–45. Se as linhas de corrente superior e inferior estiverem separadas de 5,8 mm na corrente de ar distante, a montante da sonda, faça uma estimativa da velocidade da corrente livre $V_{\text{corrente livre}}$.

9–47 Considere um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível chamado de **corrente uniforme**. A velocidade do fluido é V em qualquer ponto, e o escoamento é alinhado com o eixo x (Figura P9–47). As componentes cartesianas da velocidade são $u = V$ e $v = 0$. Encontre uma expressão para a função corrente para esse escoamento. Suponha $V = 8{,}9$ m/s. Se ψ_2 for uma reta horizontal em $y = 0{,}5$ m e o valor de ψ ao longo do eixo x for zero, calcule a vazão em volume por unidade de largura (para dentro da página da Figura P9–47) entre essas duas linhas de corrente.

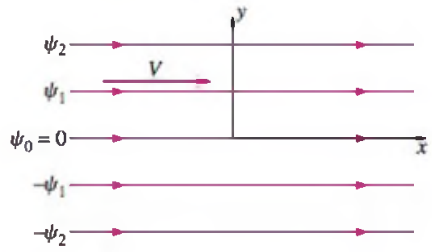


FIGURA P9–47

9–48 Uma corrente uniforme de velocidade V é inclinada de um ângulo α em relação ao eixo x (Figura P9–48). O escoamento é estacionário, bidimensional e incompressível. As componentes cartesianas de velocidade são $u = V\cos\alpha$ e $v = V\,\text{sen}\,\alpha$. Encontre uma expressão para função corrente para esse escoamento.

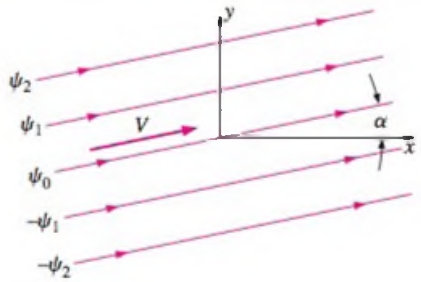


FIGURA P9–48

9–49 Um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível no plano xy tem a seguinte função corrente: $\psi = ax^2 + bxy + cy^2$, onde a, b, e c são constantes. (*a*) Obtenha expressões para as componentes da velocidade u e v. (*b*) Verifique se o campo de escoamento satisfaz a equação da continuidade incompressível.

9–50 Para o campo de velocidade do Problema 9–49, faça o gráfico das linhas de corrente $\psi = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 m^2/s. Considere as constantes a, b e c com os seguintes valores: $a = 0{,}50$ s^{-1}, $b = -1{,}3$ s^{-1} e $c = 0{,}50$ s^{-1}. Por consistência, desenhe as linhas de corrente entre $x = -2$ e 2 m, e $y = -4$ e 4 m. Indique a direção do escoamento com setas.

9–51 Um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível no plano xy tem uma função corrente dada por $\psi = ax^2 - by^2 + cx + dxy$, onde a, b, c, e d são constantes. (*a*) Obtenha expressões para as componentes da velocidade u e v. (*b*) Verifique se o campo de escoamento satisfaz a equação da continuidade incompressível.

9–52 Repita o Problema 9–51, criando a sua própria função corrente. Você pode criar qualquer função $\psi(x, y)$ que desejar, desde que ela contenha pelo menos três termos e não seja a mesma de um exemplo ou problema deste livro. Discuta.

9–53 Um cálculo de CFD de escoamento permanente, incompressível, bidimensional através de uma ramificação de duto

assimétrica bidimensional revela o padrão de linhas de corrente desenhado na Figura P9–53, onde os valores de ψ estão em unidades de m²/s, e W é a largura do duto para dentro da página. São mostrados os valores da função corrente ψ nas paredes do duto. Qual é a porcentagem do escoamento que passa através da ramificação *superior* do duto? *Resposta:* 63,7%

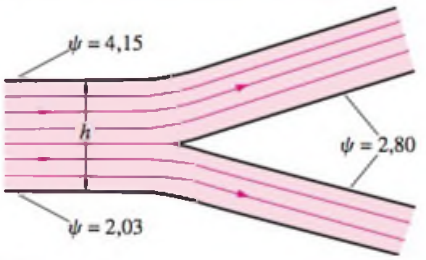


FIGURA P9–53

9–54 Se a velocidade média no ramo principal do duto do Problema 9–53 for 11,4 m/s, calcule a altura h do duto em cm. Obtenha o seu resultado de duas maneiras, mostrando todo o seu trabalho. Você pode usar os resultados do Problema 9–53 apenas em um dos métodos.

9–55 Considere o escoamento *axissimétrico* permanente incompressível (r, z) e (u_r, u_z) para o qual a função corrente é definida por $u_r = -(1/r)(\partial\psi/\partial z)$ e $u_z = (1/r)(\partial\psi/\partial r)$. Verifique se ψ assim definida satisfaz a equação da continuidade. Que condições ou restrições são necessárias para ψ?

9–56 Considere o escoamento bidimensional permanente, incompressível devido a uma *linha de fontes* na origem (Figura P9–56). O fluido é criado na origem e se espalha rapidamente em todas as direções no plano xy. A vazão total em volume do fluido criado por unidade de largura é $\dot{V}/L$ (para dentro da página da Figura P9–56), onde L é a largura da linha de fontes entrando na página na Figura P9–56. Como a massa deve ser conservada em todos os pontos exceto na origem (um ponto de singularidade), a vazão em volume por unidade de largura através de um círculo de raio r qualquer também deve ser $\dot{V}/L$. Se especificarmos (arbitrariamente) que a função corrente ψ seja zero ao longo do eixo x positivo ($\theta = 0$), qual será o valor de ψ ao longo do eixo y positivo ($\theta = 90°$)? Qual é o valor de ψ ao longo do eixo x negativo ($\theta = 180°$)?

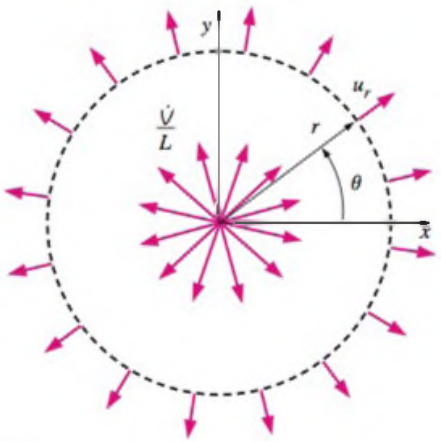


FIGURA P9–56

9–57 Repita o Problema 9–56 para o caso de uma linha de sumidouros em lugar de uma linha de fontes. Suponha que $\dot{V}/L$ seja um valor positivo, mas o escoamento em todos os pontos é na direção oposta.

9–58 Considere o bocal da mangueira de jardim do Problema 9–33. Encontre uma expressão para a função corrente correspondendo a esse campo de escoamento.

9–59 O escoamento se separa em um canto agudo ao longo de uma parede e forma uma **bolha de separação** recirculante conforme mostra a Figura P9–59 (são mostradas as linhas de corrente). O valor da função corrente na parede é zero, o valor na linha de corrente superior mostrada é um valor positivo $\psi_{superior}$. Discuta o valor da função corrente dentro da bolha de separação. Em particular, ele é positivo ou negativo? Por quê? Em que ponto do escoamento ψ é mínimo?

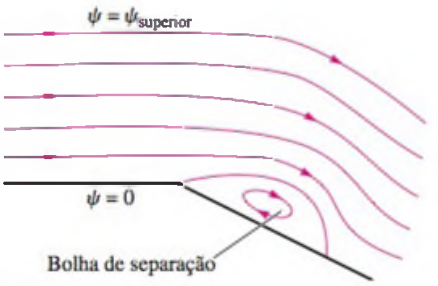


FIGURA P9–59

9–60 Um estudante de graduação está processando seu código de CFD para seu projeto de pesquisa de mestrado e gera um gráfico das linhas de corrente de um escoamento (contornos de função corrente constante). Os contornos são formados por valores igualmente espaçados da função corrente. A professora I. C. Flows olha para o gráfico e imediatamente aponta para uma região do escoamento e diz: "Veja como o escoamento está rápido aqui!". O que a professora Flows notou sobre as linhas de corrente naquela região e como ela sabia que o escoamento era rápido naquela região?

9–61 São mostradas linhas de emissão na Figura P9–61 para escoamento de água sobre a parte dianteira de um cilindro rombudo, axissimétrico alinhado com o escoamento. As linhas de emissão são geradas introduzindo-se bolhas de ar em pontos igualmente espaçados a montante do campo de visão. É mostrada somente a metade superior, pois o escoamento é axissimétrico em relação ao eixo horizontal. Como o escoamento é permanente, as linhas de emissão são coincidentes com as linhas de corrente. Discuta como você pode dizer com base em um padrão de linha de corrente se a velocidade do escoamento em uma região em particular do campo de escoamento é (relativamente) grande ou pequena.

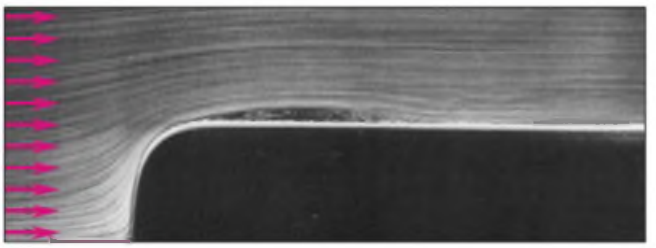


FIGURA P9–65

Cortesia de ONERA. Fotografia de Werlé.

9–62 Neste capítulo mencionamos rapidamente a *função corrente compressível* ψ_ρ, definida em coordenadas cartesianas como $\rho u = (\partial\psi_\rho/\partial y)$ e $\rho v = -(\partial\psi_\rho/\partial x)$. Quais são as dimensões primárias de ψ_ρ? Escreva as unidades de ψ_ρ em unidades primárias SI e em unidades primárias inglesas.

9–63 No Exemplo 9–2 nós fornecemos expressões para u, v e ρ para escoamento através de um duto compressível convergente.

Encontre uma expressão para a função corrente compressível ψ_ρ que descreve esse campo de escoamento. Por consistência, faça $\psi_\rho = 0$ ao longo do eixo x.

9–64 No Problema 9–20 desenvolvemos expressões para u, v e ρ para escoamento através do duto compressível, bidimensional, divergente de um túnel de vento de alta velocidade. Encontre uma expressão para a função corrente compressível ψ_ρ que descreva esse campo de escoamento. Por consistência, faça $\psi_\rho = 0$ ao longo do eixo x. Desenhe o gráfico de várias linhas de corrente e verifique se elas coincidem com aquelas que você desenhou no Problema 9–20. Qual é o valor de ψ_ρ na parte superior do duto divergente?

9–65 Um escoamento bidimensional permanente, incompressível, sobre um pequeno hidrofólio cuja corda tem o comprimento $c = 9{,}0$ mm é modelado com um aplicativo comercial de dinâmica de fluidos computacional (CFD). A Figura P9–70 mostra uma vista ampliada das linhas de corrente (contornos de função corrente constante). Os valores da função corrente estão em unidades de m²/s. O fluido é água à temperatura ambiente. (*a*) Trace uma seta no gráfico para indicar a direção e intensidade relativa da velocidade no ponto *A*. Repita para o ponto *B*. Discuta como os seus resultados podem ser usados para explicar como um corpo desses cria sustentação. (*b*) Qual é a velocidade aproximada da água no ponto *A*? (O ponto *A* está entre as linhas de corrente 1,65 e 1,66 na Figura P9–65.)

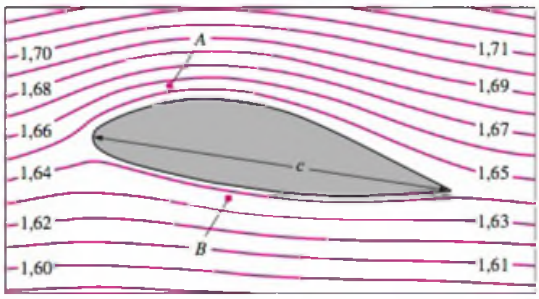


FIGURA P9–65

9–66 A média no tempo de um escoamento bidimensional turbulento, incompressível, sobre um bloco quadrado de dimensão $h = 1$ m é modelado com um aplicativo comercial de dinâmica de fluidos computacional (CFD). Uma vista ampliada das linhas de corrente (contornos de função corrente constante) é mostrada na Figura P9–66. O fluido é ar à temperatura ambiente. Note que os contornos de *função corrente compressível* constante são mostrados na Figura P9–66, apesar do próprio escoamento ser aproximado como incompressível. Os valores de ψ_ρ estão em unidades de kg/m · s. (*a*) Desenhe uma seta no gráfico para indicar a direção e intensidade relativa da velocidade no ponto *A*. Repita para o ponto *B*. (*b*) Qual é a velocidade aproximada do ar no ponto *B*? (O ponto *B* está entre as linhas de corrente 5 e 6 na Figura P9–66.)

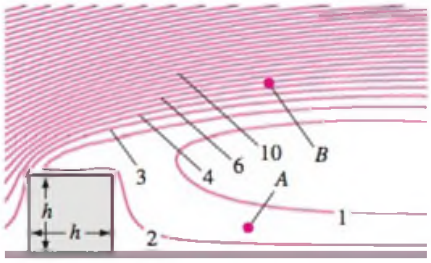


FIGURA P9–65

Equações de Momento Linear, Condições de Contorno e Aplicações

9–67C A equação geral do volume de controle para a conservação do momento linear é:

$$\underbrace{\int_{VC} \rho \vec{g}\, dV}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA}_{\text{II}} = \underbrace{\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \vec{V}\right) dV}_{\text{III}} + \underbrace{\int_{SC} \left(\rho \vec{V}\right) \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA}_{\text{IV}}$$

Discuta o significado de cada termo nessa equação. Os termos estão identificados por conveniência. Escreva a equação como uma equação em palavras.

9–68C Um avião voa com velocidade constante $\vec{V}_{\text{avião}}$ (Figura P9–68C). Discuta as condições de contorno de velocidade no ar adjacente à superfície do avião com base em dois sistemas de referência: (*a*) estando no solo e (*b*) movendo-se com o avião. Da mesma forma, quais são as condições de contorno do campo de velocidade afastado no ar (bem longe do avião) em ambos os sistemas de referência?

FIGURA P9–68C

9–69C O que são *equações constitutivas*, e à que equação da mecânica dos fluidos elas são aplicadas?

9–70C O que é a *pressão mecânica* P_m, e como ela é usada em uma solução de escoamento incompressível?

9–71C Qual é a principal diferença entre um fluido newtoniano e um fluido não newtoniano? Cite pelo menos três fluidos newtonianos e três não newtonianos.

9–72C Defina ou descreva cada tipo de fluido: (*a*) fluido viscoelástico, (*b*) fluido pseudoplástico, (*c*) fluido dilatante, (*d*) fluido plástico de Bingham.

9–73 Um agitador mistura produtos químicos em um grande tanque (Figura P9–73). A superfície livre do líquido está exposta ao ar ambiente. Os efeitos da tensão superficial são desprezíveis. Discuta as condições de contorno necessárias para resolver este problema. Especificamente, quais são as condições de contorno de velocidade em termos das coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e componentes de velocidade (u_r, u_θ, u_z) em todas as superfícies, inclusive nas pás e na superfície livre? Que condições de contorno de pressão são apropriadas para esse campo de escoamento? Escreva as equações matemáticas para cada condição de contorno e discuta.

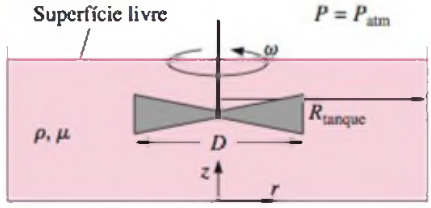


FIGURA P9–73

9–74 Repita o Problema 9–73, mas de um sistema de referência girando com as pás do agitador com uma velocidade angular ω.

9–75 Considere o líquido em um tanque cilíndrico. Tanto o tanque quanto o líquido giram como um corpo rígido (Figura P9–75). A superfície livre do líquido está exposta ao ar ambiente. Os efeitos da tensão superficial são desprezíveis. Discuta as condições de contorno necessárias para resolver este problema. Especificamente, quais são as condições de contorno da velocidade em termos de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e das componentes da velocidade (u_r, u_θ, u_z) em todas as superfícies, incluindo as paredes do tanque e a superfície livre? Que condições de contorno de pressão são apropriadas para esse campo de escoamento? Escreva equações matemáticas para cada condição de contorno e discuta.

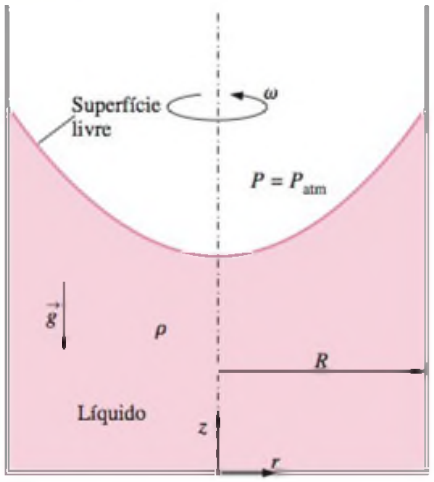


FIGURA P9–75

9–76 A componente $r\theta$ do tensor de tensão viscosa em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] \qquad (1)$$

Alguns autores, por outro lado, escrevem essa componente como:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right] \qquad (2)$$

Elas são a mesma coisa? Em outras palavras, a Equação 2 é equivalente à Equação 1, ou esses dois autores definem seus tensores de tensão viscosa de forma diferente? Mostre todo o seu trabalho.

9–77 Óleo de motor à temperatura $T = 60°C$ é forçado entre duas placas planas paralelas, permanentes, muito grandes separadas por um espaçamento muito pequeno de altura $h = 2{,}5$ mm (Figura P9–77). As dimensões da placa são $L = 1{,}5$ m e $W = 0{,}75$ m. A pressão de saída é a pressão atmosférica, a pressão de entrada é 1 atm manométrica. Estime a vazão em volume do óleo. Calcule também o número de Reynolds do escoamento do óleo, com base na altura h do espaçamento e na velocidade V. O escoamento é laminar ou turbulento? *Respostas:* 9,10 × 104 m³/s; 14,5; laminar

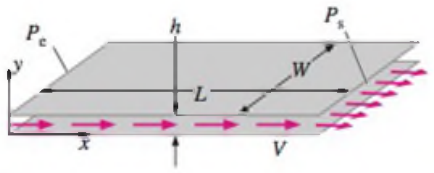


FIGURA P9–77

9–78 Considere o seguinte campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível: $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx^2)\vec{j}$, onde a, b, e c são constantes. Calcule a pressão como uma função de x e y.

Resposta: não pode ser determinada

9–79 Considere o seguinte campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível: $\vec{V} = (u, v) = (-ax^2)\vec{i} + (2axy)\vec{j}$, onde a é uma constante. Calcule a pressão como uma função de x e y.

9–80 Considere o escoamento permanente, bidimensional, incompressível devido a um escoamento em espiral de linha de vórtices/sumidouros centrada no eixo z. Na Figura P9–80 são mostradas linhas de corrente e vetores velocidade. O campo de velocidade é $u_r = C/r$ e $u_\theta = K/r$, onde C e K são constantes. Calcule a pressão como uma função de r e θ.

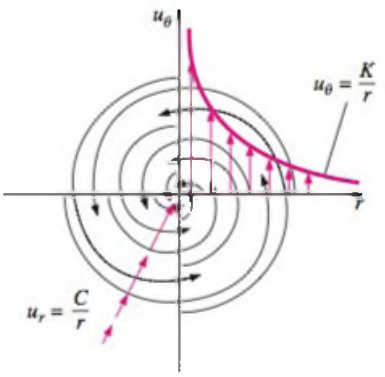


FIGURA P9–80

9–81 Considere o campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível, $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + c)\vec{j}$, onde a, b, e c são constantes. Calcule a pressão como uma função de x e y.

9–82 Considere o escoamento permanente, incompressível, paralelo, laminar de um fluido viscoso descendo entre duas paredes verticais infinitas (Figura P9–82). A distância entre as paredes é h, e a gravidade age na direção negativa de z (para baixo na figura). Não há pressão (forçada) aplicada impulsionando o escoamento — o fluido desce apenas por gravidade. A pressão é constante em todos os pontos no campo de escoamento. Calcule o campo de velocidade e esboce o perfil de velocidade usando variáveis adimensionais apropriadas.

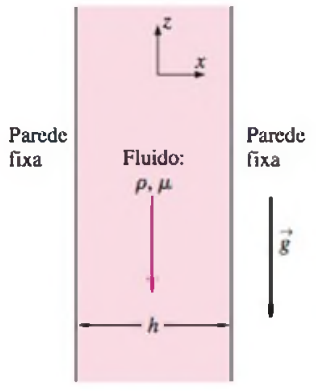


FIGURA P9–82

9–83 Para um fluido descendo entre duas paredes verticais paralelas (Problema 9–82), encontre uma expressão para a vazão em volume por unidade de largura ($\dot{V}/L$) como uma função de ρ, μ, h, e g. Compare o seu resultado com aquele do mesmo fluido descendo ao longo de *uma* parede vertical com uma superfície livre substituindo a segunda parede (Exemplo 9–17), e tudo o mais permanecendo igual. Discuta as diferenças e forneça uma explicação física. *Resposta:* $\rho g h^3/12\mu$ para baixo

9–84 Repita o Exemplo 9–17, com a diferença de que a parede está inclinada de um ângulo α (Figura P9–84). Encontre expressões para os campos de pressão e velocidade. Como verificação, certifique-se de que o seu resultado coincida com aquele do Exemplo 9–17 quando $\alpha = 90°$. [Dica: é mais conveniente usar o sistema de coordenadas (s, y, n) com as componentes de velocidade (u_s, v, u_n), onde y está para dentro da página na Figura P9–84. Desenhe o perfil de velocidade adimensional u_s^* *versus* n^* para o caso no qual $\alpha = 60°$.]

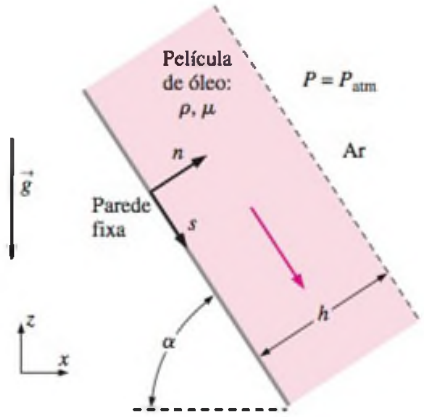


FIGURA P9–84

9–85 Para a película de óleo em movimento descendente do Problema 9–84, encontre uma expressão para a vazão em volume por unidade de largura do óleo descendo pela parede ($\dot{V}/L$) como uma função de ρ, μ, h, e g. Calcule ($\dot{V}/L$) para uma película de óleo de espessura 5,0 mm com $\rho = 888$ kg/m^3 e $\mu = 0{,}80$ kg/m · s.

9–86 Os dois primeiros termos viscosos na componente θ da equação de Navier-Stokes (Equação 9–62c) são $\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}\right]$. Expanda essa expressão o máximo possível usando a regra do produto, resultando em três termos. Agora combine os três termos em apenas um. (Sugestão: use a regra do produto ao contrário — pode ser necessário um pouco de tentativa e erro.)

9–87 Um líquido newtoniano incompressível está confinado entre dois cilindros concêntricos circulares de comprimento infinito — um cilindro sólido interno de raio R_i e um cilindro oco, permanente, externo de raio R_o (Na Figura P9–87; o *eixo z* está para fora da página.) O cilindro interno gira a uma velocidade angular ω_i. O escoamento é permanente, laminar e bidimensional no plano $r\theta$. O escoamento é também *rotacionalmente simétrico*, o que significa que nada é função da coordenada θ (u_θ e P são funções apenas do raio r). O escoamento também é circular, o que significa que a componente de velocidade $u_r = 0$ em qualquer lugar. Encontre uma expressão exata para a componente da velocidade u_θ como uma função do raio r e dos outros parâmetros do problema. Você pode ignorar a gravidade. (Sugestão: o resultado do Problema 9–86 é útil.)

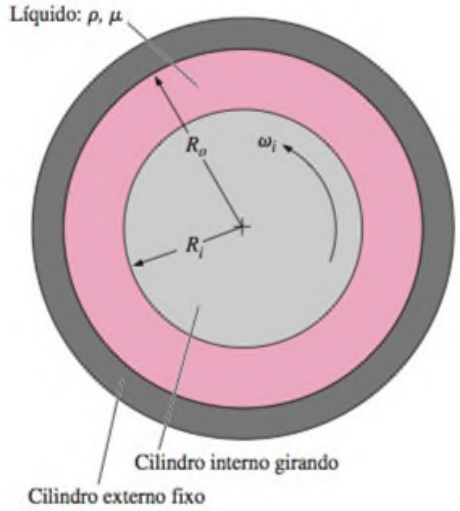


FIGURA P9–87

9–88 Analise e discuta dois casos limites do Problema 9–87. (*a*) O espaçamento é muito pequeno. Mostre que o perfil de velocidade se aproxima de uma função linear da parede do cilindro externo até a parede do cilindro interno. Em outras palavras, para um espaçamento muito pequeno o perfil de velocidade se reduz àquele de um escoamento Couette simples bidimensional. (Dica: defina $y = R_o - r$, h = espessura do espaçamento = $R_o - R_i$, e V = velocidade da "placa superior" = $R_i\omega_i$.) (*b*) O raio do cilindro externo se torna infinito enquanto o raio do cilindro interno se torna muito pequeno. Isso é uma aproximação de que tipo de escoamento?

9–89 Repita o Problema 9–87 para o caso mais geral. Isto é, o cilindro interno girando a uma velocidade angular ω_i e o cilindro externo girando a uma velocidade angular ω_o. Tudo o mais permanece o mesmo que no Problema 9–87. Gere uma expressão exata para a componente u_θ da velocidade, como uma função do raio r e dos outros parâmetros do problema. Verifique se quando $\omega_o = 0$ o seu resultado se simplifica para o do Problema 9–87.

9–90 Analise e discuta um caso-limite do Problema 9–89 no qual não há cilindro interno ($R_i = \omega_i = 0$). Encontre uma expressão para u_θ como uma função de r. Que tipo de escoamento é este? Descreva como esse escoamento poderia ser implementado experimentalmente.
Resposta: $\omega_o r$

9–91 Considere o escoamento permanente, incompressível, laminar de um fluido newtoniano em um tubo anular redondo infinitamente longo com raio interno R_i e raio externo R_o (Figura P9–91). Ignore os efeitos da gravidade. É aplicado um gradiente constante negativo de pressão $\partial P/\partial x$ na direção x, $(\partial P/dx) = (P_2 - P_1)/(x_2 - x_1)$, onde x_1 e x_2 são duas localizações arbitrárias ao longo do eixo x, e P_1 e P_2 são as pressões naquelas duas localizações. O gradiente de pressão pode ser causado por uma bomba e/ou gravidade. Note que aqui adotamos um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com x em lugar de z para a componente axial, ou seja, (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u). Deduza uma expressão para o campo de velocidade no espaço anular do tubo.

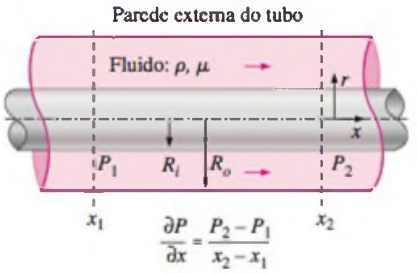


FIGURA P9–91

9–92 Considere novamente o tubo anular representado na Figura P9–91. Suponha que a pressão seja constante em todos os pontos (não há gradiente de pressão empurrando o escoamento). Porém, suponha que a parede interna esteja se movendo a uma velocidade constante V para a direita. A parede externa ainda está estacionária. (Esse é um tipo de escoamento Couette axissimétrico.) Encontre uma expressão para a componente u da velocidade como uma função de r e dos outros parâmetros do problema.

9–93 Repita o Problema 9–92 invertendo as paredes estacionária e móvel. Particularmente, faça a parede interna estacionária e a parede do tubo externa se movendo a uma velocidade constante V para a direita, todas as demais condições permanecendo as mesmas. Encontre uma expressão para a componente u da velocidade como uma função de r e dos outros parâmetros do problema.

9–94 Considere a forma modificada do escoamento Couette na qual há dois líquidos imiscíveis entre duas placas planas, paralelas e infinitamente longas (Figura P9–94). O escoamento é permanente, incompressível, paralelo e laminar. A placa superior se move a uma velocidade V para a direita, e a placa inferior está estacionária. A gravidade age na direção $-z$ (para baixo na figura). Não há gradiente de pressão empurrando os fluidos através do canal — o escoamento se estabelece somente pelos efeitos viscosos criados pela placa superior em movimento. Você pode ignorar os efeitos da tensão superficial e considerar que a interface seja horizontal. A pressão na parte inferior do escoamento ($z = 0$) é igual a P_0. (*a*) Liste todas as condições de contorno apropriadas de velocidade e pressão. (Sugestão: há seis condições de contorno necessárias.) (*b*) Resolva para o campo de velocidade. (Sugestão: divida a solução em duas partes, uma para cada fluido. Encontre expressões para u_1 como uma função de z e u_2 como uma função de z.) (*c*) Resolva para o campo de pressão. (Sugestão: divida novamente a solução. Resolva para P_1 e P_2.) (*d*) Seja o fluido 1 a água e o fluido 2 óleo novo de motor, ambos a 80°C. Faça também $h_1 = 5{,}0$ mm, $h_2 = 8{,}0$ mm e $V = 10{,}0$ m/s. Desenhe o gráfico de u como uma função de z através de todo o canal. Discuta os resultados.

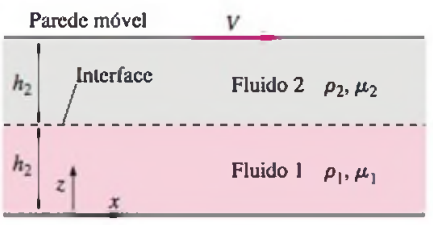


FIGURA P9–94

9–95 Considere um escoamento permanente, incompressível, laminar de um fluido newtoniano em um tubo redondo infinitamente longo de diametro D ou raio $R = D/2$ inclinado de um ângulo α (Figura P9–95). Não há gradiente de pressão aplicado ($\partial P/\partial x = 0$). Em vez disso, o fluido escoa pelo tubo somente devido à gravidade. Adotamos o sistema de coordenadas mostrado, com x paralelo ao eixo do tubo. Deduza uma expressão para a componente da velocidade u como uma função do raio r e dos outros parâmetros do problema. Calcule a vazão em volume e a velocidade axial média através do tubo.

Respostas: $\rho g\,(\text{sen}\,\alpha)(R^2 - r^2)/4\mu$; $\rho g\,(\text{sen}\,\alpha)\pi R^4/8\mu$; $\rho g\,(\text{sen}\,\alpha)R^2/8\mu$

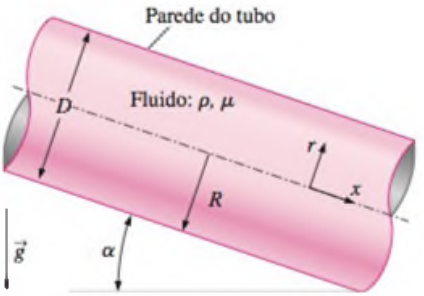


FIGURA P9–95

Problemas de Revisão

9–96C Explique por que a aproximação de escoamento incompressível e a aproximação da temperatura constante usualmente caminham lado a lado.

9–97C Para cada parte, escreva o nome oficial para a equação diferencial, discuta suas restrições e descreva o que a equação representa fisicamente.

$$(a)\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$(b)\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}\vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$

$$(c)\ \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

9–98C Liste os seis passos usados para resolver as equações de Navier-Stokes e da continuidade para escoamento incompressível com propriedades constantes do fluido. (Você deveria ser capaz de fazer isso sem consultar o Capítulo.)

9–99C Para cada afirmação, decida se é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta. Para cada afirmação considere as condições de contorno apropriadas e as propriedades do fluido conhecidas.

(*a*) Um problema geral de escoamento incompressível com propriedades constantes do fluido tem quatro incógnitas.

(*b*) Um problema geral de escoamento compressível tem cinco incógnitas.

(*c*) Para um problema de mecânica de fluidos incompressível, a equação da continuidade e a equação de Cauchy fornecem equações suficientes para igualar o número de incógnitas.

(*d*) Para um problema incompressível de mecânica de fluidos envolvendo um fluido newtoniano com propriedades constantes, a

equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes proporcionam equações em número suficiente para igualar o número de incógnitas.

9–100C Discuta a relação entre taxa de deformação volumétrica e a equação da continuidade. Apóie a sua discussão nas definições fundamentais.

9–101 Repita o Exemplo 9–17, no caso em que a parede está se movendo para cima com velocidade V. Como verificação, certifique-se de que o seu resultado coincida com aquele do Exemplo 9–17 quando $V = 0$. Torne a sua equação do perfil de velocidades adimensional usando a mesma normalização do Exemplo 9–17, e mostre que aparece um número de Froude e um número de Reynolds. Faça o gráfico do perfil w^* *versus* x^* para casos em que Fr = 0,5 e Re = 0,5, 1,0, e 5,0. Discuta.

9–102 Para o filme de óleo em movimento descendente no Problema 9–101, calcule a vazão em volume por unidade de largura do óleo descendo pela parede ($\dot{V}/L$) em função da velocidade V da parede e de outros parâmetros do problema. Calcule a velocidade da parede de forma que não haja escoamento total volumétrico de óleo nem para cima nem para baixo. Forneça a sua resposta para V em termos dos outros parâmetros do problema, ou seja, ρ, μ, h, e g. Calcule V para vazão de volume zero para um filme de óleo de espessura 5,0 mm com $\rho = 888$ kg/m^3 e $\mu = 0{,}80$ kg/m · s.

Resposta: 0,091 m/s

9–103 Considere o escoamento permanente, bidimensional, incompressível no plano xz em vez do plano xy. Na Figura P9–103 são mostradas curvas com função corrente constante. As componentes da velocidade diferentes de zero são (u, w). Defina uma função corrente tal que o escoamento seja da direita para a esquerda no plano xz quando ψ aumenta na direção z.

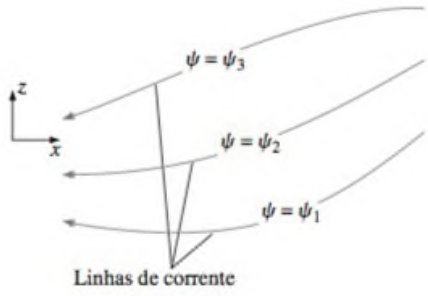


FIGURA P9–103

9–104 Considere o seguinte campo de velocidade permanente, tridimensional em coordenadas cartesianas: $\vec{V} = (u, v, w) = (axz^2 - by)\vec{i} + cxyz\vec{j} + (dz^3 + exz^2)\vec{k}$, onde a, b, c, d, e e são constantes. Sob quais condições esse campo de escoamento é incompressível? Quais são as dimensões primárias das constantes a, b, c, d, e e?

9–105 Simplifique a equação de Navier-Stokes o máximo possível para o caso de um líquido incompressível que está sendo *acelerado como um corpo rígido* em uma direção arbitrária (Figura P9–105). A gravidade age na direção $-z$. Comece com a forma vetorial incompressível da equação de Navier-Stokes, explique como e por que alguns termos podem ser simplificados, e forneça o seu resultado final na forma de uma equação vetorial.

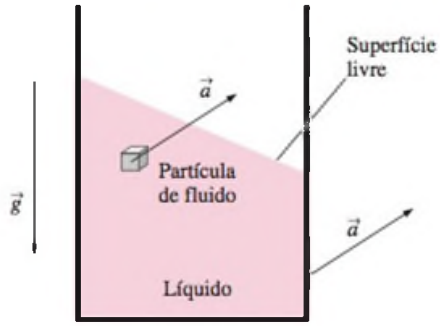


FIGURA P9–105

9–106 Simplifique a equação de Navier-Stokes o máximo possível para o caso da *hidrostática* incompressível, com a gravidade agindo na direção negativa de z. Comece com a forma vetorial incompressível da equação de Navier-Stokes, explique como e por que alguns termos podem ser simplificados, e forneça o seu resultado final na forma de uma equação vetorial. *Resposta:* $\vec{\nabla}P = -\rho g\vec{k}$

9–107 Bob usará um programa de dinâmica de fluidos computacional para modelar o escoamento permanente de um fluido incompressível através de uma contração brusca bidimensional conforme mostra a Figura P9–107. A altura do canal muda de $H_1 = 12{,}0$ cm para $H_2 = 4{,}6$ cm. Deve ser especificada velocidade uniforme $\vec{V}_1 = 18{,}5\vec{i}$ m/s na fronteira esquerda do domínio computacional. O aplicativo de CFD usa um esquema numérico no qual uma função corrente deve ser especificada ao longo de todas as fronteiras do domínio computacional. Conforme mostra a Figura P9–107, ψ é especificado como zero ao longo de toda a parede inferior do canal. (*a*) Qual é o valor de ψ que Bob deverá especificar na parede superior do canal? (*b*) Como Bob deve especificar ψ no lado esquerdo do domínio computacional? (*c*) Discuta como Bob pode especificar ψ no lado direito do domínio computacional.

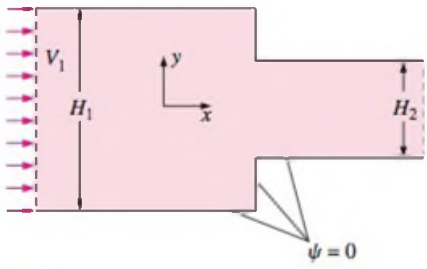


FIGURA P9–107

9–108 Para cada uma das equações listadas, escreva a equação em forma vetorial e decida se ela é linear ou não-linear. Se ela for não-linear, que termo(s) a faz(em) ser assim? (*a*) equação da continuidade incompressível, (*b*) equação da continuidade compressível e (*c*) equação de Navier-Stokes incompressível.

9–109 Uma **camada-limite** é uma fina região próxima a uma parede na qual as forças viscosas (de atrito) são muito importantes devido à condição de contorno de não-escorregamento. A camada-limite permanente, incompressível, bidimensional, que se desenvolve ao longo de uma placa plana alinhada com o escoamento de corrente-livre, está desenhada na Figura P9–109. O escoamento a montante da placa é uniforme, mas a espessura δ da camada limite cresce com x ao longo da placa devido aos efeitos viscosos. Desenhe algumas linhas de corrente, dentro da camada-limite e acima da camada-limite. $\delta(x)$ é uma linha de corrente?

(Sugestão: preste atenção particularmente ao fato de que, para um escoamento bidimensional permanente, incompressível, a vazão em volume por unidade de largura entre duas linhas de corrente quaisquer é constante.)

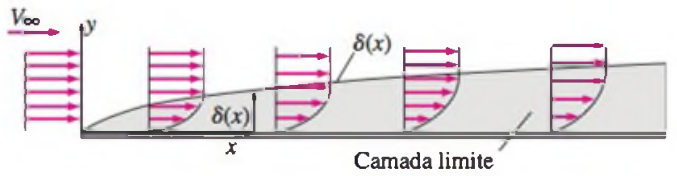


FIGURA P9–109

9–110 Aproximamos o escoamento do ar para dentro do acessório de piso, de um aspirador de pó por uma função corrente $\psi = \dfrac{-\dot{V}}{2\pi L}\,\text{arctg}\,\dfrac{\text{sen}\,2\theta}{\cos 2\theta + b^2/r^2}$ no plano central (o plano xy) em coordenadas cilíndricas, onde L é o comprimento do acessório, b é a altura do acessório acima do piso, e $\dot{V}$ é a vazão em volume do ar que está sendo sugado na mangueira. Na Figura P9–110 é mostrada uma vista tridimensional com o piso no plano xz; modelamos uma fatia bidimensional do escoamento no plano xy através do eixo central do acessório. Note que tomamos (arbitrariamente) $\psi = 0$ ao longo do eixo x positivo ($\theta = 0$). (*a*) Quais são as dimensões primárias da função corrente dada? (*b*) Coloque a função corrente na forma adimensional definindo $\psi^* = (2\pi L/\dot{V})\psi$ e $r^* = r/b$. (*c*) Resolva a sua equação na forma adimensional para r^* como uma função de ψ^* e θ. Use essa equação para desenhar várias linhas de corrente adimensionais do escoamento. Por consistência, faça o gráfico no intervalo $-2 < x^* < 2$ e $0 < y^* < 4$, onde $x^* = x/b$ e $y^* = y/b$. (Sugestão: ψ^* deve ser *negativa* para resultar na direção correta do escoamento.)

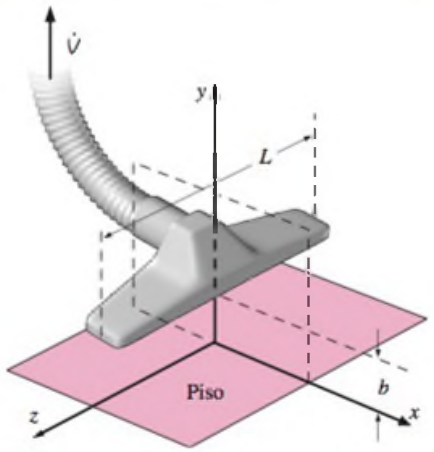


FIGURA P9–110

9–111 Procure a definição da *equação de Poisson* em um dos seus livros de matemática ou na Internet. Escreva a equação de Poisson na forma padrão. Qual é a semelhança da equação de Poisson com a equação de Laplace? Qual é a diferença entre as duas equações?

9–112 Água flui através de um tubo inclinado, longo e reto, de diâmetro D e comprimento L (Figura P9–112). Não há nenhum gradiente de pressão entre os pontos 1 e 2; em outras palavras, a água flui através do tubo apenas por gravidade, e $P_1 = P_2 + P_{atm}$. O escoamento é permanente, completamente desenvolvido e laminar. Adotamos um sistema de coordenadas no qual x segue o eixo do tubo. (*a*) Use a técnica do volume de controle do Capítulo 8 para encontrar uma expressão para a velocidade média V como uma função dos parâmetros dados ρ, g, D, Δz, μ, e L. (*b*) Use a análise diferencial para encontrar uma expressão para V como uma função dos parâmetros dados. Compare com o seu resultado da parte (*a*) e discuta. (*c*) Use a análise dimensional para gerar uma expressão adimensional para V como uma função dos parâmetros dados. Construa uma relação entre os seus Πs que corresponda à expressão analítica exata.

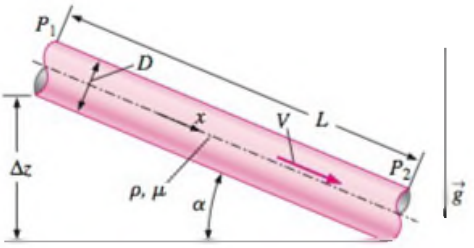


FIGURA P9–112

9–113 Um bloco desliza para baixo em uma parede longa, reta, inclinada, com a velocidade V, sobre um filme fino de óleo de espessura h (Figura P9–113). O peso do bloco é W, e sua área em contato com o filme de óleo é A. Suponha que V seja medida, e W, A, o ângulo α e a viscosidade μ também sejam conhecidos. A espessura h do filme de óleo não é conhecida. (*a*) Encontre uma expressão analítica exata para h como uma função dos parâmetros conhecidos V, A, W, α, e μ. (*b*) Use análise dimensional para gerar uma expressão adimensional para h como uma função dos parâmetros dados. Construa uma relação entre os seus Πs que corresponda à expressão analítica exata da parte (*a*).

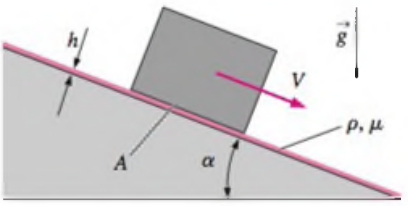


FIGURA P9–113

CAPÍTULO

10

SOLUÇÕES APROXIMADAS DA EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

Neste capítulo examinamos várias aproximações que eliminam termos, reduzindo a equação de Navier-Stokes a uma forma simplificada mais fácil de resolver. Às vezes essas aproximações são apropriadas em todo o campo de escoamento, mas na maioria dos casos, elas são apropriadas somente em certas *regiões* do campo de escoamento. Consideraremos primeiro o *escoamento lento*, onde o número de Reynolds é tão baixo que os termos viscosos dominam (e eliminam) os termos inerciais. Em seguida, examinamos as duas aproximações que são apropriadas em regiões de escoamento distantes das paredes e esteiras: *escoamento sem viscosidade* e *escoamento irrotacional* (também chamado de *escoamento potencial*). Nessas regiões, vale o oposto, ou seja, os termos inerciais dominam os termos viscosos. Finalmente, discutimos a *aproximação da camada limite*, na qual permanecem tanto termos inerciais quanto termos viscosos, mas alguns dos termos viscosos são desprezíveis. Essa última aproximação é apropriada para números de Reynolds *muito altos* (o oposto do escoamento lento) e próximo das paredes, o oposto do escoamento potencial.

OBJETIVOS

Ao terminar de ler este capítulo você deve ser capaz de:

- Apreciar por que as aproximações são necessárias para resolver muitos problemas de escoamento de fluido, e saberá quando e onde essas aproximações são apropriadas
- Entender os efeitos da ausência dos termos inerciais na aproximação do escoamento lento, incluindo o desaparecimento da massa específica nas equações
- Entender a superposição como um método para resolver problemas de escoamento potencial
- Prever a espessurra e outras propriedades da cama da limite

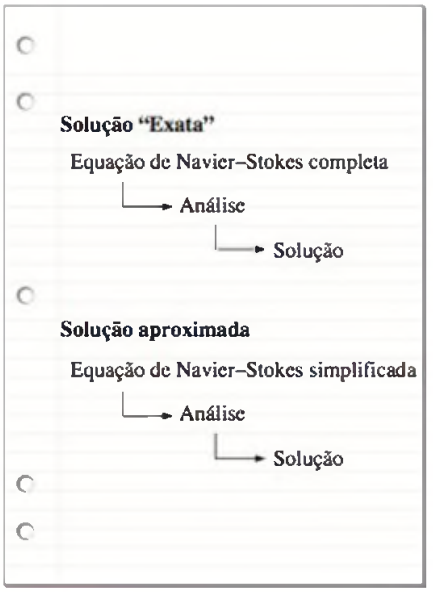


FIGURA 10–1
Soluções "Exatas" começam com a equação de Navier-Stokes completa, enquanto as soluções aproximadas começam com uma forma simplificada da equação de Navier-Stokes desde o início.

10–1 • INTRODUÇÃO

No Capítulo 9, deduzimos a equação diferencial da conservação do momento linear (ou movimento) para um fluido Newtoniano incompressível com propriedades constantes 2 a *equação de Navier-Stokes*. Mostramos alguns exemplos de soluções analíticas para essa equação para geometrias simples (usualmente infinitas), nas quais a maioria dos termos nas equações componentes é eliminada e as equações diferenciais resultantes são analiticamente solucionáveis. Infelizmente, não há muitas soluções analíticas conhecidas disponíveis na literatura; na verdade, podemos contar nos dedos de alguns estudantes o número de soluções desse tipo. A grande maioria dos problemas práticos de mecânica dos fluidos *não* pode ser resolvida analiticamente e requer (1) outras aproximações ou (2) o auxílio de um computador. Consideraremos aqui a opção 1; a opção 2 será discutida no Capítulo 15. Para simplificar, consideraremos neste capítulo somente escoamento de fluidos Newtonianos incompressíveis.

Primeiro vamos enfatizar que nem a própria equação de Navier-Stokes é *exata*, mas sim um *modelo* de escoamento de fluido envolvendo várias aproximações inerentes (fluido Newtoniano, propriedades termodinâmicas e de transporte constantes etc.). No entanto, ela é um modelo *excelente* e é o fundamento da mecânica dos fluidos moderna. Neste capítulo fazemos distinção entre soluções "exatas" e soluções aproximadas (Figura 10–1). O termo *exata* é usado quando a solução começa com a equação de Navier-Stokes *completa*. As soluções discutidas no Capítulo 9 são soluções exatas porque começamos cada uma delas com a forma completa da equação. Alguns termos são eliminados em um problema específico devido à geometria especificada ou outras hipóteses simplificadoras no problema. Em uma outra solução, os termos que são eliminados podem não ser os mesmos, mas dependem da geometria e das hipóteses daquele problema em particular. Por outro lado, definimos uma **solução aproximada**, como sendo aquela na qual a equação de Navier-Stokes é *simplificada* em alguma região do escoamento *antes mesmo de iniciarmos a solução*. Em outras palavras, são eliminados termos a priori dependendo da classe do problema, que pode diferir de uma região para outra no escoamento.

Por exemplo, nós já discutimos uma aproximação, ou seja, a *estática dos fluidos* (Capítulo 3). Isso pode ser considerado como uma aproximação da equação de Navier-Stokes em uma região do campo de escoamento, onde a velocidade do fluido não é necessariamente zero, mas o fluido está praticamente estagnado, e desprezamos todos os termos que envolvem velocidade. Nessa aproximação, a equação de Navier-Stokes se reduz a apenas dois termos, pressão e gravidade, ou seja, $\nabla P = \rho \vec{g}$. A aproximação é que os termos inerciais e viscosos na equação de Navier-Stokes são muito pequenos comparados com os termos de pressão e gravidade.

Embora as aproximações tornem o problema mais tratável, há um perigo associado com qualquer solução aproximada. Ou seja, se começarmos com uma aproximação que não seja apropriada, a solução será incorreta — mesmo se executarmos corretamente toda a matemática. Por quê? Porque começamos com equações que não se aplicam ao problema que temos para resolver. Por exemplo, podemos resolver um problema usando a aproximação do escoamento lento e obter uma solução que satisfaça todas as hipóteses e condições de contorno. No entanto, se o número de Reynolds do escoamento for muito alto, a aproximação do escoamento lento é inadequada desde o princípio, e nossa solução (mesmo que a consideremos maravilhosa) não é fisicamente correta. Um outro erro comum é supor escoamento irrotacional em regiões do escoamento onde a hipótese da irrotacionalidade não é adequada. *A conclusão final é que devemos ter muito cuidado com as aproximações que aplicamos, e devemos sempre verificar e justificar nossas aproximações onde for possível.*

Finalmente, insistimos no fato de que na maioria dos problemas práticos de escoamento de fluido, uma aproximação particular pode ser apropriada em uma certa *região* do campo de escoamento, mas não em outras regiões, onde uma outra aproximação pode, talvez, ser mais apropriada. A Figura 10–2 ilustra esse ponto qualitativamente para o escoamento de um líquido de um tanque para outro. A aproximação da estática dos fluidos é apropriada em uma região do tanque de ori-

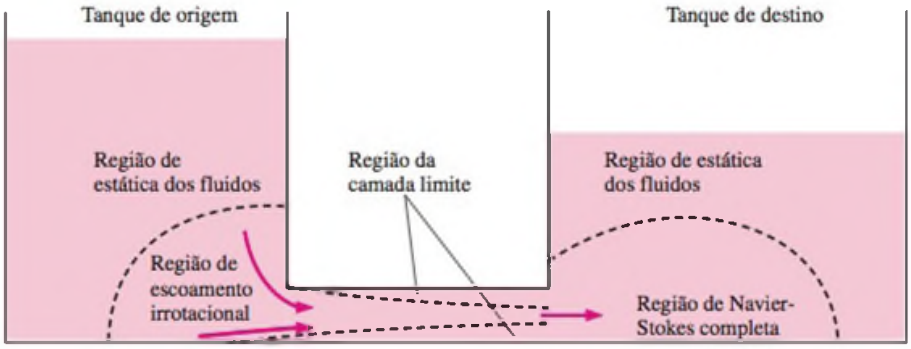


FIGURA 10–2
Uma aproximação particular da equação de Navier-Stokes é apropriada somente em certas regiões do campo de escoamento; outras aproximações podem ser apropriadas em outras regiões do campo de escoamento.

gem bem distante do tubo de conexão, e em uma extensão menor, no tanque de destino. A aproximação do escoamento irrotacional é apropriada próximo da entrada para o tubo de conexão e através da parte média do tubo onde não há efeitos viscosos intensos. Próximo às paredes, é apropriada a aproximação da camada limite. O escoamento em algumas regiões não satisfaz o critério de *nenhuma* aproximação, e nessas regiões deve ser resolvida a equação completa de Navier-Stokes (por exemplo, próximo da saída do tubo no tanque de destino). Como determinamos se uma aproximação é apropriada? Fazemos isso comparando as ordens de grandeza dos vários termos nas equações de movimento para ver se alguns termos são muito pequenos comparados com outros termos.

10–2 ▪ EQUAÇÕES DE MOVIMENTO NA FORMA ADIMENSIONAL

Nosso objetivo nesta seção é colocar as equações de movimento na forma adimensional de modo que possamos comparar apropriadamente as ordens de grandeza dos vários termos nas equações. Começamos com a equação da continuidade incompressível,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{10–1}$$

e com a forma vetorial da equação de Navier-Stokes, válida para o escoamento incompressível de um fluido Newtoniano com propriedades constantes,

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{V}\right] = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} \tag{10–2}$$

Introduzimos na Tabela 10–1 alguns *parâmetros de escala* característicos (para referência) que são usados para transformar as equações de movimento para a forma adimensional.

Definimos então várias *variáveis adimensionais* e um operador *adimensional* com base nos parâmetros de escala na Tabela 10–1,

$$t^* = ft \qquad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} \qquad \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V}$$
$$P^* = \frac{P - P_\infty}{P_0 - P_\infty} \qquad \vec{g}^* = \frac{\vec{g}}{g} \qquad \vec{\nabla}^* = L\vec{\nabla} \tag{10–3}$$

Observe que nós definimos a variável pressão adimensional em termos de uma *diferença* de pressão, baseados em nossa discussão sobre pressão *versus* diferenças de pressão no Capítulo 9. Todas as grandezas destacadas na Equação 10–3 são adimensionais. Por exemplo, embora cada componente do operador gradiente $\vec{\nabla}$ tenha dimensões de $\{L^{-1}\}$, cada componente de $\vec{\nabla}^*$ tem dimensões de $\{1\}$ (Figura 10–3). Substituímos a Equação 10–3 nas Equações 10–1 e 10–2, tratando cada termo cuidadosamente. Por exemplo, $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^*/L$ e $\vec{V} = V\vec{V}^*$, assim o termo da aceleração advectiva na Equação 10–2 torna-se:

Coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{L\partial\left(\frac{x}{L}\right)}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{y}{L}\right)}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{z}{L}\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{L}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{1}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) = \frac{1}{L}\vec{\nabla}^*$$

Coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{L\partial\left(\frac{r}{L}\right)}, \frac{1}{L\left(\frac{r}{L}\right)}, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{z}{L}\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{L}\left(\frac{\partial}{\partial r^*}, \frac{1}{r^*}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) = \frac{1}{L}\vec{\nabla}^*$$

FIGURA 10–3
O operador gradiente é colocado na forma adimensional pela Equação 10–3, independentemente de nossa escolha do sistema de coordenadas.

TABELA 10–1

Parâmetros de escala usados para colocar na forma adimensional as equações de continuidade e de momento, juntamente com suas dimensões primárias

Parâmetros de Escala	Descrição	Dimensões Primárias
L	Comprimento característico	$\{L\}$
V	Velocidade característica	$\{Lt^{-1}\}$
f	Freqüência característica	$\{t^{-1}\}$
$P_0 - P_\infty$	Diferença de pressão de referência	$\{mL^{-1}t^{-2}\}$
g	Aceleração gravitacional	$\{Lt^{-2}\}$

$$\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \rho\left(V\vec{V}^*\cdot\frac{\vec{\nabla}^*}{L}\right)V\vec{V}^* = \frac{\rho V^2}{L}\left(\vec{V}^*\cdot\vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^*$$

Executamos cálculos algébricos similares em cada termo nas Equações 10–1 e 10–2. A Equação 10–1 é reescrita em termos de variáveis adimensionais como:

$$\frac{V}{L}\vec{\nabla}^*\cdot\vec{V}^* = 0$$

Após dividir ambos os lados por V/L para tornar a equação adimensional, obtemos:

Equação da continuidade adimensional:

$$\vec{\nabla}^*\cdot\vec{V}^* = 0 \qquad (10\text{–}4)$$

De forma similar, a Equação 10–2 é reescrita como:

$$\rho Vf\frac{\partial\vec{V}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho V^2}{L}\left(\vec{V}^*\cdot\vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^* = -\frac{P_0 - P_\infty}{L}\vec{\nabla}^*P^* + \rho g\vec{g}^* + \frac{\mu V}{L^2}\nabla^{*2}\vec{V}^*$$

que, após multiplicação pela coleção de constantes $L/(\rho V^2)$ para tornar todos os termos adimensionais, transforma-se em:

$$\left[\frac{fL}{V}\right]\frac{\partial\vec{V}^*}{\partial t^*} + \left(\vec{V}^*\cdot\vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^* = -\left[\frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2}\right]\vec{\nabla}^*P^* + \left[\frac{gL}{V^2}\right]\vec{g}^* + \left[\frac{\mu}{\rho VL}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^* \qquad (10\text{–}5)$$

Cada um dos termos dentro dos colchetes na Equação 10–5 é um agrupamento de parâmetros adimensionais — um *grupo Pi* (Capítulo 7). Com a ajuda da Tabela 7–5, atribuímos nome a cada um desses parâmetros adimensionais: o da esquerda é o *número de Strouhal*, $\text{St} = fL/V$; o primeiro da direita é o *número de Euler*, $\text{Eu} = (P_0 - P_\infty)/\rho V^2$; o segundo, na direita, é o inverso do quadrado do *número de Froude*, $\text{Fr}^2 = V^2/gL$; e o último é o inverso do *número de Reynolds*, $\text{Re} = \rho VL/\text{m}$. A Equação 10–5 torna-se então:

Equação de Navier-Stokes adimensional:

$$[\text{St}]\frac{\partial\vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^*\cdot\vec{\nabla}^*)\vec{V}^* = -[\text{Eu}]\vec{\nabla}^*P^* + \left[\frac{1}{\text{Fr}^2}\right]\vec{g}^* + \left[\frac{1}{\text{Re}}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^* \qquad (10\text{–}6)$$

Antes de discutirmos aproximações específicas em detalhe, há muito a comentar sobre o conjunto de equações adimensionais formado pelas equações 10–4 e 10–6:

- A equação da continuidade adimensional *não* contém outros parâmetros adimensionais. Daí, a Equação 10–4 deve ser satisfeita como está — não podemos simplificar mais a equação da continuidade, porque todos os termos são da mesma ordem de grandeza.
- A ordem de grandeza das variáveis adimensionais é a unidade se elas forem colocadas na forma adimensional usando comprimento, velocidade, freqüência etc., que sejam características do campo de escoamento.

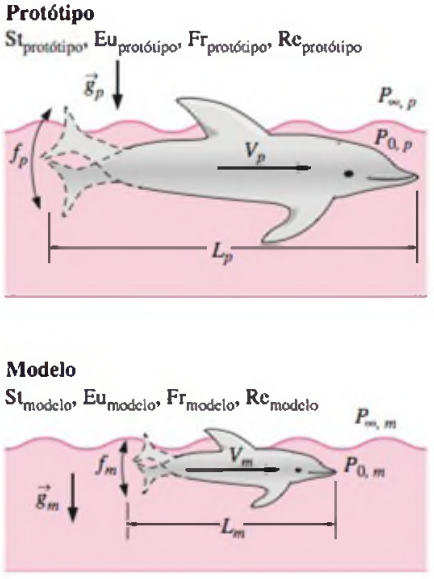


FIGURA 10–4
Para uma similaridade dinâmica completa entre protótipo (subscrito p) e modelo (subscrito m), o modelo deve ser geometricamente similar ao protótipo, e (em geral) os quatro parâmetros adimensionais, St, Eu, Fr e Re, devem ser iguais.

Assim, $t^* \sim 1$, $\vec{x}^* \sim 1$, $\vec{V}^* \sim 1$ etc., onde usamos a notação ~ para representar a ordem de grandeza. Conclui-se que termos como $(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^*$ e $\vec{\nabla}^* P^*$ na Equação 10–6 também são de ordem de grandeza unitária e são da mesma ordem de grandeza entre si. Assim, *a importância relativa dos termos na Equação 10–6 depende somente das grandezas relativas dos parâmetros adimensionais* St, Eu, Fr e Re. Por exemplo, se St e Eu forem da ordem de 1, mas Fr e Re forem muito grandes, podemos pensar em ignorar os termos gravitacional e viscoso na equação de Navier-Stokes.

- Como há quatro parâmetros adimensionais na Equação 10–6, a *similaridade dinâmica* entre um modelo e um protótipo requer que os quatro parâmetros sejam os mesmos para o modelo e o protótipo ($St_{modelo} = St_{protótipo}$, $Eu_{modelo} = Eu_{protótipo}$, $Fr_{modelo} = Fr_{protótipo}$, $Re_{modelo} = Re_{protótipo}$), conforme ilustra a Figura 10–4.
- Se o escoamento for em regime *permanente*, então $f = 0$ e o número de Strouhal é cancelado da lista de parâmetros adimensionais (St = 0). O primeiro termo no lado esquerdo da Equação 10–6 então desaparece, como também seu correspondente termo permanente $\partial\vec{V}/\partial t$ na Equação 10–2. Se a freqüência característica *f* for muito *pequena* de maneira que $St << 1$, o escoamento é chamado de **quase-permanente.** Isso significa que a qualquer instante no tempo (ou em qualquer fase de um ciclo periódico lento), podemos resolver o problema como se o fluxo fosse permanente, e o termo permanente na Equação 10–6 novamente se cancela.
- O efeito da gravidade é importante somente em escoamentos com *efeitos de superfície livre* (por exemplo, ondas, movimento de navio, transbordamentos de represas hidrelétricas e escoamento de rios). Para muitos problemas de engenharia *não há* superfície livre (escoamento em cano, escoamento totalmente submerso ao redor de um submarino ou torpedo, movimento de um automóvel, vôo de aviões, pássaros, insetos etc.). Em casos assim, o único efeito da gravidade sobre a dinâmica do escoamento é uma *distribuição de pressão hidrostática* na direção vertical sobreposta ao campo de pressão devido ao escoamento do fluido. Em outras palavras,

  Para escoamentos sem efeitos de superfície livre, a gravidade não afeta a dinâmica do fluido — seu único efeito é sobrepor uma pressão hidrostática ao campo dinâmico de pressão.

- Definimos uma **pressão modificada** P' que absorve o efeito da pressão hidrostática. Para o caso no qual *z* é definido verticalmente para cima (oposto à direção do vetor gravidade), e no qual definimos algum plano de referência arbitrário em $z = 0$,

Pressão modificada: $$P' = P + \rho g z \qquad (10\text{–}7)$$

A idéia é substituir os dois termos $-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}$ na Equação 10–2 por *um* termo $-\vec{\nabla}P'$ usando a pressão modificada da Equação 10–7. A equação de Navier-Stokes (Equação 10–2) é escrita na forma modificada como:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = -\vec{\nabla}P' + \mu\nabla^2\vec{V} \qquad (10\text{–}8)$$

Com *P* substituído por P', e com o termo da gravidade removido da Equação 10–2, o número de Froude é cancelado da lista de parâmetros adimensionais. A vantagem é que podemos resolver uma forma da equação de Navier-Stokes que *não tem nenhum termo da gravidade*. Após resolver a equação de Navier-Stokes em termos da pressão modificada P', é uma questão simples de acrescentar novamente a distribuição de pressão hidrostática usando a Equação 10–7. A Figura 10–5 mostra um exemplo para o caso de escoamento Couette bidimensional. A pressão modificada é usada freqüentemente em programas de

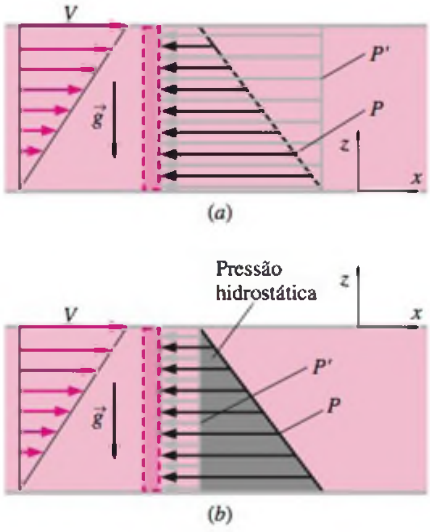


FIGURA 10–5
Distribuição de pressão e pressão modificada na face direita de um elemento de fluido em escoamento Couette entre duas placas paralelas, horizontais e infinitas: (*a*) $z = 0$ na placa inferior e (*b*) $z = 0$ na placa superior. A pressão modificada P' é constante, mas a pressão real P não é constante em nenhum dos casos. A área sombreada em (*b*) representa o componente da pressão hidrostática.

FIGURA 10–6
O escoamento de um líquido muito viscoso como o mel é classificado como escoamento lento.

Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) para separar os efeitos gravitacionais (pressão hidrostática na direção vertical) dos efeitos (dinâmicos) do escoamento do fluido. Note que a pressão modificada *não* deve ser usada em escoamentos com efeitos de superfície livre.

Agora estamos prontos para fazer algumas aproximações, nas quais eliminamos um ou mais termos na Equação 10–2, comparando as grandezas relativas dos parâmetros adimensionais associados com os termos correspondentes na Equação 10–6.

10–3 • A APROXIMAÇÃO DE ESCOAMENTO LENTO

Nossa primeira aproximação é a classe de escoamento de fluido chamada de **escoamento lento.** Outros nomes para essa classe de escoamento incluem **escoamento de Stokes** e **escoamento com baixo número de Reynolds.** Conforme indica esse último nome, esses são escoamentos nos quais o número de Reynolds é muito pequeno (Re << 1). Olhando a definição do número de Reynolds, Re = $\rho VL/m$, vemos que o escoamento lento ocorre quando ρ, ou V, ou L é muito pequeno ou a viscosidade é muito grande (ou uma combinação destes). Você encontra o escoamento lento quando despeja melaço (um líquido muito viscoso) sobre as suas panquecas ou quando mergulha uma colher em um pote de mel (também muito viscoso) para colocar no seu chá (Figura10–6).

Um outro exemplo de escoamento lento está ao nosso redor e dentro de nós, embora não possamos vê-lo, ou seja, o escoamento ao redor de organismos microscópicos. Os microorganismos passam a vida inteira no regime de escoamento lento porque eles são muito pequenos, sendo seu tamanho da ordem de um mícron (1 μm = 10^{-6} m) e eles se movem muito lentamente, apesar de se moverem no ar ou nadarem na água, onde a viscosidade dificilmente pode ser classificada como "alta" ($\mu_{ar} \cong 1{,}8 \times 10^{-5}$ N · s/m^2 e $\mu_{água} \cong 1{,}0 \times 10^{-3}$ N · s/m^2 à temperatura ambiente). A Figura 10–7 mostra uma bactéria *Salmonela* nadando na água. O corpo da bactéria tem aproximadamente só 1 mm de comprimento; seus *flagelos* (cauda muito fina) se estendem várias micra para trás do corpo e servem como mecanismo de propulsão. O número de Reynolds associado com seu movimento é muito menor do que 1.

O escoamento lento também ocorre no escoamento de óleo lubrificante em espaços e canais muito pequenos de um mancal lubrificado. Neste caso, as velocidades podem não ser pequenas, mas o espaço é muito pequeno (da ordem de dezenas de micra), e a viscosidade é relativamente grande ($\mu_{óleo} \sim 1$ N · s/m^2 na temperatura ambiente).

Para simplificar, vamos assumir que os efeitos gravitacionais são desprezíveis, ou que eles contribuem somente para a componente da pressão hidrostática, conforme já discutimos anteriormente. Supomos também um escoamento permanente ou oscilante, com um número de Strouhal de aproximadamente um (St ~ 1) ou menor, de forma que o termo da aceleração não permanente [St] $\partial\vec{V}^*/\partial t^*$ é de uma ordem de grandeza muito menor do que o termo viscoso $[1/\mathrm{Re}]\vec{\nabla}^{*2}\vec{V}^*$ (o número de Reynolds é muito pequeno). O termo advectivo na Equação 10–6 é da ordem de 1, $(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^* \sim 1$, 1, assim esse termo é cancelado também. Então, ignoramos o lado esquerdo inteiro da Equação 10–6, que se reduz a:

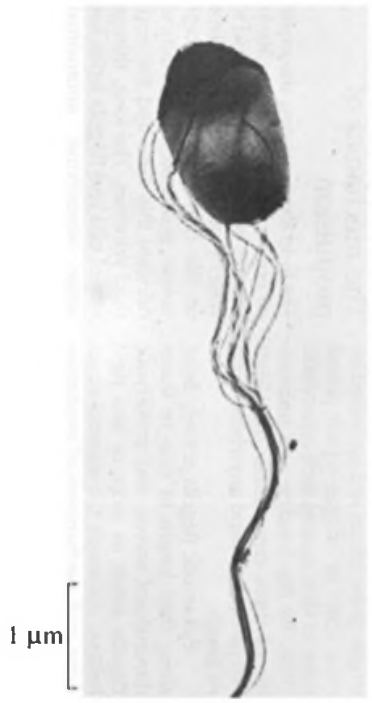


FIGURA 10–7
A bactéria *Salmonella abortusequi* nadando na água.
De: Comparative Physiology Functional Aspects of Structural Materials: Proceedings of the International Conference on Comparative Physiology, Ascona, 1974, publicado por North-Holland Pub. Co., 1975.

Aproximação de escoamento lento:
$$[\mathrm{Eu}]\vec{\nabla}^*P^* \cong \left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\right]\vec{\nabla}^{*2}\vec{V}^* \qquad (10\text{–}9)$$

Em outras palavras, as forças de pressão no escoamento (lado esquerdo) devem ser suficientemente grandes para equilibrar as forças viscosas relativamente grandes no lado direito. No entanto, como as variáveis adimensionais na Equação 10–9 são da ordem de 1, a única maneira de equilibrar os dois lados da equação é se Eu for da mesma ordem de grandeza de 1/Re. Equacionando tudo isso:

$$[\text{Eu}] = \frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2} \sim \left[\frac{1}{\text{Re}}\right] = \frac{\mu}{\rho V L}$$

Após algumas operações algébricas:

Escala de pressão para o escoamento lento: $$P_0 - P_\infty \sim \frac{\mu V}{L} \qquad (10\text{–}10)$$

A Equação 10–10 revela duas propriedades interessantes do escoamento lento. Na primeira, estamos habituados com os escoamentos dominados pela inércia, nos quais as diferenças de pressão são da ordem de ρV^2 (por exemplo, a equação de Bernoulli). Aqui, no entanto, as diferenças de pressão são da ordem de $\mu V/L$, já que o escoamento lento é um escoamento *dominado pela viscosidade*. Na verdade, *todos os termos inerciais da equação de Navier-Stokes desaparecem no escoamento lento*. Na segunda, a *densidade desapareceu completamente como parâmetro na equação de Navier-Stokes* (Figura10–8). Vemos isso mais claramente escrevendo a forma *dimensional* da Equação 10–9,

Equação de Navier-Stokes aproximada para o escoamento lento:

$$\vec{\nabla} P \cong \mu \nabla^2 \vec{V} \qquad (10\text{–}11)$$

Os leitores mais atentos poderão argumetar que a densidade ainda desempenha um *pequeno* papel no escoamento lento. Ou seja, ela é necessária no cálculo do número de Reynolds. No entanto, uma vez que determinamos que Re é muito pequeno, a densidade não é mais necessária já que ela não aparece na Equação 10–11. A densidade também aparece no termo da pressão hidrostática, mas esse efeito usualmente é desprezível no escoamento lento, pois as distâncias verticais envolvidas freqüentemente são medidas em milímetros ou micra. Além disso, se não houver efeitos de superfície livre, podemos usar a pressão modificada em lugar da pressão física na Equação 10–11.

Vamos discutir a ausência dos termos de inércia na Equação 10–11 com um pouco mais de detalhes. Você depende da inércia quando nada (Figura 10–9). Por exemplo, você dá um impulso, e então pode deslizar por uma certa distância até precisar dar outro impulso. Quando você nada, os termos inerciais na equação de Navier-Stokes são muito maiores do que os termos viscosos, pois o número de Reynolds é muito grande. (Acredite se quiser, mas o fato é que mesmo nadadores extremamente *lentos* se movimentam com números de Reynolds muito *grandes*!)

No entanto, no caso dos microorganismos nadando no regime escoamento lento, há uma inércia desprezível, e portanto não é possível o deslizamento. Na verdade, a ausência dos termos inerciais na Equação 10–11 tem um impacto substancial na maneira como os microorganismos nadam. Uma cauda oscilante como aquela do golfinho não os levaria a lugar nenhum. Em vez disso, eles possuem caudas longas e finas (*flagella*) que ondulam em um movimento senoidal para impulsioná-los para frente, como está ilustrado na Figura 10–10 para o caso do esperma. Sem qualquer inércia, o esperma não se move a menos que sua cauda esteja em movimento. No instante em que sua cauda pára de se movimentar, o esperma pára de se mover. Se você já viu algum clipe de vídeo mostrando um esperma ou outros microorganismos nadando, deve ter percebido como eles precisam fazer um grande esforço para se mover a uma distância curta. Essa é a natureza do escoamento lento, e ela é devida à ausência de inércia. Um estudo cuidadoso da Figura 10–10 mostra que a cauda do esperma completou aproximadamente dois ciclos de ondulação, embora a cabeça do esperma tenha se movido para a esquerda somente uma distância equivalente a duas vezes o comprimento da cabeça.

É muito difícil para nós humanos imaginar como seria nosso movimento em condições de escoamento lento, pois estamos muito habituados aos efeitos da inércia. Alguns autores sugerem que você imagine como se estivesse tentando nadar em um tanque de mel. Nós, por outro lado, sugerimos que você vá a um desses restaurantes ou lojas que têm um playground com um daqueles tanques cheios de boli-

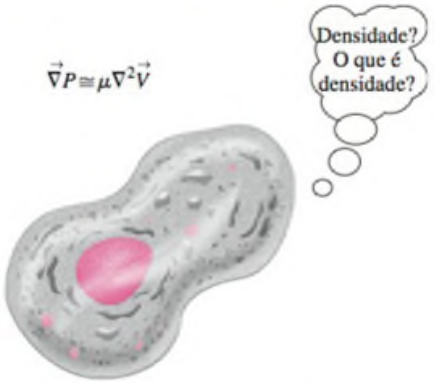


FIGURA 10–8
Na aproximação escoamento lento, a massa específica não aparece na equação da quantidade de movimento.

FIGURA 10–9
Uma pessoa nada com um número de Reynolds muito alto, e os termos inerciais são grandes; assim a pessoa pode deslizar a grandes distâncias sem se movimentar.

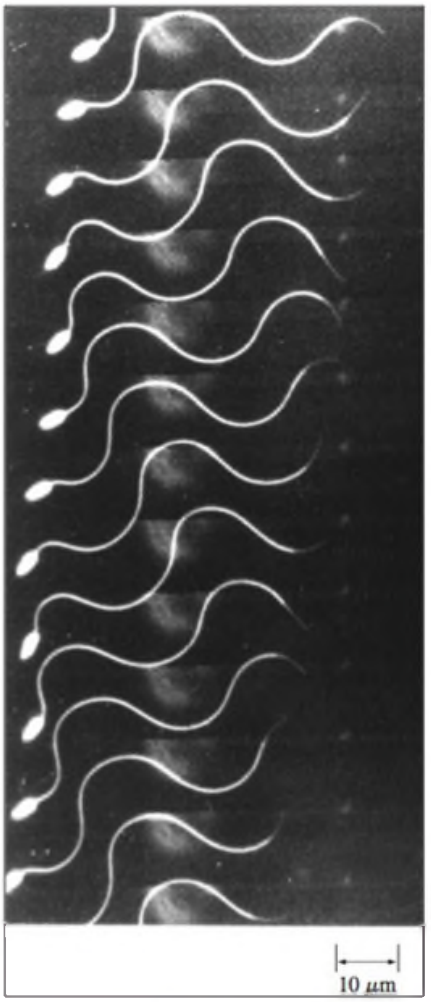


FIGURA 10–10
Um esperma do tunicado marinho *Ciona* nadando na água do mar; fotografias com "flash" a 200 quadros por segundo.
Cortesia de Charlotte Omoto e Charles J. Brokaw. Usada com permissão.

FIGURA 10–11
Uma criança tentando se mover em uma piscina de bolinhas plásticas é análogo a um microorganismo tentando se movimentar sem as vantagens da inércia.

nhas plásticas e observe as crianças tentando nadar no tanque (Figura 10–11). Quando a criança tenta "nadar" entre as bolas (sem tocar as paredes ou o fundo do tanque) ela só pode se mover para frente fazendo movimentos com o corpo como se fosse uma serpente. No instante em que a criança deixa de se mover, cessa todo o movimento, pois a inércia é desprezível. A criança tem que fazer um grande esforço para se mover para a frente a uma pequena distância. Há uma analogia fraca entre uma criança "nadando" nesse tipo de situação e um microorganismo nadando em condições de escoamento lento.

Agora vamos discutir a ausência da densidade na Equação 10–11. Com números de Reynolds altos, o arrasto aerodinâmico sobre um objeto aumenta proporcionalmente com ρ. (Fluidos densos exercem maior pressão sobre o corpo quando o fluido se choca com o corpo.) No entanto, este é na realidade um efeito inercial, e a inércia é desprezível no escoamento lento. Na verdade, o arrasto aerodinâmico não pode nem mesmo ser uma *função* da densidade, pois a densidade desapareceu da equação de Navier-Stokes. O Exemplo 10–1 ilustra essa situação através do uso da análise dimensional.

EXEMPLO 10–1 **Arrasto em um Objeto em Escoamento Lento**

Como a densidade desapareceu da equação de Navier-Stokes, o arrasto aerodinâmico sobre um objeto em escoamento lento é uma função somente de sua velocidade V, algum comprimento característico de escala L do objeto, e da viscosidade m do fluido (Figura 10–12). Use a análise dimensional para gerar uma relação para F_D em função dessas variáveis independentes.

SOLUÇÃO Vamos usar a análise dimensional para gerar uma relação funcional entre F_D e as variáveis V, L, e μ.
Hipóteses **1** Consideramos que Re << 1 de modo que pode ser aplicada a aproximação do escoamento lento. **2** Os efeitos gravitacionais são irrelevantes. **3** Não há nenhum parâmetro relevante além daqueles listados no enunciado do problema.
Análise Seguiremos o método passo a passo das variáveis de repetição discutido no Capítulo 7; os detalhes ficam como exercício. Há quatro parâmetros nesse problema ($n = 4$). Há três dimensões primárias: massa, comprimento e tempo, assim, fazemos $j = 3$ e usamos as variáveis independentes V, L, e μ como nossas variáveis de repetição. Esperamos encontrar somente um Pi, pois $k = n - j = 4 - 3 = 1$, e aquele Pi deve ser igual a uma constante. O resultado é:

$$F_D = \text{constante} \cdot \mu VL$$

Assim, demonstramos que para o escoamento lento ao redor de qualquer objeto tridimensional, a força de arrasto aerodinâmico é simplesmente uma constante multiplicada por μVL.
Discussão Esse resultado é importante, porque fica faltando apenas determinar a constante, que é uma função apenas da forma do objeto.

Arrasto em uma Esfera em Escoamento Lento

Como foi mostrado no Exemplo 10–1, a força de arrasto F_D sobre um objeto tridimensional de dimensão característica L movendo-se em condições de escoamento lento à velocidade V através de um fluido com viscosidade m é F_D = constante · μVL. A análise dimensional não pode prever o valor da constante, pois ela depende da forma e orientação do corpo no campo de escoamento.

Para o caso particular de uma *esfera*, a Equação 10–11 pode ser resolvida analiticamente. Os detalhes estão além do escopo deste livro, mas podem ser encontrados em livros no nível de graduação em mecânica dos fluidos (White, 1991; Panton, 1996). Concluímos que a constante na equação de arrasto é igual a 3π se L for o diâmetro D da esfera (Figura 10–13).

Força de arrasto sobre uma esfera em escoamento lento: $F_D = 3\pi\mu VD$ **(10–12)**

Como observação, podemos dizer que dois terços desse arrasto são devidos a forças viscosas e o outro terço é devido a forças de pressão. Isso confirma que os termos viscosos e os termos de pressão na Equação 10–11 são da mesma ordem de grandeza, conforme mencionamos anteriormente.

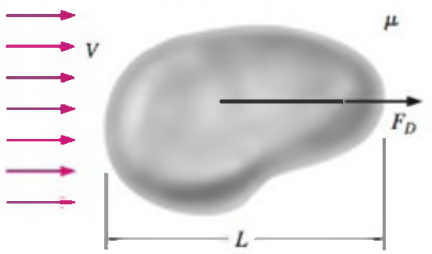


FIGURA 10–12
Para escoamento lento sobre um objeto tridimensional, o arrasto aerodinâmico sobre o objeto não depende da densidade, mas somente da velocidade V, de um comprimento característico L do objeto, e da viscosidade μ do fluido.

EXEMPLO 10–2 Velocidade Final de uma Partícula de um Vulcão

Um vulcão entrou em erupção, expelindo rochas, vapor e cinzas a milhares de metros de altura na atmosfera (Figura 10–14). Após algum tempo, as partículas começam a cair na terra. Considere uma partícula aproximadamente esférica de diâmetro igual a 50μm, caindo no ar cuja temperatura é −50°C e cuja pressão é 55kPa. A densidade da partícula é 1240 kg/m^3. Estime a velocidade final dessa partícula nessa altitude.

SOLUÇÃO Vamos estimar a velocidade final de uma partícula de cinza que cai.
Hipóteses **1** O número de Reynolds é muito pequeno (precisamos verificar essa hipótese após obter a solução). **2** A partícula é esférica.
Propriedades Na temperatura e pressão dadas, a lei dos gases ideais nos fornece ρ= 0,8588 kg/m^3. Como a viscosidade é uma função muito pouco dependente da pressão, usamos o valor a −50°C e a pressão atmosférica, μ = 1,474 × 10^{-5}kg/m · s.
Análise Tratamos o problema como quase-permanente. Uma vez que a partícula que está caindo tenha atingido sua velocidade final, a força resultante para baixo (peso) equilibra a força resultante para cima (arrasto aerodinâmico + flutuação), como está ilustrado na Figura 10–15.

Força para baixo: $$F_{\text{para baixo}} = W = \pi\frac{D^3}{6}\rho_{\text{partícula}}g \quad \textbf{(1)}$$

A força de arrasto aerodinâmico agindo sobre a partícula é obtida da Equação 10–12, e a força de flutuação é o peso do ar deslocado. Assim:

Força para cima: $$F_{\text{para cima}} = F_D + F_{\text{flutuação}} = 3\pi\mu VD + \pi\frac{D^3}{6}\rho_{\text{ar}}g \quad \textbf{(2)}$$

Igualamos as Equações 1 e 2 e resolvemos para determinar a velocidade final V:

$$V = \frac{D^2}{18\mu}(\rho_{\text{partícula}} - \rho_{\text{ar}})g$$

$$= \frac{(50 \times 10^{-6}\ \text{m})^2}{18(1{,}474 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s})}[(1240 - 0{,}8588)\ \text{kg/m}^3](9{,}81\ \text{m/s}^2)$$

$$= \mathbf{0{,}115\ m/s}$$

Finalmente, verificamos que o número de Reynolds é suficientemente pequeno de forma que a aproximação de escoamento lento é uma aproximação adequada:

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{ar}}VD}{\mu} = \frac{(0{,}8588\ \text{kg/m}^3)(0{,}115\ \text{m/s})(50 \times 10^{-6}\ \text{m})}{1{,}474 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 0{,}335$$

Assim o número de Reynolds é menor do que 1, mas certamente *não muito menor* do que 1.
Discussão Embora a equação para o arrasto do escoamento lento sobre uma esfera (Equação 10–12) tenha sido deduzida para um caso com Re $\ll$ 1, na realidade, a aproximação é razoável até Re $\cong$ 1. Um cálculo mais sofisticado, incluindo uma correção do número de Reynolds e uma correção baseada no caminho livre médio das moléculas do ar, resulta em uma velocidade final de 0,110 m/s (Heinsohn e Cimbala, 2003); o erro da aproximação de escoamento lento é menor do que 5%.

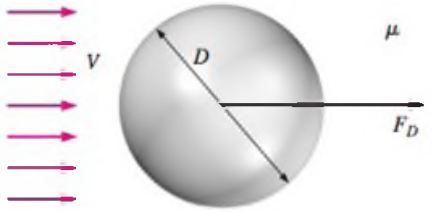


FIGURA 10–13
O arrasto aerodinâmico sobre uma esfera de diâmetro D em escoamento lento é igual a $3\pi\mu VD$.

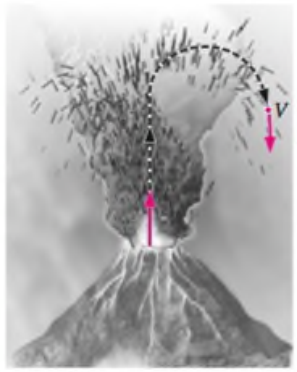


FIGURA 10–14
Uma partícula caindo com uma velocidade final constante não tem aceleração; portanto seu peso é equilibrado pelo arrasto aerodinâmico e a força de flutuação agindo sobre a partícula.

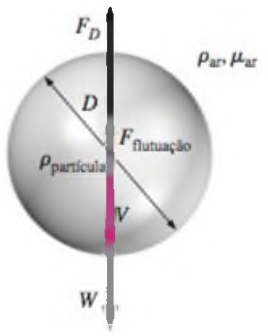


FIGURA 10–15
Pequenas partículas de cinza expelidas por um vulcão descem lentamente para o solo; a aproximação do escoamento lento é razoável para esse tipo de campo de escoamento.

Uma conseqüência do desaparecimento da densidade das equações de movimento para o escoamento lento é vista claramente no Exemplo 10–2. Isto é, a densidade do ar não é importante em nenhum cálculo exceto para verificar que o número de Reynolds é pequeno. (Note que como ρ_{ar} é muito pequena comparada com $\rho_{partícula}$, a força de flutuação poderia ter sido ignorada com uma pequena perda de precisão.) Por outro lado, suponha que a densidade do ar fosse metade da massa específica verdadeira no Exemplo 10–2, mas todas as outras propriedades permanecessem inalteradas a velocidade final seria a mesma (até três algarismos significativos), exceto que o número de Reynolds seria menor por um fator de 2. Portanto:

A velocidade final de uma partícula pequena e densa em condições de escoamento lento é independente da densidade do fluido, mas altamente dependente da viscosidade do fluido.

Como a viscosidade do ar varia com a altitude somente aproximadamente 25%, uma pequena partícula cai com velocidade aproximadamente constante independentemente da altitude, apesar de a densidade do ar aumentar por um fator maior do que 10 à medida que a partícula cai de uma altitude de 15.000 m até o nível do mar.

Para objetos tridimensionais não esféricos, o arrasto aerodinâmico do escoamento lento ainda é dado por F_D = constante · μVL; no entanto, a constante não é 3π, mas depende da forma e orientação do corpo. A constante pode ser considerada como uma espécie de **coeficiente de arrasto** para o escoamento lento.

10–4 • APROXIMAÇÃO PARA REGIÕES DO ESCOAMENTO SEM VISCOSIDADE

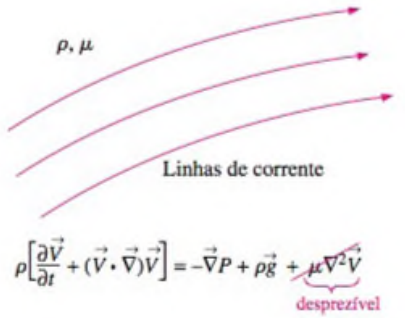


FIGURA 10–16
Uma região de escoamento sem viscosidade é uma região onde as forças viscosas resultantes são desprezíveis comparadas com as forças inerciais e/ou de pressão, porque o número de Reynolds é grande; o próprio fluido ainda é um fluido viscoso.

Há muita confusão na literatura de mecânica dos fluidos sobre o termo **"sem viscosidade"** e a frase **escoamento sem viscosidade.** O significado aparente de sem viscosidade é *não viscoso*. Escoamento sem viscosidade parece então se referir ao escoamento de um fluido sem viscosidade. No entanto, *não* é isso que significa a frase "escoamento sem viscosidade"! Todos os fluidos de importância na engenharia tem viscosidade, independentemente do campo de escoamento. Os autores que usam a frase escoamento sem viscosidade na realidade querem dizer escoamento de um *fluido viscoso* em uma *região* do escoamento na qual as *forças viscosas resultantes são desprezíveis comparadas com as forças de pressão e/ou inerciais* (Figura 10–16). Alguns autores usam a frase "escoamento sem atrito" como sinônimo de escoamento sem viscosidade. Isso causa mais confusão, porque mesmo em regiões do escoamento onde as forças viscosas resultantes são desprezíveis, *o atrito ainda age sobre elementos de fluido*, e podem existir ainda *tensões viscosas* significativas. Ocorre que essas tensões se cancelam entre si, não deixando *força viscosa resultante* significativa nos elementos de fluido. Pode-se mostrar que uma *dissipação viscosa* significativa pode também estar presente nessas regiões. Conforme discutiremos na Seção 10–5, elementos de fluido em uma região *irrotacional* do escoamento também tem *forças viscosas resultantes* desprezíveis — não porque não haja atrito, mas porque as tensões de atrito (viscosas) se cancelam entre si. Devido à confusão causada pela terminologia, os autores atuais não recomendam o uso das frases "escoamento sem viscosidade" e "escoamento sem atrito" ou "fricção". Em vez disso, nós recomendamos o uso das frases *regiões de escoamento sem viscosidade* ou *regiões de escoamento com forças viscosas desprezíveis*.

Independentemente da terminologia usada, se as forças viscosas resultantes forem muito pequenas comparadas com as forças inerciais e/ou de pressão, o último termo no lado direito da Equação 10–6 é desprezível. Isso vale somente se 1/Re for pequeno. Portanto, regiões de escoamento sem viscosidade são regiões de *altos números de Reynolds* — o oposto das regiões de escoamento lento. Nessas regiões, a equação de Navier-Stokes (Equação 10–2) perde seu termo viscoso e se reduz à **equação de Euler**:

Equação de Euler:
$$\rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} \qquad \textbf{(10–13)}$$

A equação de Euler é simplesmente a equação de Navier-Stokes com o termo viscoso ignorado; ela é uma *aproximação* da equação de Navier-Stokes.

Devido à condição de não-escorregamento nas paredes sólidas, as forças de atrito *não* são desprezíveis em uma região de escoamento muito próxima de uma parede sólida. Nessa região, chamada de **camada limite**, os gradientes de velocidade normais à parede são suficientemente grandes para modificar o pequeno valor de 1/Re. Uma explanação alternativa é que comprimento de escala característico do corpo (L) não é mais o comprimento de escala apropriado dentro de uma camada limite e deve ser substituído por um comprimento de escala muito menor associado com a distância da parede. Quando definimos o número de Reynolds com esse comprimento de escala menor, Re deixa de ser um valor alto, e o termo viscoso na equação de Navier-Stokes não pode ser desprezado.

Um argumento similar pode ser apresentado na *esteira* de um corpo, onde os gradientes de velocidade são relativamente grandes e os termos viscosos não são desprezíveis comparados com os termos inerciais (Figura 10–17). Na prática, portanto, ocorre que:

> A aproximação da equação de Euler é apropriada em regiões de alto número de Reynolds do escoamento, onde as forças viscosas resultantes são desprezíveis, muito distante das paredes e esteiras.

O termo que é desprezado na aproximação de Euler da equação de Navier-Stokes ($\mu\nabla^2\vec{V}$) é o termo que contém as derivadas de ordem mais alta, da velocidade. Matematicamente, a perda desse termo reduz o número de condições de contorno que podemos especificar. Quando usamos a aproximação da equação de Euler, *não podemos* especificar a condição de contorno de não-escorregamento nas paredes sólidas, embora ainda especificamos que o fluido não pode fluir *através* da parede (a parede é *impermeável*). As soluções da equação de Euler portanto, não têm significado físico próximo a paredes sólidas, pois ali o escoamento pode escorrer. No entanto, conforme mostramos na Seção 10–6, a equação de Euler freqüentemente é usada como um *primeiro passo* em uma aproximação de camada limite. Ou seja, a equação de Euler é aplicada sobre todo o campo de escoamento, incluindo regiões próximas a paredes e esteiras, onde sabemos que a aproximação não é apropriada. Então, uma fina camada limite é inserida nessas regiões como uma correção para levar em conta os efeitos viscosos.

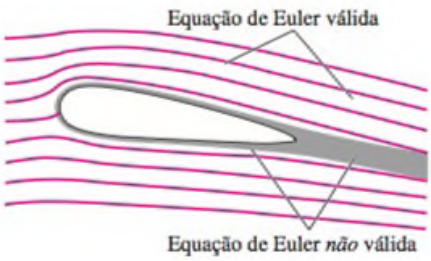


FIGURA 10–17
A equação de Euler é uma aproximação apropriada da equação de Navier-Stokes, somente em regiões do escoamento onde o número de Reynolds é grande e onde as forças viscosas resultantes são desprezíveis comparadas com as forças inerciais e/ou de pressão.

Dedução da Equação de Bernoulli em Regiões de Escoamento sem Viscosidade

No Capítulo 5, deduzimos a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente. Mostramos aqui uma dedução alternativa baseada na equação de Euler. Para simplificar, supomos escoamento permanente incompressível. O termo advectivo na Equação 10–13 pode ser reescrito através do uso de uma identidade vetorial:

Identidade vetorial:
$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \qquad \textbf{(10–14)}$$

onde V é o módulo do vetor $\vec{V}$. Reconhecemos o segundo termo $\vec{\zeta}$ entre parênteses no lado direito como sendo o *vetor vorticidade* $\vec{\zeta}$ (veja o Capítulo 4); portanto:

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\zeta}$$

e uma forma alternativa da equação de Euler permanente é escrita como:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\zeta} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} = \vec{\nabla}\left(-\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g} \qquad \textbf{(10–15)}$$

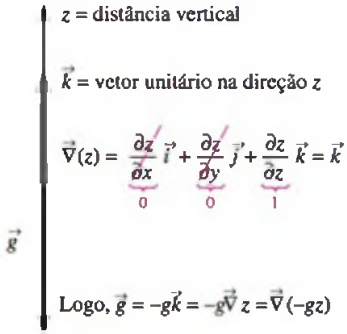


FIGURA 10–18
Quando a gravidade age na direção z, o vetor gravidade $\vec{g}$ pode ser escrito como $\vec{\nabla}(-gz)$.

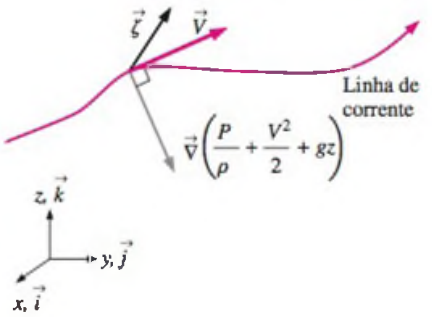


FIGURA 10–19
Ao longo de uma linha de corrente, $\vec{\nabla}(P/\rho + V^2/2 + gz)$ é um vetor em todos os pontos perpendicular à linha de corrente; portanto, $P/\rho + V^2/2 + gz$ é constante ao longo da linha de corrente.

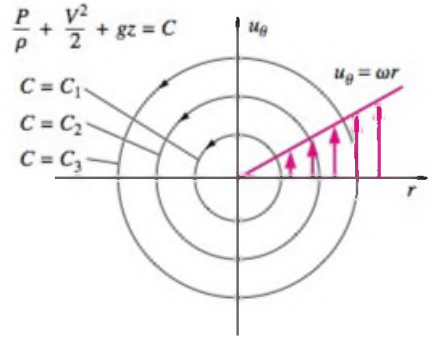


FIGURA 10–20
A rotação de corpo sólido é um exemplo de uma região de escoamento sem viscosidade que também é rotacional. A constante C de Bernoulli difere de uma linha de corrente para outra, mas é constante ao longo de uma determinada linha de corrente.

onde dividimos cada termo pela densidade e mudamos ρ para dentro do operador gradiente, já que a densidade é constante em um escoamento incompressível.

Supomos ainda que a gravidade age somente na direção z (Figura 10–18), de modo que:

$$\vec{g} = -g\vec{k} = -g\vec{\nabla}z = \vec{\nabla}(-gz) \qquad \textbf{(10–16)}$$

onde usamos o fato de que o gradiente da coordenada z é o vetor unitário $\vec{k}$ na direção z. Note também que g é uma constante, o que nos permite movê-la (com o sinal negativo) para dentro do operador gradiente. Substituímos a Equação 10–16 na Equação 10–15 e fazemos uma nova organização combinando três termos dentro de um mesmo operador gradiente:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\right) = \vec{V}\times\vec{\zeta} \qquad \textbf{(10–17)}$$

Da definição do produto vetorial de dois vetores, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, o vetor $\vec{C}$ é perpendicular a $\vec{A}$ e $\vec{B}$. O lado esquerdo da Equação 10–17 deve portanto ser um vetor perpendicular ao vetor velocidade local $\vec{V}$ em todos os pontos já que $\vec{V}$ aparece no produto vetorial ao lado direito da Equação 10–17. Considere agora o escoamento ao longo de uma linha de corrente tridimensional (Figura 10–19), que por definição é *paralela* em todos os pontos ao vetor velocidade local. Em todos os pontos ao longo da linha de corrente, $\vec{\nabla}(P/\rho + V^2/2 + gz)$ deve ser perpendicular à linha de corrente. Agora vamos tirar o pó de nosso livro de álgebra vetorial e recordar que o gradiente de um escalar aponta na direção de *aumento máximo* do escalar. Além disso, o gradiente de um escalar é um vetor que aponta perpendicularmente para uma superfície imaginária na qual o escalar é constante. Portanto, afirmamos que o escalar $(P/\rho + V^2/2 + gz)$ deve ser *constante ao longo de uma linha de corrente*. Isso acontece mesmo se o escoamento for *rotacional* ($\vec{\zeta} \neq 0$). Assim, nós deduzimos uma versão da equação de Bernoulli permanente incompressível, apropriada em regiões do escoamento com forças viscosas resultantes desprezíveis, isto é, nas regiões do escoamento sem viscosidade.

Equação de Bernoulli permanente incompressível em regiões de escoamento sem viscosidade:

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz = C = \text{constante ao longo da linha de corrente} \qquad \textbf{(10–18)}$$

Note que a "constante" C de Bernoulli na Equação 10–18 é constante somente ao longo de uma linha de corrente; a constante pode mudar de uma linha de corrente para outra.

Você deve estar imaginando se é fisicamente possível ter uma região rotacional de escoamento que seja também sem viscosidade, já que a rotacionalidade geralmente é *causada* pela viscosidade. Sim *é* possível, e daremos um exemplo simples — *rotação de corpo sólido* (Figura 10–20). Embora a rotação possa ter sido *gerada* por forças viscosas, uma região de escoamento em rotação de corpo sólido não tem *tensão de cisalhamento* nem *força viscosa resultante*; ela está em uma região do escoamento sem viscosidade, apesar de ser também rotacional. Como conseqüência da natureza rotacional desse campo de escoamento, a Equação 10–18 se aplica a toda linha de corrente no escoamento, mas a constante C de Bernoulli difere de uma linha de corrente para outra, conforme ilustra a Figura 10–20.

EXEMPLO 10–3 **Campo de Pressão em Rotação de Corpo Sólido**

Um fluido está girando como um corpo rígido (rotação de corpo sólido) ao redor do eixo z como está ilustrado na Figura 10–20. O campo de velocidade permanente incompressível é dado por $u_r = 0$, $u_\theta = \omega r$, e $u_z = 0$. A pressão na origem é igual a P_0. Calcule o campo de pressão em todos os pontos no escoamento, e determine a constante de Bernoulli ao longo de cada linha de corrente.

SOLUÇÃO Para determinado campo de velocidade, vamos calcular o campo de pressão e a constante de Bernoulli ao longo de cada linha de corrente.

Hipóteses **1** O escoamento é um regime permanente e incompressível. **2** Como não há escoamento na direção z (vertical), existe uma distribuição de pressão hidrostática na direção vertical. **3** O campo de escoamento inteiro é aproximado como uma região de escoamento sem viscosidade, pois as forças viscosas são iguais a zero. **4** Não há variação de qualquer variável de escoamento na direção θ.

Análise A Equação 10–18 pode ser aplicada diretamente devido à hipótese 3:

Equação Bernoulli:
$$P = \rho C - \frac{1}{2}\rho V^2 - \rho g z \qquad (1)$$

onde C é a constante de Bernoulli que varia de acordo com o raio conforme está ilustrado na Figura 10–20. Em qualquer posição radial r, $V^2 = \omega^2 r^2$ e a Equação 1 torna-se:

$$P = \rho C - \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g z \qquad (2)$$

Na origem ($r = 0$, $z = 0$), a pressão é igual a P_0 (da condição de contorno dada). Assim calculamos $C = C_0$ na origem ($r = 0$):

Condição de contorno na origem:
$$P_0 = \rho C_0 \quad \rightarrow \quad C_0 = \frac{P_0}{\rho}$$

Mas como podemos determinar C em uma posição radial r arbitrária? A Equação 2 isoladamente é insuficiente, porque tanto C quanto P são desconhecidas. A resposta é que devemos usar a equação de Euler. Como não há superfície livre, empregamos a pressão modificada da Equação 10–7. A componente r da equação de Euler em coordenadas cilíndricas se reduz a:

Componente r da equação de Euler:
$$\frac{\partial P'}{\partial r} = \rho\frac{u_\theta^2}{r} = \rho\omega^2 r \qquad (3)$$

onde substituímos o valor dado de u_u. Como a pressão hidrostática já está incluída na pressão modificada, P' não é uma função de z. Pelas hipóteses 1 e 4, respectivamente, P' também não é uma função de t ou θ. Assim P' é uma função de r *apenas*, e substituímos a derivada parcial na Equação 3 por uma derivada total. A integração resulta em:

Campo de pressão modificada:
$$P' = \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} + B_1 \qquad (4)$$

onde B_1 é uma constante de integração. Na origem, a pressão modificada P' é igual à pressão real P, já que $z = 0$ ali. Portanto, a constante B_1 é determinada aplicando-se a condição de contorno de pressão conhecida na origem. Concluímos que B_1 é igual a P_0. Agora convertemos a Equação 4 de volta para a pressão real usando a Equação 10–7, $P = P' - \rho g z$:

Campo de pressão real:
$$P = \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0 - \rho g z \qquad (5)$$

No plano de referência dos dados ($z = 0$), desenhamos o gráfico da pressão adimensional como uma função do raio adimensional, onde uma posição arbitrária $r = R$ é escolhida como comprimento característico de escala no escoamento (Figura 10–21). A distribuição de pressões é parabólica com relação a r.

Finalmente, igualamos as Equação 2 e 5 para determinar C:

Constante de Bernoulli como uma função de r:
$$C = \frac{P_0}{\rho} + \omega^2 r^2 \qquad (6)$$

Na origem, $C = C_0 = P_0/\rho$, que está de acordo com nosso cálculo anterior.

Discussão Para um fluido em uma rotação de corpo sólido, a constante de Bernoulli cresce com r^2. Isso não é surpreendente, pois as partículas de fluido se movem mais rapidamente em valores maiores de r, portanto elas possuem mais energia. Na verdade, a Equação 5 revela que a própria pressão cresce com r^2. Fisicamente, o gradiente de pressão na direção radial proporciona a força centrípeta necessária para manter as partículas de fluido girando em relação à origem.

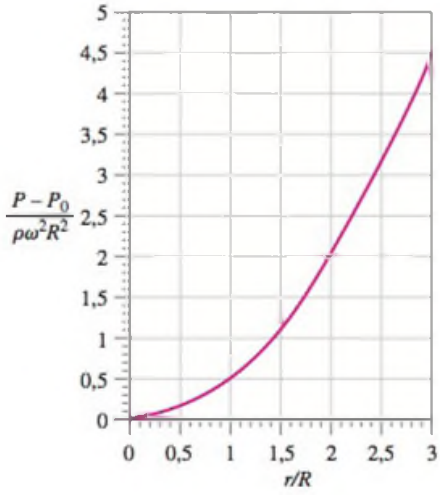


FIGURA 10–21
Pressão adimensional em função da posição radial adimensional na elevação zero para um fluido em rotação de corpo sólido.

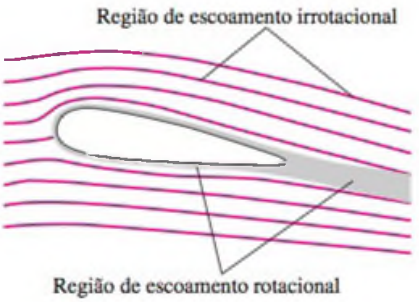


FIGURA 10–22
A aproximação do escoamento irrotacional é apropriada somente em certas regiões do escoamento onde a vorticidade é desprezível.

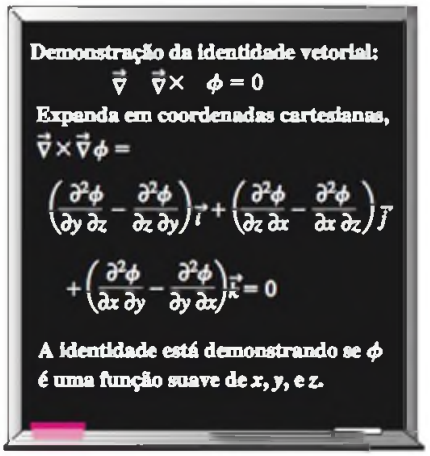


FIGURA 10–23
A identidade vetorial da Equação 10–20 é facilmente demonstrada expandindo os termos em coordenadas cartesianas.

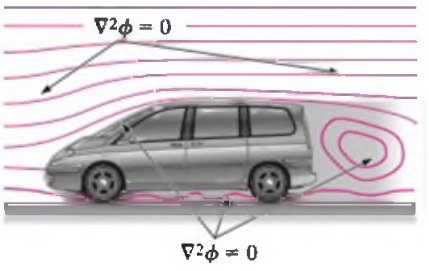


FIGURA 10–24
A equação de Laplace para a função potencial de velocidade ϕ é válida em duas e três dimensões e em qualquer sistema de coordenadas, mas somente em regiões irrotacionais de escoamento (geralmente distantes das paredes e esteiras).

10–5 • A APROXIMAÇÃO DE ESCOAMENTO IRROTACIONAL

Conforme destacamos no Capítulo 4, há regiões de escoamento nas quais as partículas de fluido não tem *nenhuma rotação resultante*; essas regiões são chamadas de **irrotacionais**. Você deve ter em mente que a hipótese da irrotacionalidade é uma *aproximação*, que pode ser apropriada em algumas regiões de um campo de escoamento, mas não em outras regiões (Figura 10–22). Em geral, as regiões de escoamento sem viscosidade distantes das paredes sólidas e esteiras dos corpos são também irrotacionais, embora, conforme foi destacado anteriormente, há situações nas quais uma região de escoamento sem viscosidade pode *não* ser irrotacional (por exemplo, rotação de corpo sólido). As soluções obtidas para a classe de escoamento definida pela irrotacionalidade são portanto *aproximações* das soluções completas da equação de Navier-Stokes. Matematicamente, a aproximação é que a vorticidade é muito pequena:

Aproximação irrotacional: $$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \cong 0 \qquad \textbf{(10–19)}$$

Examinemos agora o efeito dessa aproximação nas equações da continuidade e do momento.

Equação da Continuidade

Tirando mais um pouco de poeira do livro de álgebra vetorial, você encontrará uma identidade vetorial relacionada com o gradiente de qualquer função escalar ϕ, e portanto com o rotacional de qualquer vetor $\vec{V}$,

Identidade vetorial: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$ Assim, se $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$, então $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$. **(10–20)**

Isso pode ser demonstrado facilmente em coordenadas cartesianas (Figura 10–23), mas aplica-se a qualquer sistema ortogonal de coordenadas, contanto que ϕ seja uma função contínua. Em outras palavras, se o rotacional de um vetor for zero, o vetor pode ser expresso como sendo o gradiente de uma função escalar ϕ, chamada de **função potencial**. Em mecânica dos fluidos, o vetor $\vec{V}$ é o vetor velocidade, cujo rotacional é o vetor vorticidade $\vec{\zeta}$, e portanto, chamamos ϕ de **função potencial de velocidade.** Escrevemos:

Para regiões irrotacionais de escoamento: $$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi \qquad \textbf{(10–21)}$$

Devemos destacar que a convenção de sinais na Equação 10–21 não é universal — em alguns livros-texto de mecânica dos fluidos, é inserido um sinal negativo na definição da função potencial de velocidade. Enunciamos a Equação 10–21 da seguinte forma:

> Em uma região irrotacional de escoamento, o vetor velocidade pode ser expresso como o gradiente de uma função escalar chamada de *função potencial de velocidade.*

Regiões irrotacionais de escoamento são portanto chamadas também de **regiões de escoamento potencial.** Note que não nos restringimos a escoamentos bidimensionais; a Equação 10–21 é válida para campos de escoamento totalmente tridimensionais, contanto que a aproximação da irrotacionalidade seja apropriada na região de escoamento em estudo. Em coordenadas cartesianas:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \textbf{(10–22)}$$

e em coordenadas cilíndricas:

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \textbf{(10–23)}$$

A utilidade da Equação 10–21 torna-se evidente quando ela é substituída na Equação 10–1, a equação da continuidade incompressível: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0$, ou

Para regiões irrotacionais de escoamento: $$\nabla^2\phi = 0 \qquad (10\text{–}24)$$

onde o **operador laplaciano** ∇^2 é um operador escalar definido por $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, e a Equação 10–24 é chamada de **equação de Laplace.** Insistimos no ponto em que a Equação 10–24 é válida somente em regiões onde a aproximação de escoamento irrotacional é razoável (Figura 10–24). Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

e em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

A beleza dessa aproximação está no fato de que nós combinamos três componentes de velocidade desconhecidos (u, v, e w, ou u_r, u_θ e u_z, dependendo de nossa escolha do sistema de coordenadas) em *uma* variável escalar desconhecida ϕ, eliminando duas das equações necessárias para uma solução (Figura 10–25). Uma vez obtida uma solução da Equação 10–24 para ϕ, podemos calcular os três componentes do campo de velocidade usando a Equação 10–22 ou 10–23.

A equação de Laplace é bem conhecida, pois ela aparece em vários campos da física, matemática aplicada e engenharia. Estão disponíveis na literatura várias técnicas de solução, tanto analíticas quanto numéricas. As soluções da equação de Laplace são dominadas pela *geometria* (isto é, *condições de contorno*). Embora a Equação 10–24 venha da conservação da massa, a massa propriamente dita (ou a densidade, que é a massa dividida pelo volume) também desapareceu da equação. Com um dado conjunto de condições de contorno envolvendo toda a região irrotacional do campo de escoamento, podemos então resolver a Equação 10–24 para ϕ, independentemente das propriedades do fluido. Uma vez calculado ϕ, podemos então calcular $\vec{V}$ em qualquer ponto naquela região do campo de escoamento (usando a Equação 10–21), sem sequer ter que resolver a equação de Navier-Stokes. A solução é válida para qualquer fluido incompressível, independentemente de sua densidade ou sua viscosidade, em regiões do escoamento nas quais a aproximação irrotacional é adequada.

A solução é válida até mesmo instantaneamente para um escoamento *não permanente*, pois o tempo não aparece na equação da continuidade incompressível. Em outras palavras, em qualquer instante no tempo, o campo de escoamento incompressível se ajusta instantaneamente de forma a satisfazer a equação de Laplace e as condições de contorno existentes naquele instante.

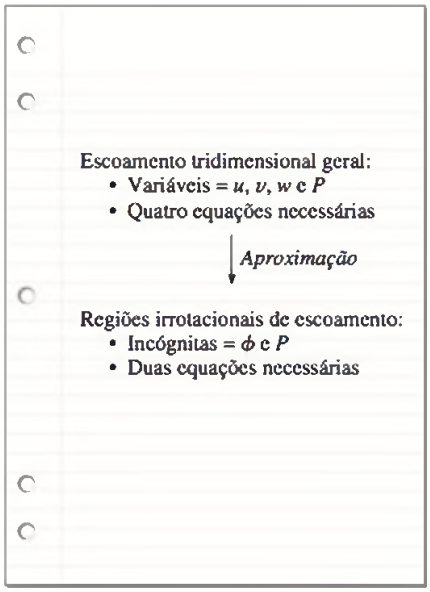


FIGURA 10–25
Em regiões irrotacionais de escoamento, três componentes escalares desconhecidas do vetor velocidade são combinadas em uma função escalar desconhecida — a função potencial de velocidade.

Equação do Momento

Agora voltemos nossa atenção para a equação diferencial da conservação da quantidade de movimento — a equação de Navier-Stokes (Equação 10–2). Acabamos de mostrar que em uma região irrotacional do escoamento, podemos obter o campo de velocidades sem a aplicação da equação de Navier-Stokes. Então por que precisamos dela afinal? A resposta é que uma vez que tenhamos estabelecido o campo de velocidade através do uso da função potencial de velocidade, *usamos a equação de Navier-Stokes para obter soluções para o campo de pressão.* A equação de Navier-Stokes é a segunda equação necessária mencionada na Figura 10–25 para encontrar as duas incógnitas, ϕ e P, em uma região irrotacional do escoamento.

Começamos nossa análise aplicando a aproximação de escoamento irrotacional, (Equação 10–21), ao termo viscoso da equação de Navier-Stokes (Equação 10–2). Desde que f seja uma função suave, aquele termo torna-se:

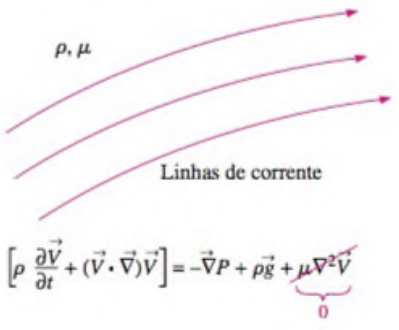


FIGURA 10–26
Uma região irrotacional do escoamento é uma região onde as forças viscosas resultantes são desprezíveis comparadas com as forças inerciais e/ou de pressão devido à aproximação irrotacional. Todas as regiões irrotacionais do escoamento são portanto também sem viscosidade, mas nem todas as regiões do escoamento sem viscosidade são irrotacionais. O fluido é ainda um fluido viscoso em qualquer dos casos.

$$\mu\nabla^2\vec{V}=\mu\nabla^2(\vec{\nabla}\phi)=\mu\vec{\nabla}(\nabla^2\phi)=0,$$

onde aplicamos a Equação 10–24. Assim, a equação de Navier-Stokes se reduz à *equação de Euler* em regiões irrotacionais do escoamento,

Para regiões irrotacionais do escoamento:
$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g} \qquad \textbf{(10–25)}$$

Destacamos que embora obtenhamos a mesma equação de Euler que obtivemos para uma região de escoamento sem viscosidade (Equação 10–13), o termo viscoso desaparece aqui por uma *razão diferente*, ou seja, porque o escoamento nessa região é considerado como sendo irrotacional em vez de ser sem viscosidade (Figura 10–26).

Dedução da Equação de Bernoulli em Regiões Irrotacionais do Escoamento

Na Seção 10–4 deduzimos a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente para regiões do escoamento sem viscosidade, com base na equação de Euler. Agora fazemos uma dedução similar começando com a Equação 10–25 para regiões irrotacionais do escoamento. Para simplificar, supomos novamente escoamento permanente incompressível. Usamos a mesma identidade vetorial usada anteriormente (Equação 10–14), resultando na forma alternativa da equação de Euler da Equação 10–15. Aqui, no entanto, o vetor vorticidade $\vec{\zeta}$ é muito pequeno pois estamos considerando uma região irrotacional do escoamento (Equação 10–19). Assim, para a gravidade agindo na direção negativa de z, a Equação 10–17 se reduz a:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\right)=0 \qquad \textbf{(10–26)}$$

Argumentamos que se o gradiente de uma grandeza escalar (a grandeza entre parênteses na Equação 10–26) for zero em todos os pontos, a grandeza escalar deve ser ela própria uma constante. Assim, geramos a equação de Bernoulli para regiões irrotacionais de escoamento,

Equação de Bernoulli permanente incompressível em regiões irrotacionais de escoamento:
$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=C=\text{constante em qualquer ponto} \qquad \textbf{(10–27)}$$

É útil comparar as Equação 10–18 e 10–27. Em uma região de escoamento sem viscosidade, a equação de Bernoulli vale ao longo de linhas de corrente, e a constante de Bernoulli pode variar de uma linha de corrente para outra. Em uma região irrotacional do escoamento, a constante de Bernoulli é a mesma em todos os pontos, portanto a equação de Bernoulli vale em todos os pontos na região irrotacional do escoamento, mesmo transversalmente às das linhas de corrente. Assim, *a aproximação irrotacional é mais restritiva do que a aproximação sem viscosidade.*

Na Figura 10–27 fornecemos um resumo das equações e procedimentos de solução relevantes às regiões irrotacionais do escoamento. Em uma região irrotacional do escoamento, o campo de velocidade é obtido primeiro pela solução da equação de Laplace para a função potencial de velocidade ϕ (Equação 10–24), seguido pela aplicação da Equação 10–21 para obter o campo de velocidade. Para resolver a equação de Laplace, temos que fornecer condições de contorno para f em todos os pontos ao longo do contorno do campo de escoamento que interessa. Uma vez conhecido o campo de velocidade, usamos a equação de Bernoulli (Equação 10–27) para obter o campo de pressão, onde a constante C de Bernoulli é obtida a partir de uma condição de contorno sobre P em algum lugar no escoamento.

O Exemplo 10–4 ilustra uma situação na qual o campo de escoamento consiste de duas regiões separadas — uma região sem viscosidade, rotacional e uma região sem viscosidade, irrotacional.

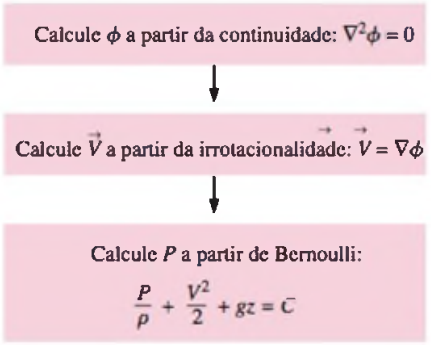


FIGURA 10–27
Fluxograma para obter soluções em uma região irrotacional do escoamento. O campo de velocidade é obtido a partir da continuidade e da irrotacionalidade, e então a pressão é obtida a partir da equação de Bernoulli.

EXEMPLO 10–4 Um Modelo de um Tornado de Duas Regiões

Uma fatia horizontal de um tornado (Figura 10–28) é modelada por duas regiões distintas. A *região interna* ou *região do núcleo* ($0 < r < R$) é modelada pela rotação do corpo sólido — uma região rotacional mas de escoamento sem viscosidade, conforme discutimos anteriormente. A *região externa* ($r > R$) é modelada como uma região irrotacional do escoamento. O escoamento é bidimensional no plano $r\theta$ e as componentes do campo de velocidade $\vec{V} = (u_r, u_\theta)$ são dadas por:

$$\textit{Componentes de velocidade:} \qquad u_r = 0 \qquad u_\theta = \begin{cases} \omega r & 0 < r < R \\ \dfrac{\omega R^2}{r} & r > R \end{cases} \tag{1}$$

onde ω é a intensidade da velocidade angular na região interna. A pressão ambiente (bem distante do tornado) é igual a P_∞. Calcule o campo de pressão em uma fatia horizontal do tornado para $0 < r < \infty$. Qual é a pressão em $r = 0$? Faça o gráfico dos campos de pressão e de velocidade.

SOLUÇÃO Vamos calcular o campo de pressão $P(r)$ em uma fatia radial horizontal do tornado para a qual as componentes da velocidade são aproximadas pela Equação 1. Vamos também calcular a pressão nessa fatia horizontal em $r = 0$.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente e incompressível. **2** Embora R aumente e w diminua com o aumento da elevação z, R e ω são supostas como constantes ao considerar uma determinada fatia horizontal. **3** O escoamento na fatia horizontal é bidimensional no plano $r\theta$ (sem dependência de z e do componente w da velocidade). **4** Os efeitos da gravidade são desprezíveis dentro de uma determinada fatia horizontal (existe, naturalmente, um campo adicional de pressão hidrostática na direção z, mas isso não afeta a dinâmica do escoamento, conforme discutimos anteriormente).

Análise Na região interna, a equação de Euler é uma aproximação adequada da equação de equação de Navier-Stokes, e o campo de pressão é determinado por integração. No Exemplo 10–3 nós mostramos que para a rotação do corpo sólido:

$$\textit{Campo de pressão na região interna } (r < R): \qquad P = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0 \tag{2}$$

onde P_0 é a pressão (desconhecida) em $r = 0$ e desprezamos o termo da gravidade. Como a região externa é uma região de escoamento irrotacional, a equação de Bernoulli é adequada e a constante de Bernoulli é a mesma em qualquer ponto desde $r = R$ para fora até $r \to \infty$. A constante de Bernoulli é encontrada aplicando-se a condição de contorno em um ponto distante do tornado, ou seja, à medida que $r \to \infty$, $u_\theta \to 0$ and $P \to P_\infty$. (Figura 10–29). A equação 10–27 resulta em:

$$\textit{À medida que } r \to \infty: \qquad \underbrace{\frac{P}{\rho}}_{P_\infty/\rho} + \underbrace{\frac{V^2}{2}}_{V \to 0 \text{ quando } r \to \infty} + \underbrace{gz}_{\text{hipótese 4}} = C \quad \to \quad C = \frac{P_\infty}{\rho} \tag{3}$$

O campo de pressão em qualquer ponto na região externa é obtido substituindo o valor da constante C da Equação 3 na equação de Bernoulli (Equação 10–27). Desprezando a gravidade:

$$\textit{Na região externa } (r > R): \qquad P = \rho C - \frac{1}{2}\rho V^2 = P_\infty - \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{4}$$

Observamos que $V^2 = u_\theta^2$. Após substituição de u_θ para Equação 1, a Equação 4 se reduz a:

$$\textit{Campo de pressão na região externa } (r > R): \qquad P = P_\infty - \frac{\rho}{2}\frac{\omega^2 R^4}{r^2} \tag{5}$$

Em $r = R$, a interface entre as regiões interna e externa, a pressão deve ser contínua (sem mudanças bruscas em P), como ilustra a Figura 10–30. Igualando as Equações 2 e 5 nessa interface resulta:

$$\textit{Pressão em } r = R: \qquad P_{r=R} = \rho \frac{\omega^2 R^2}{2} + P_0 = P_\infty - \frac{\rho}{2}\frac{\omega^2 R^4}{R^2} \tag{6}$$

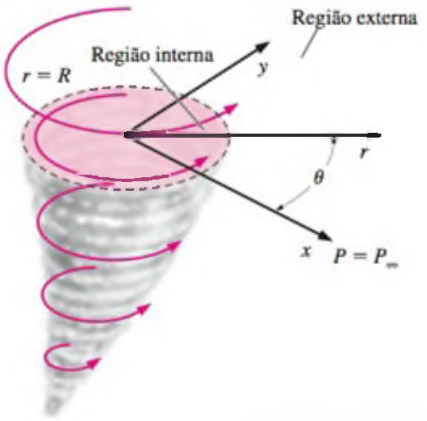


FIGURA 10–28
Uma fatia horizontal de um tornado pode ser modelada por duas regiões — uma região de escoamento interna sem viscosidade mas rotacional ($r < R$) e uma região de escoamento irrotacional externa ($r > R$).

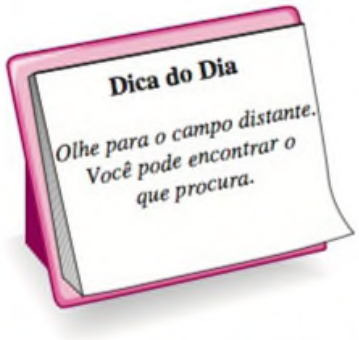


FIGURA 10–29
Um bom lugar para obter condições de contorno para esse problema é o campo distante; isso vale para muitos problemas em mecânica dos fluidos.

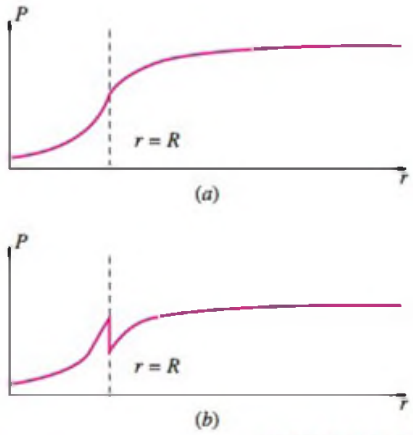


FIGURA 10–30
Para que o nosso modelo do tornado seja válido, a pressão pode ter uma descontinuidade na *inclinação* em $r = R$, mas não pode ter um salto súbito do valor ali; (*a*) é válida, mas (*b*) não é.

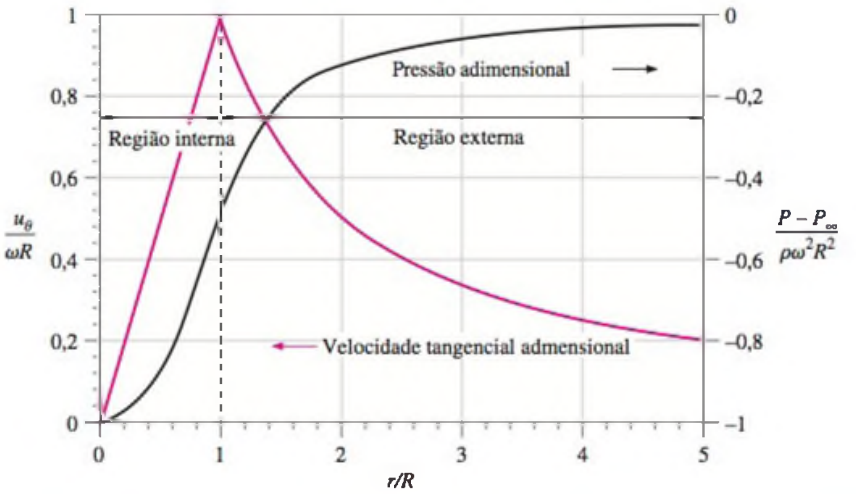


FIGURA 10–31
Distribuição de velocidade tangencial adimensional (curva azul) e distribuição de pressão adimensional (curva preta) ao longo de uma fatia radial horizontal em um tornado. As regiões de escoamento interna e externa estão marcadas.

a partir da qual se determina P_0 em $r = 0$:

Pressão em $r = 0$:
$$P_0 = P_\infty - \rho\omega^2 R^2 \tag{7}$$

A Equação 7 fornece o valor da pressão no meio do tornado — o olho do tornado. Esta é a menor pressão no campo de escoamento. A substituição da Equação 7 na Equação 2 nos permite reescrever a Equação 2 em termos da pressão ambiente no campo distante dada P_∞:

Na região interna $(r < R)$:
$$P = P_\infty - \rho\omega^2\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right) \tag{8}$$

Em vez de desenharmos o gráfico de P em função de r nessa fatia horizontal, desenhamos o gráfico da distribuição de pressão *adimensional*, para que o gráfico seja válido em *qualquer* fatia horizontal. Em termos de variáveis adimensionais:

Região interna $(r < R)$:
$$\frac{u_\theta}{\omega R} = \frac{r}{R} \qquad \frac{P - P_\infty}{\rho\omega^2 R^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1$$

Região externa $(r > R)$:
$$\frac{u_\theta}{\omega R} = \frac{R}{r} \qquad \frac{P - P_\infty}{\rho\omega^2 R^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{9}$$

A Figura 10–31 mostra a velocidade tangencial adimensional e a pressão adimensional como funções da localização radial adimensional.

Discussão Na região externa, a pressão aumenta à medida que a velocidade aumenta — um resultado direto da equação de Bernoulli, que se aplica com a *mesma* constante de Bernoulli em todos os pontos da região externa. Sugerimos que você calcule P na região externa por um método alternativo — integração direta da equação de Euler sem usar a equação de Bernoulli; você deverá obter o mesmo resultado. Na região interna, P aumenta parabolicamente com r apesar de a velocidade também aumentar; isto é porque a constante de Bernoulli muda de uma linha de corrente para outra (como também já destacamos no Exemplo 10–3). Note que apesar de haver uma descontinuidade na inclinação da velocidade tangencial em $r/R = 1$, a pressão tem uma transição razoavelmente suave entre as regiões interna e externa. A pressão é mais baixa no centro do tornado e aumenta até à pressão atmosférica no campo mais distante (Figura 10–32). Finalmente, o escoamento na região interna é *rotacional*, mas *sem viscosidade*, porque a viscosidade não desempenha nenhum papel naquela região do escoamento. O escoamento na região externa é *irrotacional* e *sem viscosidade*. Observe, no entanto, que a viscosidade ainda age sobre as partículas do fluido na região externa. (A viscosidade causa cisalhamento e distorção nas partículas do fluido apesar da *força viscosa resultante* em qualquer partícula de fluido na região externa ser zero.)

FIGURA 10–32
A pressão mais baixa ocorre no centro do tornado, e o escoamento naquela região pode ser aproximado pela rotação do corpo sólido.

Regiões Irrotacionais de Escoamento Bidimensionais

Em regiões irrotacionais de escoamento, as Equação 10–24 e 10–21 se aplicam para campos de escoamento bidimensionais e tridimensionais, e obtemos a solução para o campo de velocidade nessas regiões resolvendo a equação de Laplace para a função potencial de velocidade ϕ. Se o escoamento for também *bidimensional*, podemos usar também a *função de corrente* (Figura 10–33). A aproximação bidimensional não está limitada ao escoamento no plano xy, nem está limitada às coordenadas cartesianas. Na verdade, podemos supor a bidimensionalidade em qualquer região do escoamento, onde somente *duas* direções de movimento são importantes e onde não há uma variação significativa na terceira direção. Os dois exemplos mais comuns são o **escoamento planar** (escoamento em um plano com variação desprezível na direção normal ao plano) e **escoamento axissimétrico** (escoamento no qual há simetria rotacional em relação a algum eixo). Podemos também optar em trabalhar em coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas, ou coordenadas polares esféricas, dependendo da geometria do problema que temos para resolver.

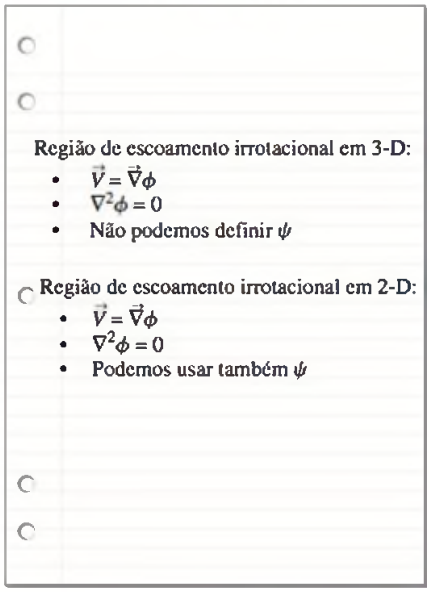


FIGURA 10–33
O escoamento bidimensional é um *subconjunto* do escoamento tridimensional; nas regiões bidimensionais do escoamento podemos definir uma função de corrente, mas não podemos fazer isso em escoamento tridimensional. A função potencial de velocidade, no entanto, pode ser definida para qualquer região *irrotacional* de escoamento.

Regiões Irrotacionais de Escoamento Planares

Vamos considerar primeiro o escoamento planar, já que ele é o mais simples. Para uma região irrotacional de escoamento permanente, incompressível e planar no plano xy em coordenadas cartesianas (Figura 10–34), a equação de Laplace para ϕ é:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \textbf{(10–28)}$$

Para escoamento planar incompressível no plano xy, a função corrente c é definida como (Capítulo 9):

Função de corrente:
$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \textbf{(10–29)}$$

Observe que a Equação 10–29 vale independentemente de a região do escoamento ser rotacional ou irrotacional. Na verdade, a função de corrente é *definida* de forma que ela sempre satisfaz a equação da continuidade, independentemente da rotacionalidade. Se restringirmos nossa aproximação a *regiões irrotacionais do escoamento*, a Equação 10–19 também deve valer; isto é, a vorticidade é zero ou muito pequena. Para escoamento bidimensional geral no plano xy, a componente z da vorticidade é a única componente diferente de zero. Assim, em uma região irrotacional do escoamento:

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

A substituição da Equação 10–29 nessa equação resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

Reconhecemos o operador Laplaciano nessa última equação. Portanto:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \textbf{(10–30)}$$

Concluímos que a equação de Laplace é aplicável, não somente para ϕ (Equação 10–28), mas também para ψ (Equação 10–30) em regiões de escoamento permanente, incompressível, irrotacional e planar.

Curvas de valores constantes de ψ definem as *linhas de corrente* do escoamento, enquanto as curvas de valores constantes de ϕ definem **linhas equipotenciais.** (Note que alguns autores usam o termo *linhas equipotenciais* referindo-se tanto a linhas de corrente *quanto a* linhas de ϕ constante e não exclusivamente a linhas de ϕ constante.) Em regiões planares irrotacionais de escoamento, ocorre que as linhas de corrente interceptam as linhas equipotenciais em ângulos retos, uma

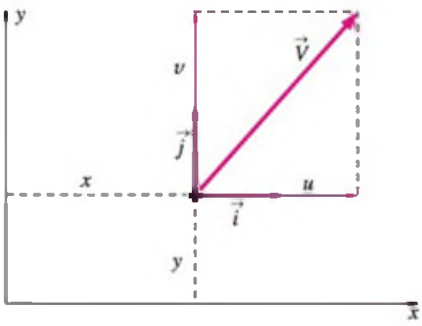


FIGURA 10–34
Componentes de velocidade e vetores unitários em coordenadas cartesianas para escoamento planar bidimensional no plano xy. Não há variação na direção normal a esse plano.

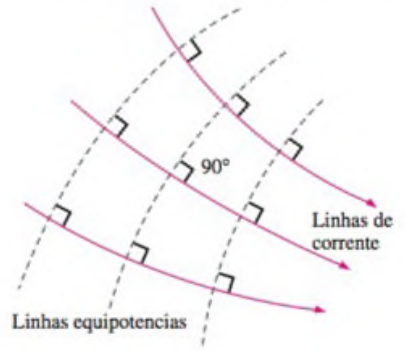


FIGURA 10–35
Em regiões planares irrotacionais de escoamento, as curvas de ϕ constante (linhas equipotenciais) e as curves de ψ constante (linhas de corrente) são mutuamente ortogonais, o que significa que elas se interceptam em ângulos de 90° em todos os pontos.

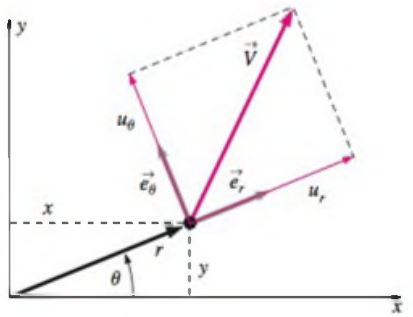


FIGURA 10–36
Componentes de velocidade e vetores unitários em coordenadas cilíndricas para um escoamento planar no plano $r\theta$. Não há variação na direção normal a esse plano.

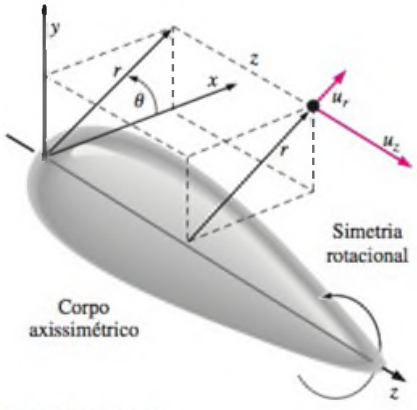


FIGURA 10–37
Escoamento sobre um corpo axissimétrico em coordenadas cilíndricas com simetria rotacional em relação ao eixo z. Nem a geometria, nem o campo de velocidade dependem de θ; e $u_\theta = 0$.

condição conhecida como **ortogonalidade mútua** (Figura 10–35). Além disso, as funções potenciais ψ e ϕ estão intimamente relacionadas uma com a outra — ambas satisfazem a equação de Laplace, e a partir de ψ ou ϕ podemos determinar o campo de velocidade. Os matemáticos chamam as soluções a ψ e ϕ de **funções harmônicas,** e ψ e ϕ são chamadas de harmônicas **conjugadas** uma da outra. Embora ψ e ϕ estejam relacionadas, suas fontes são de certa forma opostas; talvez seja melhor dizer que ψ e ϕ são *complementares* uma da outra:

- *A função de corrente é definida pela continuidade; a equação de Laplace para* c *resulta da irrotacionalidade.*
- *O potencial de velocidade é definido pela irrotacionalidade; a equação de Laplace para ϕ resulta da continuidade.*

Na prática, podemos fazer uma análise de escoamento potencial usando ψ ou ϕ, e deveremos chegar aos mesmos resultados de qualquer forma. No entanto, freqüentemente é mais conveniente usar ψ, pois as condições de contorno sobre ψ usualmente são mais fáceis de especificar.

O escoamento planar no plano xy também pode ser descrito em coordenadas cilíndricas (r, θ) e (u_r, u_θ), como mostra a Figura 10–36. Uma vez mais, não há componente z da velocidade, e a velocidade não varia na direção z. Em coordenadas cilíndricas:

Equação de Laplace, escoamento planar em (r, θ):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \textbf{(10–31)}$$

A função de corrente ψ para escoamento planar em coordenadas Cartesianas é definida pela Equação 10–29, e a condição de irrotacionalidade faz com que ψ também satisfaça a equação de Laplace. Em coordenadas cilíndricas fazemos uma análise similar. Lembre-se do Capítulo 9:

Função de corrente:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \textbf{(10–32)}$$

Fica como um exercício para você, mostrar que a função de corrente definida pela Equação 10–32 também satisfaz a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas para regiões irrotacionais de escoamento planar bidimensional. (Verifique os seus resultados substituindo ϕ por ψ na Equação 10–31 para obter a equação de Laplace para a função de corrente.)

Regiões Irrotacionais de Escoamento Axissimétrico

O *escoamento axissimétrico* é um caso especial de escoamento bidimensional que pode ser descrito em coordenadas cilíndricas ou em coordenadas polares esféricas. Em coordenadas cilíndricas, r e z são as variáveis espaciais relevantes, e u_r e u_z são os componentes de velocidade diferentes de zero (Figura 10–37). Não existe uma dependência do ângulo θ pois a simetria rotacional é definida em relação ao eixo z. Esse é um tipo de escoamento bidimensional, porque há somente duas variáveis espaciais independentes, r e z. (Imagine girar a componente radial r na Figura 10–37 na direção θ em relação ao eixo z sem mudar o valor de r.) Devido à simetria rotacional em relação ao eixo z, os valores das componentes de velocidade u_r e u_z permanecem inalteradas após essa rotação. A equação de Laplace para o potencial de velocidade ϕ para o caso de regiões axissimétricos irrotacionais de escoamento em coordenadas cilíndricas é:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Para obter expressões para a função de corrente para escoamento axissimétrico, começamos com a equação da continuidade incompressível em coordenadas r e z:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(10–33)}$$

Após algumas operações algébricas, definimos uma função corrente que de forma idêntica satisfaz a Equação 10–33:

Função de corrente: $$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Seguindo o mesmo procedimento usado para escoamento planar, geramos uma equação para ψ para regiões irrotacionais de escoamento axissimétrico forçando a vorticidade a ser zero. Neste caso, somente o componente θ da vorticidade é relevante pois o vetor de velocidade está sempre contido no plano rz. Portanto, em uma região irrotacional de escoamento:

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0$$

Após tirar r para fora da derivada em relação a z (pois r não é uma função de z), obtemos:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \qquad \textbf{(10–34)}$$

Note que a Equação 10–34 *não é a mesma* equação de Laplace para ψ. Você não pode usar a equação de Laplace para a função de corrente em regiões irrotacionais de escoamento axissimétrico (Figura 10–38).

FIGURA 10–38
A equação para a função de corrente em escoamento irrotacional axissimétrico (Equação 10–34) *não* é a equação de Laplace.

Para regiões irrotacionais de escoamento planar, a equação de Laplace é válida para ϕ e ψ; mas para regiões irrotacionais de escoamento axissimétrico, a equação de Laplace é válida para ϕ mas não para ψ.

Uma conseqüência direta dessa definição é que as curvas de ψ constante e as curvas de ϕ constante em regiões irrotacionais de escoamento axissimétrico *não são* mutuamente ortogonais. Esta é uma diferença fundamental entre escoamentos planar e axissimétrico. Finalmente, apesar de a Equação 10–34 não ser a mesma coisa que a equação de Laplace, ela ainda é uma equação diferencial parcial *linear*. Isso nos permite usar a técnica da superposição tanto com ψ quanto com ϕ ao resolver para o campo de escoamento em regiões irrotacionais de escoamento axissimétrico. A superposição será discutida rapidamente.

Resumo das Regiões Irrotacionais do Escoamento Bidimensional

As equações para as componentes da velocidade para regiões irrotacionais do escoamento planar e axissimétrico estão resumidas na Tabela 10–2.

TABELA 10–2

Componentes de velocidade para regiões de escoamento permanente incompressível, irrotacional bidimensional em termos da função potencial de velocidade e da função de corrente em vários sistemas de coordenadas

Descrição e Sistema de Coordenadas	Componente 1 da velocidade	Componente 2 da velocidade
Planar; coordenadas cartesianas	$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$	$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$
Planar; coordenadas cilíndricas	$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$	$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$
Axissimétrico; coordenadas cilíndricas	$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}$	$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$

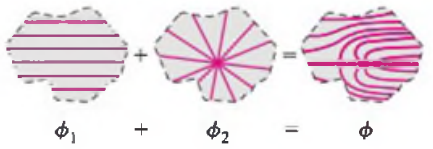


FIGURA 10–39
Superposição é o processo de somar duas ou mais soluções de escoamento irrotacional para gerar uma terceira solução (mais complicada).

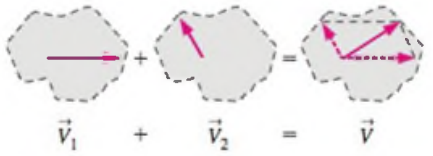


FIGURA 10–40
Na superposição de duas soluções de escoamento irrotacional, os dois vetores de velocidade em qualquer ponto na região de escoamento somam-se vetorialmente para produzir a velocidade composta naquele ponto.

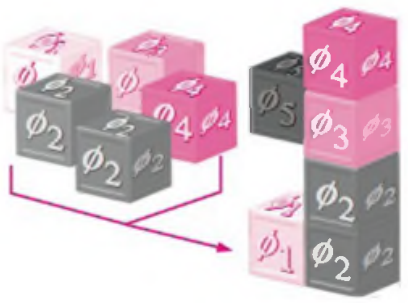


FIGURA 10–41
Com a superposição, podemos construir um campo de escoamento irrotacional complicado juntando campos de escoamento irrotacional que sejam blocos elementares.

Superposição em Regiões Irrotacionais de Escoamento

Como a equação de Laplace é uma equação diferencial homogênea *linear*, a combinação linear de duas ou mais soluções da equação tem que ser também uma solução. Por exemplo, se ϕ_1 e ϕ_2 são soluções da equação de Laplace, então $A\phi_1$, $(A + \phi_1)$, $(\phi_1 + \phi_2)$ e $(A\phi_1 + B\phi_2)$ também são soluções, onde A e B são constantes arbitrárias. Por extensão, poderíamos combinar *várias* soluções da equação de Laplace, e a combinação certamente é também uma solução. Se uma região irrotacional de escoamento é modelada pela soma de dois ou mais campos irrotacionais de escoamento, por exemplo, uma origem localizada em um escoamento de corrente livre, podemos simplesmente somar as funções potencial de velocidade para cada escoamento individual para descrever o campo de escoamento combinado. Esse processo de somar duas ou mais soluções conhecidas para criar uma terceira solução, mais complicada, é conhecido como **superposição** (Figura 10–39).

Para o caso de regiões irrotacionais de escoamento bidimensional, pode ser executada uma análise similar usando a *função de corrente* em lugar da função potencial de velocidade. Insistimos no fato de que o conceito da superposição é útil, mas ele é válido somente para campos de *escoamento irrotacional* para os quais as equações para ϕ e ψ são *lineares*. Você precisa ter o cuidado de se certificar de que os dois campos de escoamento que você quer somar vetorialmente sejam ambos irrotacionais. Por exemplo, o campo de escoamento para um jato nunca deverá ser somado ao campo de escoamento para um fluxo de entrada ou escoamento de corrente livre, porque o campo de velocidade associado com um jato é fortemente afetado pela viscosidade, ele não é irrotacional, e não pode ser descrito por funções potenciais.

Conseqüentemente como a função potencial do campo composto é a soma das funções potenciais dos campos de escoamento individuais, a velocidade em qualquer ponto no campo composto é a *soma vetorial* das velocidades dos campos de escoamento individuais. Demonstramos isso em coordenadas Cartesianas considerando um campo de escoamento irrotacional planar que é a superposição de dois campos de escoamento irrotacionais planares independentes denotados pelos subscritos 1 e 2. A função potencial de velocidade composta é dada por

Superposição de dois campos de escoamento irrotacionais: $\phi = \phi_1 + \phi_2$

Usando as equações para escoamento irrotacional planar em coordenadas Cartesianas na Tabela 10–2, a componente x da velocidade do escoamento composto é

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2$$

Podemos gerar uma expressão análoga para v. Portanto, a superposição nos permite simplesmente adicionar as velocidades individuais vetorialmente em qualquer posição na região de escoamento, para obter a velocidade do campo de escoamento composto naquela posição (Figura 10–40).

Campo de velocidade composta resultante da superposição:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \qquad (10\text{–}35)$$

Escoamentos Planares Irrotacionais Elementares

A superposição nos permite somar duas ou mais soluções simples de escoamento irrotacional para criar um campo de escoamento mais complexo (e, esperamos, mais significativo fisicamente). É útil, portanto, estabelecer uma coleção de escoamentos irrotacionais *elementares*, com os quais possamos construir uma variedade de escoamentos mais práticos (Figura 10–41). Os escoamentos irrotacionais planares elementares são descritos em coordenadas xy e/ou $r\theta$, dependendo de qual par é mais útil em um problema em particular.

Bloco 1 — Corrente Uniforme

O bloco de escoamento mais simples em que podemos pensar é uma **corrente uniforme** do escoamento movendo-se com velocidade constante V na direção x (da esquerda para a direita). Em termos de potencial de velocidade e função de corrente (Tabela 10–2):

Corrente uniforme: $$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Integrando a primeira dessas equações com relação a x, e depois diferenciando o resultado em relação a y, geramos uma expressão para a função potencial de velocidade para uma corrente uniforme:

$$\phi = Vx + f(y) \quad \rightarrow \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad f(y) = \text{constante}$$

A constante é arbitrária, já que as componentes da velocidade são sempre derivadas de ϕ. Fazemos a constante igual a zero, sabendo que podemos sempre adicionar uma constante arbitrária mais tarde se desejarmos. Portanto:

Função potencial de velocidade para uma corrente uniforme: $$\phi = Vx \qquad \textbf{(10–36)}$$

De maneira similar geramos uma expressão para a função de corrente para esse escoamento irrotacional planar elementar:

Função de corrente para uma corrente uniforme: $$\psi = Vy \qquad \textbf{(10–37)}$$

A Figura 10–42 mostra várias linhas de corrente e linhas equipotenciais para uma corrente uniforme. Observe a ortogonalidade mútua.

Muitas vezes é conveniente expressar a função de corrente e a função potencial de velocidade em coordenadas cilíndricas em vez de coordenadas cartesianas, particularmente quando formos sobrepor uma corrente uniforme a algum outro escoamento irrotacional planar. As relações de conversão são obtidas da geometria da Figura 10–36:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textbf{(10–38)}$$

Com a Equação 10–38 e um pouco de trigonometria, deduzimos relações para u e v em termos de coordenadas cilíndricas:

Transformação: $$u = u_r\cos\theta - u_\theta\,\text{sen}\,\theta \qquad v = u_r\,\text{sen}\,\theta + u_\theta\cos\theta \qquad \textbf{(10–39)}$$

Em coordenadas cilíndricas, as Equação 10–36 e 10–37 para ϕ e ψ tornam-se:

Corrente uniforme: $$\phi = Vr\cos\theta \qquad \psi = Vr\,\text{sen}\,\theta \qquad \textbf{(10–40)}$$

Podemos modificar a corrente uniforme para que o fluido escoe uniformemente à velocidade V com um ângulo de inclinação α em relação ao eixo x. Para essa situação, $u = V\cos\alpha$ e $v = V\,\text{sen}\,\alpha$ como mostra a Figura 10–43. Fica como exercício mostrar que a função potencial de velocidade e a função de corrente para uma corrente uniforme inclinada com um ângulo α são:

Corrente uniforme inclinada de um ângulo α:
$$\phi = V(x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha)$$
$$\psi = V(y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha) \qquad \textbf{(10–41)}$$

Quando necessário, a Equação 10–41 pode facilmente ser convertida para coordenadas cilíndricas usando a Equação 10–38.

Bloco 2 — Linha de Fonte ou Linha de Sumidouro

Nosso segundo bloco de escoamento é uma linha de fonte. Imagine um segmento de reta de comprimento L paralelo ao eixo z, ao longo do qual o fluido emerge e escoa uniformemente para fora em todas as direções normais ao segmento de reta (Figura 10–44). A vazão total de volume é igual a $\dot{V}$. À medida que o comprimento L tende ao infinito, o escoamento torna-se bidimensional em planos perpendiculares à reta,

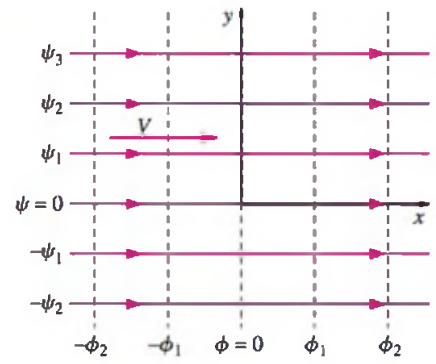


FIGURA 10–42
Linhas de corrente (linhas sólidas) e linhas equipotenciais (linhas tracejadas) para uma corrente uniforme na direção x.

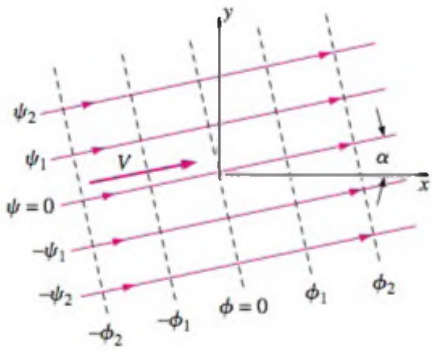


FIGURA 10–43
Linhas de corrente (linhas sólidas) e linhas equipotenciais (linhas tracejadas) para uma corrente uniforme inclinada de um ângulo α.

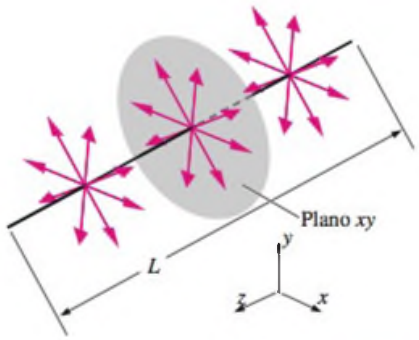


FIGURA 10–44
Fluido emergindo uniformemente de um segmento de reta finito de comprimento L. Quando L tende a infinito, o escoamento torna-se uma linha de fonte, e o plano xy é considerado como normal ao eixo da fonte.

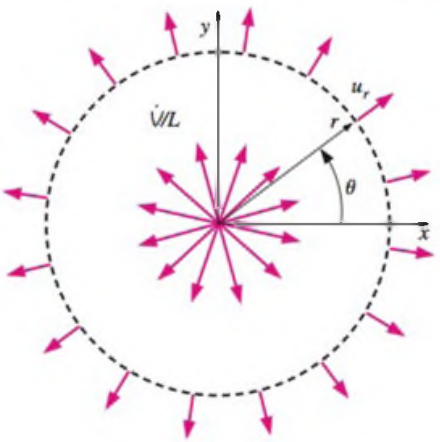


FIGURA 10–45
Linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ localizada na origem do plano xy; a vazão de volume total por unidade de profundidade através de um círculo de qualquer raio r deve ser igual a $\dot{V}/L$ independentemente do valor de r.

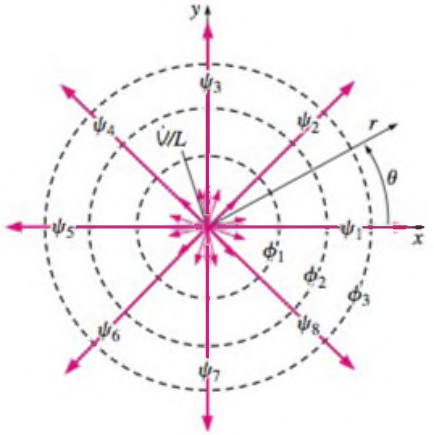


FIGURA 10–46
Linhas de corrente (linhas sólidas) e linhas equipotenciais (linhas tracejadas) para uma linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ localizada na origem no plano xy.

e a reta a partir da qual o fluido escapa é chamada de **linha de fonte.** Para uma reta infinita, $\dot{V}$. também tende a infinito; portanto é mais conveniente considerar a *vazão em volume por unidade de profundidade*, $\dot{V}/L$, chamada de intensidade da **linha de fonte** (geralmente recebe o símbolo m).

Uma **linha de sumidouro** é o oposto de uma linha de fonte; o fluido escoa *para dentro* da linha vindo de todas as direções em planos normais ao eixo da linha de sumidouro. Por convenção, $\dot{V}/L$ positivo significa uma linha de fonte e $\dot{V}/L$ negativo significa uma linha de sumidouro.

O caso mais simples ocorre quando a linha de fonte está localizada na origem do plano xy, com a própria linha coincidindo com o eixo z. No plano xy, a linha de fonte parece um ponto na origem a partir do qual o fluido é espalhado em todas as direções no plano (Figura 10–45). A qualquer distância radial r da linha de fonte, a componente radial da velocidade, u_r pode ser determinada aplicando-se o princípio da conservação da massa. Isto é, toda a vazão em volume por unidade de profundidade da linha de fonte deve passar através do círculo definido pelo raio r. Assim:

$$\frac{\dot{V}}{L} = 2\pi r u_r \qquad u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \tag{10–42}$$

Está claro que u_r decresce com o aumento de r conforme deveríamos esperar. Observe também que u_r é infinito na origem pois r é zero no denominador da Equação 10–42. Chamamos isso de um **ponto singular** ou uma **singularidade** — que certamente não é uma entidade física, mas tenha em mente que o escoamento irrotacional planar é meramente uma *aproximação*, e a linha de fonte é ainda útil como um bloco básico para a superposição no escoamento irrotacional. Desde que nos mantenhamos fora das vizinhanças imediatas do centro da linha de fonte, o restante do campo de escoamento produzido pela superposição de uma linha de fonte e outros blocos pode ainda ser uma boa representação de uma região do escoamento irrotacional em um campo de escoamento fisicamente realístico.

Geramos agora expressões para a função potencial de velocidade e função de corrente para uma linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ Usamos coordenadas cilíndricas, começando com a Equação 10–42 para u_r e também reconhecendo que u_θ é zero em todos os pontos. Usando a Tabela 10–2, as componentes da velocidade são:

Linha de fonte: $$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Para gerar a função de corrente, escolhemos (arbitrariamente) uma dessas equações (escolhemos a segunda), integramos com relação a r e depois diferenciamos com relação à outra variável θ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = f(\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = f'(\theta) = r u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}$$

da qual integramos para obter:

$$f(\theta) = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta + \text{constante}$$

Fazemos novamente a constante de integração arbitrária igual a zero, pois podemos acrescentar novamente uma constante quando quisermos, sem mudar o escoamento. Após uma análise similar para ϕ, obtemos as seguintes expressões para uma linha de fonte na origem:

Linha de fonte na origem:: $$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\ln r \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta \tag{10–43}$$

Várias linhas de corrente e linhas equipotenciais são desenhadas para uma linha de fonte na Figura 10–46. Conforme esperávamos, as linhas de corrente são *raios* (linhas de θ constante), e as linhas equipotenciais são *círculos* (linhas de r constante). As linhas de corrente e linhas equipotenciais são mutuamente ortogonais em todos os pontos exceto na origem, que é um ponto singular.

Em situações nas quais gostaríamos de colocar uma linha de fonte em algum outro lugar que não seja na origem, devemos transformar a Equação 10–43 cuidadosamente. Na Figura 10–47 está esboçado uma origem localizada em algum ponto arbitrário (a, b) no plano xy. Definimos r_1 como a distância da origem até algum ponto P no escoamento, onde P está localizado em (x, y) ou (r, θ). De forma similar, definimos θ_1 como o ângulo desde a origem até o ponto P, medido a partir de uma linha paralela ao eixo x. Analisamos o escoamento como se a fonte estivesse em uma nova origem na localização absoluta (a, b). As Equações 10–43 para ϕ e ψ são ainda utilizáveis, mas r e u devem ser substituídos por r_1 e θ_1. É necessário um pouco de trigonometria para converter r_1 e θ_1 de volta para (x, y) ou (r, θ). Em coordenadas cartesianas, por exemplo:

Linha de fonte no ponto (a, b):

$$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln r_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a} \qquad (10\text{–}44)$$

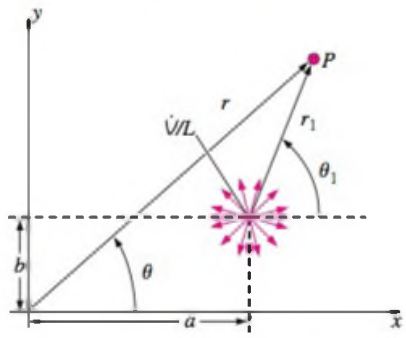


FIGURA 10–47
Linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ localizada em algum ponto arbitrário (a, b) no plano xy.

EXEMPLO 10–5 Superposição de uma Fonte e Sumidouro de Intensidades Iguais

Considere uma região irrotacional de escoamento composta de uma linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ na posição $(-a, 0)$ e uma linha de sumidouro de mesma intensidade (mas de sinal oposto) em $(a, 0)$, conforme está esboçado na Figura 10–48. Gere uma expressão para a função de corrente em coordenadas cartesianas e cilíndricas.

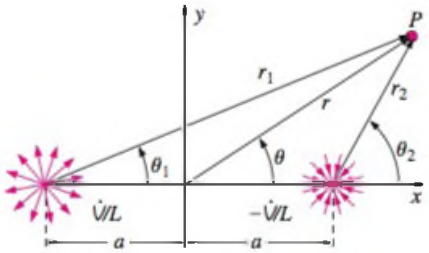


FIGURA 10–48
Superposição de uma linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ em $(-a, 0)$ e uma linha de sumidouro (fonte de intensidade $-\dot{V}/L$) em $(a, 0)$.

SOLUÇÃO Vamos sobrepor uma fonte e um sumidouro e gerar uma expressão para ψ em coordenadas Cartesianas e cilíndricas.

Hipóteses A região de escoamento em consideração é incompressível e irrotacional.

Análise Usamos a Equação 10–44 para obter ψ para a fonte:

Linha de fonte em (−a, 0): $\psi_1 = \dfrac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta_1$ onde $\theta_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x+a}$ **(1)**

Semelhantemente, para o sumidouro:

Linha de sumidouro em (a, 0): $\psi_2 = \dfrac{-\dot{V}/L}{2\pi}\theta_2$ onde $\theta_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-a}$ **(2)**

A superposição nos permite simplesmente somar as duas funções correntes, Equações 1 e 2, para obter a função de corrente composta,

Função de corrente composta: $\psi = \psi_1 + \psi_2 = \dfrac{\dot{V}/L}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$ **(3)**

Reorganizamos a Equação 3 e consideramos a tangente de ambos os lados para obter:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}{1 + \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2} \qquad (4)$$

onde usamos a identidade trigonométrica (Figura 10–49).

Substituímos as Equações 1 e 2 para θ_1 e θ_2 e executamos algumas operações algébricas para obter uma expressão para a função de corrente:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \frac{\dfrac{y}{x+a} - \dfrac{y}{x-a}}{1 + \dfrac{y}{x+a}\dfrac{y}{x-a}} = \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

ou, considerando o arco tangente de ambos os lados:

Resultado final, coordenadas cartesianas: $\psi = \dfrac{-\dot{V}/L}{2\pi} \operatorname{arctg}\dfrac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$ **(5)**

Identidades Trigonométricas Úteis

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\beta\cot\alpha - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

FIGURA 10–49
Algumas identidades trigonométricas úteis.

Traduzimos para coordenadas cilíndricas usando a Equação 10–38:

Resultado final, coordenadas cilíndricas:
$$\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2ar \operatorname{sen} \theta}{r^2 - a^2} \tag{6}$$

Discussão Se a fonte e o sumidouro invertessem suas posições, o resultado seria o mesmo, exceto que o sinal negativo no valor da fonte $\dot{V}/L$ desapareceria.

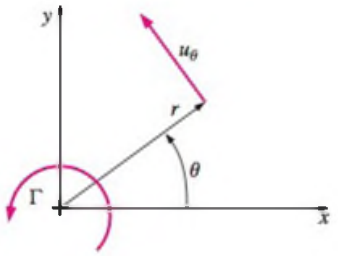


FIGURA 10–50
Linha de vórtice de intensidade Γ localizado na origem no plano *xy*.

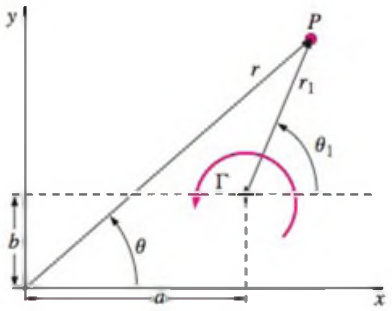


FIGURA 10–51
Linha de vórtice de intensidade Γ localizado em algum ponto arbitrário (a, b) no plano *xy*.

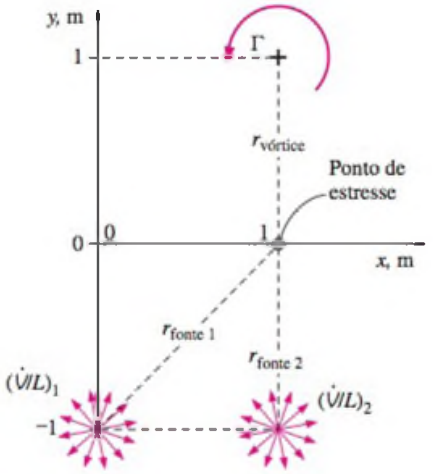


FIGURA 10–52
Superposição de duas linhas de fonte e uma linha de vórtice no plano *xy* (Exemplo 10–6).

Bloco 3 — Linha de Vórtice

Nosso terceiro bloco básico de escoamento é uma **linha de vórtice** paralelo ao eixo *z*. Como no bloco básico anterior, começamos com o caso simples no qual a linha de vórtice está localizada na origem (Figura 10–50). Uma vez mais usamos coordenadas cilíndricas por conveniência. Os componentes da velocidade são:

Linha de vórtice:
$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{10–45}$$

onde Γ é chamado de **circulação** ou **intensidade do vórtice.** Seguindo a convenção padrão da matemática, Γ positivo representa um vórtice no sentido anti-horário, enquanto Γ negativo representa um vórtice no sentido horário. Fica como um exercício integrar a Equação 10–45 para obter expressões para a função de corrente e função potencial de velocidade:

Linha de vórtice na origem:
$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{10–46}$$

Comparando as Equações 10–43 e 10–46, vemos que a linha de fonte e a linha de vórtice são de certa forma complementares no sentido de que as expressões para ϕ e ψ estão trocadas.

Em situações nas quais gostaríamos de colocar o vórtice em algum outro lugar que não seja na origem, devemos transformar a Equação 10–46 conforme fizemos para uma linha de fonte. Na Figura 10–51 está desenhado uma linha de vórtice localizada em algum ponto arbitrário (a, b) no plano *xy*. Definimos r_1 e θ_1 como antes (Figura 10–47). Para obter expressões para ϕ e ψ, substituímos r e θ por r_1 e θ_1 na Equação 10–46 e depois transformamos em coordenadas regulares, cartesianas ou cilíndricas. Em coordenadas cartesianas:

Linha de vórtice no ponto (a, b):
$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a}$$
$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{10–47}$$

EXEMPLO 10–6 Velocidade em um Escoamento Composto por Três Componentes

Uma região irrotacional de escoamento é formada sobrepondo-se uma linha de fonte de intensidade $(\dot{V}/L)_1 = 2{,}00\ m^2/s$ em $(x, y) = (0, 21)$, uma linha de fonte de intensidade $(\dot{V}/L)_2 = 21{,}00\ m^2/s$ em $(x, y) = (1, 21)$ e uma linha de vórtice de intensidade $\Gamma = 1{,}50\ m^2/s$ em $(x, y) = (1, 1)$, onde todas as coordenadas espaciais estão em metros. [Fonte número 2 é na realidade um sumidouro, pois $(\dot{V}/L)_2$ é negativo.] As localizações dos três blocos básicos são mostradas na Figura 10–52. Calcule a velocidade do fluido no ponto $(x, y) = (1, 0)$.

SOLUÇÃO Para a sobreposição das duas linhas de fonte e um vórtice, vamos calcular a velocidade no ponto $(x, y) = (1, 0)$.

Hipóteses **1** A região do escoamento que está sendo modelado é permanente, incompressível e irrotacional. **2** A velocidade na posição de cada componente é infinita (são singularidades), e o escoamento na vizinhança de cada uma dessas singularidades não é física; no entanto, essas regiões são ignoradas na análise presente.

Análise Há várias maneiras de se resolver esse problema. Poderíamos somar as três funções de correntes usando as Equações 10–44 e 10–47, e então considerar as derivadas da função de corrente composta para calcular as componentes da velocidade. Alternativamente, poderíamos fazer o mesmo para a função potencial de velocidade. Uma abordagem mais fácil é reconhecer que a *própria* velocidade pode ser superposta; nós simplesmente somamos os vetores de velocidade induzidos por cada uma das três singularidades individuais para formar a velocidade composta no ponto dado. Isto está ilustrado na Figura 10–53. Como o vórtice está localizado 1 m acima do ponto (1, 0), a velocidade induzida pelo vórtice é para a direita e tem uma intensidade de:

$$V_{\text{vórtice}} = \frac{\Gamma}{2\pi r_{\text{vórtice}}} = \frac{1{,}50\ \text{m}^2/\text{s}}{2\pi(1{,}00\ \text{m})} = 0{,}239\ \text{m/s} \qquad (1)$$

Da mesma forma, a primeira fonte induz uma velocidade no ponto (1, 0) a um ângulo de 45° em relação ao eixo x conforme mostra a Figura 10–53. Sua intensidade é:

$$V_{\text{fonte 1}} = \frac{|(\dot{V}/L)_1|}{2\pi r_{\text{fonte 1}}} = \frac{2{,}00\ \text{m}^2/\text{s}}{2\pi(\sqrt{2}\ \text{m})} = 0{,}225\ \text{m/s} \qquad (2)$$

Finalmente, a segunda fonte (um sumidouro) induz uma velocidade para baixo com intensidade:

$$V_{\text{fonte 2}} = \frac{|(\dot{V}/L)_2|}{2\pi r_{\text{fonte 2}}} = \frac{|-1{,}00\ \text{m}^2/\text{s}|}{2\pi(1{,}00\ \text{m})} = 0{,}159\ \text{m/s} \qquad (3)$$

Somamos essas velocidades vetorialmente completando os paralelogramos, conforme está ilustrado na Figura 10–54. Usando a Equação 10–35, a velocidade resultante é:

$$\vec{V} = \underbrace{\vec{V}_{\text{vórtice}}}_{0{,}239\vec{i}\ \text{m/s}} + \underbrace{\vec{V}_{\text{fonte 1}}}_{\left(\frac{0{,}225}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{0{,}225}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)\text{m/s}} + \underbrace{\vec{V}_{\text{fonte 2}}}_{-0{,}159\vec{j}\ \text{m/s}} = (0{,}398\vec{i} + 0\vec{j})\ \text{m/s} \qquad (4)$$

A velocidade superposta no ponto (1, 0) é 0,398 m/s para a direita.

Discussão Este exemplo demonstra que a velocidade pode ser superposta, assim como a função corrente ou a função potencial de velocidade pode ser superposta. A superposição da velocidade é válida em regiões irrotacionais de escoamento porque as equações diferenciais para ϕ e ψ são *lineares*; a linearidade se estende também às suas derivadas.

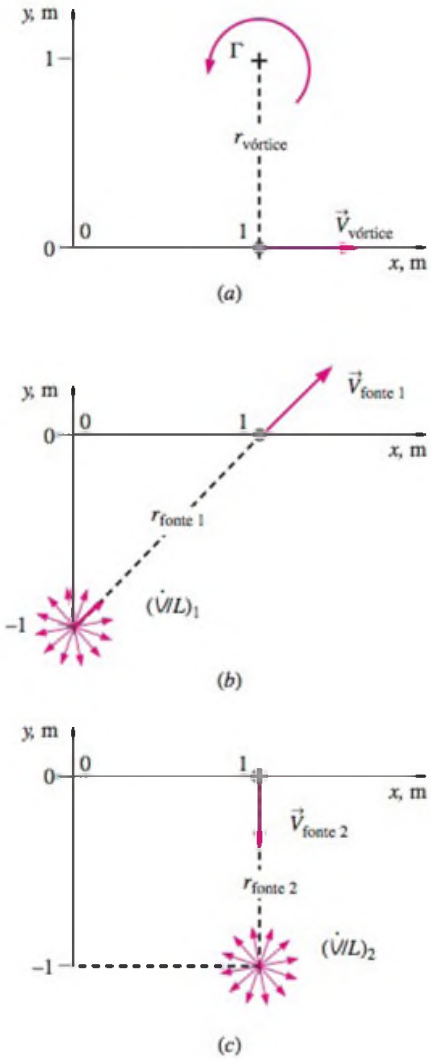


FIGURA 10–53
Velocidade induzida devido (*a*) ao vórtice, (*b*) à fonte 1 e (*b*) à fonte 2 (observando que a fonte 2 é *negativa*) (Exemplo 10–6).

Bloco 4 — Dipolo

Nosso quarto e último bloco básico de escoamento é chamado de **dipolo**. Embora o tratemos como um bloco básico para uso com superposição, o dipolo propriamente dito é gerado pela superposição de dois blocos básicos anteriores, isto é, uma linha de fonte e uma linha de sumidouro de intensidades iguais, conforme discutimos no Exemplo 10–5. A função de corrente composta foi obtida nesse problema resolvido e o resultado é repetido aqui:

Função de corrente composta:
$$\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi}\ \text{arctg}\ \frac{2ar\ \text{sen}\ \theta}{r^2 - a^2} \qquad (10\text{–}48)$$

Imagine agora que a distância a da fonte até a origem e da origem até o sumidouro se aproxima de zero (Figura 10–55). Lembre-se de que arctg β se aproxima de β para

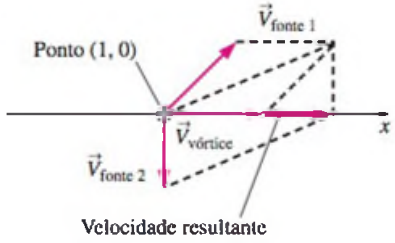


FIGURA 10–54
Soma vetorial das três velocidades induzidas do Exemplo 10–6.

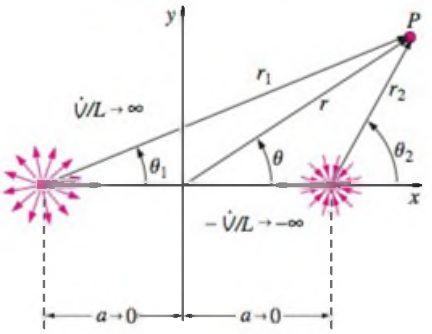


FIGURA 10–55
Um dipolo é formado pela superposição de uma linha de fonte em $(-a, 0)$ e uma linha de sumidouro em $(a, 0)$; a decresce para zero enquanto $\dot{V}/L$ aumenta para infinito de forma que o produto a $\dot{V}/L$ permanece constante.

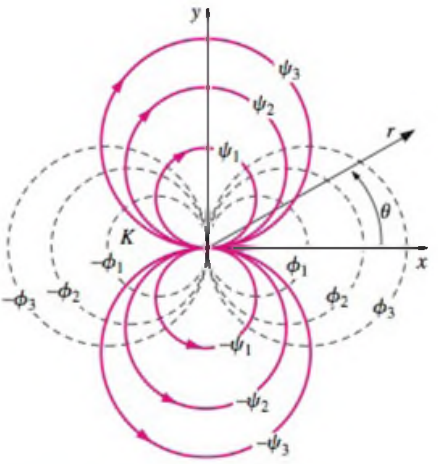


FIGURA 10–56
Linhas de corrente (linhas sólidas) e linhas equipotenciais (linhas tracejadas) para um dipolo de intensidade K localizado na origem no plano xy e alinhado com o eixo x.

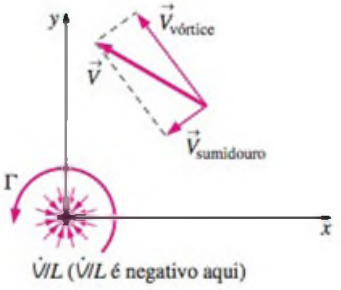


FIGURA 10–57
Superposição de uma linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ e uma linha de vórtice de intensidade Γ localizadas na origem. A soma vetorial de velocidades é mostrada em alguma localização arbitrária no plano xy.

valores muito pequenos de β. Portanto, à medida que a distância a se aproxima de zero, a Equação 10–48 se reduz a:

Função de corrente quando $a \to 0$:
$$\psi = \frac{-a(\dot{V}/L)r \operatorname{sen}\theta}{\pi(r^2 - a^2)} \tag{10–49}$$

Se encolhermos a mantendo as mesmas intensidades para a fonte e o sumidouro ($\dot{V}/L$ e $2\dot{V}/L$), a fonte e o sumidouro se cancelam uma à outra quando $a = 0$, não restando nenhum escoamento. No entanto, imagine que à medida em que a fonte e o sumidouro se aproximam um do outro, a intensidade deles $\dot{V}/L$ aumenta com o inverso da distância a de forma que o *produto* $a(\dot{V}/L)$ *permanece constante*. Nesse caso, $r >> a$ em qualquer ponto P exceto muito perto da fonte, e a Equação 10–49 se reduz a:

Dipolo ao longo do eixo x:
$$\psi = \frac{-a(\dot{V}/L)}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} = -K\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \tag{10–50}$$

onde definimos a **intensidade do dipolo** $K = a(\dot{V}/L)/\pi$ por conveniência. A função potencial de velocidade é obtida de maneira similar:

Dipolo ao longo do eixo x:
$$\phi = K\frac{\cos\theta}{r} \tag{10–51}$$

Várias linhas de corrente e linhas equipotenciais para um dipolo estão mostradas no gráfico da Figura 10–56. Concluímos que as linhas de corrente são círculos tangentes ao eixo x, e as linhas equipotenciais são círculos tangentes ao eixo y. Os círculos interceptam-se em ângulos de 90° em todos os pontos exceto na origem, que é um ponto singular.

Se K for negativo, o dipolo é "para trás", com o sumidouro localizado em $x = 0^2$ (infinitesimalmente à esquerda da origem) e a fonte localizada em $x = 0^+$ (infinitesimalmente à direita da origem). Nesse caso todas as linhas de corrente na Figura 10–56 seriam idênticas na forma, mas o escoamento seria na direção oposta. Fica como exercício criar expressões para um dipolo que esteja alinhado com algum ângulo α em relação ao eixo x.

Escoamentos Irrotacionais Formados pela Superposição

Agora que temos um conjunto de blocos básicos de escoamentos irrotacionais, estamos prontos para criar alguns campos de escoamento irrotacionais mais interessantes através da técnica da superposição. Limitaremos nossos exemplos a escoamentos planares no plano xy; exemplos de superposição com escoamentos axissimétricos podem ser encontrados em livros-texto mais avançados (por exemplo, Kundu, 1990; Panton, 1996; Heinsohn and Cimbala, 2003). Note que apesar de ψ não satisfazer a equação de Laplace para escoamento irrotacional axissimétrico, a equação diferencial para ψ (Equação 10–34) ainda é *linear*, e portanto a superposição ainda é válida.

Superposição de uma Linha de Sumidouro e uma Linha de Vórtice

Nosso primeiro exemplo é a superposição de uma linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ ($\dot{V}/L$ é uma quantidade negativa neste exemplo) e a linha de vórtice de intensidade Γ, ambas localizadas na origem (Figura 10–57). Isto representa uma região de escoamento acima do ralo em uma pia ou em uma banheira, onde o fluido faz movimentos espirais ao redor do dreno. Podemos superpor ψ ou ϕ. Escolhemos ψ e geramos a função de corrente composta somando c para uma fonte (Equação 10–43) e ψ para uma linha de vórtice (Equação 10–46),

Superposição:
$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{10–52}$$

Para desenharmos o gráfico das linhas de corrente do escoamento, escolhemos um valor de ψ e então resolvemos para r como função de θ ou θ como função de r. Escolhemos a primeira; após alguns cálculos algébricos, temos:

Linhas de corrente: $$r = \exp\left(\frac{(\dot{V}/L)\theta - 2\pi\psi}{\Gamma}\right) \qquad (10\text{–}53)$$

Escolhemos alguns valores arbitrários para $\dot{V}/L$ e Γ para podermos gerar um gráfico; isto é, definimos $\dot{V}/L = -1{,}00\ \text{m}^2/\text{s}$ e $\Gamma = 1{,}50\ \text{m}^2/\text{s}$. Note que $\dot{V}/L$ é negativo para um sumidouro. Observe também que as unidades para $\dot{V}/L$ e Γ podem ser obtidas facilmente, pois sabemos que as dimensões da função de corrente em escoamento planar são {comprimento^2/tempo}. As linhas de corrente são calculadas para vários valores de ψ usando a Equação 10–53 e são representadas graficamente na Figura 10–58.

As componentes da velocidade em qualquer ponto na região irrotacional do escoamento são obtidas diferenciando-se a Equação 10–52:

Componentes de velocidade: $$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Observamos que neste exemplo simples, a componente radial da velocidade é devida inteiramente ao sumidouro, pois não há nenhuma contribuição para a velocidade radial pelo vórtice. Analogamente, a componente de velocidade tangencial é devida inteiramente ao vórtice. A velocidade composta em qualquer ponto no escoamento é a soma vetorial dessas duas componentes, conforme está representado na Figura 10–57.

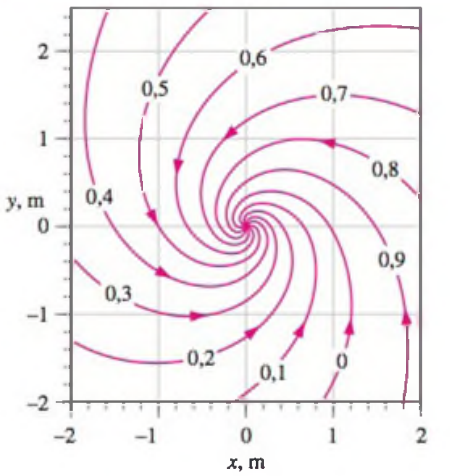


FIGURA 10–58
Linhas de corrente criadas pela superposição de uma linha de sumidouro e uma linha de vórtice na origem. Os valores de ψ estão em unidades de m^2/s.

Superposição de uma Corrente Uniforme e um Dipolo – Escoamento sobre um Cilindro Circular

Nosso próximo exemplo é um clássico no campo de mecânica dos fluidos, isto é, a superposição de uma corrente uniforme de velocidade V_∞ e um dipolo de intensidade K localizado na origem (Figura 10–59). Sobrepomos a função de corrente juntando a Equação 10–37 para uma corrente uniforme com a Equação 10–50 para um dipolo na origem. A função de corrente composta é então:

Superposição: $$\psi = V_\infty r \operatorname{sen}\theta - K\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \qquad (10\text{–}54)$$

Para conveniência definimos $\psi = 0$ quando $r = a$ (a razão disso logo ficará clara). A Equação 10–54 pode então ser resolvida para a intensidade K do dipolo:

Intensidade do dipolo: $$K = V_\infty a^2$$

e a Equação 10–54 torna-se:

Forma alternativa da função de corrente: $$\psi = V_\infty \operatorname{sen}\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \qquad (10\text{–}55)$$

Está claro pela Equação 10–55 que uma das linhas de corrente ($\psi = 0$) é um círculo de raio a (Figura 10–60). Podemos traçar essa e outras linhas de corrente resolvendo a Equação 10–55 para r como uma função de θ ou vice-versa. No entanto, como você já deve ter percebido, usualmente é melhor apresentar os resultados em termos de parâmetros *adimensionais*. Por inspeção, definimos três parâmetros adimensionais:

$$\psi^* = \frac{\psi}{V_\infty a} \qquad r^* = \frac{r}{a} \qquad \theta$$

onde o ângulo θ já é adimensional. Em termos desses parâmetros, a Equação 10–55 é escrita como:

$$\psi^* = \operatorname{sen}\theta\left(r^* - \frac{1}{r^*}\right) \qquad (10\text{–}56)$$

Resolvemos a Equação 10–56 para r^* como uma função de θ através do uso da regra quadrática:

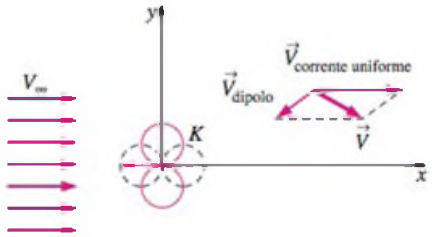


FIGURA 10–59
Superposição de uma corrente uniforme e um dipolo; a soma vetorial das velocidades é mostrada em uma posição arbitrária no plano xy.

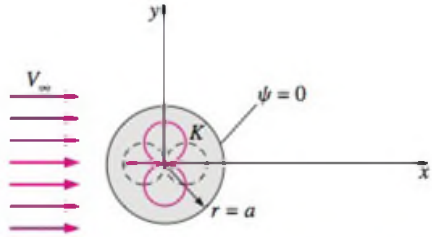


FIGURA 10–60
A superposição de uma corrente uniforme e um dipolo produz uma linha de corrente que é um círculo.

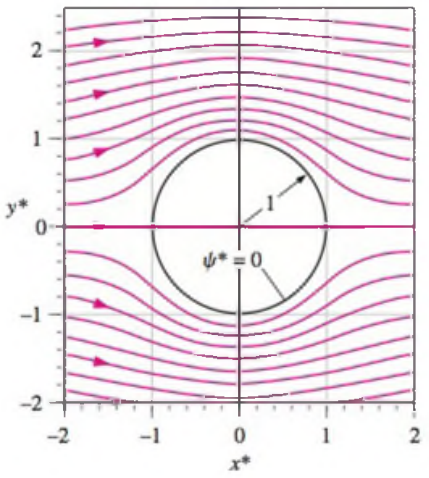


FIGURA 10–61
Linhas de corrente adimensionais criadas pela superposição de uma corrente uniforme e um dipolo na origem; $\psi^* = \psi/(V_\infty a)$, $\Delta\psi^* = 0{,}2$, $x^* = x/a$, e $y^* = y/a$, onde a é o raio do cilindro.

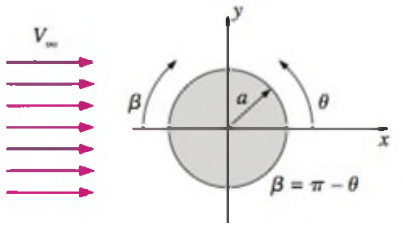


FIGURA 10–62
Escoamento planar sobre um cilindro circular de raio a imerso em uma corrente uniforme de velocidade V_∞ no plano xy. O ângulo β é definido a partir da frente do cilindro por convenção.

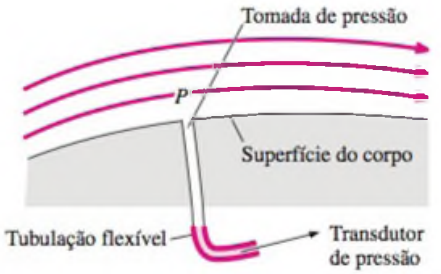


FIGURA 10–63
A pressão estática em uma superfície é medida usando-se uma tomada de pressão estática conectada a um manômetro ou a um transdutor eletrônico de pressão.

Linhas de corrente adimensionais:
$$r^* = \frac{\psi^* \pm \sqrt{(\psi^*)^2 + 4\,\text{sen}^2\,\theta}}{2\,\text{sen}\,\theta} \qquad (10\text{–}57)$$

Usando a Equação 10–57, traçamos várias linhas de corrente adimensionais na Figura 10–61. Agora você pode entender por que escolhemos o círculo $r = a$ (ou $r^* = 1$) como sendo a linha de corrente zero — essa linha de corrente pode ser vista como uma parede sólida, e esse escoamento representa *o escoamento potencial sobre um cilindro circular.* Não são mostradas as linhas de corrente *dentro* do círculo — elas existem, mas não são de interesse para nós.

Há dois pontos de estagnação neste campo de escoamento, um na frente do cilindro e um na traseira. As linhas de corrente próximas dos pontos de estagnação estão separadas umas das outras, pois o escoamento é muito lento ali. Ao contrário, as linhas de corrente próximas ao topo e base do cilindro estão juntas umas das outras, indicando regiões de escoamento rápido. Fisicamente, o fluido deve acelerar ao redor do cilindro, pois ele está agindo como uma obstrução ao escoamento.

Observe também que o escoamento é simétrico em relação aos eixos x e y. Embora a simetria acima/abaixo não seja uma surpresa, a simetria frente/atrás é talvez uma coisa inesperada, pois sabemos que o escoamento real ao redor de um cilindro gera uma região de esteira atrás do cilindro, e as linhas de corrente *não são* simétricas. No entanto, devemos ter em mente que os resultados aqui são apenas *aproximações* do escoamento real. Nós assumimos que havia irrotacionalidade em todos os pontos no campo de escoamento, e sabemos que essa aproximação não é verdadeira na proximidade das paredes e em regiões de esteira.

Calculamos as componentes da velocidade em todos os pontos no campo de escoamento diferenciando a Equação 10–55:
$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_\infty\,\text{sen}\,\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad (10\text{–}58)$$

Um caso especial é o da própria superfície do cilindro ($r = a$), onde a Equação 10–58 se reduz a:

Na superfície do cilindro:
$$u_r = 0 \qquad u_\theta = -2V_\infty\,\text{sen}\,\theta \qquad (10\text{–}59)$$

Como a condição de não-escorregamento nas paredes sólidas não pode ser satisfeita ao fazer a aproximação irrotacional, há deslizamento na parede do cilindro. Na verdade, no topo do cilindro ($\theta = 90°$), a velocidade do fluido na parede é *duas vezes* aquela da corrente livre.

EXEMPLO 10–7 Distribuição de Pressões em um Cilindro Circular

Usando a aproximação de escoamento irrotacional, calcule e trace a distribuição de pressão estática adimensional na superfície de um cilindro circular de raio a em uma corrente uniforme de velocidade V_∞ (Figura 10–62). Discuta os resultados. A pressão distante do cilindro é P_∞.

SOLUÇÃO Devemos calcular e traçar a distribuição de pressão estática adimensional ao longo da superfície de um cilindro circular em um escoamento de corrente livre.

Hipótese **1** A região do escoamento que está sendo modelada é permanente, incompressível e irrotacional. **2** O campo de escoamento é bidimensional no plano xy.

Análise Primeiro, a pressão estática é a pressão que seria medida por uma sonda medidora de pressão movendo-se com o fluido. Experimentalmente, medimos essa pressão em uma superfície usando uma **tomada de pressão estática,** que é basicamente um pequeno furo feito na direção normal à superfície (Figura 10–63). Na outra extremidade da tomada está um dispositivo medidor de pressão. Na literatura há dados experimentais disponíveis sobre a distribuição de pressão estática ao longo da superfície de um cilindro e compararemos nossos resultados com alguns desses dados experimentais.

Do Capítulo 7 reconhecemos que a pressão adimensional apropriada é o **coeficiente de pressão:**

Coeficiente de pressão: $$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} \quad (1)$$

Como o escoamento na região de interesse é irrotacional, usamos a equação de Bernoulli (Equação 10–27) para calcular a pressão em qualquer ponto no campo de escoamento. Ignorando os efeitos da gravidade:

Equação de Bernoulli: $$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (2)$$

Reorganizando a Equação 2 na forma da Equação 1, obtemos:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \quad (3)$$

Substituímos nossa expressão pela velocidade tangencial na superfície do cilindro, Equação 10–59, pois ao longo da superfície $V^2 = u_\theta^2$; a Equação 3 torna-se:

Coeficiente da pressão superficial: $$C_p = 1 - \frac{(-2V_\infty \operatorname{sen}\theta)^2}{V_\infty^2} = 1 - 4\operatorname{sen}^2\theta$$

Em termos do ângulo β, definido a partir da frente do corpo (Figura 10–62), usamos a transformação $\beta = \pi - \theta$ para obter

C_p em termos do ângulo β: $$C_p = 1 - 4\operatorname{sen}^2\beta \quad (4)$$

Na Figura 10–64 está o gráfico do coeficiente de pressão na metade superior do cilindro em função do angulo b, a curva sólida azul. (Devido à simetria superior-inferior, não é necessário traçar também a distribuição de pressão na metade inferior do cilindro.) A primeira coisa que notamos é que a distribuição de pressão é simétrica na frente e atrás. Isso não é surpresa, pois já sabemos que as *linhas de corrente* também são simétricas na frente e atrás (Figura 10–61).

Os pontos de estagnação na frente e atrás (em $\beta = 0°$ e 180°, respectivamente) estão marcados na Figura 10–64. O coeficiente de pressão é unitário ali, e esses dois pontos têm a pressão mais alta de todo o campo de escoamento. Em variáveis físicas, a pressão estática P nos pontos de estagnação é igual a $P_\infty + \rho V_\infty^2/2$. Em outras palavras, a **pressão dinâmica total** (também chamada de **pressão de impacto**) do fluido que chega é sentida como uma pressão estática no nariz do corpo quando o fluido é desacelerado para velocidade zero no ponto de estagnação. Na altura máxima do cilindro ($\beta = 90°$), a velocidade ao longo da superfície é duas vezes maior que a velocidade da corrente livre ($V = 2V_\infty$), e o coeficiente de pressão é o mais baixo ali ($C_p = 23$). Também estão marcadas na Figura 10–64 as duas posições em que $C_p = 0$, isto é em $\beta = 30°$ e 150°. Nessas posições, a pressão estática ao longo da superfície é igual àquela da corrente livre ($P = P_\infty$).

Discussão Os dados experimentais típicos para escoamento laminar e turbulento sobre a superfície de um cilindro circular estão indicados por círculos azuis e círculos cinza, respectivamente, na Figura 10–64. Está claro que na proximidade da frente do cilindro, a aproximação do escoamento irrotacional é excelente. No entanto, para β maior do que aproximadamente 60°, e especialmente junto à parte de trás do cilindro (lado direito do gráfico), os resultados do escoamento irrotacional não correspondem de forma nenhuma aos dados experimentais. Na verdade, concluímos que para escoamento sobre corpos de formas ásperas como esta, a aproximação do escoamento irrotacional usualmente funciona bem na metade dianteira do corpo, mas é muito deficiente na metade traseira do corpo. A aproximação do escoamento irrotacional se ajusta melhor a dados experimentais turbulentos do que a dados experimentais laminares; isso é porque a separação do escoamento ocorre mais distante a jusante para o caso com uma camada limite turbulenta, conforme discutiremos em mais detalhes na Seção 10–6.

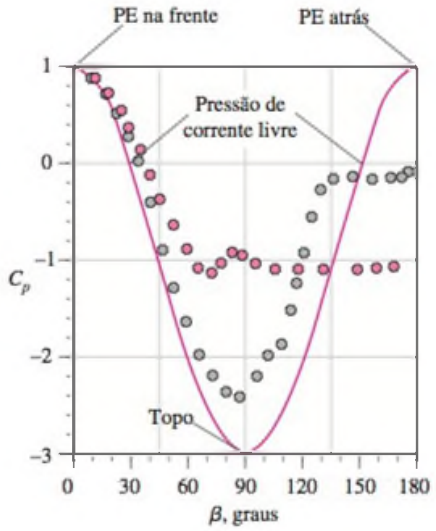


FIGURA 10–64
Coeficiente de pressão em função do ângulo β ao longo da superfície de um cilindro circular; a curva sólida azul é a aproximação do escoamento irrotacional, os círculos azuis são dos dados experimentais com $\text{Re} = 2 \times 10^5$ — separação da camada limite laminar, e os círculos cinza são dos dados experimentais típicos com $\text{Re} = 7 \times 10^5$ — separação da camada limite turbulenta.
Dados de Kundu, 1990.

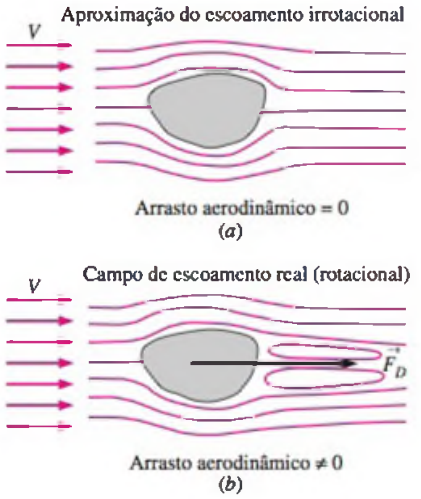


FIGURA 10–65
(*a*) O paradoxo de D'Alembert é que o arrasto aerodinâmico sobre qualquer corpo sem sustentação de qualquer forma é previsto como zero quando se usa a aproximação do escoamento irrotacional; (*b*) em escoamentos reais há um arrasto diferente de zero sobre corpos imersos em uma corrente uniforme.

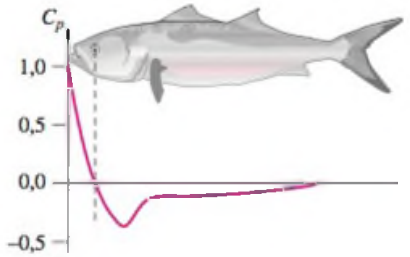


FIGURA 10–66
O corpo de um peixe foi criado de forma que seus olhos estejam localizados próximos ao ponto de pressão zero de maneira que sua visão não seja distorcida enquanto ele nada. Os dados apresentados estão ao longo do lado de uma anchova.
Adaptado da revista American Scientist, vol. 76, p. 32, 1988.

Uma conseqüência imediata da simetria da distribuição de pressão na Figura 10–64 é que *o arrasto de pressão total é nulo* sobre o cilindro (as forças de pressão na metade dianteira do corpo são exatamente equilibradas por aquelas na metade traseira do corpo). Nessa aproximação de escoamento irrotacional, a pressão é recuperada totalmente no ponto de estagnação de trás, de maneira que a pressão ali é igual à pressão no ponto de estagnação da frente. Prevemos também que não há arrasto viscoso no corpo, pois não podemos satisfazer a condição de não-escorregamento na superfície do corpo quando fazemos a aproximação irrotacional. Conseqüentemente, o arrasto aerodinâmico no cilindro em escoamento irrotacional é, de forma idêntica, igual a zero. Esse é um exemplo de uma definição mais geral que se aplica a corpos de *qualquer* formato (mesmo a formas assimétricas) quando é feita a aproximação de escoamento irrotacional, isto é, o famoso paradoxo enunciado pela primeira vez por Jean-le-Rond d'Alembert (1717–1783) no ano de 1752:

> **Paradoxo de D'Alembert:** Com a aproximação do escoamento irrotacional, a força de arrasto aerodinâmica sobre qualquer corpo sem sustentação de qualquer forma imerso em uma corrente uniforme é zero.

D'Alembert reconheceu o paradoxo de seu enunciado, naturalmente, sabendo que *há* arrasto aerodinâmico sobre corpos reais imersos em fluidos reais. Em um escoamento real, a pressão na superfície detrás do corpo é significativamente *menor* do que aquela na superfície da frente, levando a um arrasto de pressão diferente de zero sobre o corpo. Essa diferença de pressão é ampliada se o corpo for áspero e houver separação de escoamento, conforme está representado na Figura 10–65. No entanto, mesmo para corpos alinhados com a corrente, (como as asas de um avião em baixos ângulos de ataque), a pressão na proximidade da parte de trás do corpo nunca é recuperada totalmente. Além disso, a condição de não deslizamento na superfície do corpo leva também a um arrasto viscoso diferente de zero. Assim, a aproximação de escoamento irrotacional fracassa em sua previsão de arrasto aerodinâmico por duas razões: ela prevê que não há arrasto de pressão e prevê que não há arrasto viscoso.

A distribuição de pressão na extremidade da frente de qualquer corpo de forma arredondada é qualitativamente similar à do gráfico na Figura 10–64. Isto é, a pressão no ponto de estagnação (PE) da frente é a pressão mais alta sobre o corpo: $P_{PE} = P_\infty + \rho V^2/2$, onde V é a velocidade da corrente livre (eliminamos o subscrito ∞) e $C_p = 1$ ali. Movendo-se a jusante ao longo da superfície do corpo, a pressão cai para um valor mínimo para o qual P é menor do que P_∞ ($C_p < 0$). Esse ponto, onde a velocidade logo acima da superfície do corpo é a maior e a pressão é a menor, é chamado freqüentemente de **"ombro" aerodinâmico** do corpo. Depois do ombro, a pressão sobe lentamente. Com a aproximação do escoamento irrotacional, a pressão sempre sobe novamente até à pressão dinâmica no ponto de estagnação de trás, onde $C_p = 1$. No entanto, em um escoamento real, a pressão nunca se recupera totalmente, levando a um arrasto de pressão conforme já discutimos.

Em algum lugar entre o ponto de estagnação da frente e o **ombro aerodinâmico** está um ponto na superfície do corpo onde a velocidade logo acima do corpo é igual a V, a pressão P é igual a P_∞, e $C_p = 0$. Esse ponto é chamado de **ponto de pressão zero**, onde a frase obviamente se baseia na pressão *manométrica*, não na pressão absoluta. Nesse ponto, a pressão agindo normal à superfície do corpo é a *mesma* ($P = P_\infty$), independentemente de quão rápido o corpo se mova através do fluido. Esse fato é um fator na posição dos olhos de um peixe (Figura 10–66). Se os olhos do peixe estivessem localizados mais próximos ao nariz, o olho do peixe sofreria um aumento de pressão da água quando o peixe nadasse — quanto mais rápido ele nadasse, maior seria a pressão da água em seus olhos. Isso causaria uma distorção no globo ocular macio do peixe, afetando sua visão. Da mesma forma, se os olhos estivessem localizados muito atrás, próximos do **ombro aerodinâmico**, os olhos sentiriam uma pressão de *sucção* relativa quando o peixe nadasse, distorcendo-lhe a visão neste caso também. Experimentos revelaram que os olhos do peixe estão localizados muito próximos do ponto de pressão zero onde $P = P_\infty$, e o peixe pode nadar em qualquer velocidade sem distorcer sua visão. Por acaso, a parte de trás das brânquias está localizada próximo do **ombro aerodinâmico** para

que a pressão de sucção ali ajude o peixe a "exalar". O coração também está localizado perto desse ponto de baixa pressão para aumentar o volume de bombeamento do coração durante o nado rápido.

Se pensarmos com um pouco mais de detalhe sobre a aproximação do escoamento irrotacional, perceberemos que o círculo que modelamos como um cilindro sólido no Exemplo 10–7 não é realmente uma parede sólida de forma nenhuma — é apenas uma linha de corrente do campo de escoamento que nós estamos *modelando* como uma parede sólida. A linha de corrente particular que estamos modelando como uma parede sólida vem a ser simplesmente um círculo. Poderíamos com a mesma facilidade escolher uma *outra* linha de corrente do escoamento para modelar como uma parede sólida. Como por definição o escoamento não pode cruzar uma linha de corrente, e como não podemos satisfazer a condição de não-escorregamento em uma parede, definimos o seguinte:

> Na aproximação de escoamento irrotacional, qualquer linha de corrente pode ser considerada como uma parede sólida.

Por exemplo, podemos modelar *qualquer* linha de corrente na Figura 10–61 como uma parede sólida. Consideremos a primeira linha de corrente acima do círculo, e vamos modelá-la como uma parede. (Essa linha de corrente tem um valor adimensional de $\psi^* = 0{,}2$.) Várias linhas de corrente estão representadas na Figura 10–67; não mostramos nenhuma linha de corrente abaixo da linha de corrente $\psi^* = 0{,}2$ — elas ainda estão lá, apenas não nos interessam mais. Que tipo de escoamento isso representa? Bem, imagine o vento soprando sobre uma montanha; a aproximação irrotacional mostrada na Figura 10–67 representa esse escoamento. Podemos esperar inconsistências muito perto do solo, e talvez no lado a jusante da montanha, mas a aproximação é provavelmente muito boa no lado da frente da montanha.

Você provavelmente já deve ter notado um problema com esse tipo de superposição. Isto é, fazemos a superposição *primeiro* e então tentamos definir alguns problemas físicos que podem ser modelados pelo escoamento que geramos. Embora útil como uma ferramenta de aprendizado, essa técnica nem sempre é prática na vida real na engenharia. Por exemplo, é improvável que encontremos uma montanha com a forma exatamente igual àquela que modelamos na Figura 10–67. Em vez disso, usualmente já *temos* uma geometria e queremos modelar o escoamento sobre ou através dessa geometria. Há técnicas de superposição mais sofisticadas disponíveis que são mais adequadas para projetos e análise de engenharia. Isto é, há técnicas nas quais numerosas fontes e sumidouros são colocados em posições apropriadas de forma a modelar o escoamento sobre uma geometria predeterminada. Essas técnicas podem até ser estendidas para campos de escoamento irrotacional tridimensionais completos, mas requerem o uso de um computador devido à grande quantidade de cálculos envolvidos (Kundu, 1990). Não discutiremos essas técnicas aqui.

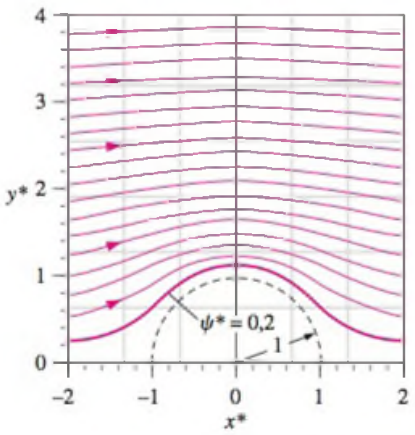


FIGURA 10–67
As mesmas linhas de corrente adimensionais da Figura 10–61, exceto que a linha de corrente $\psi^* = 0{,}2$ é modelada como uma parede sólida. Esse escoamento representa o fluxo do ar sobre uma montanha simétrica.

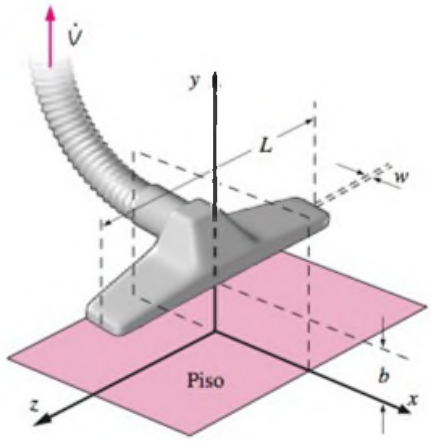


FIGURA 10–68
Mangueira de aspirador com acessório para piso; (*a*) vista tridimensional com o piso no plano *xz* e (*b*) vista de uma fatia no plano *xy* com a sucção modelada por uma linha de sumidouro.

EXEMPLO 10–8 Escoamento em um Acessório de Aspirador

Considere o escoamento do ar em um acessório para limpar o piso, em um aspirador doméstico típico (Figura 10–68a). A largura do rasgo de entrada é $w = 2{,}0$ mm e seu comprimento é $L = 35{,}0$ cm. O rasgo é mantido a uma distância $b = 2{,}0$ cm acima do piso, como mostra a figura. A vazão total em volume através da mangueira do aspirador é $\dot{V} = 0{,}110$ m³/s. Calcule o campo de escoamento no plano do centro do acessório (o plano xy na Figura 10–68a). Especificamente, trace várias linhas de corrente e calcule a distribuição de velocidade e pressão ao longo do eixo *x*. Qual é a velocidade máxima ao longo do piso e onde ela ocorre? Em que parte ao longo do piso o aspirador é mais eficiente?

SOLUÇÃO Calcule o campo de escoamento no plano central de um acessório de aspirador e, vamos desenhar o gráfico da velocidade e da pressão ao longo do piso (eixo *x*), calcular a posição e o valor da velocidade máxima ao longo do piso e calcular em que ponto do piso o aspirador é mais eficiente.

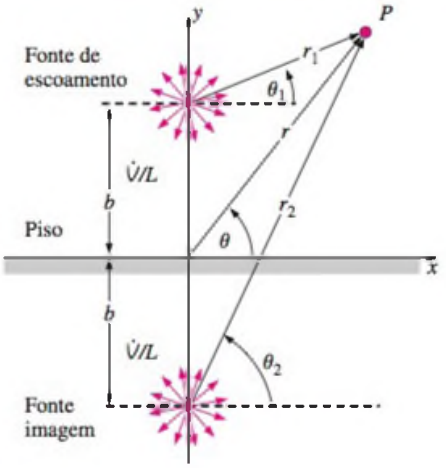


FIGURA 10–69
Superposição de uma linha de fonte de intensidade $\dot{V}/L$ em $(0, b)$ e uma linha de fonte da mesma intensidade em $(0, -b)$. A fonte inferior é uma imagem espelhada da fonte superior, tornando o eixo x uma linha de corrente.

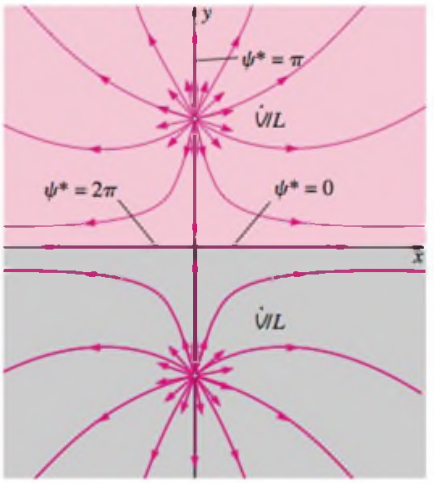


FIGURA 10–70
O eixo x é a linha de corrente divisória que separa o ar produzido pela fonte superior (azul) do ar produzido pela fonte inferior (cinza).

Hipóteses **1** O escoamento é em regime permanente e incompressível. **2** O escoamento no plano xy é bidimensional (planar). **3** A maior parte do campo de escoamento é irrotacional. **4** A sala é infinitamente grande e isenta de correntes de ar que poderiam influenciar o escoamento.

Análise Fazemos uma aproximação da abertura do acessório considerando-a uma linha de sumidouro (uma linha de fonte com intensidade negativa), localizada a uma distância b acima do eixo x, conforme está representado na Figura 10–68b. Com essa aproximação, estamos ignorando a largura finita da abertura (w); modelamos o escoamento para dentro da abertura como sendo o escoamento para dentro da linha de sumidouro, que é simplesmente um ponto no plano xy em $(0, b)$. Estamos também ignorando quaisquer efeitos da mangueira ou do corpo do acessório. A intensidade da linha de fonte é obtida dividindo-se a vazão total em volume pelo comprimento L da abertura,

$$\textit{Intensidade da linha de fonte:}\quad \frac{\dot{V}}{L} = \frac{-0{,}110\ \text{m}^3/\text{s}}{0{,}35\ \text{m}} = -0{,}314\ \text{m}^2/\text{s} \qquad (1)$$

onde incluímos um sinal negativo, pois trata-se de um sumidouro e não de uma fonte.

Está claro que esta linha de sumidouro por si só (Figura 10–68b) não é suficiente para modelar o escoamento, pois o ar fluiria para o sumidouro de todas as direções, incluindo para cima através do piso. Para contornar esse problema, acrescentamos um outro escoamento irrotacional elementar (bloco básico) para modelar o efeito do piso. Uma maneira inteligente de fazer isso é através do **método de imagens**. Com essa técnica, colocamos um segundo sumidouro idêntico abaixo do piso no ponto $(0, -b)$. Chamamos esse segundo sumidouro de **sumidouro imagem**. Como o eixo x é agora uma linha de simetria, o próprio eixo x é uma linha de corrente do escoamento, e portanto, pode ser considerado como o piso. O campo de escoamento irrotacional a ser analisado está representado na Figura 10–69. São mostradas duas fontes de intensidade $\dot{V}/L$. A fonte superior é chamada de fonte do escoamento e representa sucção para dentro do acessório do aspirador. A fonte de baixo é a fonte imagem. Tenha em mente que a intensidade da fonte $\dot{V}/L$ é negativa neste problema (Equação 1), de modo que ambas as fontes são na realidade sumidouros.

Usamos a superposição para gerar a função de corrente para a aproximação irrotacional desse campo de escoamento. As operações algébricas aqui são similares àquelas do Exemplo 10–5; naquele caso nós tínhamos uma fonte e um sumidouro no eixo x, já aqui temos duas fontes no eixo y. Usamos a Equação 10–44 para obter ψ para a fonte do escoamento:

$$\textit{Linha de fonte em } (0, b):\quad \psi_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta_1 \quad \text{onde} \quad \theta_1 = \text{arctg}\,\frac{y-b}{x} \qquad (2)$$

De forma similar, para a fonte imagem:

$$\textit{Linha de fonte em } (0, -b):\quad \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta_2 \quad \text{onde} \quad \theta_2 = \text{arctg}\,\frac{y+b}{x} \qquad (3)$$

A superposição nos possibilita simplesmente somar as duas funções de correntes, Equações 2 e 3, para obter a função de corrente composta,

$$\textit{Função de corrente composta:}\quad \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}(\theta_1 + \theta_2) \qquad (4)$$

Reorganizamos a Equação 4 e tomamos a tangente de ambos os lados para obter:

$$\text{tg}\,\frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \text{tg}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\text{tg}\,\theta_1 + \text{tg}\,\theta_2}{1 - \text{tg}\,\theta_1 \text{tg}\,\theta_2} \qquad (5)$$

onde novamente usamos uma identidade trigonométrica (Figura 10–49).

Substituímos as Equações 2 e 3 para θ_1 e θ_2 e executamos algumas operações algébricas para obter nossa expressão final para a função de corrente em coordenadas cartesianas:

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 + b^2} \tag{6}$$

Transformamos a expressão em coordenadas cilíndricas usando a Equação 10–38 e passamos para a forma adimensional. Após algumas operações algébricas:

Função corrente adimensional: $$\psi^* = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta + 1/r^{*2}} \tag{7}$$

onde $\psi^* = 2\pi\psi/(\dot{V}/L)$, $r^* = r/b$ e usamos identidades trigonométricas da Figura 10–49.

Devido à simetria em relação ao eixo x, todo o ar que é produzido pela linha de fonte superior deve permanecer acima do eixo x. Da mesma forma, todo o ar imagem que é produzido na linha de fonte inferior deve permanecer abaixo do eixo x. Se fôssemos colorir de azul o ar que vem da fonte superior (norte), e de cinza o ar que vem da fonte inferior (sul) na (Figura 10–70), todo o ar azul ficaria acima do eixo x e todo o ar cinza ficaria abaixo do eixo x. Assim, o eixo x age como uma **linha de corrente divisória**, separando o azul do cinza. Além disso, lembre-se do Capítulo 9 onde diz que a diferença no valor de ψ de uma linha de corrente para a próxima em escoamento planar é igual à vazão em volume por unidade de largura escoando entre as duas linhas de corrente. Definimos ψ igual a zero ao longo da parte positiva do eixo x. Seguindo a convenção do lado esquerdo, introduzida no Capítulo 9, sabemos que ψ na parte negativa do eixo x deve ser igual à vazão em volume total por unidade de largura produzido pela linha de fonte superior, isto é, $\dot{V}/L$. Ou:

$$\psi_{-\text{eixo}\,x} - \underbrace{\psi_{+\text{eixo}\,x}}_{0} = \dot{V}/L \qquad \rightarrow \qquad \psi^*_{-\text{eixo}\,x} = 2\pi \tag{8}$$

Essas linhas de corrente estão identificadas na Figura 10–70. Além disso, a linha de corrente adimensional $\psi^* = \pi$ também está identificada. Ela coincide com o eixo y, pois há simetria sobre esse eixo também. A fonte (0, 0) é um ponto de estagnação, pois a velocidade induzida pela fonte inferior cancela exatamente aquela induzida pela fonte superior.

Para o caso do aspirador de pó que está sendo modelado aqui, as intensidades das fontes são negativas (elas são sumidouros). Portanto, a direção do escoamento é invertida, e os valores de ψ^* têm sinal oposto àqueles da Figura 10–70. Usando novamente a convenção do lado esquerdo, desenhamos o gráfico da função corrente adimensional para $-2\pi < \psi^* < 0$ (Figura 10–71). Para isso, resolvemos a Equação 7 para r^* em função de θ para vários valores de ψ^*:

Linhas de corrente adimensionais: $$r^* = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\psi^*}{\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta \operatorname{tg}\psi^*}} \tag{9}$$

Somente a metade superior é traçada, pois a metade inferior é simétrica e é meramente a imagem espelhada da metade superior. Para o caso de $\dot{V}/L$, negativo, o ar é sugado para o aspirador de todas as direções conforme indicam as setas nas linhas de corrente.

Para calcularmos a distribuição de velocidade no piso (o eixo x), podemos diferenciar a Equação 6 e aplicar a definição de função de corrente para escoamento planar (Equação 10–29), ou podemos fazer uma soma vetorial. Essa última opção é mais simples e está ilustrada na Figura 10–72 para uma posição arbitrária ao longo do eixo x. A velocidade induzida da fonte superior (ou sumidouro) tem intensidade $(\dot{V}/L)/(2\pi r_1)$, e sua direção está alinhada com r_1 conforme mostra a figura. Devido à simetria, a velocidade induzida da fonte imagem tem a mesma intensidade, mas sua direção está alinhada com r_2. A soma vetorial dessas duas velocidades induzidas está ao longo do eixo x, pois os dois componentes horizontais se somam, mas os dois componentes verticais se anulam um ao outro. Após um pouco de trigonometria, concluímos que:

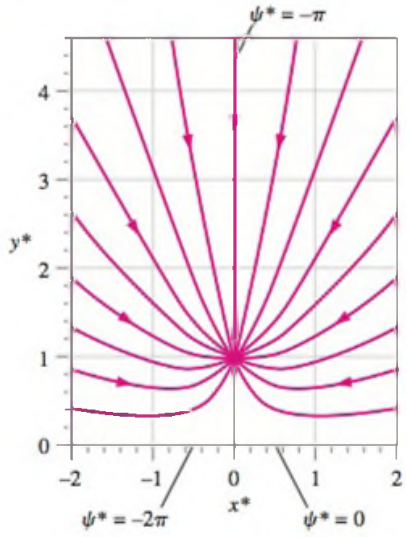


FIGURA 10–71
Linhas de corrente adimensionais para as duas fontes da Figura 10–69 para o caso no qual as intensidades da fonte são *negativas* (elas são *sumidouros*). ψ^* é incrementada uniformemente a partir de -2π (parte negativa do eixo x) até 0 (parte positiva do eixo x), e é mostrada somente a metade superior do escoamento. O escoamento é *em direção* ao sumidouro na posição (0, 1).

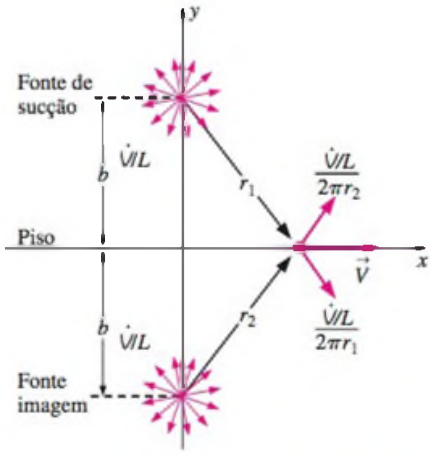


FIGURA 10–72
Soma vetorial das velocidades induzidas pelas duas fontes; a velocidade resultante é horizontal em qualquer posição no eixo x devido à simetria.

Velocidade axial ao longo do eixo x:
$$u = V = \frac{(\dot{V}/L)x}{\pi(x^2 + b^2)} \tag{10}$$

onde V é o módulo do vetor de velocidade resultante ao longo do piso conforme está desenhado na Figura 10–72. Como usamos a aproximação do escoamento irrotacional, a equação de Bernoulli pode ser usada para gerar o campo de pressão. Ignorando a gravidade:

Equação de Bernoulli:
$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante} = \frac{P_\infty}{\rho} + \underbrace{\frac{V_\infty^2}{2}}_{0} \tag{11}$$

Para gerar um coeficiente de pressão, precisamos de uma velocidade de referência para o denominador. Não tendo nenhuma, geramos uma a partir dos parâmetros conhecidos, isto é, $V_{ref} = -(\dot{V}/L)/b$, onde inserimos um sinal negativo para tornar V_{ref} positiva (pois $\dot{V}/L$ é negativa para nosso modelo de aspirador de pó). Então definimos C_p como:

Coeficiente de pressão:
$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_{ref}^2} = -\frac{V^2}{V_{ref}^2} = -\frac{b^2V^2}{(\dot{V}/L)^2} \tag{12}$$

onde também aplicamos a Equação 11. Substituindo V pelo seu valor na Equação 10, obtemos:

$$C_p = -\frac{b^2x^2}{\pi^2(x^2 + b^2)^2} \tag{13}$$

Introduzimos variáveis adimensionais para a velocidade axial e a distância:

Variáveis adimensionais:
$$u^* = \frac{u}{V_{ref}} = -\frac{ub}{\dot{V}/L} \qquad x^* = \frac{x}{b} \tag{14}$$

Observamos que C_p já é adimensional. Em forma adimensional, as equações 10 e 13 tornam-se:

Ao longo do piso:
$$u^* = -\frac{1}{\pi}\frac{x^*}{1 + x^{*2}} \qquad C_p = -\left(\frac{1}{\pi}\frac{x^*}{1 + x^{*2}}\right)^2 = -u^{*2} \tag{15}$$

Na Figura 10–73 estão desenhadas as curvas mostrando u^* e C_p em função de x^*.

Vemos pela Figura 10–73 que u^* aumenta lentamente de 0 até $x^* = -\infty$ com um valor máximo de aproximadamente 0,159 em $x^* = 21$. A velocidade é positiva (para a direita) para valores negativos de x^* como era esperado, pois o ar está sendo sugado para dentro do aspirador. À medida que a velocidade aumenta, a pressão diminui; C_p é 0 em $x^* = -\infty$ e decresce até seu valor mínimo de aproximadamente −0,0253 em $x^* = -1$. Entre $x^* = -1$ e $x^* = 0$ a velocidade decresce até zero enquanto a pressão aumenta até zero no ponto de estagnação diretamente abaixo do bico do aspirador. À direita do bocal (valores positivos de x^*), a velocidade é anti-simétrica, enquanto a pressão é simétrica.

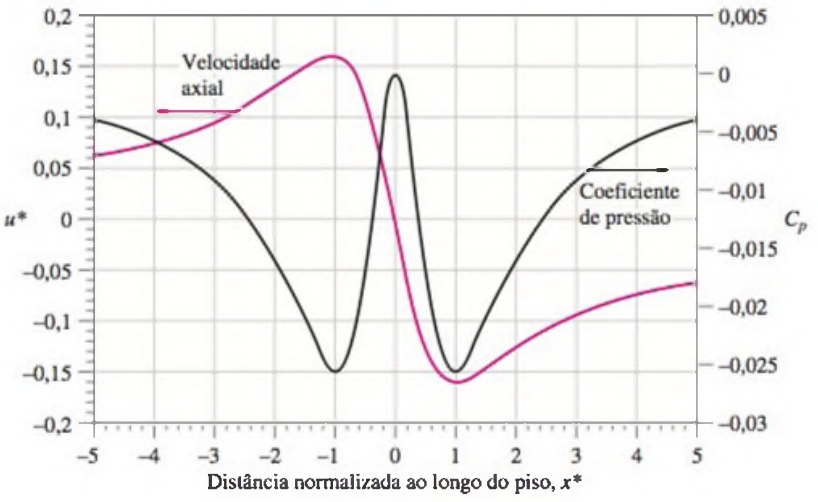


FIGURA 10–73
Velocidade axial adimensional (curva azul) e coeficiente de pressão (curva preta) ao longo do piso embaixo de um aspirador de pó modelado como uma região irrotacional do escoamento.

A velocidade máxima (pressão mínima) ao longo do piso ocorre em $x^* = \pm 1$, que é a mesma distância da altura do bocal acima do piso (Figura 10–74). Em termos dimensionais, **a máxima velocidade ao longo do piso ocorre em $x = \pm b$** e a velocidade máxima ali é:

Velocidade máxima ao longo do piso:

$$|u|_{máx} = -|u^*|_{máx}\frac{\dot{V}/L}{b} = -0{,}159\left(\frac{-0{,}314\ \text{m}^2/\text{s}}{0{,}020\ \text{m}}\right) = \mathbf{2{,}50\ m/s} \qquad \textbf{(16)}$$

Esperamos que o aspirador de pó seja mais eficiente para aspirar a poeira do piso onde a velocidade junto ao piso for maior e a pressão junto ao piso é mais baixa. Assim, contrário ao que você pode ter pensado, o melhor desempenho não ocorre diretamente abaixo da entrada de sucção, mas em $x = \pm b$, conforme está ilustrado na Figura 10–74.

Discussão Observe que nunca usamos a largura w do bocal do aspirador em nossa análise, pois uma linha de sumidouro não tem escala de comprimento. Você pode se convencer de que um aspirador de pó funciona melhor em $x \cong \pm b$ fazendo uma experiência simples com um aspirador de pó e um pouco de material granulado (como açúcar ou sal) em um piso liso. Concluímos que a aproximação irrotacional é bastante realista para o escoamento para dentro de um aspirador em qualquer lugar, exceto muito perto do piso, porque ali o escoamento é irrotacional.

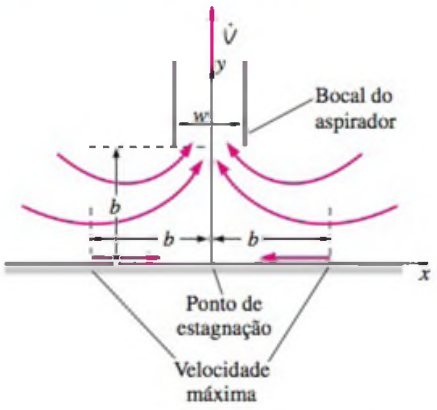


FIGURA 10–74
Com base em uma aproximação de escoamento irrotacional, a velocidade máxima ao longo do piso embaixo do bocal de um aspirador de pó ocorre em $x = \pm b$. Ocorre um ponto de estagnação diretamente abaixo do bocal.

Concluímos esta seção enfatizando que embora a aproximação de escoamento irrotacional seja matematicamente simples, e a velocidade e os campos de pressão possam ser obtidos facilmente, devemos ter muito cuidado ao aplicá-la. A aproximação de escoamento irrotacional fracassa em regiões de vorticidade não desprezível, especialmente próximo a paredes sólidas, onde as partículas de fluido giram devido às tensões viscosas causadas pela condição de não-escorregamento na parede. Isso nos conduz à seção final deste capítulo (Seção 10–6) na qual discutimos a aproximação da camada limite.

10–6 ▪ A APROXIMAÇÃO DA CAMADA LIMITE

Conforme discutimos nas Seções 10–4 e 10–5, há pelo menos duas situações de escoamento nas quais os termos viscosos na equação de Navier-Stokes podem ser desprezados. A primeira situação ocorre em regiões de escoamento com altos números de Reynolds, onde se sabe que as forças viscosas resultantes são desprezíveis comparadas com as forças inerciais e/ou de pressão; chamamos essas regiões de *regiões de escoamento sem viscosidade*. A segunda situação ocorre quando a vorticidade é muito pequena; chamamos essas regiões de *irrotacionais* ou *regiões de escoamento potencial*. Em qualquer dos casos, a remoção dos termos viscosos da equação de Navier-Stokes resulta na equação de Euler (Equação 10–13 e também na Equação 10–25). Embora a matemática fique bastante simplificada quando são eliminados os termos viscosos, há algumas deficiências sérias associadas com a aplicação da equação de Euler nos problemas práticos de escoamento na engenharia. A primeira na lista de deficiências é a incapacidade para impor a condição de não-escorregamento em paredes sólidas. Isso leva a resultados não-físicos como, por exemplo, forças de cisalhamento viscoso iguais a zero em paredes sólidas e arrasto aerodinâmico igual a zero em corpos imersos em uma corrente livre. Podemos, portanto, pensar na equação de Euler e na equação de Navier-Stokes como duas montanhas separadas por um enorme abismo (Figura 10–75*a*). Formulamos o seguinte enunciado a respeito da aproximação camada limite:

A aproximação da camada limite preenche o espaço entre a equação de Euler e a equação de Navier-Stokes, e entre a condição de escorregamento e a condição de não-escorregamento nas paredes sólidas (Figura 10–75b).

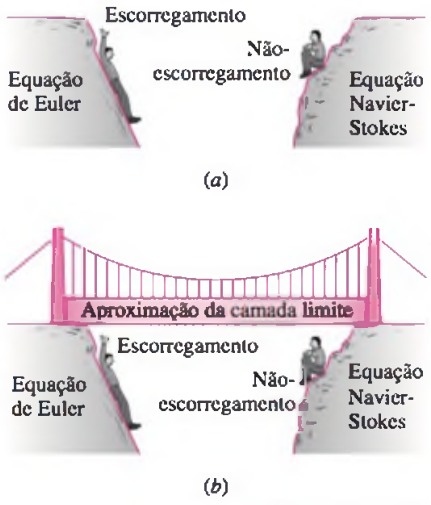


FIGURA 10–75
(*a*) Existe uma enorme distância entre a equação de Euler (que admite o deslizamento nas paredes) e a equação de Navier-Stokes (que mantém a condição de não-escorregamento); (*b*) a aproximação da camada limite vem preencher esse espaço.

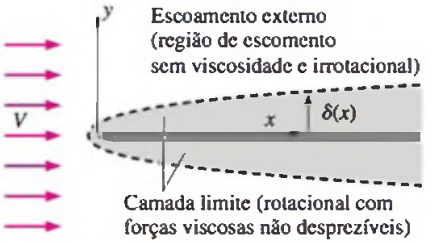


FIGURA 10–76
O conceito de camada limite de Prandtl divide o escoamento em uma região de escoamento externo e uma região de uma camada limite fina (não está em escala).

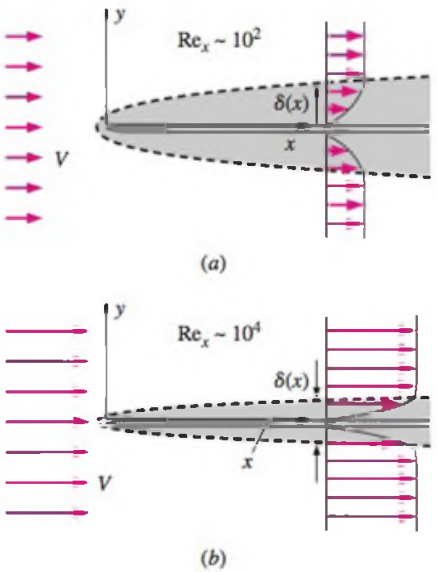


FIGURA 10–77
Escoamento de uma corrente uniforme paralela a uma placa plana (os desenhos não estão em escala): (*a*) $Re_x \sim 10^2$, (*b*) $Re_x \sim 10^4$. Quanto maior o número de Reynolds, mais fina é a camada limite ao longo da placa em uma dada posição x.

Considerando-se uma perspectiva histórica, em meados de 1800, a equação de Navier-Stokes era conhecida, mas não podia ser resolvida exceto para escoamentos de geometrias muito simples. Enquanto isso, os matemáticos conseguiam obter belas soluções analíticas da equação de Euler e das equações de escoamento potencial para escoamentos de geometria complexa, mas seus resultados freqüentemente não tinham significado físico. Então, a única maneira confiável de estudar escoamentos de fluidos era empiricamente, isto é, através de experimentos. Uma grande mudança na mecânica dos fluidos ocorreu em 1904 quando Ludwig Prandtl (1875–1953) introduziu a **aproximação da camada limite**. A idéia de Prandtl era dividir o escoamento em duas regiões: uma **região de escoamento externo** que é sem viscosidade e/ou irrotacional e uma região de escoamento interno chamada de **camada limite** — uma camada muito fina de escoamento próxima a uma parede sólida onde as forças viscosas e a rotacionalidade não podem ser ignoradas (Figura 10–76). Na região de escoamento externo, usamos as equações da continuidade e de Euler para obter o campo de velocidade do escoamento externo e a equação de Bernoulli para obter o campo de pressão. Alternativamente, se a região de escoamento externo é irrotacional, podemos usar as técnicas de escoamento potencial discutidas na Seção 10–5 (por exemplo, superposição) para obter o campo de velocidade do escoamento externo. Em qualquer dos casos, solucionamos a região do escoamento externo *primeiro* e depois ajustamos uma fina camada limite em regiões nas quais a rotacionalidade e as forças viscosas não podem ser desprezadas. Dentro da camada limite nós resolvemos as **equações da camada limite**, que logo serão discutidas. (Observe que as equações da camada limite são elas próprias aproximações da equação de Navier-Stokes completa, conforme veremos.)

A aproximação da camada limite corrige algumas das principais deficiências da equação de Euler proporcionando uma maneira de impor a condição de não-escorregamento em paredes sólidas. Conseqüentemente, forças de cisalhamento viscoso podem existir ao longo de paredes, corpos imersos em uma corrente livre podem ser submetidos a arrasto aerodinâmico e a separação do escoamento em regiões de gradiente de pressão adversa pode ser prevista com maior precisão. O conceito de camada limite tornou-se, portanto, o carro-chefe da engenharia de mecânica dos fluidos durante grande parte do século 20. Porém, com o aparecimento de computadores rápidos e mais baratos e os softwares de dinâmica dos fluidos no fim do século 20, foi possível a solução numérica da equação de Navier-Stokes para escoamentos de geometria complexa. Hoje, portanto, não é mais necessário dividir o escoamento em regiões de escoamento externo e regiões de camada limite — podemos usar os softwares CFD para resolver todo o conjunto de equações de movimento (continuidade e Navier-Stokes) através de todo o campo de escoamento. No entanto, a teoria da camada limite ainda é útil em algumas aplicações de engenharia, pois ela leva muito menos tempo para chegar a uma solução. Além disso, podemos aprender muito sobre o comportamento dos fluidos em escoamento estudando as camadas limite. Voltamos a afirmar que as soluções de camada limite são apenas *aproximações* das soluções completas da equação de Navier-Stokes; devemos ter critério sobre onde aplicar essa aproximação.

O segredo da aplicação bem-sucedida da aproximação da camada limite é a hipótese de que a camada limite é muito *fina*. O exemplo clássico é uma corrente uniforme fluindo paralela a uma longa placa plana alinhada com o eixo x. A espessura δ da camada limite em alguma posição x ao longo da placa está representada na Figura 10–77. Por convenção, δ usualmente é definida como a distância em relação à parede, na qual a componente da velocidade paralela à parede é 99 % da velocidade do fluido fora da camada limite. Resulta que para um dado fluido e placa, quando mais alta a velocidade V da corrente livre, mais fina é a camada limite (Figura 10–77). Em termos adimensionais, definimos o número de Reynolds com base na distância x ao longo da parede:

Número de Reynolds ao longo de uma placa plana:
$$Re_x = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{V x}{\nu} \qquad (10\text{–}60)$$

Portanto,

> Em uma dada posição x, quanto mais alto for o número de Reynolds, mais fina é a camada limite.

Em outras palavras, quanto mais alto for o número de Reynolds, tudo o mais permanecendo igual, mais fina é a camada limite, e mais confiável será a aproximação de camada limite. Podemos ter confiança que a camada limite é fina quando $\delta \ll x$ (ou, expressando em forma adimensional, $\delta/x \ll 1$).

A forma do perfil da camada limite pode ser obtida experimentalmente pela visualização do fluxo. Na Figura 10–78 é mostrado um exemplo para uma camada limite laminar em uma placa plana. Essa fotografia foi tirada há 50 anos por F. X. Wortmann e é considerada agora uma fotografia clássica de um perfil de uma camada limite laminar sobre uma placa plana. A condição de não-deslizamento é claramente verificada na parede; e o aumento uniforme na velocidade do escoamento distante da parede confirma que o escoamento é certamente laminar.

Observe que embora estejamos discutindo camadas limites em conexão com a região fina próxima a uma parede sólida, a aproximação de camada limite *não* está limitada a regiões de escoamento limitadas por paredes. As mesmas equações podem ser aplicadas a **camadas de cisalhamento livre** como jatos, esteiras e camadas de mistura (Figura 10–79), contanto que o número de Reynolds seja suficientemente alto para que essas regiões sejam *finas*. As regiões desses campos de escoamento com forças viscosas não desprezíveis e vorticidade finita também podem ser consideradas como camadas limites, mesmo que não esteja presente uma parede divisória sólida. A espessura da camada limite $\delta(x)$ é identificada em cada um dos desenhos da Figura 10–79. Como você pode ver, por convenção δ é usualmente definido baseado em *metade* da espessura total da camada de cisalhamento livre. Definimos δ como a distância desde a linha de centro até a borda da camada limite onde a mudança em velocidade é 99 por cento da variação máxima em velocidade desde a linha de centro até o escoamento externo. A espessura da camada limite não é constante, mas varia com a distância x jusante. Nos exemplos discutidos aqui (placa plana, jato, esteira e camada de mistura), $\delta(x)$ *aumenta* com x. No entanto, há situações de escoamento, como o escoamento externo em rápida aceleração ao longo de uma parede, na qual $\delta(x)$ *diminui* com x.

Um engano comum entre os estudantes inexperientes de mecânica dos fluidos é pensar que a curva que representa δ em função de x é uma *linha de corrente* do escoamento — mas isso *não* é verdade! Na Figura 10–80 desenhamos as linhas de corrente e $\delta(x)$ para a camada limite desenvolvendo-se em uma placa plana. À medida que a espessura da camada limite cresce a jusante, as linhas de corrente que passam através da camada limite devem divergir ligeiramente para cima para satisfazer o princípio da conservação da massa. O valor desse deslocamento para cima é menor do que o crescimento de $\delta(x)$. Como as linhas de corrente *cruzam* a curva $\delta(x)$, está claro que $\delta(x)$ *não* é uma linha de corrente (as linhas de corrente não podem se cruzar entre si, pois se isso acontecesse a massa não seria conservada).

Para uma camada limite laminar desenvolvendo-se sobre uma placa plana, como na Figura 10–80, a espessura d da camada limite é no máximo uma função de V, x e das propriedades ρ e μ do fluido. Um exercício simples em análise dimensional é mostrar que δ/x é uma função de Re_x. Na verdade, ocorre que δ não é proporcional à *raiz quadrada* de Re_x. Você deve observar, no entanto, que esses resultados são válidos somente para uma camada limite *laminar* em uma placa plana. À medida que nos movemos para baixo na placa para valores de x cada vez maiores, Re_x aumenta linearmente com x. Em algum ponto, começam a surgir distúrbios infinitesimais no escoamento e a camada limite não pode continuar sendo laminar — ela inicia um processo de **transição** em direção ao escoamento turbulento. Para uma placa plana com uma corrente livre uniforme, o processo de transição começa em um **número de Reynolds crítico,** $\mathrm{Re}_{x,\,\text{crítico}} \cong 1 \times 10^5$, e continua até que a camada limite seja totalmente turbulenta no **número de Reynolds de transição,** $\mathrm{Re}_{x,\,\text{transição}} \cong 3 \times 10^6$ (Figura 10–81). O processo de transição é bastante complicado e os detalhes estão além do escopo deste livro.

FIGURA 10–78
Visualização do escoamento de um perfil da camada limite laminar em uma placa plana. Fotografia tirada por F. X. Wortmann em 1953 visualizada com o método de telúrio. O escoamento é da esquerda para a direita e o bordo de ataque da placa plana está distante à esquerda do campo de visão.
Wortmann, F. X. 1977 AGARD Conf. Proc. no. 224, paper 12.

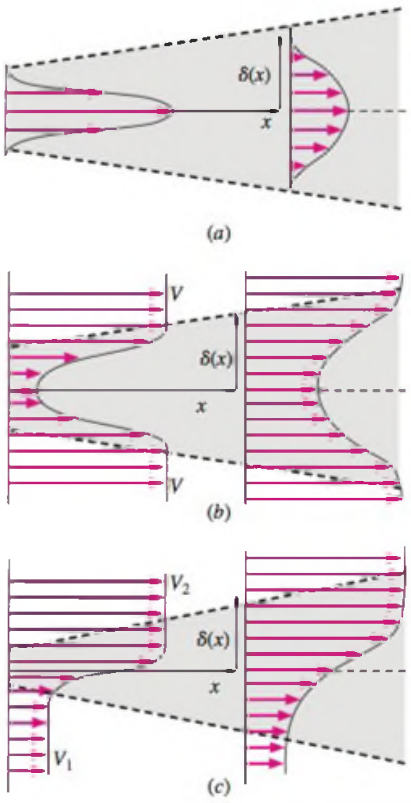


FIGURA 10–79
Três regiões adicionais de escoamento onde a aproximação da camada limite pode ser apropriada: (*a*) jatos, (*b*) esteiras e (*c*) camadas de mistura.

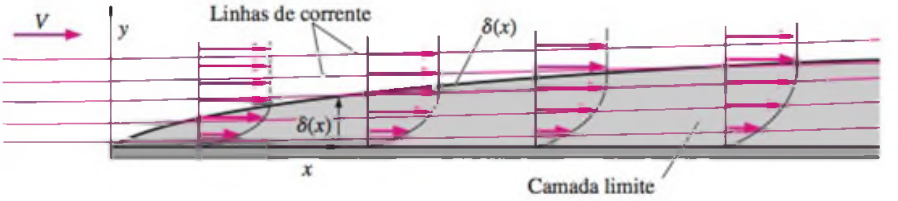


FIGURA 10–80
Comparação de linhas de corrente e as curvas representando δ como uma função de x para uma camada limite de uma placa plana. Como as linhas de corrente cruzam a curva $\delta(x)$, $\delta(x)$ não pode ser uma linha de corrente do escoamento.

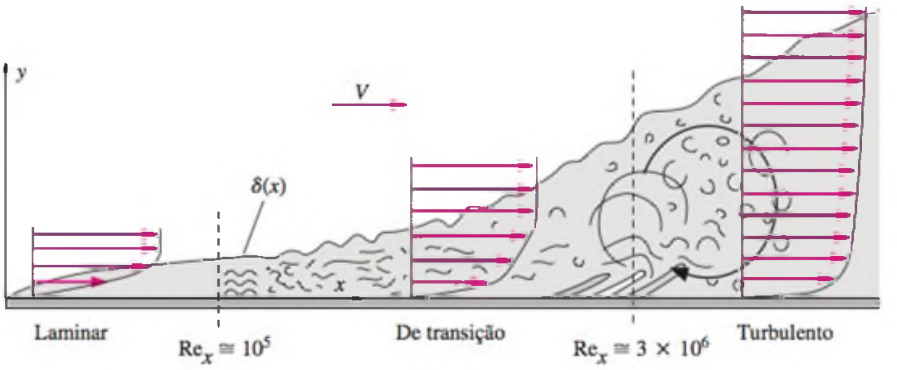


FIGURA 10–81
Transição da camada limite laminar sobre uma placa plana, para uma camada limite totalmente turbulenta (não está em escala).

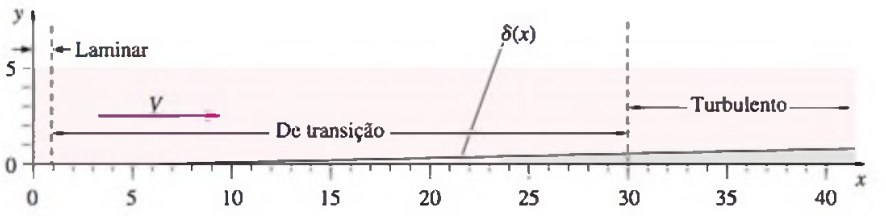


FIGURA 10–82
Espessura da camada limite sobre uma placa plana, desenhado em escala. As regiões laminar, de transição e turbulenta estão indicadas para o caso de uma parede lisa com condições de corrente livre calma.

Observe que na Figura 10–81 a escala vertical foi muito exagerada e a escala horizontal foi encurtada (na realidade, como $Re_{x,\ transição} \cong 30$ times $Re_{x,\ crítico}$, a região de transição é muito maior do que está indicada na figura). Para dar uma idéia melhor de como a camada limite realmente é fina, desenhamos o gráfico de δ em função de x *em escala* na Figura 10–82. Para gerar o gráfico, selecionamos cuidadosamente os parâmetros de forma que $Re_x = 100.000x$ independentemente das unidades de x. Assim, $Re_{x,\ transição}$ ocorre em $x \cong 1$ e $Re_{x,crítico}$ ocorre em $x \cong 30$ no gráfico. Note como a camada limite é fina e quão longa é a região de transição quando colocada no gráfico em escala.

Nos escoamentos na prática, a transição para o escoamento turbulento usualmente ocorre de forma mais abrupta e muito antes (com um valor mais baixo de Re_x) do que os valores dados para uma placa plana e lisa com uma corrente livre calma. Fatores tais como rugosidade ao longo da superfície, distúrbios da corrente livre, ruído acústico, instabilidades do escoamento, vibrações e curvatura da parede contribuem para que a transição ocorra mais cedo. Devido a isso, é usado um *número de Reynolds crítico de engenharia* de $Re_{x,\ cr} = 5 \times 10^5$ para determinar se uma camada limite tem maior possibilidade de ser laminar ($Re_x < Re_{x,\ cr}$) ou mais possibilidade de ser turbulenta ($Re_x > Re_{x,\ cr}$). Também é comum em transferência de calor usar esse valor como Re crítico; na verdade, as relações para coeficientes de atrito e de transferência de calor são deduzidas supondo-se que o escoamento seja laminar para Re_x menores do que $Re_{x,\ cr}$ e turbulenta para valores maiores. A lógica aqui é ignorar a transição tratando a primeira parte da transição como laminar e a parte restante como turbulenta. Seguiremos essa convenção nesse livro a menos que seja dito o contrário.

O processo de transição geralmente também é *instável* e difícil de prever, mesmo com os modernos softwares CFD. Em alguns casos, os engenheiros colocam lixa grossa ou fios chamados de **fios de disparo** ao longo da superfície para forçar a transição em uma localização desejada (Figura 10–83). Os turbilhões produzidos

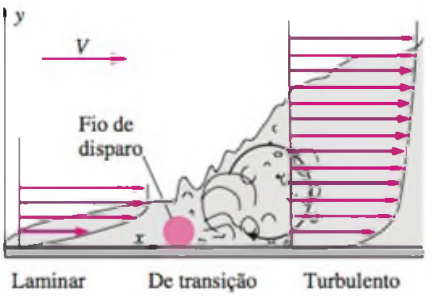


FIGURA 10–83
Um fio de disparo geralmente é usado para iniciar mais cedo uma transição para turbulência em uma camada limite (não está em escala).

pelos *fios de disparo* causam uma maior mistura local e criam distúrbios que muito rapidamente levam a uma camada limite turbulenta. Aqui novamente, a escala vertical na Figura 10–83 está bastante exagerada para fins ilustrativos.

EXEMPLO 10–9 Camada Limite Laminar ou Turbulenta?

Uma canoa de alumínio move-se horizontalmente ao longo da superfície de um lago a 5,0 mi/h (Figura 10–84). A temperatura da água do lago é 50°F. O fundo da canoa tem 16 pés de comprimento e é plano. A camada limite no fundo da canoa é laminar ou turbulenta?

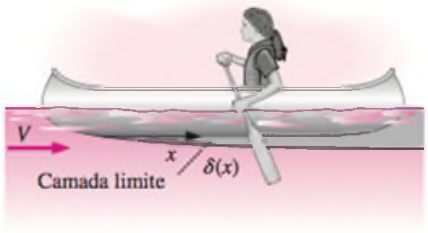


FIGURA 10–84
Camada limite desenvolvendo-se ao longo do fundo plano de uma canoa. A espessura da camada limite foi exagerada para maior clareza.

SOLUÇÃO Vamos avaliar se a camada limite no fundo da canoa é laminar ou turbulenta.

Hipóteses 1 O escoamento é permanente e incompressível. **2** Saliências, amassados e outras não-uniformidades no fundo da canoa são ignoradas; assume-se que o fundo da canoa seja uma placa plana e lisa alinhada exatamente com a direção do escoamento. **3** A partir do ponto de referência da canoa, a água abaixo da camada limite sob a canoa move-se com a velocidade uniforme $V = 5{,}0$ mi/h.

Propriedades A viscosidade cinemática da água na temperatura $T = 50°F$ é $\nu = 1{,}407 \times 10^{-5}$ pé^2/s.

Análise Primeiro, calculamos o número de Reynolds na popa da canoa usando a Equação 10–60:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(5{,}0\ \text{mi/h})\,(16\ \text{pés})}{1{,}407 \times 10^{-5}\ \text{pés}^2/\text{s}} \left(\frac{5280\ \text{pés}}{\text{mi}}\right)\left(\frac{\text{h}}{3600\ \text{s}}\right) = 8{,}34 \times 10^6 \qquad (1)$$

Como Re_x é muito maior do que $\mathrm{Re}_{x,\,cr}$ e é ainda maior do que $\mathrm{Re}_{x,\text{transição}}$, a camada limite é definida como turbulenta atrás da canoa.

Discussão Como o fundo da canoa não é perfeitamente liso ou perfeitamente plano, e como esperamos alguns distúrbios na água do lago devido a ondas, pás e peixes nadando etc., espera-se que a transição para a turbulência ocorra muito antes e mais rapidamente do que o que foi ilustrado para o caso ideal na Figura 10–81. Conseqüentemente, podemos afirmar com certeza ainda maior que essa camada limite é turbulenta.

As Equações da Camada Limite

Agora que temos uma noção física da camada limite, precisamos gerar as equações de movimento para serem usadas nos cálculos de camada limite — as **equações de camada limite**. Para simplificar, consideramos apenas escoamento permanente, bidimensional no plano xy em coordenadas cartesianas. No entanto, a metodologia usada aqui pode ser estendida, para camadas limite axissimétricas ou para camadas limite tridimensionais em qualquer sistema de coordenadas. Desprezamos a ação da gravidade, pois não estamos tratando com superfícies livres ou com escoamentos que dependam de flutuação (escoamentos de convecção livre), onde dominam os efeitos gravitacionais. Consideramos somente as camadas limite *laminares*; as equações de camada limite turbulenta estão além do escopo deste livro. Para o caso de uma camada limite ao longo de uma parede sólida, adotamos um sistema de coordenadas no qual x é sempre paralelo à parede e y é sempre normal em relação à parede (Figura 10–85). Esse sistema de coordenadas é chamado de **sistema de coordenadas da camada limite**. Quando resolvemos as equações de camada limite, nós o fazemos em uma posição x de vez, usando esse sistema de coordenadas *localmente*, e ele é *localmente ortogonal*. Não é crítico onde definimos $x = 0$, mas para o escoamento sobre um corpo, como na Figura 10–85, fazemos normalmente $x = 0$ no ponto de estagnação da frente.

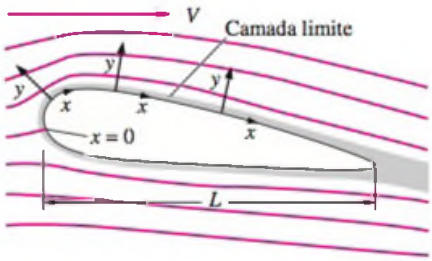


FIGURA 10–85
O sistema de coordenadas da camada limite para escoamento sobre um corpo; x segue a superfície e é tipicamente igual a zero no ponto de estagnação da frente do corpo e y em todos os pontos é normal em relação à superfície localmente.

Começamos com a equação de Navier-Stokes na forma adimensional deduzida no início deste capítulo. Com o termo não permanente e o termo da gravidade desconsiderados, a Equação 10–6 torna-se:

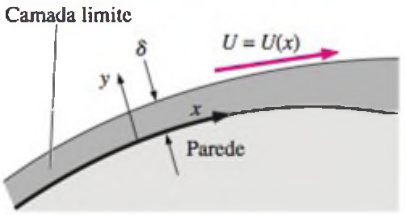


FIGURA 10–86
Vista ampliada da camada limite ao longo da superfície de um corpo, mostrando as escalas espaciais x e δ e escala de velocidade U.

$$(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^* = -[\mathrm{Eu}]\vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^* \qquad (10\text{–}61)$$

O número de Euler é próximo de um, já que as diferenças de pressão fora da camada limite são determinadas pela equação de Bernoulli e $\Delta P = P - P_\infty \sim \rho V^2$. Notamos que V é uma escala de velocidade característica do escoamento externo, tipicamente igual à velocidade da corrente livre para corpos imersos em um escoamento uniforme. O comprimento característico usado nessa adimensionalização é L, um tamanho característico do corpo. Para camadas limite, x é da ordem de grandeza de L e o número de Reynolds na Equação 10–61 pode ser considerado como Re_x (Equação 10–60). Re_x é muito grande em aplicações típicas da aproximação da camada limite. Parece-nos portanto que poderíamos desprezar o último termo na Equação 10–61 em camadas limite. No entanto, fazer isso resultaria na equação de Euler, juntamente com todas as suas deficiências já discutidas aqui. Assim, devemos manter pelo menos *alguns* dos termos viscosos na Equação 10–61.

Como podemos decidir quais os termos que deverão ser mantidos e quais deverão ser desconsiderados? Para responder a essa questão, refazemos a adimensionalização das equações de movimento com base nas escalas apropriadas de comprimento e velocidade dentro da camada limite. Na Figura 10–86 está desenhada uma vista ampliada de parte de uma camada limite da Figura 10–85. Como a ordem de grandeza de x é L, usamos L como uma escala espacial apropriada para distâncias na direção da corrente e para derivadas da velocidade e pressão com relação a x. No entanto, essa escala espacial é muito grande para derivadas com relação a y. Faz mais sentido usar δ como escala espacial para distâncias na direção normal à direção da corrente e para derivadas com relação a y. Semelhantemente, embora a escala de velocidade característica seja V para todo o campo de escoamento, é mais apropriado usar U como escala de velocidade característica para camadas limites, onde *U é a intensidade da componente da velocidade paralela à parede na posição logo acima da camada limite* (Figura 10–86). U em geral é uma função de x. Assim, dentro da camada limite em algum valor de x, as ordens de grandeza são:

$$u \sim U \qquad P - P_\infty \sim \rho U^2 \qquad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta} \qquad (10\text{–}62)$$

A ordem de grandeza da componente da velocidade v não está especificada na Equação 10–62, mas é obtida da equação da continuidade. Aplicando as ordens de grandeza na Equação 10–62 à equação da continuidade incompressível em duas dimensões:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim U/L} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim v/\delta} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{U}{L} \sim \frac{v}{\delta}$$

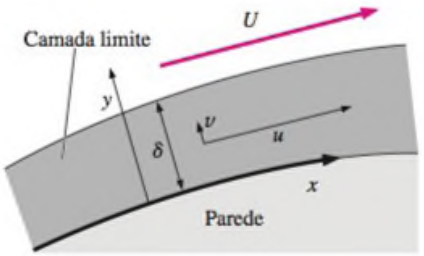


FIGURA 10–87
Vista bastante ampliada da camada limite ao longo da superfície de um corpo, mostrando que a componente de velocidade v é muito menor do que u.

Como os dois termos devem se equilibrar entre si, eles devem ter a mesma ordem de grandeza. Assim obtemos a ordem de grandeza da componente velocidade v:

$$v \sim \frac{U\delta}{L} \qquad (10\text{–}63)$$

Como $\delta/L \ll 1$ em uma camada limite (a camada limite é muito fina), concluímos que $v \ll u$ em uma camada limite (Figura 10–87). Das Equações 10–62 e 10–63, definimos as seguintes variáveis adimensionais dentro da camada limite:

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{\delta} \qquad u^* = \frac{u}{U} \qquad v^* = \frac{vL}{U\delta} \qquad P^* = \frac{P - P_\infty}{\rho U^2}$$

Como usamos escalas apropriadas, todas essas variáveis adimensionais são da ordem de grandeza da unidade — isto é, elas são variáveis *normalizadas* (Capítulo 7).

Consideramos agora as componentes x e y da equação de Navier-Stokes. Substituímos essas variáveis adimensionais na equação do momento na direção y resultando:

$$\underbrace{u}_{u^*U}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x^*}\frac{v^*U\delta}{L^2}} + \underbrace{v}_{v^*\frac{U\delta}{L}}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y^*}\frac{v^*U\delta}{L\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}}_{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y^*}\frac{P^*\rho U^2}{\delta}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\nu\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\frac{v^*U\delta}{L^2}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\nu\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\frac{v^*U\delta}{L\delta^2}}$$

Após algumas operações algébricas e multiplicando cada termo por $L^2/(U^2\delta)$, obtemos:

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \qquad \textbf{(10–64)}$$

Comparando os termos na Equação 10–64, o termo do meio, do lado direito tem uma ordem de grandeza claramente menor do que qualquer outro termo, já que $\mathrm{Re}_L = UL/\nu \gg 1$. Pela mesma razão, o último termo no lado direito é muito menor do que o primeiro termo no lado direito. Desprezando esses dois termos restam os dois termos da esquerda e o primeiro termo da direita. Porém, como $L \gg \delta$, o termo do gradiente de pressão tem uma ordem de grandeza maior do que os termos advectivos no lado esquerdo da equação. Assim, o único termo que resta na Equação 10–64 é o termo da pressão. Como não há nenhum outro termo na equação que possa equilibrar esse termo, não temos outra escolha senão fazê-lo igual a zero. Assim, a equação adimensional do momento na direção y se reduz a:

$$\frac{\partial P^*}{\partial y^*} \cong 0$$

ou, em termos de variáveis físicas:

Gradiente de pressão normal através de uma camada limite: $$\frac{\partial P}{\partial y} \cong 0 \qquad \textbf{(10–65)}$$

Em outras palavras, embora a pressão possa variar *ao longo* da parede (na direção x), há uma alteração desprezível na pressão na direção *normal* à parede. Isso está ilustrado na Figura 10–88. Em $x = x_1$, $P = P_1$ para todos os valores de y através da camada limite desde a parede até o escoamento externo. Em alguma outra posição x, $x = x_2$, a pressão pode ter mudado, mas $P = P_2$ em todos os valores de y através daquela parte da camada limite.

A pressão através de uma camada limite (direção y) é aproximadamente constante.

Fisicamente, devido à camada limite ser tão fina, as linhas de corrente dentro da camada limite têm uma curvatura *desprezível* quando observadas na escala de espessura da camada limite. Linhas de corrente curvadas requerem uma *aceleração centrípeta*, que vem de um gradiente de pressão ao longo do raio de curvatura. Como as linhas de corrente não são significativamente curvadas em uma camada limite fina, não há um gradiente de pressão significativo através da camada limite.

Uma conseqüência imediata da Equação 10–65 e do enunciado que acabamos de apresentar é que em qualquer posição x ao longo da parede, a pressão na borda externa da camada limite ($y \cong \delta$) é a *mesma* que aquela na parede ($y = 0$). Isso resulta em uma tremenda aplicação prática; ou seja, a pressão na borda externa de uma camada limite pode ser medida experimentalmente por uma tomada de pressão estática na *parede* diretamente abaixo da camada limite (Figura 10–89). Os experimentais muitas vezes aproveitam as vantagens dessa situação, e inúmeras formas de aerofólios para asas de aviões e pás de turbinas foram testadas com tomadas de pressão desse tipo, durante os últimos cem anos.

Os dados experimentais de pressão mostrados na Figura 10–64 para escoamento sobre um cilindro circular foram medidos com tomadas de pressão na superfície do cilindro, entretanto, são usados para comparar com a pressão calculada pela aproximação do escoamento irrotacional externo. Essa comparação é válida, porque a pressão obtida *fora* da camada limite (através da equação de Euler ou análise do escoamento potencial combinada com a equação de Bernoulli) se aplica por toda a camada limite até a parede.

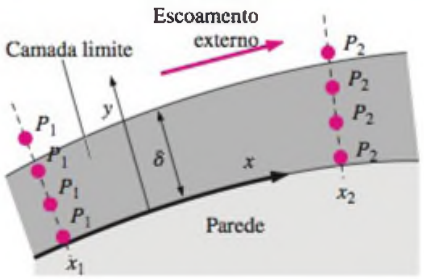


FIGURA 10–88
A pressão pode mudar *ao longo* de uma camada limite (direção x), mas a alteração de pressão *através* de uma camada limite (direção y) é desprezível.

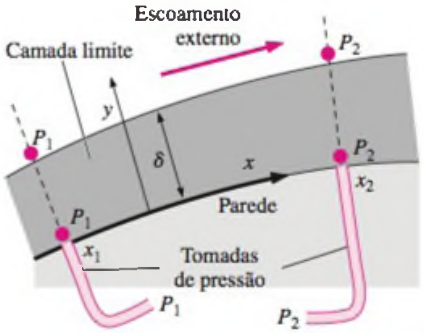


FIGURA 10–89
A pressão na região irrotacional de escoamento fora de uma camada limite pode ser medida por tomadas de pressão estática na superfície da parede. A figura ilustra duas tomadas de pressão desse tipo.

Retornando à dedução das equações da camada limite, usamos a Equação 10–65 para simplificar muito a componente x da equação do momento. Especificamente, como P não é uma função de y, substituímos $\partial P/\partial x$ por dP/dx, onde P é o valor da pressão calculada a partir de nossa aproximação de escoamento externo (usando a equação da continuidade e a equação de Euler, ou as equações de escoamento potencial mais a equação de Bernoulli). A componente x da equação de Navier-Stokes torna-se:

$$\underbrace{u}_{u^*U}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial\, u^*U}{\partial x^*\, L}} + \underbrace{v}_{v^*\frac{U\delta}{L}}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\partial\, u^*U}{\partial y^*\,\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}}_{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^*}\frac{P^*\rho U^2}{L}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\nu\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\frac{u^*U}{L^2}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\nu\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\frac{u^*U}{\delta^2}}$$

Após algumas operações algébricas, e após multiplicar cada termo por L/U^2, obtemos:

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \qquad \textbf{(10–66)}$$

Comparando os termos na Equação 10–66, o termo do meio no lado direito é claramente de uma ordem de grandeza menor do que os termos no lado esquerdo, já que $\mathrm{Re}_L = UL/\nu \gg 1$. E o último termo da direita? Se desprezarmos esse termo, anulamos todos os termos viscosos e voltamos à equação de Euler. Está claro que este termo deve permanecer. Além disso, como todos os termos restantes na Equação 10–66 são próximos de 1, a combinação dos parâmetros entre parênteses no último termo no lado direito da Equação 10–66 também deve ser da ordem de grandeza de 1:

$$\left(\frac{\nu}{UL}\right)\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim 1$$

Novamente, reconhecendo que $\mathrm{Re}_L = UL/\nu$, vemos imediatamente que:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \qquad \textbf{(10–67)}$$

Isso confirma nossa afirmação anterior de que em uma dada localização na corrente ao longo da parede, quanto maior o número de Reynolds, mais fina será a camada limite. Se substituirmos x por L na Equação 10–67, concluiremos também que para uma camada limite laminar sobre uma placa plana, onde $U(x) = V =$ constante, δ aumenta com a raiz quadrada de x (Figura 10–90).

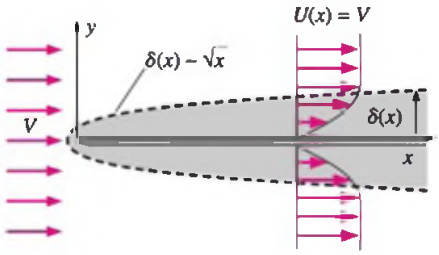


FIGURA 10–90
Uma análise da ordem de grandeza das equações de camada limite laminar ao longo de uma placa plana revela que δ aumenta com $\sqrt{x}$ (fora de escala).

Em termos das variáveis originais (físicas), a Equação 10–66 é escrita como:

Equação do momento na direção x na camada limite:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \textbf{(10–68)}$$

Observe que o último termo na Equação 10–68 não é desprezível na camada limite, pois a derivada na direção y do gradiente de velocidade $\partial u/\partial y$ é suficientemente grande para compensar o valor (tipicamente pequeno) da viscosidade cinemática ν. Finalmente, como nós sabemos, pela nossa análise da equação do momento na direção y, que a pressão através da camada limite é a mesma que fora da camada limite (Equação 10–65), aplicamos a equação de Bernoulli à região de escoamento externo. Derivando com relação a x obtemos:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = -U\frac{dU}{dx} \qquad \textbf{(10–69)}$$

onde notamos que tanto P quanto U são funções apenas de x, como está ilustrado na Figura 10–91. A substituição da Equação 10–69 na Equação 10–68 resulta em:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \textbf{(10–70)}$$

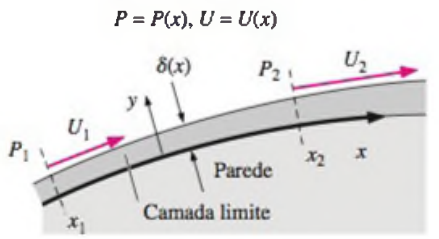


FIGURA 10–91
A velocidade do escoamento externo paralelo à parede é $U(x)$ e é obtida a partir da pressão do escoamento externo, $P(x)$. Essa velocidade aparece no componente x da equação do momento da camada limite, Equação 10–70.

e eliminamos a pressão das equações da camada limite.

Resumimos o conjunto de equações de movimento para uma camada limite laminar, permanente e incompressível no plano xy sem efeitos gravitacionais significativos:

Equações da camada limite:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (10\text{–}71)$$

Matematicamente, a equação completa de Navier-Stokes é **elíptica** no espaço, o que significa que são necessárias condições de contorno sobre toda a fronteira do domínio do escoamento. Fisicamente, as informações de escoamento são passadas em todas as direções, tanto a montante quanto a jusante. Por outro lado, a equação do momento na direção x da camada limite (a segunda equação da Equação 10–71) é **parabólica.** Isso significa que precisamos especificar condições de contorno somente sobre três lados do domínio de escoamento (bidimensional). Fisicamente, as informações de escoamento não são passadas na direção oposta ao escoamento (a jusante). Esse fato reduz muito o nível de dificuldade na solução das equações da camada limite. Especificamente, não precisamos definir condições de contorno *a jusante*, somente montante e no topo e na base do domínio do escoamento (Figura 10–92). Para um problema típico de camada limite ao longo de uma parede, especificamos a condição de não-escorregamento na parede ($u = v = 0$ em $y = 0$), a condição de escoamento externo na borda da camada limite e além [$u = U(x)$ quando $y \to \infty$] e um perfil inicial em alguma posição a montante [$u = u_{início}(y)$ em $x = x_{início}$, onde $x_{início}$ pode ou não ser zero]. Com essas condições de contorno, simplesmente nos movemos a jusante na direção x, resolvendo as equações de camada limite conforme progredimos. Isso é particularmente interessante para cálculos numéricos de camada limite, porque uma vez que conhecemos o perfil em uma posição x (x_i), podemos passar para a próxima posição x (x_{i+1}) e depois usar esse perfil que acabamos de calcular como perfil de partida para passar à próxima posição x (x_{i+2}).

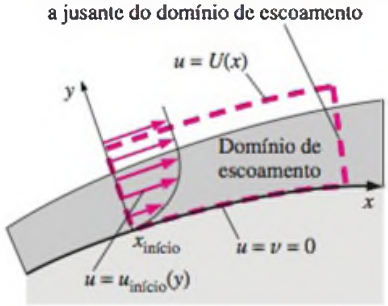


FIGURA 10–92
O conjunto de equações da camada limite é parabólico, assim as condições de contorno precisam ser especificadas apenas em três lados do domínio do escoamento.

O Procedimento de Camada Limite

Quando é empregada a aproximação de camada limite, usamos um procedimento geral passo a passo. Resumimos o procedimento aqui e em forma condensada na Figura 10–93.

Passo 1 Resolva para o escoamento externo, ignorando a camada limite (assumindo que a região de escoamento fora da camada limite é aproximadamente sem viscosidade e/ou irrotacional). Transforme as coordenadas se for necessário, para obter $U(x)$.

Passo 2 Suponha uma camada limite fina — tão fina na verdade, que ela não afeta a solução de escoamento externo do passo 1.

Passo 3 Resolva as equações da camada limite (Equação 10–71), usando condições de contorno apropriadas: a condição de contorno de não-deslizamento na parede, $u = v = 0$ em $y = 0$; a condição conhecida do escoamento externo na borda da camada limite, $u \to U(x)$ à medida que as $y \to \infty$; e algum perfil inicial conhecido, $u = u_{inicial}(y)$ em $x = x_{inicial}$.

Passo 4 Calcule valores de interesse no campo de escoamento. Por exemplo, uma vez resolvidas as equações da camada limite (passo 3), podemos calcular $\delta(x)$, a tensão de cisalhamento ao longo da parede, arrasto total de atrito superficial etc.

Passo 5 Verifique se as aproximações de camada limite são apropriadas. Em outras palavras, verifique se a camada limite é *fina* — caso contrário a aproximação não é justificada.

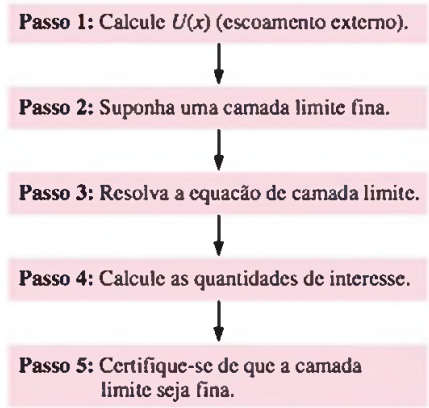


FIGURA 10–93
Resumo do procedimento de camada limite para camadas limites permanentes, incompressíveis e bidimensionais no plano xy.

Antes de resolvermos alguns exemplos, listamos aqui algumas das limitações da aproximação de camada limite. São simplesmente *sinais de alerta* para chamar a atenção ao executar cálculos com camada limite:

- A aproximação da camada limite perde a validade se o número de Reynolds não for suficientemente grande. Quão grande é suficientemente grande? Depende da precisão desejada na aproximação. Usando a Equação 10–67 como diretriz, δ/L, 0,03 (3 %) para $\mathrm{Re}_L = 1000$ e δ/L , 0,01 (1 por cento) para $\mathrm{Re}_L = 10.000$.
- A hipótese de gradiente de pressão zero na direção y (Equação 10–65) fica inválida se a curvatura da parede for de grandeza similar a δ (Figura 10–94). Nesses casos, os efeitos da aceleração centrípeta devida à curvatura da linha de corrente não podem ser ignorados. Fisicamente, a camada limite não é fina o suficiente para que a aproximação seja apropriada quando δ não for $\ll R$.
- Quando o número de Reynolds for muito *alto*, a camada limite não permanece laminar, conforme discutimos anteriormente. A própria aproximação da camada limite pode ainda ser apropriada, mas as Equação 10–71 *não* são válidas se o escoamento for de transição ou totalmente turbulento. Conforme observamos antes, a camada limite laminar em uma placa plana sob condições estáveis de escoamento inicia sua transição para a turbulência em $\mathrm{Re}_x \cong 1 \times 10^5$. Nas aplicações práticas da engenharia, as paredes podem não ser lisas e pode haver vibrações, ruído e flutuações no escoamento de corrente livre acima da parede, sendo que tudo isso contribui para um início ainda mais antecipado do processo de transição.
- Se ocorrer separação de escoamento, a aproximação da camada limite não é mais apropriada na região de escoamento separado. A razão principal para isso é que uma região de escoamento separado contém *escoamento reverso*, e a natureza parabólica das equações da camada limite é perdida.

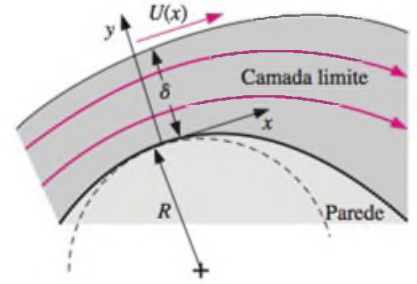


FIGURA 10–94
Quando o raio de curvatura local da parede (R) for suficientemente pequeno para ter a mesma ordem de δ, os efeitos da aceleração centrípeta não podem ser ignorados e $\partial P/\partial y \neq 0$. A aproximação da camada limite fina não é apropriada nessas regiões.

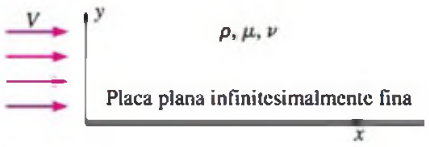


FIGURA 10–95
Cenário para o Exemplo 10–10; escoamento de uma corrente uniforme paralela a uma placa plana semi-infinita ao longo do eixo x.

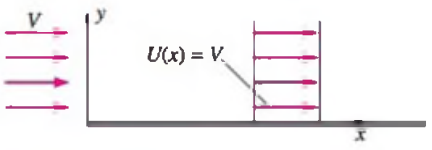


FIGURA 10–96
O escoamento externo do Exemplo 10–10 é trivial já que o eixo x é uma linha de corrente do escoamento e $U(x) = V =$ constante.

EXEMPLO 10–10 Camada Limite Laminar em uma Placa Plana

Uma corrente livre uniforme de velocidade V escoa paralela a uma placa plana semi-infinita infinitesimalmente fina conforme está representado na Figura 10–95. O sistema de coordenadas é definido de maneira que a placa começa na origem. Como o escoamento é simétrico em relação ao eixo x, somente a metade superior do escoamento é considerada. Calcule o perfil de velocidade da camada limite ao longo da placa e discuta.

SOLUÇÃO Vamos calcular o perfil de velocidade da camada limite (u em função de x e y) à medida que a camada limite laminar cresce ao longo da placa plana.
Hipóteses **1** O escoamento é permanente, incompressível e bidimensional no plano xy. **2** O número de Reynolds é suficientemente grande para que a aproximação da camada limite seja razoável. **3** A camada limite permanece laminar sobre o intervalo que nos interessa.
Análise Seguimos o procedimento passo a passo resumido na Figura 10–93.

Passo 1 O escoamento externo é obtido ignorando completamente a camada limite, já que se supõe que ela é extremamente fina. Lembre-se que qualquer linha de corrente em um escoamento irrotacional pode ser considerada como uma parede. Nesse caso, o eixo x pode ser considerado como uma linha de corrente do escoamento uniforme de corrente livre, um dos nossos blocos básicos de escoamentos na Seção 10–5; essa linha de corrente pode também ser considerada como uma placa infinitesimalmente fina (Figura 10–96). Assim,

Escoamento externo: $U(x) = V =$ constante (1)

Por conveniência, usamos U em lugar de U(x) de agora em diante, pois esse valor é uma constante.

Passo 2 Supomos uma camada limite muito fina ao longo da parede (Figura 10–97). O ponto-chave aqui é que a camada limite é tão fina que ela tem um efeito desprezível sobre o escoamento externo calculado no passo 1.

Passo 3 Agora devemos resolver as equações de camada limite. Vemos pela Equação 1 que $dU/dx = 0$; em outras palavras, não resta nenhum termo de gradiente de pressão na equação do momento na direção x da camada limite. É por esse motivo que a camada limite sobre uma placa plana freqüentemente é chamada de **camada limite de gradiente de pressão zero**. As equações da continuidade e do momento na direção x para a camada limite (Equação 10–71) tornam-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

São necessárias quatro condições de contorno:

$$u = 0 \quad \text{em } y = 0 \qquad u = U \quad \text{quando } y \to \infty$$
$$v = 0 \quad \text{em } y = 0 \qquad u = U \quad \text{para todo } y \text{ em } x = 0 \tag{3}$$

A última das condições de contorno na Equação 3 é o perfil inicial; assumimos que a placa ainda não exerceu influência sobre o escoamento na posição inicial da placa ($x = 0$).

Essas equações e condições de contorno parecem ser bastante simples, mas infelizmente, *até agora não foi encontrada nenhuma solução analítica*. No entanto, a Equação 2 foram resolvidas pela primeira vez *numericamente* em 1908 por P. R. Heinrich Blasius (1883–1970). Blasius era um estudante de doutorado de Prandtl. Naquele tempo, naturalmente, ainda não havia computadores e todos os cálculos foram feitos *manualmente*. Hoje podemos resolver essas equações em um computador em alguns segundos. O segredo da solução é a hipótese da **similaridade**. Em palavras mais simples, pode-se supor a similaridade aqui porque não há *comprimento característico* na geometria do problema. Fisicamente, como a placa é infinitamente longa na direção x, vemos sempre o *mesmo* padrão de escoamento, não importa se ampliamos ou reduzimos a visualização (Figura 10–98).

Blasius introduziu uma **variável de similaridade** η que combina as variáveis independentes x e y em uma variável independente adimensional:

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \tag{4}$$

e ele resolveu para uma forma adimensional da componente x da velocidade:

$$f' = \frac{u}{U} = \text{função de } \eta \tag{5}$$

Quando substituímos as Equações 4 e 5 na Equação 2, submetidas às condições de contorno da Equação 3, obtemos uma equação diferencial ordinária para a velocidade adimensional $f'(\eta) = u/U$ como uma função da variável de similaridade η. Usamos a técnica numérica popular de Runge-Kutta para obter os resultados mostrados na Tabela 10–3 e na Figura 10–99. Os detalhes desta técnica estão além do escopo deste livro (veja Heinsohn e Cimbala, 2003). Há também uma pequena componente na direção y da velocidade v distante da parede, mas $v \ll u$, e ela não é discutida aqui.

A beleza da solução de similaridade é que essa forma única de perfil de velocidade se aplica a *qualquer* posição x quando representada graficamente nas variáveis de similaridade, como na Figura 10–99. A concordância da forma do perfil calculado na Figura 10–99 com os dados obtidos experimentalmente (círculos na Figura 10–99) e com a forma do perfil visualizada da Figura 10–78 é notável. A solução de Blasius é um sucesso assombroso.

Passo 4 Em seguida calculamos várias grandezas de interesse nesta camada limite. Primeiro, baseados em uma solução numérica com uma resolução mais fina do que aquela mostrada na Tabela 10–3, determinamos que $u/U = 0{,}990$

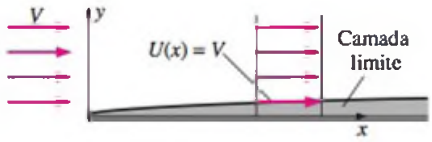


FIGURA 10–97
A camada limite é tão fina que ela não afeta o escoamento externo; a espessura da camada limite está exagerada aqui para maior clareza.

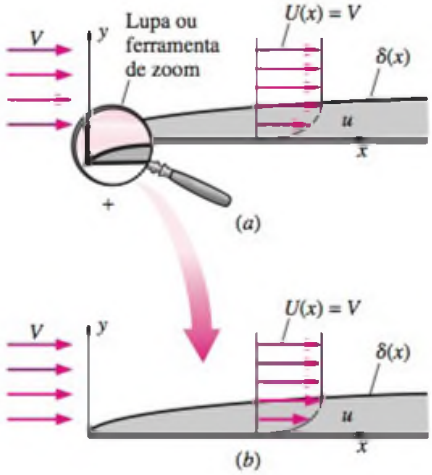


FIGURA 10–98
Um resultado útil da hipótese da similaridade é que o escoamento parece o mesmo (ele é similar) independentemente de quanto ampliamos ou reduzimos a visualização; (*a*) visualização de uma certa distância, como uma pessoa veria, (*b*) visualização ampliada, como uma formiga veria.

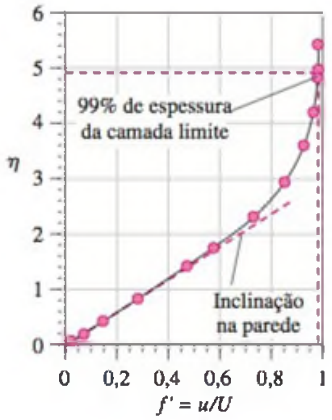


FIGURA 10–99
O perfil de Blasius em variáveis de similaridade para a camada limite crescendo em uma placa plana semi-infinita. Os dados experimentais (círculos) são para $\text{Re}_x = 3{,}64 \times 10^5$.
Panton (1996).

TABELA 10–3

Solução de Blasius para a camada limite laminar de uma placa plana em variáveis de similaridade*

η	f''	f'	f	η	f''	f'	f
0,0	0,33206	0,00000	0,00000	2,4	0,22809	0,72898	0,92229
0,1	0,33205	0,03321	0,00166	2,6	0,20645	0,77245	1,07250
0,2	0,33198	0,06641	0,00664	2,8	0,18401	0,81151	1,23098
0,3	0,33181	0,09960	0,01494	3,0	0,16136	0,84604	1,39681
0,4	0,33147	0,13276	0,02656	3,5	0,10777	0,91304	1,83770
0,5	0,33091	0,16589	0,04149	4,0	0,06423	0,95552	2,30574
0,6	0,33008	0,19894	0,05973	4,5	0,03398	0,97951	2,79013
0,8	0,32739	0,26471	0,10611	5,0	0,01591	0,99154	3,28327
1,0	0,32301	0,32978	0,16557	5,5	0,00658	0,99688	3,78057
1,2	0,31659	0,39378	0,23795	6,0	0,00240	0,99897	4,27962
1,4	0,30787	0,45626	0,32298	6,5	0,00077	0,99970	4,77932
1,6	0,29666	0,51676	0,42032	7,0	0,00022	0,99992	5,27923
1,8	0,28293	0,57476	0,52952	8,0	0,00001	1,00000	6,27921
2,0	0,26675	0,62977	0,65002	9,0	0,00000	1,00000	7,27921
2,2	0,24835	0,68131	0,78119	10,0	0,00000	1,00000	8,27921

* η é a variável de similaridade definida na Equação 4 acima, e a função $f(\eta)$ é resolvida usando a técnica numérica de Runge–Kutta. Observe que f'' é proporcional à tensão de cisalhamento τ, f' é proporcional à componente x da velocidade na camada limite ($f' = u/U$), e a própria f é proporcional à função de corrente. f' é traçada como função de η na Figura 10–99.

em $\eta \cong 4{,}91$. Essa espessura de 99% da camada limite está esboçada na Figura 10–99. Usando a Equação 4 e a definição de δ, concluímos que $y = \delta$ quando:

$$\eta = 4{,}91 = \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\,\delta \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{6}$$

Esse resultado concorda qualitativamente com a Equação 10–67, obtida de uma simples análise de ordens de grandeza. A constante 4,91 na Equação 6 é arredondada para 5,0 por muitos autores, mas nós preferimos expressar o resultado com três algarismos significativos para que haja consistência com outras grandezas obtidas do perfil de Blasius.

Uma outra grandeza de interesse é a tensão de cisalhamento na parede, τ_w:

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{7}$$

Na Figura 10–99 está esboçada a variação do perfil de velocidade adimensional na parede ($y = 0$ e $\eta = 0$). Dos nossos resultados de similaridade (Tabela 10–3), a variação adimensional na parede é:

$$\left.\frac{d(u/U)}{d\eta}\right)_{\eta=0} = f''(0) = 0{,}332 \tag{8}$$

Após a substituição da Equação 8 na Equação 7 e algumas operações algébricas (transformação de variáveis de similaridade de volta para variáveis físicas), obtemos:

Tensão de cisalhamento em variáveis físicas: $$\tau_w = 0{,}332\frac{\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{9}$$

Assim, vemos que a tensão de cisalhamento na parede diminui com x segundo a relação $x^{-1/2}$, como está representado na Figura 10–100. Em $x = 0$, a Equação 9 prevê que τ_w é infinito, o que é fisicamente impossível.

A aproximação da camada limite não é apropriada na superfície de ataque ($x = 0$), porque a espessura da camada limite não é pequena comparada com x. Além disso, qualquer placa plana real tem espessura finita e há um ponto de estagnação na frente da placa, com o escoamento externo acelerando rapidamente para $U(x) = V$. Podemos ignorar a região muito próxima de $x = 0$ sem perda de precisão no resto do escoamento.

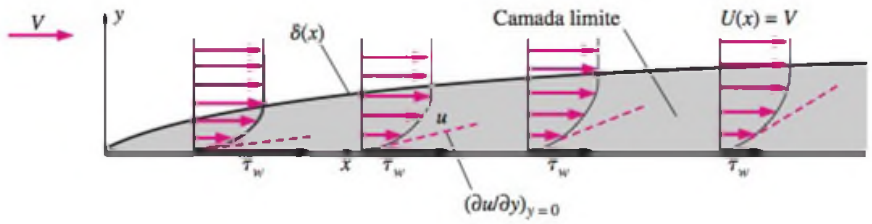


FIGURA 10–100
Para uma camada limite laminar de placa plana, a tensão de cisalhamento na parede diminui segundo a relação $x^{-1/2}$ conforme a inclinação $\partial u/\partial y$ na parede decresce a jusante. A parte da frente da placa contribui mais para o arrasto do atrito superficial do que a parte de trás.

A equação 9 é colocada na forma adimensional definido-se um coeficiente de atrito superficial (também chamado de **coeficiente de atrito local**):

Coeficiente de atrito local, placa plana, laminar: $$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (10)$$

Observe que a Equação 10 para $C_{f,x}$ tem a mesma forma da Equação 6 para δ/x, mas com uma constante diferente — ambas decrescem com o inverso da raiz quadrada do número de Reynolds. No Capítulo 11, integramos a Equação 10 para obter o arrasto total de atrito sobre uma placa plana de comprimento L.

Passo 5 Precisamos verificar se a camada limite é fina. Considere o exemplo prático do escoamento sobre o capô do seu carro (Figura 10–101) quando você está em um trânsito congestionado em um dia quente a 30 km/h. A viscosidade cinemática do ar é $\nu = 1{,}8 \times 10^{-4}$ pés²/s. Como aproximação, consideramos o capô do carro como uma placa plana com 1m de comprimento movendo-se horizontalmente a uma velocidade V de 30 km/h. Primeiro, aproximamos o número de Reynolds no fim do capô usando a Equação 10–60:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(30\ \text{km/h})(3{,}5\ \text{pés})}{1{,}8 \times 10^{-4}\ \text{pés}^2/\text{s}}\left(\frac{5280\ \text{pés}}{\text{mi}}\right)\left(\frac{\text{h}}{3600\ \text{s}}\right) = 5{,}7 \times 10^5$$

Como Re_x é muito próximo ao número de Reynolds crítico, $\mathrm{Re}_{x,cr} = 5 \times 10^5$, a hipótese do escoamento laminar pode ou não ser apropriada. No entanto, usamos a Equação 6 para estimar a espessura da camada limite, supondo que o escoamento permaneça laminar:

$$\delta = \frac{4{,}91x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{4{,}91(3{,}5\ \text{pés})}{\sqrt{5{,}7 \times 10^5}}\left(\frac{12\ \text{pol}}{\text{pés}}\right) = 0{,}27\ \text{pol} \qquad (11)$$

No fim do capô a camada limite tem apenas uns 10 mm de espessura, nossa hipótese de uma camada limite muito fina é confirmada.

Discussão A solução de camada limite de Blasius é válida somente para escoamento sobre uma placa plana perfeitamente alinhada com o escoamento. No entanto, ela é usada freqüentemente como uma aproximação para a camada limite que se desenvolve ao longo de paredes sólidas que não são necessariamente planas nem exatamente paralelas ao escoamento, como no capô do carro. Conforme foi ilustrado no passo 5, nos problemas práticos de engenharia não é difícil encontrar números de Reynolds maiores do que o valor crítico para a transição para a turbulência. Você precisa ter cuidado para não aplicar a solução de camada limite laminar apresentada aqui quando a camada limite se torna turbulenta.

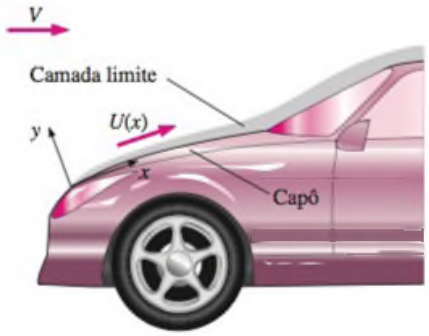


FIGURA 10–101
A camada limite que se desenvolve no capô de um carro. A espessura da camada limite está exagerada para dar maior clareza.

Espessura de Deslocamento

Conforme foi mostrado na Figura 10–80, as linhas de corrente dentro e fora de uma camada limite devem se curvar ligeiramente para fora afastando-se da parede para satisfazer ao princípio da conservação da massa à medida que a espessura da camada limite aumenta a jusante. Isto é porque a componente y da velocidade, v, é pequena mas finita e positiva. Fora da camada limite, o escoamento externo é afetado por essa deflexão das linhas de corrente. Definimos a **espessura de deslocamento** δ^* como a distância pela qual é defletida a linha de corrente imediatamente fora da camada limite, conforme está representado na Figura 10–102.

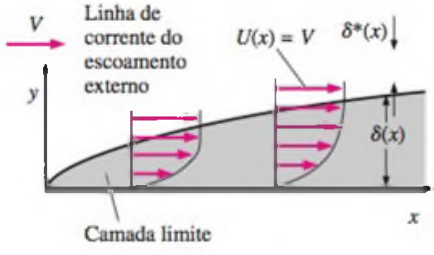


FIGURA 10–102
Espessura de deslocamento definida por uma linha de corrente fora da camada limite. A espessura da camada limite está exagerada.

A espessura de deslocamento é a distância pela qual a linha de corrente imediatamente fora da camada limite é defletida da parede devido ao efeito da camada limite.

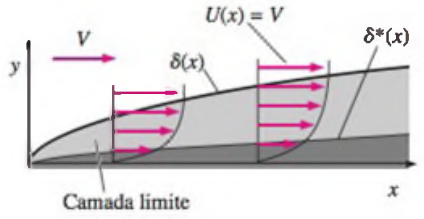


FIGURA 10–103
Para uma camada limite laminar sobre placa plana, a espessura de deslocamento é aproximadamente um terço da espessura de 99% da camada limite.

Geramos uma expressão para δ^* para a camada limite ao longo de uma placa plana fazendo uma análise de volume de controle usando a conservação da massa. Os detalhes ficam como exercício para o leitor; o resultado em qualquer posição x ao longo da placa é:

Espessura de deslocamento:
$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad (10\text{–}72)$$

Observe que o limite superior da integral na Equação 10–72 é mostrado como ∞, mas como $u = U$ em todos os pontos acima da camada limite, é necessário integrar somente até uma distância finita acima de δ. Obviamente, δ^* cresce com x à medida que a camada limite cresce (Figura 10–103). Para uma placa plana laminar, integramos a solução numérica (Blasius) do Exemplo 10–10 para obter:

Espessura de deslocamento, placa plana laminar
$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1{,}72}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (10\text{–}73)$$

A equação para δ^* é a mesma para δ, mas com uma constante diferente. Na verdade, para escoamento laminar sobre uma placa plana, δ^* em qualquer posição x acaba sendo aproximadamente três vezes menor do que δ na mesma posição x (Figura 10–103).

Há uma maneira alternativa de explicar o significado físico de δ^* que vem a ser mais útil para as aplicações práticas de engenharia. Isto é, podemos pensar na espessura de deslocamento como um aumento imaginário ou aparente na espessura da parede do ponto de vista de região de escoamento sem viscosidade e/ou região de escoamento irrotacional externo. Para nosso exemplo da placa, o escoamento externo não "vê" mais uma placa plana infinitesimalmente fina; em lugar disso, ele vê uma placa de espessura finita com forma semelhante à espessura de deslocamento da Equação 10–73, conforme está ilustrado na Figura 10–104.

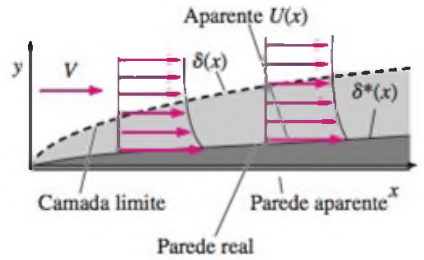


FIGURA 10–104
A camada limite afeta o escoamento externo de uma maneira que a parede parece tomar a forma da espessura de deslocamento. A $U(x)$ aparente difere da aproximação original.

A espessura de deslocamento é o aumento imaginário na espessura da parede, como é visto pelo escoamento externo, devido ao efeito da camada limite que está se desenvolvendo.

Se fôssemos resolver a equação de Euler para o escoamento ao redor dessa placa imaginária mais grossa, a componente de velocidade $U(x)$ do escoamento externo seria diferente daquela do cálculo original. Poderíamos então usar essa $U(x)$ aparente para melhorar nossa análise da camada limite. Você pode imaginar uma modificação no procedimento de camada limite da Figura 10–93 no qual percorremos os primeiros quatro passos, calculamos $\delta^*(x)$ e depois voltamos para o passo 1, desta vez usando a forma imaginária mais cheia do corpo para calcular uma $U(x)$ aparente. Em seguida, resolvemos novamente as equações da camada limite. Poderíamos repetir o laço quantas vezes fosse necessário até chegar à convergência. Dessa forma, o escoamento externo e a camada limite seriam mais consistentes um com o outro.

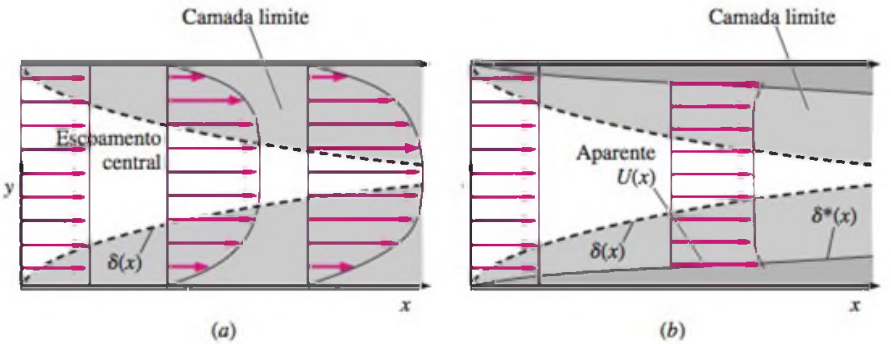


FIGURA 10–105
O efeito do crescimento da camada limite sobre o escoamento que está entrando em um canal bidimensional: o escoamento irrotacional entre as camadas limites do topo e da base acelera conforme está indicado por (*a*) perfis reais de velocidade, e (*b*) mudança no escoamento central aparente devido à espessura de deslocamento da camada limite (camadas limites muito exageradas para maior clareza).

A utilidade dessa interpretação da espessura de deslocamento torna-se óbvia se considerarmos um escoamento uniforme entrando em um canal limitado por duas paredes paralelas (Figura 10–105). À medida que as camadas limites crescem nas paredes superior e inferior, o escoamento central irrotacional deve acelerar para satisfazer a conservação da massa (Figura 10–105*a*). Do ponto de vista do escoamento central entre as camadas limites, a camada limite faz com que as paredes do canal pareçam convergir — a distância aparente entre as paredes diminui à medida que x aumenta. Esse aumento imaginário na espessura de uma das paredes é igual a $\delta^*(x)$; e a $U(x)$ *aparente* do escoamento central deve aumentar de forma correspondente, como mostra a figura, para satisfazer a conservação da massa.

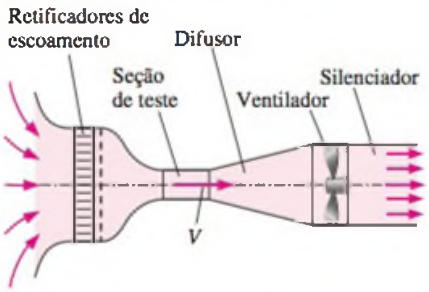


FIGURA 10–106
Diagrama do túnel de vento do Exemplo 10–11.

EXEMPLO 10–11 Espessura de Deslocamento no Projeto de um Túnel de Vento

Um pequeno túnel de vento de baixa velocidade (Figura 10–106) está sendo projetado para calibração de fios quentes. O ar está a 19°C. A seção de teste do túnel tem 30 cm de diâmetro e 30 cm de comprimento. O escoamento através da seção de teste deve ser o mais uniforme possível. A velocidade do túnel de vento varia de 1 a 8 m/s, e o projeto deve ser otimizado para uma velocidade do ar de V = 4,0 m/s através da seção de teste. (*a*) Para o caso de escoamento aproximadamente uniforme a 4,0 m/s na entrada da seção de teste, de quanto a velocidade do ar no eixo central terá aumentado no fim da seção de teste? (*b*) Recomende um projeto que produza um escoamento mais uniforme na seção de teste.

SOLUÇÃO Precisa ser calculada a aceleração do ar através da seção de teste circular de um túnel de vento, além disso deverá ser recomendado um novo projeto da seção de teste.

Hipóteses 1 O escoamento é permanente e incompressível. **2** As paredes são lisas e as perturbações e vibrações são mantidas em um nível mínimo. **3** A camada limite é laminar.

Propriedades A viscosidade cinemática do ar a 19°C é $\nu = 1{,}507 \times 10^{-5}$ m²/s.

Análise (*a*) O número de Reynolds no fim da seção de teste é aproximadamente:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(4{,}0\ \mathrm{m/s})(0{,}30\ \mathrm{m})}{1{,}507 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}} = 7{,}96 \times 10^4$$

Como Re_x é menor do que o número de Reynolds crítico da engenharia, $\mathrm{Re}_{x,\,cr} = 5 \times 10^5$, e é até menor do que o $\mathrm{Re}_{x,\,crítico} = 1 \times 10^5$ e como as paredes são lisas e o escoamento é limpo, podemos supor que a camada limite na parede permanece laminar em todo o comprimento da seção de teste. À medida que a camada limite cresce ao longo da parede da seção de teste do túnel de vento, o ar na região de escoamento irrotacional na parte central da seção de teste acelera como na Figura 10–105 para satisfazer a conservação da massa. Usamos a Equação 10–73 para avaliar a espessura de deslocamento no fim da seção de teste:

$$\delta^* \cong \frac{1{,}72x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{1{,}72(0{,}30\ \mathrm{m})}{\sqrt{7{,}96 \times 10^4}} = 1{,}83 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 1{,}83\ \mathrm{mm} \qquad (1)$$

Na Figura 10–107 estão duas visualizações em corte da seção de teste, uma no início e outra no fim. O raio efetivo no fim da seção de teste é reduzido por δ^* conforme foi calculado pela Equação 1. Aplicamos o princípio da conservação da massa para calcular a velocidade média do ar no fim da seção de teste:

$$V_{\mathrm{fim}} A_{\mathrm{fim}} = V_{\mathrm{início}} A_{\mathrm{início}} \quad \rightarrow \quad V_{\mathrm{fim}} = V_{\mathrm{início}} \frac{\pi R^2}{\pi (R - \delta^*)^2} \qquad (2)$$

que resulta em:

$$V_{\mathrm{fim}} = (4{,}0\ \mathrm{m/s}) \frac{(0{,}15\ \mathrm{m})^2}{(0{,}15\ \mathrm{m} - 1{,}83 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})^2} = \mathbf{4{,}10\ m/s} \qquad (3)$$

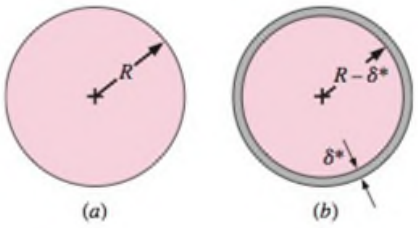


FIGURA 10–107
Visualização em corte transversal da seção de teste do túnel de vento do Exemplo 10–11: (*a*) início da seção de teste e (*b*) fim da seção de teste.

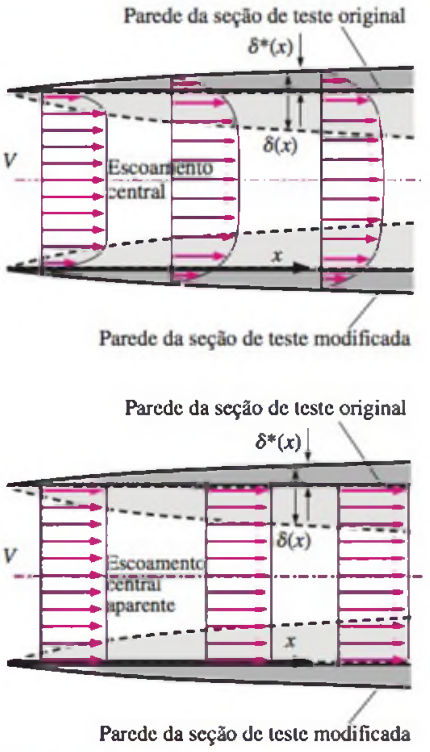


FIGURA 10–108
Uma seção de teste divergente eliminaria a aceleração do escoamento devido ao efeito de deslocamento da camada limite: (*a*) escoamento real e (*b*) escoamento central irrotacional aparente.

Portanto a velocidade do ar aumenta em aproximadamente 2,5% na seção de teste, devido ao efeito da espessura de deslocamento.

(*b*) Que recomendação podemos fazer para um projeto melhor? Uma possibilidade é projetar a seção de teste como um duto lentamente divergente, em lugar de um cilindro de paredes retas (Figura 10–108). Se o raio fosse projetado de forma a aumentar com $\delta^*(x)$ ao longo do comprimento da seção de teste, o efeito de deslocamento da camada limite seria eliminado, e a velocidade do ar na seção de teste permaneceria razoavelmente constante. Note que há ainda uma camada limite crescendo na parede, como ilustra a Figura 10–108. No entanto, a velocidade do escoamento central fora da camada limite permanece constante, diferentemente da situação da Figura 10–105. A recomendação da parede divergente funcionaria bem na condição de operação de projeto de 4,0 m/s e ajudaria um pouco em outros valores da velocidade do escoamento. Uma outra opção é aplicar sucção ao longo da parede da seção de teste para remover um pouco do ar ao longo da parede. A vantagem desse projeto é que a sucção pode ser cuidadosamente ajustada à medida que varia a velocidade do vento no túnel de forma a garantir velocidade do ar constante, através da seção de teste em qualquer condição de operação. Essa recomendação é a opção mais complicada e, provavelmente, a mais cara.

Discussão Têm sido construídos túneis de vento que usam a opção da parede divergente ou a opção de sucção na parede para controlar cuidadosamente a uniformidade da velocidade do ar através da seção de teste do túnel de vento. A mesma técnica de espessura de deslocamento é aplicada a túneis de vento maiores, onde a camada limite é turbulenta; no entanto, é necessária uma equação diferente para $\delta^*(x)$.

Espessura do Momento

Uma outra medida da espessura da camada limite é a **espessura do momento**, para a qual se atribui comumente o símbolo θ. A espessura do momento é melhor explicada analisando-se o volume de controle da Figura 10–109 para uma camada limite de placa plana. Como a base do volume de controle é a própria placa, nenhuma massa ou momento pode cruzar essa superfície. O topo do volume de controle é tomado como uma linha de corrente do escoamento externo. Como nenhum fluxo pode cruzar uma linha de corrente, não pode haver fluxo de massa ou momento através da superfície superior do volume de controle. Quando aplicamos o princípio da conservação da massa a esse volume de controle, concluímos que o fluxo de massa entrando no volume de controle pela esquerda (em $x = 0$) deve ser igual ao fluxo de massa saindo pela direita (em alguma posição arbitrária x ao longo da placa):

$$0 = \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \underbrace{w\rho \int_0^{Y+\delta^*} u\, dy}_{\text{na posição } x} - \underbrace{w\rho \int_0^{Y} U\, dy}_{\text{em } x = 0} \qquad \textbf{(10–74)}$$

onde w é a espessura perpendicular à página na Figura 10–109, que tomamos arbitrariamente como largura unitária e Y é a distância da placa até a linha de corrente externa em $x = 0$, conforme indicado na Figura 10–109. Como $u = U =$ constante, em todos os pontos ao longo da superfície esquerda do volume de controle, e como $u = U$ entre $y = Y$ e $y = Y + \delta^*$ ao longo da superfície direita do volume de controle, a Equação 10–74 se reduz a:

$$\int_0^{Y} (U - u)\, dy = U\delta^* \qquad \textbf{(10–75)}$$

Fisicamente, o *déficit* de fluxo de massa dentro da camada limite (a região inferior sombreada em azul na Figura 10–109) é substituído por uma porção de escoamento de corrente livre de espessura δ^* (a região superior sombreada em

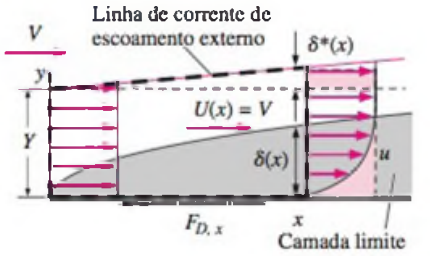


FIGURA 10–109
Um volume de controle é definido pela linha tracejada grossa, limitado acima por uma linha de corrente fora da camada limite e limitado abaixo pela placa plana; $F_{D,x}$ é a força viscosa da placa agindo sobre o volume de controle.

azul na Figura 10–109). A Equação 10–75 verifica que essas duas regiões sombreadas têm a *mesma área*. Ampliamos a figura para mostrar essas áreas mais claramente na Figura 10–110.

Agora considere a componente x da equação do momento do volume de controle. Como não há momento cruzando as superfícies de controle superior ou inferior, a força resultante agindo sobre o volume de controle deve ser igual ao fluxo do momento saindo do volume de controle menos o fluxo do momento entrando no volume de controle:

Conservação do momento x para o volume de controle:

$$\sum F_x = -F_{D,x} = \int_{SC} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \underbrace{\rho w \int_0^{Y+\delta^*} u^2\, dy}_{\text{posição em x}} - \underbrace{\rho w \int_0^{Y} U^2\, dy}_{\text{em } x = 0} \qquad \textbf{(10–76)}$$

onde $F_{D,x}$ é a força de arrasto devida ao atrito sobre a placa de $x = 0$ até a posição x. Após algumas operações algébricas, incluindo a substituição da Equação 10–75, a Equação 10–76 se reduz a:

$$F_{D,x} = \rho w \int_0^{Y} u(U - u)\, dy \qquad \textbf{(10–77)}$$

Finalmente, definimos a espessura θ do momento de forma que a força de arrasto viscoso sobre a placa por unidade de largura perpendicular à página seja igual a ρU^2 vezes θ, isto é:

$$\frac{F_{D,x}}{w} = \rho \int_0^{Y} u(U - u)\, dy \equiv \rho U^2 \theta \qquad \textbf{(10–78)}$$

Em outras palavras:

> A espessura do momento é definida como a perda de fluxo do momento por largura unitária dividida por ρU^2 devido à presença da camada limite que está se desenvolvendo.

A Equação 10–78 se reduz a:

$$\theta = \int_0^{Y} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad \textbf{(10–79)}$$

A altura Y da linha de corrente pode ter qualquer valor, desde que a linha de corrente tomada como superfície superior do volume de controle esteja acima da camada limite. Como $u = U$ para qualquer y maior do que Y, podemos substituir Y por infinito na Equação 10–79 sem nenhuma alteração no valor de θ:

Espessura do momento:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad \textbf{(10–80)}$$

Para o caso específico da solução de Blasius para uma camada limite laminar de uma placa plana (Exemplo 10–10), integramos a Equação 10–80 numericamente para obter:

Espessura do momento, placa plana laminar:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad \textbf{(10–81)}$$

Observamos que a equação para θ é a mesma que para δ ou para δ^* mas com uma constante diferente. De fato, para o fluxo laminar sobre uma placa plana, θ vem a ser aproximadamente 13,5% de δ em qualquer posição x, conforme está indicado na Figura 10–111. Não é coincidência o fato de que θ/x (Equação 10–81) é idêntica a $C_{f,x}$ (Equação 10 do Exemplo 10–10) — ambas são deduzidas do arrasto do atrito superficial sobre a placa.

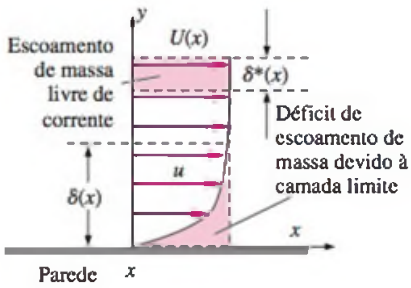


FIGURA 10–110
Comparação da área sob o perfil da camada limite, representando o déficit de fluxo de massa e a área gerada por uma porção de fluido de corrente livre de espessura δ^*. Para satisfazer o princípio da conservação da massa, essas duas áreas devem ser idênticas.

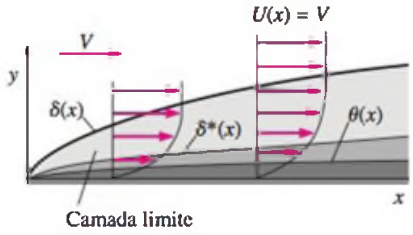


FIGURA 10–111
Para uma camada limite laminar sobre uma placa plana, a espessura de deslocamento é 35,0 % de δ, e a espessura do momento é 13,5 % de δ.

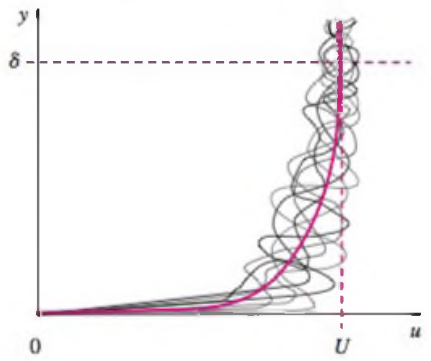


FIGURA 10–112
Ilustração da transitoriedade de uma camada limite turbulenta; as linhas pretas finas e onduladas são perfis instantâneos, e a linha azul grossa é um perfil médio ao longo do tempo.

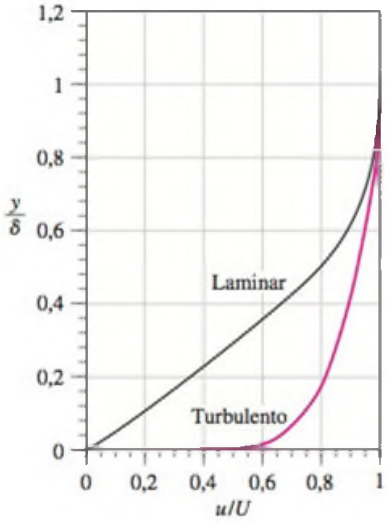


FIGURA 10–113
Comparação dos perfis de camada limite de placa plana, laminar e turbulenta, adimensionalizada, pela espessura da camada limite.

Camada Limite Turbulenta sobre uma Placa Plana

Está além do escopo deste livro deduzir ou tentar resolver as equações de camada limite de escoamento turbulento. As expressões para a forma do perfil da camada limite e outras propriedades da camada limite turbulenta são obtidas *empiricamente* (ou no melhor dos casos *semi-empiricamente*), já que não podemos resolver as equações de camada limite para escoamento turbulento. Observe também que os escoamentos turbulentos são inerentemente *transientes*, e a forma do perfil de velocidade instantânea varia com o tempo (Figura 10–112). Portanto, todas as expressões turbulentas discutidas aqui representam *valores médios no tempo*. Uma aproximação empírica comum para o perfil de velocidades médias no tempo, de uma camada limite turbulenta sobre placa plana é a **lei da potência um sétimo:**

$$\frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{para } y \le \delta, \qquad \rightarrow \qquad \frac{u}{U} \cong 1 \quad \text{para } y > \delta \tag{10–82}$$

Observe que na aproximação da Equação 10–82, δ *não* é a espessura de 99 por cento da camada limite, mas sim, a borda real da camada limite, diferentemente da definição de δ para escoamento laminar. O gráfico da Equação 10–82 está ilustrado na Figura 10–113. Para efeitos de comparação, o perfil da camada limite laminar sobre placa plana (a solução numérica de Blasius, Figura 10–99) está traçada também na Figura 10–113, usando y/δ para o eixo vertical no lugar da variável de similaridade η. Você pode ver que se as camadas limites laminar e turbulenta tivessem a mesma espessura, a camada limite turbulenta seria mais *cheia* do que a laminar. Em outras palavras, a camada limite turbulenta iria permanecer mais próxima da parede, preenchendo a camada limite com escoamento de velocidade mais alta próximo da parede. Isto é devido aos grandes redemoinhos turbulentos que transportam fluido em alta velocidade da parte externa da camada limite para as partes inferiores da camada limite (e vice-versa). Em outras palavras, uma camada limite turbulenta tem um grau maior de mistura quando comparada com a camada limite laminar. No caso laminar, o fluido se mistura lentamente devido à difusão viscosa. No entanto, os grandes redemoinhos em um escoamento turbulento promovem uma mistura mais rápida e completa.

A forma do perfil de velocidades da camada limite turbulenta da Equação 10–82 não tem significado físico muito perto da parede ($y \rightarrow 0$), pois ela afirma que a variação ($\partial u/\partial y$) é infinita em $y = 0$. Embora a variação na parede seja muito grande para uma camada limite turbulenta, ela é finita. Essa grande variação na parede leva a uma tensão de cisalhamento muito grande na parede, $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$, e, portanto, um atrito superficial correspondente muito alto ao longo da superfície da placa (comparada com uma camada limite laminar da mesma espessura). O arrasto do atrito superficial produzido pelas camadas limite laminar e turbulenta é discutido com mais detalhes no Capítulo 11.

Um gráfico adimensional como o da Figura 10–113 é um tanto ilusório, já que a camada limite turbulenta seria na realidade muito mais *grossa* do que a camada limite laminar correspondente com o mesmo número de Reynolds. Esse fato está ilustrado em variáveis físicas no Exemplo 10–12.

Na Tabela 10–4 comparamos expressões para δ, δ^*, θ e $C_{f,x}$ para camadas limites laminar e turbulenta sobre uma placa plana lisa. As expressões turbulentas estão baseadas na lei da potência um sétimo da Equação 10–82. Note que as expressões na Tabela 10–4 para a camada limite turbulenta sobre placa plana são válidas somente para uma superfície muito *lisa*. Mesmo uma pequena rugosidade na superfície pode afetar muito as propriedades da camada limite turbulenta, como a espessura do momento e coeficiente local de atrito superficial. O efeito da rugosidade da superfície em uma camada limite turbulenta sobre placa plana é discutido com maior detalhe no Capítulo 11.

TABELA 10–4

Resumo das expressões para camadas limites laminar e turbulenta sobre uma placa lisa paralela a uma corrente uniforme*

Propriedade	Laminar	(a) Turbulenta(†)	(b) Turbulenta(‡)
Espessura da camada limite	$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}91}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0{,}16}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0{,}38}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$
Espessura de deslocamento	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1{,}72}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0{,}020}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0{,}048}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$
Espessura da quantidade de movimento	$\frac{\theta}{x} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0{,}016}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0{,}037}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$
Coeficiente local de atrito superficial	$C_{f,x} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0{,}027}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0{,}059}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$

* Os valores laminares são exatos e são listados com três algarismos significativos, mas os valores turbulentos são listados com apenas dois algarismos significativos devido à grande incerteza relacionada a todos os campos de escoamento turbulentos.

† Obtido a partir da lei da potência um sétimo.

‡ Obtido a partir da lei da potência um sétimo combinada com dados empíricos para escoamento turbulento através de dutos lisos.

EXEMPLO 10–12 Comparação das Camadas Limites Laminar e Turbulenta

Ar a 20°C escoa com a velocidade $V = 10{,}0$ m/s sobre uma placa lisa de comprimento $L = 1{,}52$ m (Figura 10–114). (a) Faça o gráfico e compare os perfis de camadas limites laminares e turbulentas em variáveis físicas (u em função de y) em $x = L$. (b) Compare os valores do coeficiente local de atrito superficial para os dois casos em $x = L$. (c) faça o gráfico e compare o crescimento das camadas limite laminar e turbulenta.

SOLUÇÃO Vamos comparar os perfis de camada limite laminar *versus* turbulenta, coeficiente local de atrito superficial e espessura de camada limite no fim de uma placa plana.

Hipóteses **1** A placa é lisa e a corrente livre é calma e uniforme. **2** O escoamento é permanente na média. **3** A placa é infinitesimalmente fina e está alinhada paralelamente à corrente livre.

Propriedades A viscosidade cinemática do ar a 20°C é $\nu = 1{,}516 \times 10^{-5}$ m²/s.

Análise (a) Primeiro calculamos o número de Reynolds em $x = L$:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(10{,}0\ \mathrm{m/s})(1{,}52\ \mathrm{m})}{1{,}516 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}} = 1{,}00 \times 10^6$$

Esse valor de Re_x está na região de transição entre laminar e turbulento, de acordo com a Figura 10–81. Portanto, é apropriada uma comparação entre perfis de velocidade laminar e turbulento. Para o caso laminar, multiplicamos os valores y/δ da Figura 10–113 por δ_{laminar}, onde:

$$\delta_{\text{laminar}} = \frac{4{,}91x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{4{,}91(1520\ \mathrm{mm})}{\sqrt{1{,}00 \times 10^6}} = 7{,}46\ \mathrm{mm} \qquad (1)$$

Isto nos dá valores y em unidades de mm. Da mesma forma, multiplicamos os valores u/U da Figura 10–113 por U ($U = V = 10{,}0$ m/s) para obter u em unidades de m/s. Apresentamos o gráfico do perfil da camada limite laminar em variáveis físicas na Figura 10–115.

Calculamos a espessura da camada limite turbulenta nessa mesma posição x usando a equação fornecida na Tabela 10–4, coluna (a):

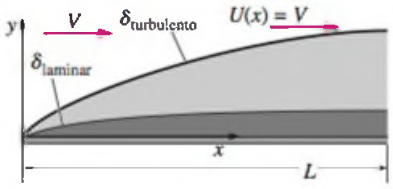


FIGURA 10–114
Comparação de camadas limites laminar e turbulenta para escoamento de ar sobre uma placa plana para o Exemplo 10–12 (a espessura da camada limite está exagerada).

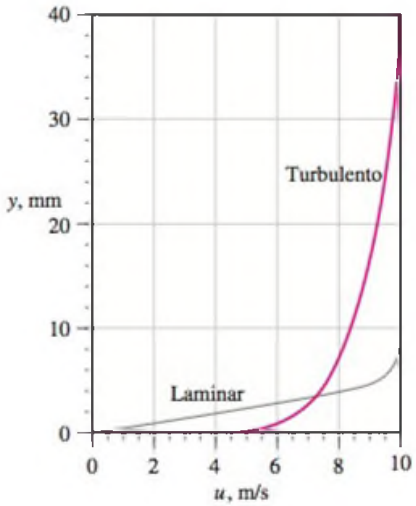


FIGURA 10–115
Comparação dos perfis laminar e turbulento da camada limite sobre uma placa plana em variáveis físicas na mesma posição x. O número de Reynolds é $\mathrm{Re}_x = 1{,}0 \times 10^6$.

$$\delta_{\text{turbulenta}} \cong \frac{0{,}16x}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = \frac{0{,}16(1520\text{ mm})}{(1{,}00 \times 10^6)^{1/7}} = \mathbf{33{,}8\text{ mm}} \qquad (2)$$

[O valor de $\delta_{\text{turbulenta}}$ baseado na coluna (*b*) da Tabela 10–4 é um pouco mais alto, isto é 36,4 mm.] Comparando as Equações 1 e 2, vemos que a camada limite turbulenta é aproximadamente 4,5 vezes mais grossa do que a camada limite laminar com número de Reynolds de $1{,}0 \times 10^6$. O perfil de velocidade da camada limite turbulenta da Equação 10–82 é convertido em variáveis físicas e traçado na Figura 10–115 para ser comparado com o perfil laminar. As duas características mais destacadas da Figura 10–115 são (1) a camada limite turbulenta é mais grossa do que a laminar e (2) a variação de u com y próximo da parede é muito maior para o caso turbulento. (Tenha em mente, naturalmente, que muito próximo da parede, a lei da potência um sétimo não representa adequadamente o perfil real da camada limite turbulenta.)

(*b*) Usamos as expressões na Tabela 10–4 para comparar o coeficiente local de atrito superficial para os dois casos. Para a camada limite laminar:

$$C_{f,x,\text{ laminar}} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{0{,}664}{\sqrt{1{,}00 \times 10^6}} = \mathbf{6{,}64 \times 10^{-4}} \qquad (3)$$

e para a camada limite turbulenta, coluna (a):

$$C_{f,x,\text{ turbulenta}} \cong \frac{0{,}027}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = \frac{0{,}027}{(1{,}00 \times 10^6)^{1/7}} = \mathbf{3{,}8 \times 10^{-3}} \qquad (4)$$

Comparando as Equações 3 e 4, o valor do atrito superficial turbulento é mais de cinco vezes maior do que o valor laminar. Se tivéssemos usado a outra expressão para coeficiente de atrito superficial turbulento, coluna (b) da Tabela 10–4, teríamos obtido $C_{f,x\text{ turbulenta}} = 3.7 \times 10^{-3}$, muito próximo do valor calculado na Equação 4.

(*c*) O cálculo turbulento assume que a camada limite é turbulenta desde o início da placa. Na realidade, há uma região de escoamento laminar, seguida por uma região de transição e depois finalmente por uma região turbulenta, conforme está ilustrado na Figura 10–81. No entanto, é interessante comparar como δ_{laminar} e $\delta_{\text{turbulenta}}$ crescem como funções de x para esse escoamento, considerando que todo o escoamento é laminar ou todo o escoamento é turbulento. Usando as expressões na Tabela 10–4, ambos os casos estão traçados na Figura 10–116 para comparação.

Discussão A ordenada na Figura 10–116 está em mm, enquanto a abscissa está em m para maior clareza — a camada limite é incrivelmente fina, mesmo para o caso turbulento. A diferença entre os casos turbulentos (*a*) e (*b*) (veja a Tabela 10–4) é explicada por discrepâncias entre ajustes de curva empírica e aproximações semi-empíricas usadas para obter as expressões na Tabela 10–4. Isso reforça nossa decisão de representar os valores de camada limite turbulenta com no máximo dois algarismos significativos. O valor real de δ muito provavelmente ficará entre os valores laminar e turbulento no gráfico da Figura 10–116 já que o número de Reynolds no fim da placa está dentro da região de transição.

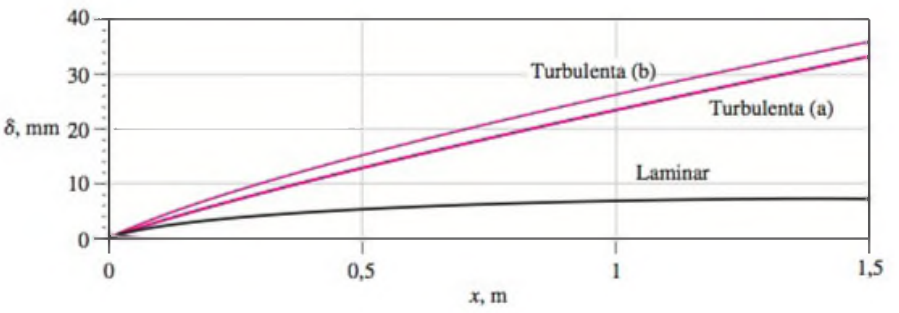


FIGURA 10–116
Comparação do crescimento de uma camada limite laminar e de uma camada limite turbulenta para a placa plana do Exemplo 10–12.

A lei da potência um sétimo não é a única aproximação da camada limite turbulenta usada pela mecânica dos fluidos. Uma outra aproximação comum é a **lei logarítmica**, uma expressão semi-empírica que vem a ser válida não somente para camadas limite sobre placa plana, mas também para perfis de velocidade de escoamento turbulento totalmente desenvolvido em tubo (Capítulo 8). Na verdade, a lei logarítmica vem a ser aplicável para quase *todas* as camadas limites turbulentas limitadas por paredes, não apenas o escoamento sobre uma placa plana. (Essa situação afortunada nos permite empregar a aproximação de lei logarítmica próximo a paredes sólidas em softwares de Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC), conforme discutiremos no Capítulo 15.) A lei logarítmica é expressa comumente em variáveis adimensionais por uma velocidade característica chamada de **velocidade de atrito** u_*. (Observe que muitos autores usam u^* em lugar de u_*. Nós usamos um subscrito para distinguir u_*, uma grandeza *dimensional*, de u^*, que usamos para indicar velocidade adimensional.)

A lei logarítmica:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B \qquad (10\text{–}83)$$

onde:

Velocidade de atrito:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \qquad (10\text{–}84)$$

e κ e B são constantes; seus valores usuais são $\kappa = 0{,}40$ a $0{,}41$ e $B = 5{,}0$ a $5{,}5$. Infelizmente, a lei logarítmica é prejudicada pelo fato de que ela não funciona muito perto da parede (logaritmo de 0 não é definido). Ela também se desvia dos valores experimentais próximo da borda da camada limite. No entanto, a Equação 10–83 se aplica através de quase toda a camada limite turbulenta sobre placa plana e é útil porque ela relaciona a forma do perfil de velocidade com o valor local da tensão de cisalhamento na parede através da Equação 10–84.

Uma expressão inteligente que é válida em todo o percurso até a parede foi criada por D. B. Spalding em 1961 e é chamada de **lei da parede de Spalding**:

$$\frac{yu_*}{\nu} = \frac{u}{u_*} + e^{-\kappa B}\left[e^{\kappa(u/u_*)} - 1 - \kappa(u/u_*) - \frac{[\kappa(u/u_*)]^2}{2} - \frac{[\kappa(u/u_*)]^3}{6}\right] \qquad (10\text{–}85)$$

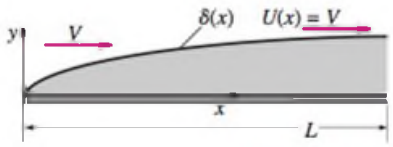


FIGURA 10–117
A camada limite turbulenta gerada pelo escoamento do ar sobre uma placa plana no Exemplo 10–13 (a espessura da camada limite está exagerada).

EXEMPLO 10–13 Comparação das Equações de Perfil da Camada Limite Turbulenta

Ar a 20°C flui com a velocidade $V = 10{,}0$ m/s sobre uma placa lisa de comprimento $L = 15{,}2$ m (Figura 10–117). Faça o gráfico do perfil da camada limite turbulenta em variáveis físicas (u em função de y) em $x = L$. Compare o perfil gerado pela lei da potência um sétimo, pela lei logarítmica e pela lei da parede de Spalding, considerando que a camada limite seja completamente turbulenta desde o início da placa.

SOLUÇÃO Vamos fazer o gráfico do perfil médio $u(y)$ da camada limite no fim da placa plana usando três aproximações diferentes.

Hipóteses **1** A placa plana é lisa, mas há flutuações na corrente livre que tendem a fazer a camada limite atingir a transição para turbulência mais cedo do que o usual — a camada limite é turbulenta desde o início da placa. **2** O escoamento é permanente na média. **3** A placa é infinitesimalmente fina e está alinhada paralelamente à corrente livre.

Propriedades A viscosidade cinemática do ar a 20°C é $\nu = 1{,}516 \times 10^{-5}$ m²/s.

Análise Primeiro nós calculamos o número de Reynolds em x = L,

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(10{,}0 \text{ m/s})(15{,}2 \text{ m})}{1{,}516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1{,}00 \times 10^7$$

Esse valor de Re_x está bem acima do número de Reynolds de transição para a camada limite sobre placa plana (Figura 10–81), assim a hipótese de escoamento turbulento desde o início da placa é razoável.

Usando os valores da coluna (a) da Tabela 10–4, estimamos a espessura da camada limite e o coeficiente local de atrito superficial no fim da placa:

$$\delta \cong \frac{0{,}16x}{(Re_x)^{1/7}} = 0{,}240 \text{ m} \qquad C_{f,x} \cong \frac{0{,}027}{(Re_x)^{1/7}} = 2{,}70 \times 10^{-3} \tag{1}$$

Calculamos a velocidade de atrito usando sua definição (Equação 10–84) e a definição de $C_{f,x}$ (parte esquerda da Equação 10 do Exemplo 10–10):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = U\sqrt{\frac{C_{f,x}}{2}} = (10{,}0 \text{ m/s})\sqrt{\frac{2{,}70 \times 10^{-3}}{2}} = 0{,}367 \text{ m/s} \tag{2}$$

onde U = constante = V em todos os pontos para uma placa plana. É trivial gerar um gráfico da lei da potência um sétimo (Equação 10–82), mas a lei logarítmica (Equação 10–83) define u implicitamente como função de y. Em vez disso, resolvemos a Equação 10–83 escrevendo y em função de u:

$$y = \frac{\nu}{u_*} e^{\kappa(u/u_* - B)} \tag{3}$$

Como nós sabemos que u varia de 0 na parede até U na borda da camada limite, podemos fazer o gráfico do perfil de velocidade da lei logarítmica em variáveis físicas usando a Equação 3. Finalmente, a lei da parede de Spalding (Equação 10–85) também é escrita em termos de y em função de u. Desenhamos o gráfico dos três perfis no mesmo gráfico para fazer a comparação (Figura 10–118). As três curvas são próximas e não conseguimos distinguir a lei logarítmica da lei de Spalding nessa escala.

Em lugar de um gráfico de uma variável física com eixos lineares como na Figura 10–118, freqüentemente se faz um gráfico semilogarítmico de variáveis adimensionais para ampliar a região próxima da parede. A notação mais comum na literatura de camada limite para variáveis adimensionais é y^+ e u^+ (**variáveis internas ou variáveis da lei da parede**), onde

$$\textit{Variáveis da lei da parede:} \qquad y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \qquad u^+ = \frac{u}{u_*} \tag{4}$$

Como você pode ver, y^+ é um tipo de número de Reynolds, e a velocidade de atrito u^* é usada para colocar y e u em forma adimensional. A Figura 10–118 está refeita na Figura 10–119 usando as variáveis da lei da parede. As diferenças entre as três aproximações, especialmente próximo da parede, ficam muito mais claras quando o gráfico é desenhado dessa forma. Dados experimentais típicos estão também mostrados na Figura 10–119 para comparação. A fórmula de Spalding faz o melhor de maneira geral e é a única expressão que segue os dados experimentais nas proximidades da parede. Na parte externa da camada

FIGURA 10–118
Comparação das expressões de perfil de camada limite turbulenta sobre uma placa plana em variáveis físicas com $Re_x = 1{,}0 \times 10^7$: aproximação da lei da potência um sétimo, lei logarítmica e lei da parede de Spalding.

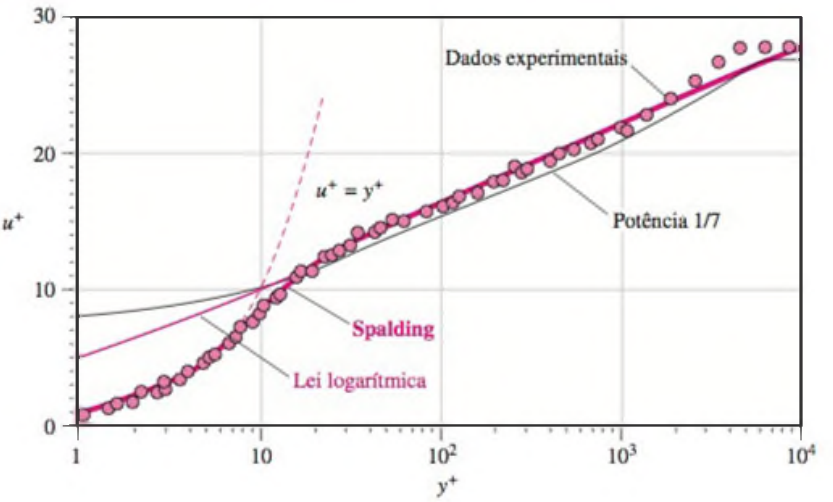


FIGURA 10–119
Comparação das expressões de perfil de camada limite turbulenta sobre uma placa plana na lei das variáveis de parede em $Re_x = 1{,}0 \times 10^7$: aproximação da lei da potência um sétimo, lei logarítmica e lei da parede de Spalding. São mostrados também dados experimentais típicos e a equação da subcamada viscose ($u^+ = y^+$) para comparação.

limite, os valores experimentais de u^- tornam-se constantes além de algum valor de y^+, como ocorre com a lei da potência um sétimo. Porém, tanto a lei logarítmica quanto a fórmula de Spalding continuam crescendo indefinidamente como uma linha reta nesse gráfico semilogarítmico.

Discussão No gráfico da Figura 10–119 está também a equação linear $u^+ = y^+$. A região muito próxima da parede ($0 < y^+ < 5$ ou 6) é chamada de subcamada viscosa. Nessa região, as flutuações turbulentas são suprimidas devido à grande proximidade da parede e o perfil de velocidade é aproximadamente linear. Outros nomes para essa região são **subcamada linear** e **subcamada laminar**. Vemos que a equação de Spalding captura a subcamada viscosa e se combina suavemente na lei logarítmica. Nem a lei da potência um sétimo nem a lei logarítmica são válidas nessa proximidade da parede.

Camadas Limites com Gradientes de Pressão

Até aqui, a maior parte da nossa discussão foi sobre camadas limite sobre placa plana. Um conceito de maior utilidade prática para os engenheiros são as camadas limites sobre paredes de forma arbitrária. Essas incluem escoamentos externos sobre corpos imersos em uma corrente livre (Figura 10–120*a*), bem como alguns escoamentos internos como as paredes de túneis de vento e outros dutos grandes nos quais as camadas limites se desenvolvem ao longo das paredes (Figura 10–120*b*). Assim como no caso da camada limite sobre uma placa plana com gradiente de pressão zero discutida anteriormente, camadas limites com gradientes de pressão diferente de zero podem ser laminares ou turbulentas. Freqüentemente usamos os resultados da camada limite sobre uma placa plana como estimativas para coisas como posição da transição para a turbulência, espessura da camada limite, atrito superficial etc. No entanto, quando é necessária uma maior precisão, temos que resolver as equações da camada limite (Equação 10–71 para o caso permanente, laminar e bidimensional) usando o procedimento ilustrado na Figura 10–93. A análise é muito mais difícil do que aquela para a placa plana, pois o termo do gradiente de pressão ($U\,dU/dx$) na equação do momento na direção x é diferente de zero. Uma análise dessas pode facilmente ficar muito complicada, especialmente para o caso de escoamentos tridimensionais. Portanto, discutimos somente algumas características *qualitativas* das camadas limites com gradientes de pressão, deixando as soluções detalhadas das equações da camada limite para livros-textos de mecânica dos fluidos em nível mais elevado (por exemplo, Panton, 1996; White, 1991).

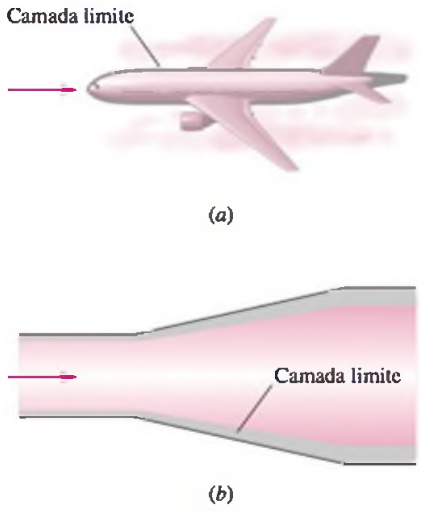


FIGURA 10–120
Camadas limites com gradientes de pressão diferente de zero ocorrem em escoamentos externos e internos: (*a*) camada limite desenvolvendo-se ao longo da fuselagem de um avião e na sua esteira; (*b*) camada limite desenvolvendo-se na parede de um difusor (a espessura da camada limite foi exagerada em ambos os casos).

Primeiro, um pouco de terminologia. Quando o escoamento na região de escoamento externo sem viscosidade e/ou irrotacional (fora da camada limite) *acelera*, $U(x)$ aumenta e $P(x)$ diminui. Chamamos isso de um **gradiente de pressão favorável.** Ele é favorável ou desejável porque a camada limite em um escoamento em aceleração como esse é usualmente fina, permanece próxima da parede e, portanto, não tende a se separar da parede. Quando o escoamento externo *desacelera*, $U(x)$ diminui, $P(x)$ aumenta, e temos um **gradiente de pressão desfavorável** ou **adverso**. Como o próprio nome diz, essa condição não é desejável porque a camada limite usualmente é mais grossa, não permanece próxima da parede e tem muito mais tendência a se separar dela.

Em um escoamento externo típico, como o escoamento sobre uma asa de avião (Figura 10–121), a camada limite na parte da frente do corpo está sujeita a um gradiente de pressão favorável, enquanto na parte de trás ela está sujeita a um gradiente de pressão desfavorável. Se o gradiente de pressão adverso for suficientemente forte ($dP/dx = -U\,dU/dx$ é grande), a camada limite tende a se **separar** da parede. Na Figura 10–122 são mostrados exemplos de separação de escoamento para escoamentos externos e internos. Na Figura 10–122*a* está desenhado um aerofólio com um ângulo de ataque moderado. A camada limite permanece colada sobre toda a superfície inferior do aerofólio, mas ela se separa em algum ponto perto da superfície de trás ou superfície superior conforme está no desenho. A linha de corrente fechada indica uma região de escoamento recirculante chamada de **bolha de separação**. Conforme já destacamos anteriormente, as equações da

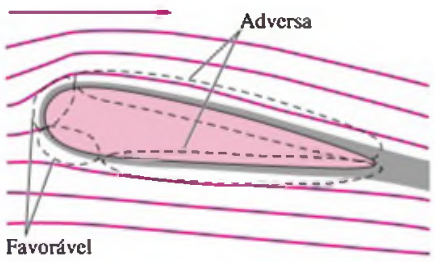


FIGURA 10–121
A camada limite ao longo de um corpo imerso em uma corrente livre é tipicamente exposta a um gradiente de pressão favorável na parte da frente do corpo e a um gradiente de pressão adverso na parte de trás do corpo.

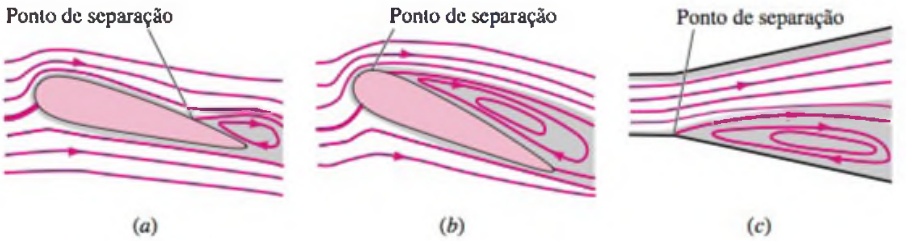


FIGURA 10–122
Exemplos de separação de camada limite em regiões de gradiente de pressão adversa: (*a*) uma asa de avião a um ângulo de ataque moderado, (*b*) a mesma asa com um alto ângulo de ataque (uma asa entrando em estol) e (*c*) um difusor de ângulo aberto no qual a camada limite não pode permanecer ligada e se separa em um lado.

camada limite são parabólicas, o que significa que nenhuma informação pode ser passada a partir do limite a jusante. No entanto, a separação leva ao **escoamento reverso** próximo da parede, destruindo a natureza parabólica do campo de escoamento e tornando inaplicáveis as equações da camada limite.

As equações da camada limite não são válidas a jusante de um ponto de separação devido ao escoamento reverso na bolha de separação.

Em casos como este, deve ser usada a equação completa de Navier-Stokes em lugar da aproximação da camada limite. Do ponto de vista do procedimento de camada limite da Figura 10–93, o procedimento fracassa porque o escoamento externo calculado no passo 1 não é mais válido quando a separação ocorre, especialmente além do ponto de separação (compare a Figura 10–121 com a Figura 10–122*a*).

A Figura 10–122*b* mostra o caso clássico de um aerofólio a um ângulo de ataque muito acentuado, no qual o ponto de separação move-se para perto da frente do aerofólio; a bolha de separação cobre quase toda a superfície do aerofólio — uma condição conhecida como **estol**. O estol é acompanhado por uma perda de sustentação e um grande aumento no arrasto aerodinâmico, conforme será discutido com mais detalhes no Capítulo 11. A separação de escoamento pode também ocorrer em escoamentos internos, como ocorre na região de gradiente de pressão adversa de um difusor (Figura 10–122*c*). Conforme está representado na figura, a separação freqüentemente ocorre assimetricamente em um lado do difusor apenas. Como no caso de um aerofólio com separação de escoamento, o cálculo do escoamento externo no difusor não tem mais significado e as equações da camada limite não são válidas. A separação de escoamento em um difusor leva a uma diminuição significativa da recuperação de pressão; condições como essas em um difusor são também chamadas de condições de estol.

Podemos aprender muito sobre a forma do perfil de velocidade sob várias condições de gradiente de pressão examinando a equação do momento da camada limite exatamente na parede. Como a velocidade é zero na parede (condição de não-escorregamento), todo o lado esquerdo da Equação 10–71 desaparece, restando somente o termo do gradiente de pressão e o termo viscoso, que devem se equilibrar:

$$\textit{Na parede:} \qquad \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -U\frac{dU}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} \qquad \textbf{(10–86)}$$

Sob condições de gradiente de pressão favorável (escoamento externo acelerando), dU/dx é positivo, e pela Equação 10–86, a segunda derivada de u na parede é negativa, isto é, $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0} < 0$. Sabemos que $\partial^2 u/\partial y^2$ deve *permanecer* negativa à medida que u se aproxima de $U(x)$ na borda da camada limite. Portanto, esperamos que o perfil de velocidade através da camada limite seja arredondado, sem nenhum ponto de inflexão, conforme está representado na Figura 10–123*a*. Sob condições de gradiente de pressão zero, $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0}$ é zero, implicando um crescimento linear de u com relação a y próximo da parede, conforme está representado na Figura 10–123*b*. (Isto é verificado pelo perfil de camada limite de Blasius para camada limite com gradiente de pressão zero sobre uma placa plana, como está ilustrado na Figura 10–99.) Para gradientes de pressão *adversa*, dU/dx é negativo e a Equação 10–86 exige que $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0}$ seja positiva. No entanto, como $\partial^2 u/\partial y^2$ deve ser negativo à medida que u se aproxima de $U(x)$ na borda da camada limite, deve haver um *ponto de inflexão* ($\partial^2 u/\partial y^2 = 0$) em algum lugar na camada limite, conforme está ilustrado na Figura 10–123*c*.

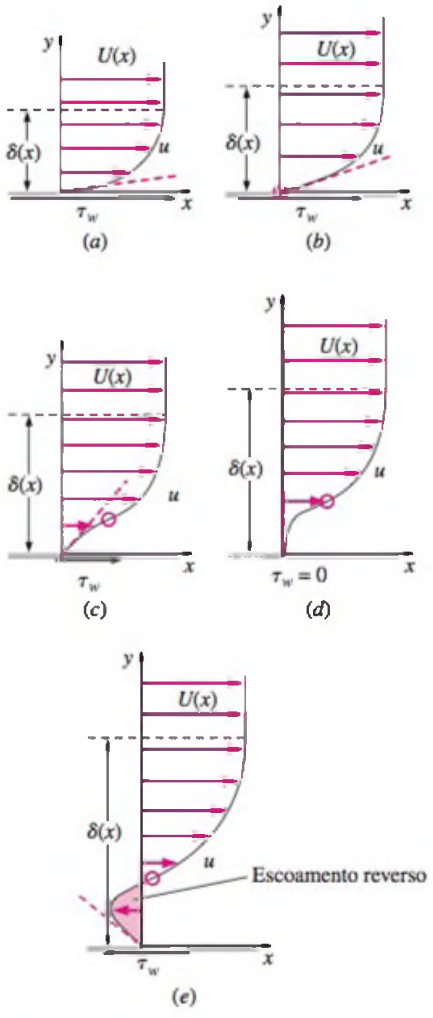


FIGURA 10–123
Comparação da forma do perfil da camada limite em função do gradiente de pressão ($dP/dx = -U\,dU/dx$): (*a*) favorável, (*b*) zero, (*c*) fracamente adversa, (*d*) criticamente adversa (ponto de separação) e (*e*) muito adversa; os pontos de inflexão são indicados por círculos azuis e a tensão de cisalhamento na parede $\tau_w = \mu\,(\partial u/\partial y)_{y=0}$ está representada para cada caso.

A *primeira* derivada de u com relação a y na parede é diretamente proporcional a τ_w, a tensão de cisalhamento na parede [$\tau_w = \mu\ (\partial u/\partial y)_{y=0}$]. A comparação de $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ na Figura 10–123*a* até *c* revela que τ_w é a maior para gradientes de pressão favoráveis e a menor para gradientes de pressão adversos. A espessura da camada limite aumenta quando o gradiente de pressão muda de sinal, como está ilustrado também na Figura 10–123. Se o gradiente de pressão adverso for suficientemente grande, $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ pode se tornar zero (Figura 10–123*d*); essa posição ao longo da parede é o *ponto de separação*, além do qual há o escoamento reverso e uma bolha de separação (Figura 10–123*e*). Observe que além do ponto de separação τ_w é *negativo* devido ao valor negativo de $(\partial u/\partial y)_{y=0}$. Conforme mencionamos ante-

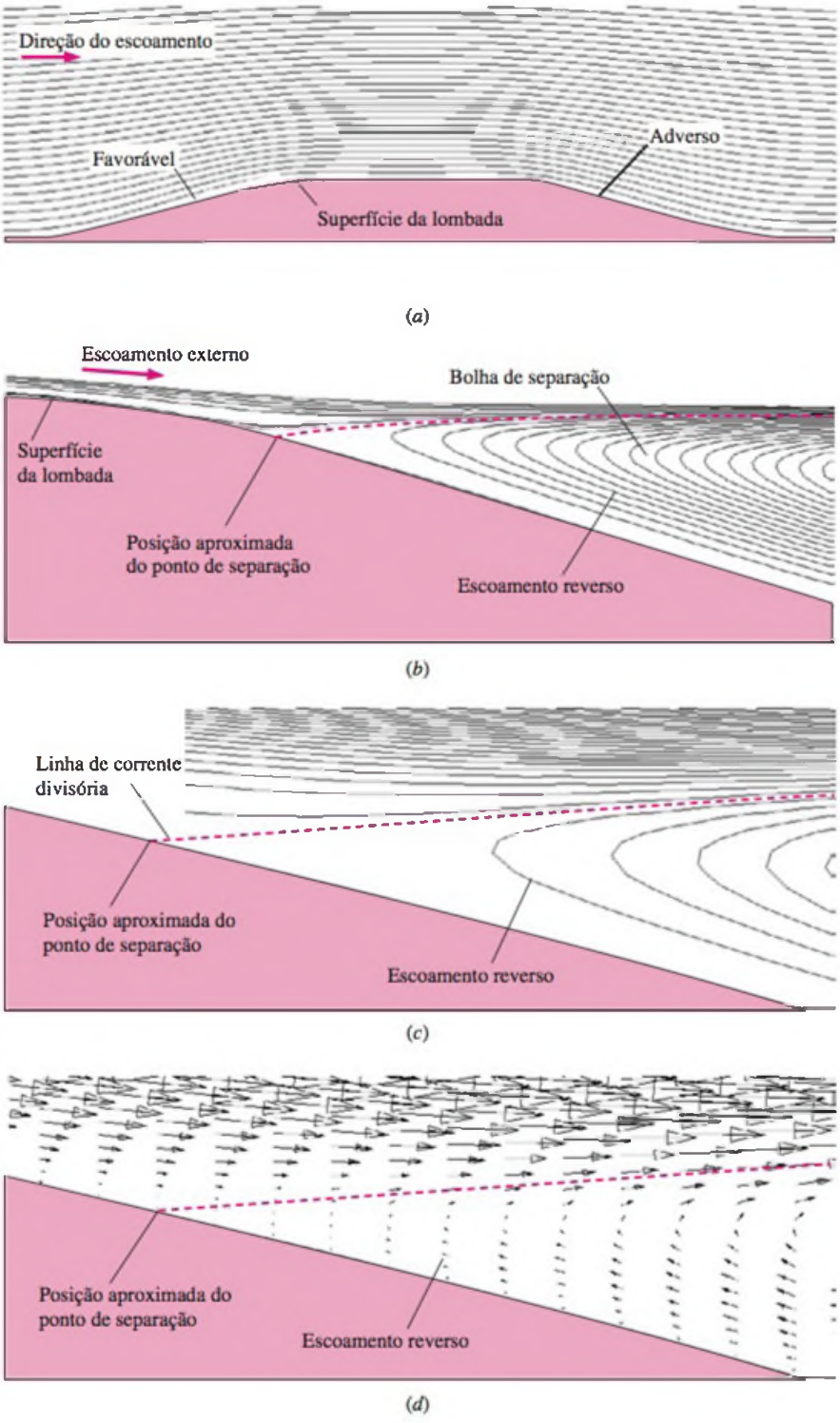


FIGURA 10–124
Cálculos pelo software CFD do escoamento sobre uma lombada: (*a*) solução da equação de Euler com linhas de corrente de escoamento externo no gráfico (sem separação do escoamento), (*b*) solução de escoamento laminar mostrando separação de escoamento no lado a jusante da lombada, (*c*) visualização ampliada das linhas de corrente próximo do ponto de separação e (*d*) visualização ampliada dos vetores de velocidade, mesma visualização que em (*c*).

riormente, as equações de camada limite deixam de ter validade em regiões de escoamento reverso. Assim, a aproximação da camada limite pode ser apropriada até o ponto de separação, mas não além deste.

Usamos o software de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) para ilustrar a separação de escoamento para o caso do escoamento sobre uma lombada ao longo da parede. O escoamento é permanente e bidimensional e a Figura 10–124*a* mostra as linhas de corrente do escoamento externo geradas por uma solução da equação de Euler. Sem os termos viscosos não há separação e as linhas de corrente são simétricas na frente e atrás. Conforme está indicado na figura, a parte da frente da lombada apresenta uma aceleração do escoamento e conseqüentemente um gradiente de pressão favorável. A parte de trás apresenta uma desaceleração do escoamento e um gradiente de pressão adverso. Quando é resolvida a equação completa (laminar) de Navier-Stokes, os termos viscosos levam à separação do escoamento na parte de trás da lombada, como se pode ver na Figura 10–124*b*. Tenha em mente que essa é uma solução completa da equação de Navier-Stokes, não uma solução de camada limite; no entanto ela ilustra o processo de separação de escoamento na camada limite. A posição aproximada do ponto de separação está indicada na Figura 10–124*b* e a linha preta tracejada é um tipo de **linha de corrente divisória**. O fluido abaixo dessa linha de corrente é capturado na bolha de separação, enquanto o fluido acima dessa linha de corrente continua a jusante. Uma visualização ampliada das linhas de corrente é mostrada na Figura 10–124*c* e os vetores de velocidade são colocados no gráfico na Figura 10–124*d* usando a mesma visualização ampliada. O escoamento reverso na parte inferior da bolha de separação é claramente visível. Há também uma forte *componente y* da velocidade além do ponto de separação e o escoamento externo não é mais quase paralelo à parede. Na verdade, o escoamento separado não é nada semelhante ao escoamento externo original da Figura 10–124*a*. Isto é típico e representa uma séria deficiência na aproximação da camada limite. Isto é, as equações da camada limite podem ser capazes de prever a localização do ponto de separação razoavelmente bem, mas não podem prever nada além do ponto de separação. Em alguns casos o escoamento externo muda significativamente a *montante* do ponto de separação também; e a aproximação da camada limite produz resultados errados.

A aproximação da camada limite é apenas tão boa quanto a solução do escoamento externo; se o escoamento externo for alterado significativamente pela separação do escoamento, a aproximação da camada limite estará errada.

As camadas limites desenhadas na Figura 10–123 e os vetores de velocidade de separação de escoamento do gráfico da Figura 10–124 são para escoamento laminar. Camadas limite turbulentas tem um comportamento qualitativamente similar, embora como discutido anteriormente, o perfil velocidade média de uma camada limite turbulenta é muito mais cheio do que uma camada limite laminar sob condições similares. Portanto é necessário um gradiente de pressão adversa mais forte para separar a camada limite turbulenta. Fazemos a seguinte afirmação:

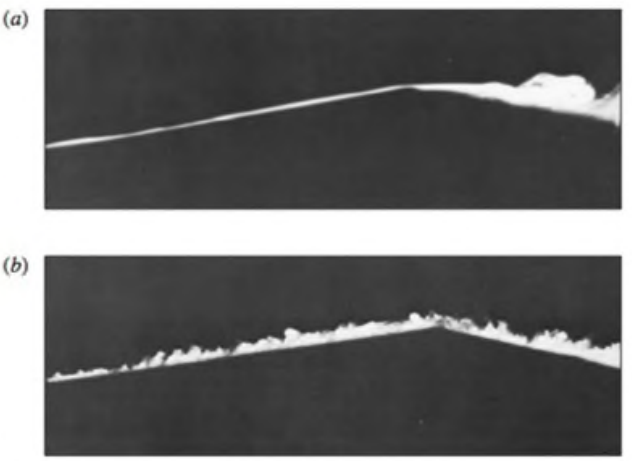


FIGURA 10–125
Comparação da visualização do escoamento das camadas limites laminar e turbulenta em um gradiente de pressão adverso; o escoamento é da esquerda para a direita. (*a*) A camada limite laminar separa-se na curva, mas (*b*) a turbulenta não. As fotografias foram tiradas por M. R. Head em 1982, visualizadas com tetra cloreto de titânio.
Head, M. R. 1982 em Flow Visualization II, W. Merzkirch, ed., 399-403. Washington: Hemisphere.

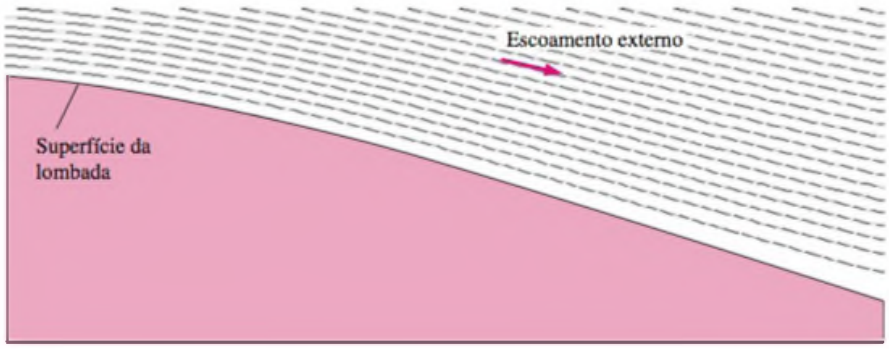


FIGURA 10–126
Cálculo CFD de escoamento turbulento sobre a mesma lombada da Figura 10–124. Comparando com o resultado laminar da Figura 10–124*b*, a camada limite turbulenta é mais resistente à separação do escoamento e não se separa na região do gradiente de pressão adversa na parte posterior da lombada.

Camadas limites turbulentas são mais resistentes à separação de escoamento do que as camadas limite laminares expostas ao mesmo gradiente de pressão adversa.

A evidência experimental dessa afirmação é ilustrada na Figura 10–125, na qual o escoamento externo está tentando fazer uma curva abrupta com um ângulo de 20°. A camada limite laminar (Figura 10–125*a*) não pode negociar a curva fechada, e separa-se no canto. A camada limite turbulenta por outro lado (Figura 10–125*b*) consegue permanecer unida ao redor do canto fechado.

Em um outro exemplo, o escoamento sobre a mesma lombada da Figura 10–124 é recalculado, mas com a turbulência é modelada na simulação. As linhas de corrente geradas pelo cálculo CFD turbulento estão ilustradas na Figura 10–126. Observe que a camada limite turbulenta permanece ligada (não há separação de escoamento), em contraste com a camada limite laminar que se separa da parte posterior da lombada. No caso turbulento, a solução de escoamento externo de Euler (Figura 10–124*a*) permanece válida sobre toda a superfície já que não há separação de escoamento e a camada limite permanece muito fina.

Ocorre uma situação similar para o escoamento sobre objetos rombudos como as esferas. Por exemplo, uma bola de golfe lisa manteria uma camada limite laminar em sua superfície, e a camada limite se separaria com relativa facilidade, levando a um grande arrasto aerodinâmico. As bolas de golfe têm covinhas (um tipo de rugosidade da superfície) para criar uma transição mais rápida para a camada limite turbulenta. O escoamento ainda se separa da superfície da bola de golfe, mas muito mais longe a jusante na camada limite, resultando em uma diminuição significativa no arrasto aerodinâmico. Isto será discutido em mais detalhes no Capítulo 11.

A Técnica Integral de Momento para Camadas Limites

Em muitas aplicações práticas de engenharia, não precisamos conhecer todos os detalhes internos da camada limite; em vez disso, procuramos estimativas razoáveis das características gerais da camada limite como sua espessura e coeficiente de atrito superficial. A **técnica integral de momento** utiliza uma aproximação de volume de controle para obter essas aproximações quantitativas das propriedades da camada limite ao longo de superfícies com gradientes de pressão zero ou diferente de zero. A técnica integral de momento é simples, e, em algumas aplicações, não requer o uso de um computador. Ela é válida tanto para a camada limite laminar quanto para a turbulenta.

Começamos com o volume de controle desenhado na Figura 10–127. A parte inferior do volume de controle é a parede em $y = 0$ e a parte superior está em $y = Y$, suficientemente alta para abranger toda a altura da camada limite. O volume de controle é uma fatia infinitesimalmente fina com a espessura dx na direção x. De acordo com a aproximação da camada limite, $\partial P/\partial y = 0$, consideramos então que a pressão P age ao longo de toda a face esquerda do volume de controle:

$$P_{\text{face esquerda}} = P$$

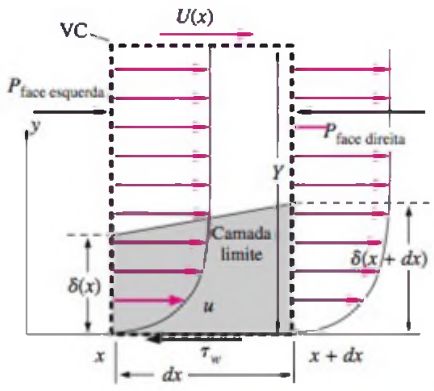


FIGURA 10–127
Volume de controle (linha preta grossa tracejada) usado na dedução da equação integral de momento.

No caso geral com gradiente de pressão diferente de zero, a pressão na face direita do volume de controle é diferente da pressão na face esquerda. Usando uma aproximação truncada de primeira ordem da série de Taylor (Capítulo 9), obtemos:

$$P_{\text{face direita}} = P + \frac{dP}{dx}\,dx$$

De forma similar escrevemos a vazão em massa que entra através da face esquerda como:

$$\dot{m}_{\text{face esquerda}} = \rho w \int_0^Y u\,dy \tag{10–87}$$

e a massa que sai através da face direita como:

$$\dot{m}_{\text{face direita}} = \rho w\left[\int_0^Y u\,dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u\,dy\right)dx\right] \tag{10–88}$$

onde w é a largura do volume de controle perpendicular à página na Figura 10–127. Se você preferir, pode definir w como largura unitária; ela será cancelada mais tarde de qualquer forma.

Como a Equação 10–88 é diferente da Equação 10–87, e como nenhum escoamento pode cruzar a base do volume de controle (a parede), a massa tem que escoar para dentro ou para fora pela parte *superior* do volume de controle. Ilustramos isso na Figura 10–128 para o caso de uma camada limite que está crescendo, na qual $\dot{m}_{\text{face direita}} < \dot{m}_{\text{face esquerda}}$, e $\dot{m}_{\text{superior}}$ é positiva (a massa escoa para fora). A conservação da massa sobre o volume de controle resulta em:

$$\dot{m}_{\text{superior}} = -\rho w \frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u\,dy\right)dx \tag{10–89}$$

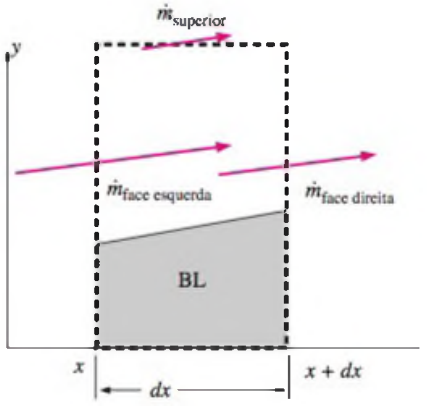


FIGURA 10–128
Balanço de fluxo de massa no volume de controle da Figura 10–127.

Aplicamos agora o princípio da conservação do momento x para o volume de controle escolhido. O momento x entra pela face esquerda e é removido através das faces direita e superior do volume de controle. O fluxo total do momento para fora do volume de controle deve ser equilibrado pela força devida à tensão de cisalhamento agindo sobre o volume de controle na parede e a força de pressão total na superfície de controle, como ilustra a Figura 10–127. A equação do momento x do volume de controle permanente é então:

$$\underbrace{\sum F_{x,\,\text{corpo}}}_{\text{ignorando a gravidade}} + \underbrace{\sum F_{x,\,\text{superfície}}}_{Yw\,P - Yw\left(P + \frac{dP}{dx}dx\right) - w\,dx\,\tau_w} = \underbrace{\int_{\text{face esquerda}} \rho u\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA}_{-\rho w\int_0^Y u^2\,dy} + \underbrace{\int_{\text{face direita}} \rho u\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA}_{\rho w\left[\int_0^Y u^2\,dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u^2\,dy\right)dx\right]} + \underbrace{\int_{\text{superior}} \rho u\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA}_{\dot{m}_{\text{superior}}U}$$

onde o momento através da superfície superior do volume de controle é considerado a vazão em massa através dessa superfície vezes U. Alguns dos termos se cancelam, e reescrevemos a equação como:

$$-Y\frac{dP}{dx} - \tau_w = \rho\frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u^2\,dy\right) - \rho U\frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u\,dy\right) \tag{10–90}$$

onde usamos a Equação 10–89 para $\dot{m}_{\text{superior}}$, e w e dx se cancelam em cada termo restante. Para nossa conveniência, notamos que $Y = \int_0^Y dy$. Do escoamento externo (equação de Euler), $dP/dx = -\rho U\,dU/dx$. Após dividir cada termo da Equação 10–90 pela densidade ρ, obtemos:

$$U\frac{dU}{dx}\int_0^Y dy - \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u^2\,dy\right) - U\frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u\,dy\right) \tag{10–91}$$

Simplificamos a Equação 10–91 utilizando a regra do produto para a diferenciação ao contrário (Figura 10–129). Após alguns rearranjos, a Equação 10–91 torna-se:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u(U-u)\,dy\right)+\frac{dU}{dx}\int_0^Y (U-u)\,dy=\frac{\tau_w}{\rho}$$

onde podemos colocar U dentro dos sinais de integral, pois em qualquer posição x, U é constante com relação a y (U é uma função apenas de x).

Multiplicamos e dividimos o primeiro termo por U^2 e o segundo termo por U para obter:

$$\frac{d}{dx}\left(U^2\int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy\right)+U\frac{dU}{dx}\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=\frac{\tau_w}{\rho} \qquad \textbf{(10–92)}$$

onde também substituímos Y por infinito no limite superior de cada integral, pois $u = U$ para todo y maior que Y, e portanto, o valor da integral não muda com essa substituição.

Já definimos anteriormente a espessura de deslocamento δ^* (Equação 10–72) e a espessura do momento θ (Equação 10–80) para uma camada limite de placa plana. No caso geral com gradiente de pressão diferente de zero, definimos δ^* e θ da mesma maneira, exceto que usamos o valor *local* da velocidade do escoamento externo, $U = U(x)$, em uma dada posição x em lugar da constante U pois U agora varia com x. A Equação 10–92 pode então ser escrita em uma forma mais compacta como:

Equação integral de Kármán:
$$\frac{d}{dx}(U^2\theta)+U\frac{dU}{dx}\delta^*=\frac{\tau_w}{\rho} \qquad \textbf{(10–93)}$$

A Equação 10–93 é chamada de **equação integral de Kármán** em homenagem a Theodor von Kármán (1881-1963), um aluno de Prandtl, que foi o primeiro a deduzir a equação em 1921.

Uma forma alternativa da Equação 10–93 pode ser obtida aplicando-se a regra do produto no primeiro termo, dividindo por U^2, e reorganizando:

Equação integral de Kármán, forma alternativa:
$$\frac{C_{f,x}}{2}=\frac{d\theta}{dx}+(2+H)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx} \qquad \textbf{(10–94)}$$

onde definimos o **fator de forma** H como:

Fator de forma:
$$H=\frac{\delta^*}{\theta} \qquad \textbf{(10–95)}$$

e o coeficiente **local de atrito superficial** $C_{f,x}$ como:

Coeficiente local de atrito superficial:
$$C_{f,x}=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \qquad \textbf{(10–96)}$$

Note que tanto H quanto $C_{f,x}$ são funções de x para o caso geral de uma camada limite com gradiente de pressão diferente de zero desenvolvendo-se ao longo de uma superfície.

Destacamos novamente que a dedução da equação integral de Kármán e as Equação 10–93 até 10–96 são válidas para qualquer camada limite permanente incompressível ao longo de uma parede, independentemente da camada limite ser laminar, turbulenta ou algo entre as duas coisas. Para o caso especial da camada limite sobre uma placa plana, $U(x) = U$ = constante, a Equação 10–94 se reduz a:

Equação integral de Kármán, camada limite sobre uma placa plana:
$$C_{f,x}=2\frac{d\theta}{dx} \qquad \textbf{(10–97)}$$

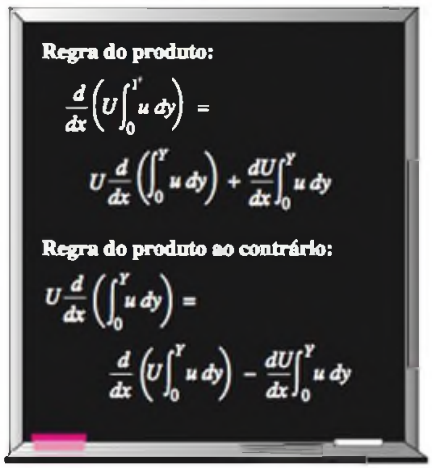


FIGURA 10–129
A regra do produto é utilizada ao contrário na dedução da equação integral do momento.

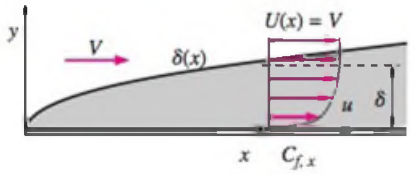


FIGURA 10–130
A camada limite turbulenta gerada pelo escoamento sobre uma placa plana para o Exemplo 10–14 (a espessura da camada limite está exagerada).

EXEMPLO 10–14 Análise da Camada Limite sobre uma Placa Plana Usando a Equação Integral de Kármán

Vamos supor que sabemos apenas duas coisas sobre a camada limite turbulenta sobre uma placa plana, isto é, o coeficiente local de atrito superficial (Figura 10–130):

$$C_{f,x} \cong \frac{0{,}027}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}} \tag{1}$$

e a aproximação da lei da potência um sétimo para a forma do perfil da camada limite:

$$\frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{para } y \le \delta \qquad \frac{u}{U} \cong 1 \quad \text{para } y > \delta \tag{2}$$

Usando as definições de espessura de deslocamento e espessura do momento e usando a equação integral de Kármán, estime como δ, δ^* e θ variam com x.

SOLUÇÃO Vamos estimar δ, δ^* e θ baseados nas Equações 1 e 2.
Hipóteses **1** O escoamento é turbulento, mas permanente na média. **2** A placa é fina e está alinhada paralela à corrente livre, de modo que $U(x) = V$ = constante.
Análise Primeiro substituímos a Equação 2 na Equação 10–80 e a integramos para encontrar a espessura do momento:

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy = \frac{7}{72}\delta \tag{3}$$

De forma semelhante, encontramos a espessura de deslocamento integrando a Equação 10–72:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy = \frac{1}{8}\delta \tag{4}$$

A equação integral de Kármán se reduz à Equação 10–97 para a camada limite sobre uma placa plana. Substituímos a Equação 3 na Equação 10–97 e a reorganizamos para obter:

$$C_{f,x} = 2\frac{d\theta}{dx} = \frac{14}{72}\frac{d\delta}{dx}$$

da qual:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{14} C_{f,x} = \frac{72}{14} 0{,}027(\mathrm{Re}_x)^{-1/7} \tag{5}$$

onde nós substituímos o coeficiente local de atrito superficial pela Equação 1. A equação 5 pode ser integrada diretamente, resultando em:

Espessura da camada limite:: $$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0{,}16}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}} \tag{6}$$

Finalmente, a substituição das Equações 3 e 4 na Equação 6 nos fornece aproximações para δ^* e θ:

Espessura de deslocamento: $$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0{,}020}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}} \tag{7}$$

e

Espessura do momento: $$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0{,}016}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}} \tag{8}$$

Discussão Os resultados estão de acordo com as expressões dadas na coluna (a) da Tabela 10–4 até dois algarismos significativos. Sem dúvida, muitas das expressões da Tabela 10–4 foram geradas com a ajuda da equação integral de Kármán.

Embora razoavelmente simples de usar, a técnica da integral do momento tem uma deficiência séria. Isto é, precisamos saber (ou prever) a forma do perfil da camada limite para poder aplicar a equação integral de Kármán (Figura 10–131). Para o caso de camadas limite com gradientes de pressão, a forma da camada limite muda com x (conforme está ilustrado na Figura 10–123), complicando ainda mais a análise. Felizmente, a forma do perfil de velocidade não precisa ser conhecida com precisão, pois a integração é muito tolerante. Várias técnicas foram desenvolvidas utilizando a equação integral de Kármán para prever características gerais da camada limite. Algumas dessas técnicas, como o método de Thwaite, funcionam muito bem para camadas limites laminares. Infelizmente, as técnicas que têm sido propostas para camadas limites turbulentas não foram bem-sucedidas. Muitas das técnicas requerem o uso de um computador e estão além do escopo deste livro.

FIGURA 10–131
A integração de um perfil de velocidade conhecido (ou suposto) é necessária quando se usa a equação integral de Kármán.

EXEMPLO 10–15 Arrasto na Parede de uma Seção de Teste de um Túnel de Vento

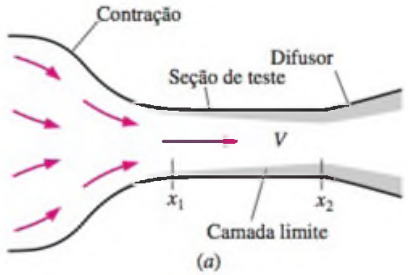
Uma camada limite se desenvolve ao longo das paredes de um túnel de vento retangular. O ar está a 20°C e a pressão é atmosférica. A camada limite começa a montante da contração e cresce até a seção de teste (Figura 10–132). Quando chega à seção de teste, a camada limite é totalmente turbulenta. O perfil da camada limite e sua espessura são medidos tanto no início ($x = x_1$) quanto no fim ($x = x_2$) da parede inferior da seção de teste do túnel de vento. A seção de teste tem 1,8 m de comprimento por 0,50 m de largura (perpendicular à página na Figura 10–132). São feitas as seguintes medidas:

$$\delta_1 = 4{,}2 \text{ cm} \qquad \delta_2 = 7{,}7 \text{ cm} \tag{1}$$

Em ambas as posições o perfil da camada limite se ajusta melhor a uma aproximação da lei da potência um oitavo do que à aproximação padrão da lei da potência um sétimo:

$$\frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8} \quad \text{para } y \le \delta \qquad \frac{u}{U} \cong 1 \quad \text{para } y > \delta \tag{2}$$

Calcule a força total de arrasto do atrito superficial F_D agindo sobre a parede inferior da seção de teste do túnel de vento.



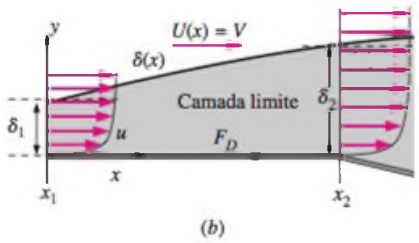


FIGURA 10–132
Camada limite desenvolvendo-se ao longo das paredes do túnel de vento do Exemplo 10–15: (*a*) visualização geral e (*b*) visualização ampliada da parede inferior da seção de teste (a espessura da camada limite está exagerada).

SOLUÇÃO Vamos estimar a força de arrasto do atrito superficial na parede inferior da seção de teste do túnel de vento (entre $x = x_1$ e $x = x_2$).
Propriedades Para o ar a 20°C, $\nu = 1{,}516 \times 10^{-5}$ m²/s e $\rho = 1{,}204$ kg/m³.
Hipóteses 1 O escoamento é permanente na média. **2** As paredes do túnel de vento divergem ligeiramente para garantir que $U(x) = V$ = constante.
Análise Primeiro substituímos a Equação 2 na Equação 10-80 e integramos para encontrar a espessura do momento θ,

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8}\left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8}\right] dy = \frac{4}{45}\delta \tag{3}$$

A equação integral de Kármán se reduz à Equação 10–97 para uma camada limite sobre placa plana. Em termos de tensão de cisalhamento ao longo da parede, a Equação 10–97 é:

$$\tau_w = \frac{1}{2}\rho U^2 C_{f,x} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \tag{4}$$

Integramos a Equação 4 de $x = x_1$ até $x = x_2$ para encontrar a força de arrasto do atrito superficial:

$$F_D = w\int_{x_1}^{x_2} \tau_w \, dx = w\rho U^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\theta}{dx} \, dx = w\rho U^2(\theta_2 - \theta_1) \tag{5}$$

onde w é a largura da parede perpendicular à página na Figura 10–132. Após substituição da Equação 3 na Equação 5 obtemos:

$$F_D = wpU^2 \frac{4}{45}(\delta_2 - \delta_1) \qquad (6)$$

Finalmente, a substituição dos valores numéricos fornecidos na Equação 6 resulta na força de arrasto:

$$F_D = (0{,}50\text{ m})(1{,}204\text{ kg/m}^3)(10{,}0\text{ m/s})^2 \frac{4}{45}(0{,}077 - 0{,}042)\text{ m}\left(\frac{\text{s}^2 \cdot \text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m}}\right) = \mathbf{0{,}19\text{ N}}$$

Discussão Essa é uma força muito pequena, pois a própria unidade newton é uma unidade pequena de força. A equação integral de Kármán seria muito mais difícil de aplicar se a velocidade $U(x)$ do escoamento externo não fosse constante.

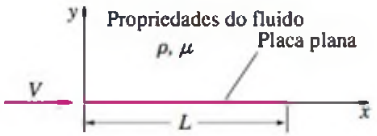


FIGURA 10–133
Escoamento sobre uma placa plana infinitesimalmente fina de comprimento L. Os cálculos CFD foram feitos para Re_L variando de 10^{-1} a 10^5.

Encerramos esse capítulo com alguns resultados esclarecedores produzidos pelos cálculos do software CFD de escoamento bidimensional sobre uma placa plana, infinitesimalmente fina, alinhada com a corrente livre (Figura 10–133). Em todos os casos a placa tem 1 m de comprimento (L = 1 m) e o fluido é o ar com propriedades constantes ρ = 1,23 kg/m^3 e $\mu = 1{,}79 \times 10^{-5}$ kg/m · s. Variamos a velocidade V da corrente livre de maneira que o número de Reynolds no fim da placa ($\text{Re}_L = \rho VL/\mu$) varie desde 10^{-1} (escoamento lento) até 10^5 (escoamento laminar mas pronto para entrar na transição turbulenta). Todos os casos envolvem soluções da equação de Navier-Stokes para escoamento incompressível, permanente laminar geradas por um programa de CFD comercial. Na Figura 10–134, desenhamos o gráfico dos vetores de velocidade para quatro casos de número de Reynolds em três posições x: x = 0 (início da placa), x = 0,5 m (meio da placa) e x = 1 m (fim da placa). Desenhamos o gráfico também das linhas de corrente nas vizinhanças da placa para cada caso.

Na Figura 10–134*a*, Re_L = 0,1 e a *aproximação do escoamento lento* é razoável. O campo de escoamento é aproximadamente simétrico na frente e atrás — típico do escoamento lento sobre corpos simétricos. Observe como o escoamento diverge ao redor da placa como se ela tivesse uma espessura finita. Isso é devido ao grande efeito de deslocamento causado pela viscosidade e pela condição de não-escorregamento. Em resumo, a velocidade do escoamento próximo à placa é tão pequena que o restante do escoamento "enxerga" isso como um bloqueio ao redor do qual o escoamento tem que ser desviado. A *componente y* da velocidade é significativa próximo à frente e à parte de trás da placa. Finalmente, a influência da placa se estende por dezenas de comprimentos da placa em todas as direções no resto do escoamento, que é também típico dos escoamentos lentos.

O número de Reynolds é aumentado por duas ordens de grandeza até Re_L = 10 nos resultados mostrados na Figura 10–134*b*. Esse número de Reynolds é muito alto para ser considerado escoamento lento, mas muito baixo para que a aproximação da camada limite seja apropriada. Observamos algumas das mesmas características do caso de um baixo número de Reynolds, como o grande deslocamento das linhas de corrente e uma *componente y* da velocidade significativa próximo à frente e à parte de trás da placa. No entanto, o efeito do deslocamento não é tão intenso e o escoamento não é mais simétrico na frente e atrás. Estamos vendo os efeitos da *inércia* à medida que o fluido deixa o fim da placa; a inércia varre o fluido na esteira que se forma atrás da placa. A influência da placa sobre o resto do escoamento ainda é grande, mas muito menor para o escoamento com Re_L = 0,1.

Na Figura 10–134*c* estão ilustrados os resultados dos cálculos CFD com Re_L = 1000, um outro aumento de duas ordens de grandeza. Com esse número de Reynolds, os efeitos inerciais estão começando a dominar sobre os efeitos viscosos na maior parte do campo de escoamento; podemos começar a chamar isso de uma *camada limite* (embora bastante espessa). Na Figura 10–135 calculamos a espessura

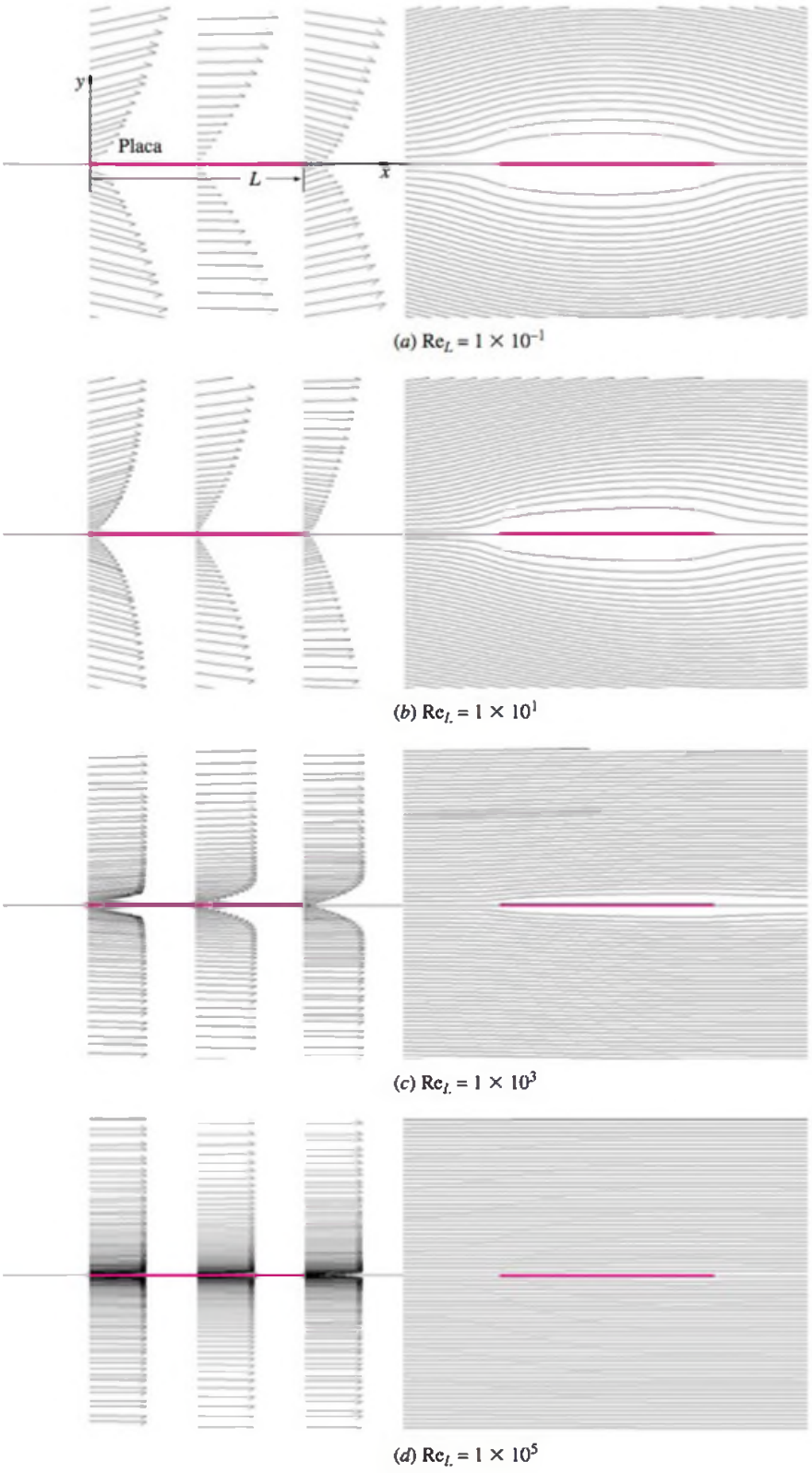


FIGURA 10–134
Cálculos CFD do escoamento laminar permanente, incompressível, bidimensional da esquerda para a direita sobre uma placa plana com 1 m de comprimento e com espessura infinitesimal; os vetores de velocidade são mostrados na coluna da esquerda em três localizações ao longo da placa e as linhas de corrente próximas à placa são mostradas na coluna da direita. Re_L = (*a*) 0,1, (*b*) 10, (*c*) 1000 e (*d*) 100.000; somente a metade superior do campo de escoamento está resolvida — a metade inferior é uma imagem espelhada. O domínio da computação se estende por centenas de comprimentos da placa além do que está mostrado aqui para aproximar as condições de campo distante na "infinita" nas bordas do domínio computacional.

da camada limite usando a expressão laminar dada na Tabela 10–4. O valor previsto de $d(L)$ é aproximadamente 15 por cento do comprimento da placa em $Re_L = 1000$, que é uma concordância razoável com o gráfico do vetor de velocidade em $x = L$ na Figura 10–134*c*. Comparado com os casos de baixo número de Reynolds da Figura 10–134*a* e *b*, o efeito de deslocamento é bastante reduzido e qualquer vestígio de simetria frente-atrás desaparece.

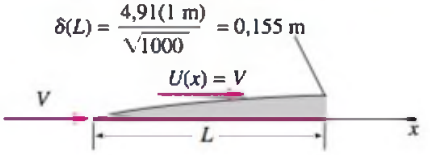


FIGURA 10–135
Cálculo da espessura da camada limite para uma camada limite laminar sobre uma placa plana em $Re_L = 1000$. Esse resultado é comparado com o perfil de velocidades gerado pelo software CFD em $x = L$ mostrado na Figura 10–134*c* com esse mesmo número de Reynolds.

Finalmente, o número de Reynolds é aumentado mais uma vez em duas ordens de grandeza, até $Re_L = 100.000$ nos resultados mostrados na Figura 10–134*d*. Não há nenhuma dúvida sobre a adequação da aproximação da camada limite com esse número de Reynolds tão grande. Os resultados dos cálculos CFD mostram uma camada limite extremamente fina com efeito desprezível sobre o escoamento externo. As linhas de corrente da Figura 10–134*d* são aproximadamente paralelas em todos os pontos, e você precisa examinar muito detalhadamente para ver a fina região da esteira atrás da placa. As linhas de corrente na esteira estão ligeiramente mais separadas do que no restante do escoamento, porque na região da esteira, a velocidade é significativamente menor do que a velocidade da corrente livre. A *componente y* da velocidade é desprezível, como se espera em uma camada limite muito fina, já que a espessura de deslocamento é tão pequena.

Na Figura 10–136 estão os gráficos dos perfis da *componente x* da velocidade para cada um dos quatro números de Reynolds da Figura 10–134, mais alguns casos adicionais com outros valores de Re_L. Usamos uma escala logarítmica para o eixo vertical (y em unidades de m), porque y abrange várias ordens de grandeza. Colocamos a abscissa em forma adimensional como u/U para que as formas dos perfis de velocidade possam ser comparadas. Todos os perfis têm uma forma razoavelmente similar quando colocados no gráfico dessa forma. No entanto, notamos que alguns dos perfis apresentam um **excesso de velocidade** significativo ($u > U$) próximo da parte externa do perfil de velocidade. Isto é um resultado direto do efeito de deslocamento e do efeito da inércia, conforme já discutimos. Em valores muito *baixos* de Re_L ($Re_L \leq 10^0$), onde o efeito do deslocamento é mais destacado, o excesso de velocidade é quase inexistente. Isso pode ser explicado pela falta de inércia nesses baixos números de Reynolds. Sem inércia, não há mecanismo para acelerar o escoamento ao redor da placa; ao contrário, a viscosidade *retarda* o escoamento em todos os pontos nas vizinhanças da placa e a influência da placa estende por centenas de vezes o seu comprimento, além da placa em todas as direções. Por exemplo, em $Re_L = 10^{-1}$, u não chega a 99 por cento de U até $y \cong 320$ m — mais de 300 vezes o comprimento da placa, acima da placa! Com valores *moderados* do número de Reynolds (Re_L entre cerca de 10^1 e 10^4), o efeito do deslocamento é significativo e os termos inerciais não são mais desprezíveis. Por essa razão, o fluido consegue acelerar ao redor da placa e o excesso de velocidade é significativo. Por exemplo, o excesso de velocidade máximo é aproximadamente 5 por cento em $Re_L = 10^2$. Em valores muito *altos* do número de Reynolds ($Re_L \geq 10^5$), os termos inerciais predominam sobre os termos viscosos e a camada limite é tão fina que o efeito do deslocamento é quase desprezível. O pequeno efeito de deslocamento leva a um excesso de velocidade muito pequena. Por exemplo, em $Re_L = 10^6$ o excesso de velocidade máximo é somente aproximadamente 0,4 por cento. Além de $Re_L = 10^6$, o escoamento laminar não é mais possível fisicamente; os cálculos CFD teriam que incluir os efeitos da turbulência.

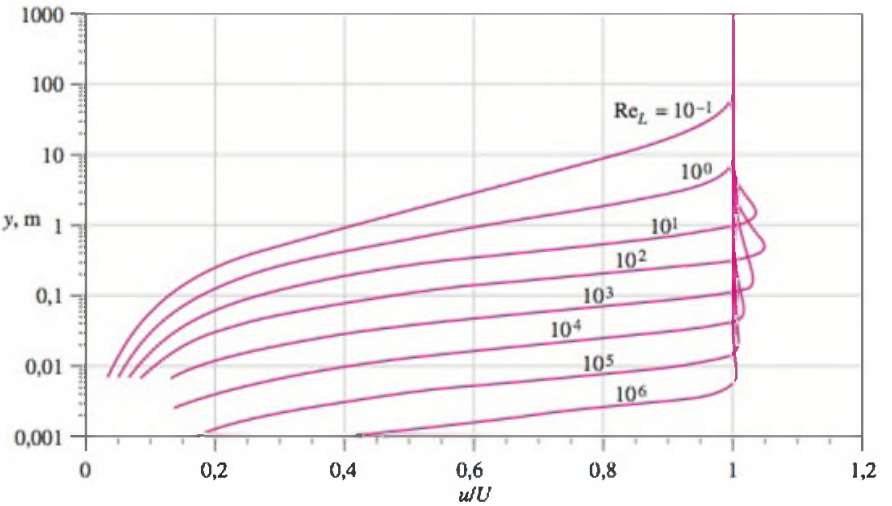


FIGURA 10–136
Cálculos CFD de escoamento laminar permanente, incompressível, bidimensional sobre uma placa plana de espessura infinitesimal: a componente adimensional x da velocidade u/U é colocada no gráfico em relação à distância vertical a partir da placa y. Observa-se um excesso de velocidade notável com números de Reynolds moderados, mas ele desaparece com valores muito baixos e muito altos de Re_L.

RESUMO

A equação de Navier-Stokes é difícil de resolver, e, portanto, são usadas freqüentemente *aproximações* nas análises práticas da engenharia. Porém, como acontece com qualquer aproximação, precisamos ter certeza de que a aproximação é apropriada na região do escoamento que está sendo analisado. Neste capítulo examinamos várias aproximações e mostramos exemplos de situações de escoamento nas quais elas são úteis. Primeiro, colocamos a equação de Navier-Stokes na forma adimensional, dando origem a vários parâmetros adimensionais: o *número de Strouhal* (St), *número de Froude* (Fr), *número de Euler* (Eu) e *número de Reynolds* (Re). Além disso, para escoamentos sem efeitos de superfície livre, a componente da pressão hidrostática devida à gravidade pode ser incorporada em uma *pressão modificada* P′, eliminando efetivamente o termo da gravidade (e o número de Froude) da equação de Navier-Stokes. A equação de Navier-Stokes na forma adimensional com a pressão modificada é:

$$[\mathrm{St}]\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^* = -[\mathrm{Eu}]\vec{\nabla}^* P'^* + \left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^*$$

Quando as variáveis adimensionais (indicadas por *) forem da ordem de grandeza da unidade, a importância relativa de cada termo na equação depende da *grandeza relativa* dos parâmetros adimensionais.

Para regiões de escoamento nas quais o número de Reynolds é muito pequeno, o último termo na equação predomina sobre os temos no lado esquerdo e, portanto, as forças de pressão devem equilibrar as forças viscosas. Se ignorarmos as forças inerciais completamente, fazemos a aproximação do *escoamento lento* e a equação de Navier-Stokes se reduz a:

$$\vec{\nabla} P' \cong \mu \nabla^2 \vec{V}$$

O escoamento lento é estranho às nossas observações diárias, pois nossos corpos, nossos automóveis etc. movem-se a números de Reynolds relativamente altos. A ausência da inércia na aproximação do escoamento lento leva a algumas peculiaridades muito interessantes, conforme discutimos neste capítulo.

Definimos *regiões de escoamento sem viscosidade* como regiões onde os termos viscosos são desprezíveis comparados com os termos inerciais (o oposto do escoamento lento). Nessas regiões de escoamento, a equação de Navier-Stokes se reduz à *equação de Euler*:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla} P'$$

Em regiões de escoamento sem viscosidade, a equação de Euler pode ser manipulada para deduzir a *equação de Bernoulli*, válida ao longo das linhas de corrente do escoamento.

Regiões de escoamento nas quais as partículas individuais de fluido não giram são chamadas de *regiões irrotacionais de escoamento*. Nessas regiões, a vorticidade das partículas de fluido é muito pequena e os termos viscosos na equação de Navier-Stokes podem ser ignorados, deixando-nos novamente com a equação de Euler. Além disso, a equação de Bernoulli torna-se menos restritiva, já que a constante de Bernoulli é a mesma em todos os pontos, não apenas ao longo das linhas de corrente. Uma característica interessante do escoamento irrotacional é que as soluções de escoamentos elementares (*blocos básicos de escoamento*) podem ser somadas para gerar soluções de escoamento mais complicadas, um processo conhecido como *superposição*.

Como a equação de Euler não pode manter a condição de contorno de não-deslizamento em paredes sólidas, a *aproximação da camada limite* é útil como uma ponte entre aproximação da equação de Euler e a solução completa da equação de Navier-Stokes. Consideramos que um *escoamento externo* sem viscosidade e/ou irrotacional existe em todos os pontos exceto em regiões muito finas próximas a paredes sólidas ou dentro de esteiras, jatos e camadas de mistura. A aproximação da camada limite é apropriada para *escoamentos com alto número de Reynolds*. No entanto, reconhecemos que não importa quão grande possa ser o número de Reynolds, os termos viscosos nas equações de Navier-Stokes ainda são importantes dentro da camada limite fina, onde o escoamento é rotacional e viscoso. As *equações da camada limite* para escoamento permanente, incompressível, bidimensional e laminar são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{e} \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Definimos várias medidas de espessura da camada limite, incluindo a *espessura de 99 por cento* δ, a *espessura de deslocamento* δ^* e a *espessura da quantidade de movimento* θ. Essas grandezas podem ser calculadas exatamente para uma camada limite laminar crescendo ao longo de uma placa plana, sob condições de *gradiente de pressão zero*. À medida que o número de Reynolds cresce ao longo da placa, a camada limite tem uma transição para a turbulência; neste capítulo são dadas equações semi-empíricas para uma camada limite turbulenta sobre placa plana.

A *equação integral de Kármán* é válida para camadas limites laminar e turbulenta expostos a gradientes não nulos arbitrários de pressão:

$$\frac{d}{dx}(U^2\theta) + U\frac{dU}{dx}\delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Essa equação é útil para estimativas de propriedades gerais da camada limite, tais como a espessura da camada limite e atrito superficial.

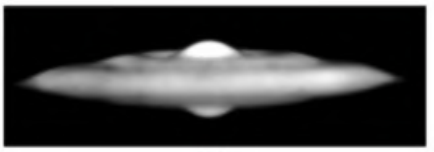
As aproximações apresentadas neste capítulo são aplicadas a muitos problemas práticos de engenharia. A análise do escoamento potencial é útil para cálculos de sustentação de aerofólio (Capítulo 11). Utilizamos a aproximação sem viscosidade na análise de escoamento compressível (Capítulo 12), escoamento em canal aberto (Capítulo 13), e turbomáquinas (Capítulo 14). Nos casos em que essas aproximações não são justificadas, ou onde são necessários cálculos mais precisos, as equações de Navier-Stokes são resolvidas numericamente usando CFD (Capítulo 15).

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

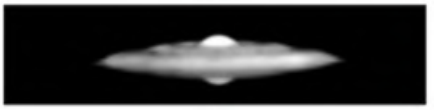
1. G. T. Yates. "How Microorganisms Move through Water". *American Scientist*, 74, p. 358–365, jul-ago, 1986.
2. R. J. Heinsohn e J. M. Cimbala. *Indoor Air Quality Engineering*. Nova Iorque: Marcel-Dekker, 2003.
3. P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. San Diego, CA: Academic Press, 1990.
4. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.
5. F. M. White. *Viscous Fluid Flow*. 2. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1991.
6. R. L. Panton. *Incompressible Flow*. 2. ed. Nova Iorque: Wiley, 1996.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Formação de Gotículas

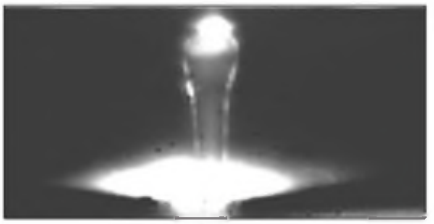
Autores Convidados: James A. Liburdy and Brian Daniels, Oregon State University



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA 10–137
A formação de gotículas começa quando uma superfície se torna instável a um pulso de pressão. A figura mostra superfícies da água em (*a*) Um orifício de 800 micra perturbado por um pulso de 5000 Hz e (*b*) Um orifício de 1200 micra perturbado por um pulso de 8100 Hz. A reflexão da superfície faz a imagem aparecer como se a onda superficial fosse tanto para cima quanto para baixo. A onda é axissimétrica, pelo menos para pulsos de pressão de pequena amplitude. Quanto mais alta a freqüência, menor é o comprimento de onda e menor é o nó central. O tamanho do nó central define o diâmetro do jato líquido, que então se desfaz em uma gotícula. (*c*) Formação de gotículas a partir de um pulso de pressão de alta freqüência ejetado de um orifício com diâmetro de 50 micra. A corrente líquida central produz a gotícula e tem somente 25% do diâmetro do orifício.
No caso ideal, forma-se apenas uma gotícula, mas geralmente são geradas gotículas "satélite" indesejadas juntamente com a gotícula principal.
Cortesia de James A. Liburdy e Brian Daniels, Oregon State University. Usada com permissão.

A formação de gotículas é uma interação complexa de forças inerciais, de tensão superficial e forças viscosas. O desprendimento real de uma gota a partir de uma corrente de líquido, embora estudada por quase 200 anos, ainda não foi totalmente explicada. Gotículas sob demanda ou *Droplet-on Demand* (DoD) é usada para aplicações como impressão a jato de tinta e análise de DNA em dispositivos de microescala "*lab-on-a-chip*". DoD requer tamanhos de gotículas muito uniformes, velocidades e trajetórias controladas e uma alta taxa de formação seqüencial de gotículas. Por exemplo, na impressão a jato de tinta, o tamanho típico de uma gotícula é de 25 a 50 micra (dificilmente visível a olho nu), as velocidades são da ordem de 10 m/s e a taxa de formação das gotículas pode ser maior que 20.000 por segundo.

O método mais comum para formação de gotículas envolve a aceleração de uma corrente de líquido, deixando depois a tensão superficial induzir uma instabilidade na corrente, que se desfaz em gotículas individuais. Em 1879, Lord Rayleigh desenvolveu uma teoria clássica para a instabilidade associada com esse desprendimento; sua teoria ainda é muito utilizada hoje para definir condições de desprendimento ou formação de gotículas. Uma pequena perturbação na superfície da corrente líquida estabelece um padrão de ondulação ao longo do comprimento da corrente, o que faz a corrente se dividir em gotículas cujo tamanho é determinado pelo raio da corrente e pela tensão superficial do líquido. No entanto, a maioria dos sistemas DoD depende da aceleração da corrente com funções forçantes dependentes do tempo na forma de uma onda de pressão exercida na entrada de um bico. Se a onda de pressão for muito rápida, os efeitos viscosos nas paredes serão desprezíveis, e a aproximação do escoamento potencial pode ser usada para prever o escoamento.

Dois parâmetros adimensionais importantes em DoD são o *número de Ohnesorge* $\mathrm{Oh} = \mu/(\rho\sigma_s a)^{1/2}$ e o *número de Weber* $\mathrm{We} = \rho V a/\sigma_s$, onde a é o raio da gotícula, σ_s é a tensão superficial e V é a velocidade. O *número de Ohnesorge* determina quando as forças viscosas são importantes em relação às forças de tensão superficial. Além disso, a pressão adimensional necessária para formar uma corrente fluida instável, $P_c = Pa/\sigma_s$, é chamada de *pressão capilar* e a escala capilar de tempo associada para que as gotículas se formem é $t_c = (\rho a/\sigma_s)^{1/2}$. Quando Oh é muito pequeno, a aproximação do escoamento potencial é aplicável e a forma da superfície é controlada por um equilíbrio entre a tensão superficial e a aceleração do fluido.

A Figura 10–137a e *b* mostra exemplo de superfícies de escoamento emergindo de um bocal. A forma da superfície depende da amplitude da pressão e da escala de tempo da perturbação e pode ser estimada usando a aproximação do escoamento potencial. Quando a pressão é suficientemente grande e o pulso bem rápido, a superfície fica ondulada e o centro forma uma torrente de jato que eventualmente se desfaz em uma gotícula (Figura 10–137c). Uma área a pesquisar é como controlar o tamanho e a velocidade dessas gotículas, produzindo milhares delas por segundo.

Referências

Rayleigh, Lord. "On the Instability of Jets", *Proc. London Math. Soc.*, 10, p. 4-13, 1879.

Daniels, B. J. e Liburdy, J. A. "Oscillating Free-Surface Displacement in an Orifice Leading to Droplet Formation", *J. Fluids Engr.*, 10, p. 7-8, 2004.

PROBLEMAS*

Problemas Gerais e Introdutórios, Pressão Modificada Estática dos Fluidos

10–1C Explique a diferença entre uma "*solução exata*" da equação de Navier-Stokes (discutida no Capítulo 9) e uma *solução aproximada* (discutida neste capítulo).

10–2C Um ventilador do tipo caixa está no chão em uma sala muito grande (Figura P10–2C). Identifique as as regiões do campo de escoamento que podem ser aproximadas como estáticas. Identifique as regiões nas quais a aproximação irrotacional pode ser apropriada. Identifique as regiões onde a aproximação da camada limite pode ser apropriada. Finalmente, identifique as regiões nas quais a equação completa de Navier-Stokes provavelmente precisa ser resolvida (isto é, regiões onde nenhuma aproximação é adequada).

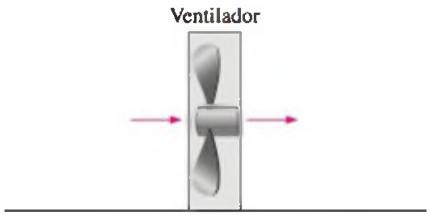


FIGURA P10–2C

10–3C Discuta como a forma *adimensional* da equação de Navier-Stokes é útil para obter soluções aproximadas. Dê um exemplo.

10–4C Qual é o maior perigo associado com uma solução aproximada da equação de Navier-Stokes? Dê um exemplo que seja diferente daqueles dados neste capítulo.

10–5C Que critério você pode usar para determinar se uma aproximação da equação de Navier-Stokes é apropriada ou não? Explique.

10–6C Na equação de Navier-Stokes na forma adimensional incompressível (Equação 10–6), há quatro parâmetros adimensionais. Cite cada um deles, explique seu significado físico (por exemplo, a relação entre as forças de pressão e forças viscosas) e discuta o que ele significa fisicamente, quando o parâmetro é muito pequeno ou muito grande.

10–7C Qual é o critério mais importante para o uso da *pressão modificada* P' em lugar da pressão termodinâmica P em uma solução da equação de Navier-Stokes?

10–8C Qual é o parâmetro adimensional na equação de Navier-Stokes na forma adimensional que é eliminado pelo uso da pressão modificada em lugar da pressão verdadeira? Explique.

10–9 Considere o escoamento da água através de um pequeno furo no fundo de um grande tanque cilíndrico (Figura P10–9). O escoamento é laminar em todos os pontos. O diâmetro d do jato é muito menor do que o diâmetro D do tanque, mas D é da mesma ordem de grandeza da altura H do tanque. Carrie afirma que ela pode usar a aproximação da estática dos fluidos em todos os pontos no tanque exceto perto do furo, mas ela quer confirmar essa aproximação matematicamente. Ela considera a velocidade característica no tanque como $V = V_{\text{tanque}}$. O comprimento característico é a altura H do tanque, o tempo característico é o tempo necessário para drenar o tanque t_{drenagem} e a diferença de pressão de referência é ρgH (diferença de pressão entre a superfície da água e o fundo do tanque, usando a estática dos fluidos). Substitua todos esses valores de escala na equação de Navier-Stokes na forma adimensional incompressível (Equação 10–6) e verifique por uma análise de ordem de grandeza que para $d << D$, só permanecem os termos de pressão e gravidade. Em particular, compare a ordem de grandeza de cada termo com cada um dos quatro parâmetros adimensionais St, Eu, Fr e Re. (Sugestão: $V_{\text{jato}} \sim \sqrt{gH}$.) Sob qual critério, a aproximação de Carrie é adequada?

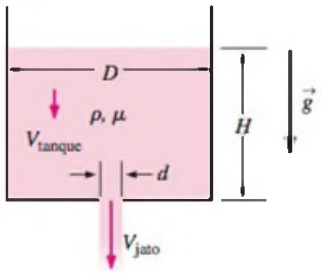


FIGURA P10–9

10–10 Considere escoamento Poiseuille permanente, incompressível, laminar e totalmente desenvolvido entre duas placas paralelas horizontais (os perfis de velocidade e pressão são mostrados na Figura P10–10). Em alguma posição horizontal $x = x_1$, a pressão varia linearmente com a distância vertical z, conforme mostra a figura. Escolha um plano de referência apropriado ($z = 0$), desenhe o perfil da *pressão modificada* ao longo da fatia e escureça a região que representa a componente de pressão hidrostática. Discuta.

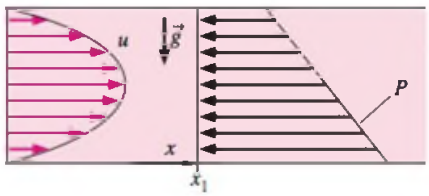


FIGURA P10–10

10–11 Considere o escoamento Poiseuille planar do Problema 10–10. Discuta como a pressão modificada varia com a distância x a jusante. Em outras palavras, a pressão modificada aumenta, permanece a mesma ou diminui com x? Se P' aumenta ou diminui com x, como isso acontece (por exemplo, linearmente, quadraticamente, exponencialmente)? Use um esboço para ilustrar a sua resposta.

10–12 No Capítulo 9 (Exemplo 9–15), nós geramos uma solução "exata" da equação de Navier-Stokes para escoamento Couette totalmente desenvolvido entre duas placas planas horizontais (Figura P10–12), com a gravidade agindo na direção negativa de z (para dentro da página da Figura P10–12). Usamos a pressão real nesse exemplo. Repita a solução para a *componente* x da velocidade u e pressão P, mas use a *pressão modificada* nas suas

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

equações. A pressão é P_0 em $z = 0$. Mostre que você obtém o mesmo resultado de antes. Discuta.
Respostas: $u = Vy/h$, $P = P_0 - \rho gz$

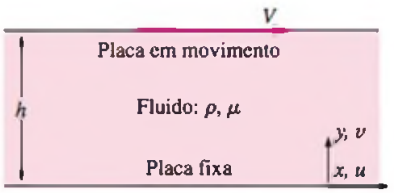


FIGURA P10–12

10–13 Escreva as três componentes da equação de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas em termos da pressão modificada. Insira a definição de pressão modificada e mostre que as componentes x, y, e z são idênticas àquelas em termos de pressão regular. Qual é a vantagem do uso da pressão modificada?

10–14 Um campo de escoamento é simulado por um programa de Dinâmica dos Fluidos Computacional que usa a pressão modificada em seus cálculos. Na Figura P10–14 está um perfil da pressão modificada ao longo de uma fatia vertical através do escoamento. A pressão real é conhecida em um ponto médio na fatia, conforme indica a Figura P10–14. Desenhe o perfil da pressão real ao longo da fatia vertical. Discuta.

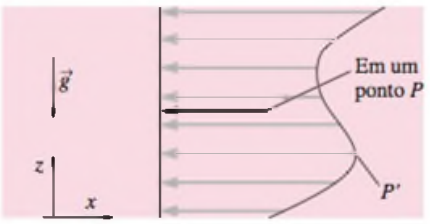


FIGURA P10–14

10–15 No Exemplo 9-18 resolvemos a equação de Navier-Stokes para escoamento laminar permanente, completamente desenvolvido em um tubo redondo (escoamento de Poiseuille), desprezando a influência da gravidade. Agora, acrescente novamente o efeito da gravidade resolvendo novamente esse mesmo problema, mas use a pressão modificada P' em lugar da pressão real P. Especificamente, calcule o campo real de pressão e o campo de velocidade. Suponha que o tubo é horizontal e que o plano de referência $z = 0$ esteja a alguma distância arbitrária abaixo do tubo. A pressão real no topo do tubo é maior, igual, ou menor do que aquela na base do tubo? Discuta.

Escoamento Lento

10–16C Escreva uma descrição de uma só palavra para cada um dos cinco termos na equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}}_{\text{II}} = \underbrace{-\vec{\nabla}P}_{\text{III}} + \underbrace{\rho\vec{g}}_{\text{IV}} + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{V}}_{\text{V}}$$

Quando é usada a aproximação do escoamento lento, somente dois dos cinco termos permanecem. Quais são os dois termos que permanecem e qual é seu significado?

10–17 A viscosidade do mel de trevo está listada em função da temperatura na Tabela P10–17. A gravidade específica do mel é aproximadamente 1,42 e não é uma função que dependa fortemente da temperatura. O mel é pressionado através de um pequeno furo de diâmetro $D = 4{,}0$ mm na tampa de uma jarra de mel virada para baixo. O ambiente e o mel estão à temperatura $T = 20°C$. Estime a velocidade máxima do mel através do furo, de maneira que o escoamento possa ser aproximado como escoamento lento. (Suponha que Re deve ser menos de 0,1 para que a aproximação do escoamento lento seja adequada.) Repita o seu cálculo se a temperatura for 40°C. Discuta. *Respostas:* 0,33 m/s, 0,035 m/s

TABELA P10–17

Viscosidade do mel de trevo com conteúdo de umidade de 16%

T, °C	μ, poise*
14	600
20	190
30	65
40	20
50	10
70	3

* Poise = g/cm · s.
Dados fornecidos por Airborne Honey, Ltd., *www.airborne.co.nz.*

10–18 Para cada caso, calcule um número de Reynolds apropriado e indique se o escoamento pode ser aproximado pelas equações de escoamento lento. (*a*) Um microorganismo com diâmetro de 5,0 μm nada na água à temperatura ambiente com a velocidade de 0,2 mm/s. (*b*) Óleo de motor a 140°C flui através de um pequeno espaço em um mancal lubrificado do motor. O espaço é de 0,0012 mm e a velocidade característica é 20,0 m/s. (*c*) Uma gotícula de neblina com diâmetro de 10 μm cai através do ar a 30°C a uma velocidade de 3,0 mm/s.

10–19 Estime a velocidade e o número de Reynolds do esperma mostrado na Figura 10–10. Esse microorganismo está nadando sob condições de escoamento lento? Suponha que ele está nadando em água à temperatura ambiente.

10–20 Um bom nadador nada 100 m em aproximadamente 1 minuto. Se o corpo do nadador tiver 1,8 m de comprimento, quantos comprimentos equivalentes ao seu corpo ele nada por segundo? Repita o cálculo para o esperma da Figura 10–10. Em outras palavras, quantos comprimentos de corpo o esperma nada por segundo? Use para o cálculo, o comprimento total do corpo do esperma, não apenas aquele da cabeça. Compare os dois resultados e discuta.

10–21 Uma gota de água em uma nuvem de chuva tem um diâmetro $D = 30$ μm (Figura P10–21). A temperatura do ar é 25°C e sua pressão é a pressão atmosférica padrão. Com que rapidez o ar tem que se mover verticalmente para que a gota permaneça suspensa no ar? *Respostas:* 0,0264 m/s

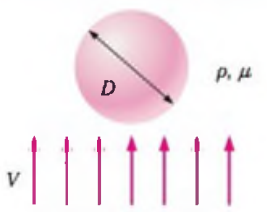


FIGURA P10–21

10–22 Discuta por que a densidade do fluido não influencia o arrasto aerodinâmico em uma partícula movendo-se no regime de escoamento lento.

10–23 Um *mancal de bloco deslizante* (Figura P10–23) é encontrado frequentemente em problemas de lubrificação. O óleo flui entre dois blocos; o bloco superior é permanente, o inferior está se movendo neste caso. O desenho não está em escala; na realidade, $h << L$. A estreita fenda entre os blocos converge quando x aumenta. Especificamente, a altura da folga h diminui linearmente de h_0 em $x = 0$ até h_L em $x = L$. Geralmente, a altura característica da fenda h_0 é muito menor do que o comprimento axial característico L. Este problema é mais complicado do que um simples escoamento Couette entre placas paralelas devido à mudança de altura do espaçamento. Em particular, a componente da velocidade axial u é uma função de x e de y e a pressão P varia de forma não linear desde $P = P_0$ em $x = 0$ até $P = P_L$ em $x = L$. ($\partial P/\partial x$ não é constante). As forças de gravidade são desprezíveis neste campo de escoamento, que aproximamos como bidimensional, permanente e laminar. Na verdade, como h é muito pequeno e o óleo é muito viscoso, as aproximações do escoamento lento são usadas na análise desses problemas de lubrificação. Seja L o comprimento característico associado com x, seja h_0 ($x \sim L$ e $y \sim h_0$) aquele associado com y. Seja $u \sim V$. Supondo escoamento lento, gere uma escala característica para a diferença de pressão $\Delta P = P - P_0$ em termos de L, h_0, μ, e V. *Resposta:* $\mu VL/h_0^2$

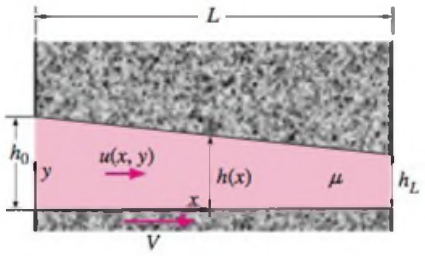


FIGURA P10–23

10–24 Considere o mancal de bloco deslizante do Problema 10–23. (*a*) Gere uma escala característica para v, a *componente y* da velocidade. (*b*) Faça uma análise da ordem de grandeza para comparar os termos inerciais com os termos de pressão e viscosidade na equação do momento na direção x. Mostre que quando o espaçamento é pequeno ($h_0 << L$) e o número de Reynolds é pequeno ($\mathrm{Re} = \rho V h_0/\mu << 1$), a aproximação do escoamento lento é apropriada. (*c*) Mostre que quando $h_0 << L$, as equações de escoamento lento podem ainda ser apropriadas mesmo que o número de Reynolds ($\mathrm{Re} = \rho V h_0/\mu$) não seja menor do que 1. Explique. *Resposta:* (a) Vh_0/L

10–25 Considere novamente o mancal de bloco deslizante do Problema 10–23. Faça uma análise de ordem de grandeza na equação do momento y e escreva a forma final da equação do momento y. (Sugestão: Você precisará dos resultados dos Problemas 10–23 e 10–24.) O que você pode dizer sobre o gradiente de pressão $\partial P/\partial y$?

10–26 Considere novamente o mancal de bloco deslizante do Problema 10–23. (*a*) Liste as condições de contorno apropriadas sobre u. (*b*) Resolva a aproximação do escoamento lento da equação do momento na direção x para obter a expressão para u em função de y (e indiretamente como função de x através de h e dP/dx, que são funções de x). Você pode supor que P *não* seja uma função de y. A sua expressão final deverá ser escrita como $u(x, y) = f(y, h, dP/dx, V \text{ e } \mu)$. Especifique as duas componentes distintas do perfil de velocidade no seu resultado. (*c*) Coloque a sua expressão na forma adimensional para u usando essas escalas apropriadas: $x^* = x/L$, $y^* = y/h_0$, $h^* = h/h_0$, $u^* = u/V$ e $P^* = (P - P_0)h_0^2/\mu VL$.

10–27 Considere o mancal de bloco deslizante da Figura P10–27. O desenho não está em escala; na realidade, $h << L$. Esse caso difere o do Problema 10–23 pelo fato de que aqui $h(x)$ não é linear; em vez disso, h é alguma função de x arbitrária, conhecida. Escreva uma expressão para a componente u da velocidade axial em função de y, h, dP/dx, V e μ. Discuta quaisquer diferenças entre este resultado e o do Problema 10–26.

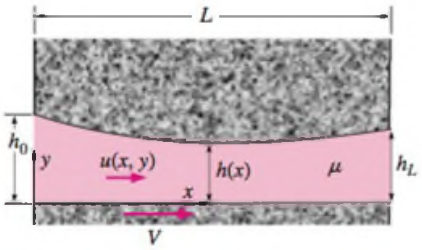


FIGURA P10–27

10–28 Para o mancal de bloco deslizante do Problema 10–23, use a equação da continuidade, condições de contorno apropriadas e o teorema unidimensional de Leibnitz (veja o Capítulo 4) para mostrar que:

$$\frac{d}{dx}\int_0^h u\,dy = 0.$$

10–29 Combine os resultados dos Problemas 10–26 e 10–28 para mostrar que para um mancal de bloco deslizante bidimensional, o gradiente de pressão dP/dx está relacionado com a altura h do espaçamento por $\dfrac{d}{dx}\left(h^3\dfrac{dP}{dx}\right) = 6\mu U\dfrac{dh}{dx}$. Esta é a forma permanente, bidimensional da **equação de Reynolds** mais geral para lubrificação (Panton, 1996).

10–30 Considere o escoamento através de um mancal de bloco deslizante bidimensional, com altura de espaçamento decrescente de h_0 a h_L (Figura P10–23), isto é, $h = h_0 + \alpha x$, onde α é a convergência adimensional do espaçamento, $\alpha = (h_L - h_0)/L$. Notamos que $\tan\alpha \cong \alpha$ para valores muito pequenos de α. Assim, α é aproximadamente o ângulo de convergência da placa superior na Figura P10–23 (α é *negativo* para esse caso). Suponha que o óleo esteja exposto à pressão atmosférica em ambas as extremidades do bloco deslizante, de modo que $P = P_0 = P_{atm}$ em $x = 0$ e $P = P_L = P_{atm}$ em $x = L$. Integre a equação de Reynolds (Problema 10–29) para esse mancal de bloco deslizante para gerar uma expressão para P em função de x.

10–31 Estime a velocidade à qual você precisaria nadar na água à temperatura ambiente para estar em regime de escoamento lento. (Uma estimativa da ordem de grandeza será suficiente.) Discuta.

Escoamento sem Viscosidade

10–32C De que maneira a equação de Euler é uma aproximação de uma equação de Navier-Stokes? Onde, em um campo de escoamento, a equação de Euler é uma aproximação apropriada?

10–33C Qual é a principal diferença entre a equação de Bernoulli permanente, incompressível para regiões irrotacionais de escoamento e a equação de Bernoulli permanente incompressível para regiões de escoamento irrotacional mas sem viscosidade?

10–34 Na derivação de uma equação de Bernoulli para regiões de escoamento sem viscosidade, usamos a identidade vetorial:

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})$$

Mostre que essa identidade vetorial é satisfeita para o caso do vetor de velocidade $\vec{V}$ em coordenadas cartesianas, isto é, $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$. Para ter pontuação máxima, expanda cada termo o máximo possível e mostre todo o seu trabalho.

10–35 Na dedução da equação de Bernoulli para regiões de escoamento sem viscosidade, reescrevemos a equação de Euler permanente, incompressível em uma forma mostrando que o gradiente de três termos escalares é igual ao produto vetorial do vetor de velocidade com o vetor de vorticidade, observando que z está apontando verticalmente para cima:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) = \vec{V}\times\vec{\zeta}$$

Empregamos então alguns argumentos sobre a direção do vetor gradiente e a direção do produto vetorial de dois vetores, para mostrar que a soma dos três termos escalares deve ser constante ao longo de uma linha de corrente. Nesse problema, você usará uma abordagem diferente para obter o mesmo resultado. Isto é, considere o produto escalar de ambos os lados da equação de Euler com o vetor de velocidade $\vec{V}$ e aplique algumas regras fundamentais do produto escalar de dois vetores. Desenhos podem ajudar.

10–36 Escreva as componentes da equação de Euler desenvolvendo-as tanto quanto possível em coordenadas cartesianas (x, y, z) e (u, v, w). Suponha que a gravidade age em alguma direção arbitrária.

10–37 Escreva as componentes da equação de Euler desenvolvendo-as tanto quanto possível em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e (u_r, u_θ, u_z). Suponha que a gravidade age em alguma direção arbitrária.

10–38 Água à temperatura $T = 20°C$ gira como um corpo rígido em relação ao eixo z em um recipiente cilíndrico giratório (Figura P10–38). Não há tensões viscosas pois a água move-se como um corpo sólido; portanto a equação de Euler é adequada. (Desprezamos as tensões viscosas causadas pelo ar agindo sobre a superfície da água.) Integre a equação de Euler para gerar uma expressão para a pressão em função de r e z em todos os pontos na água. Escreva uma equação para a forma da superfície livre ($z_{\text{superfície}}$ em função de r). (Sugestão: $P = P_{\text{atm}}$ em todos os pontos na superfície livre. O escoamento é rotacionalmente simétrico em relação ao eixo z.) *Resposta:* $z_{\text{superfície}} = \omega^2 r^2/2g$

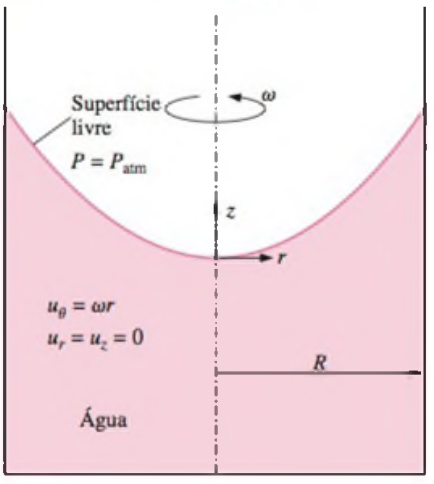


FIGURA P10–38

10–39 Repita o Problema 10–38, mas supondo que o fluido em rotação é óleo de motor a 60°C. Discuta.

10–40 Usando os resultados do Problema 10–38, calcule a constante de Bernoulli como uma função da coordenada radial r. *Resposta:* $\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \omega^2 r^2$

10–41 Considere o escoamento de um fluido permanente, incompressível, bidimensional em um duto convergente com paredes retas (Figura P10–41). A vazão em volume é $\dot{V}$ e a velocidade ocorre somente na direção radial, com u_r sendo uma função apenas de r. Seja b a largura perpendicular à página. Na entrada do duto convergente ($r = R$), $u_r = u_r(R)$.

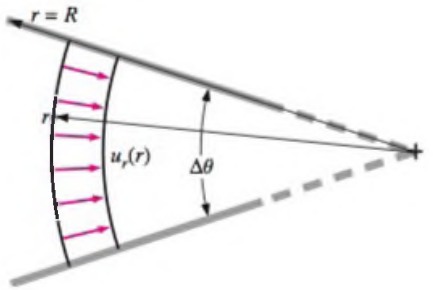


FIGURA P10–41

Considerando escoamento sem viscosidade em todos os pontos, gere uma expressão para u_r como uma função de r, R e $u_r(R)$ *somente*. Faça um desenho de como seria o perfil de velocidade no raio r se o atrito não fosse desprezado (isto é, um escoamento real) com a mesma vazão em volume.

10–42 Em uma certa região de escoamento permanente, bidimensional, incompressível, o campo de velocidade é dado por $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx)\vec{j}$. Mostre que essa região do escoamento pode ser considerada como sem viscosidade.

Escoamento (Potencial) Irrotacional

10–43C Que propriedades do escoamento determinam se uma região do escoamento é rotacional ou irrotacional? Discuta.

10–44 Em uma região irrotacional de escoamento, podemos escrever o vetor de velocidade como o gradiente da função potencial de velocidade escalar, $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$. As componentes de $\vec{V}$ em coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) e (u_r, u_u, u_z), são

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Do Capítulo 9, podemos também escrever as componentes do vetor de vorticidade em coordenadas cilíndricas como

$$\zeta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z},\quad \zeta_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r},\quad \text{e}\quad \zeta_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}.$$

Substitua as componentes da velocidade no lugar das componentes da vorticidade para mostrar que as três componentes do vetor vorticidade são realmente zero em uma região irrotacional do escoamento.

10–45 Substitua as componentes do vetor de velocidade dadas no Problema 10–44 em uma equação de Laplace em coordenadas

cilíndricas. Mostrando todos os seus conhecimentos de álgebra, verifique que a equação de Laplace é válida em uma região irrotacional de escoamento.

10–46 Considere o campo de escoamento produzido por um secador de cabelo (Figura P10–46). Identifique regiões desse campo de escoamento que podem ser aproximadas como irrotacional e aquelas para as quais a aproximação do escoamento irrotacional não seria apropriada (regiões de escoamento rotacional).

FIGURA P10–46

10–47 Escreva a equação de Bernoulli e discuta como ela difere entre uma região de escoamento sem viscosidade, rotacional e uma região de escoamento viscoso irrotacional. Qual dos casos é mais restritivo (com relação à equação de Bernoulli)?

10–48 Na Figura P10–48 estão desenhadas linhas de corrente em um campo de escoamento permanente, bidimensional, incompressível. O escoamento na região mostrada é também aproximado como irrotacional. Faça um desenho mostrando como seriam algumas curvas equipotenciais (curvas de função potencial constante) nesse campo de escoamento. Explique como você chegou às curvas que desenhou.

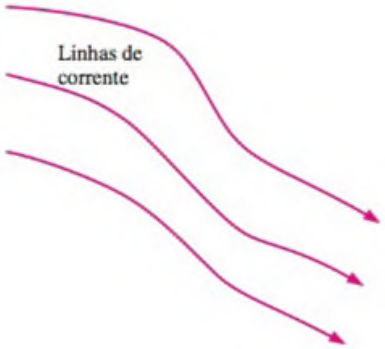


FIGURA P10–48

10–49 Em uma região irrotacional do escoamento, o campo de velocidade pode ser calculado sem necessidade da equação do momento resolvendo a equação de Laplace para a função potencial de velocidade ϕ e depois encontrando as componentes de $\vec{V}$ a partir da definição de ϕ, isto é, $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$. Discuta o papel desempenhado pela equação do momento em uma região irrotacional do escoamento.

10–50 Considere o seguinte campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível: $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx)\vec{j}$. Esse campo de escoamento é irrotacional? Se for, gere uma expressão para função potencial de velocidade. *Respostas:* Sim, $a(x^2 - y^2)/2 + bx + cy$ + constante

10–51 Um detalhe sutil, muitas vezes esquecido pelos estudantes de mecânica dos fluidos (e até mesmo pelos seus professores!), é que uma região (potencial) de escoamento irrotacional *não* é a mesma coisa que uma região de escoamento sem viscosidade (Figura P10–51). Discuta as diferenças e semelhanças entre essas duas aproximações. Dê um exemplo de cada uma.

FIGURA P10–51

10–52 Considere um campo de velocidade permanente, bidimensional, incompressível, irrotacional especificado por sua função potencial de velocidade, $\phi = 5(x^2 - y^2) + 2x - 4y$. (*a*) Calcule as componentes da velocidade u e v. (*b*) Certifique-se de que o campo de velocidade seja irrotacional na região na qual ϕ se aplica. (*c*) Gere uma expressão para a função de corrente nessa região.

10–53 Considere uma região irrotacional de escoamento planar no plano $r\theta$. Mostre que a função de corrente ψ satisfaz a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas.

10–54 Neste capítulo, descrevemos o escoamento irrotacional axissimétrico em termos de coordenadas cilíndricas r e z e componentes de velocidade u_r e u_z. Surge uma descrição alternativa do escoamento axissimétrico se usarmos *coordenadas polares esféricas* e escolhermos o eixo x como o eixo de simetria. As duas componentes direcionais relevantes são agora r e u e suas componentes de velocidade correspondentes são u_r e u_θ. Nesse sistema de coordenadas, a localização radial r é a distância da origem e o ângulo polar θ é o ângulo de inclinação entre o vetor radial e o eixo de simetria rotacional (o eixo x), conforme está representado na Figura P10–54; é mostrada uma fatia definindo o plano $r\theta$. Este é um tipo de escoamento bidimensional porque há somente duas variáveis espaciais independentes, r e θ. Em outras palavras, uma solução dos campos de velocidade e pressão em *qualquer* plano $r\theta$ é suficiente para caracterizar toda a região de escoamento irrotacional axissimétrico. Escreva a equação de Laplace para ϕ em coordenadas polares esféricas, válida em regiões de escoamento irrotacional axissimétrico. (Sugestão: Você pode consultar um livro-texto sobre análise vetorial.)

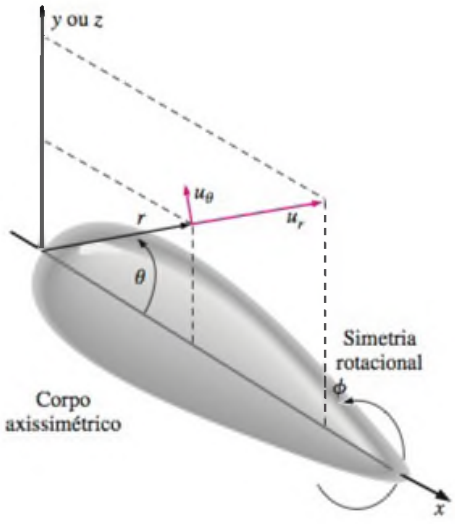


FIGURA P10–54

10–55 Mostre que a equação da continuidade incompressível para escoamento axissimétrico em coordenadas polares esféricas, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \operatorname{sen}\theta) = 0$, é de forma idêntica, satisfeita por uma função de corrente definida como $u_r = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ e $u_\theta = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}$, desde que ψ seja uma função suave de r e θ.

10–56 Considere uma corrente uniforme de intensidade V inclinada com um ângulo a (Figura P10–56). Supondo escoamento irrotacional incompressível planar, determine a função potencial de velocidade e a função de corrente. Mostre todo o seu trabalho.
Respostas $\phi = Vx \cos \alpha + Vy \operatorname{sen} \alpha$, $\psi = Vy \cos \alpha - Vx \operatorname{sen} \alpha$

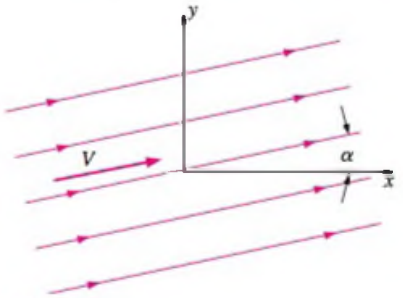


FIGURA P10–56

10–57 Considere uma linha de fonte irrotacional de intensidade $\dot{V}/L$ no plano xy ou $r\theta$. As componentes da velocidade são

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \text{ e } u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

Neste capítulo, começamos com a equação para u_θ para gerar expressões para a função potencial de velocidade e a função de corrente para a linha de fonte. Repita a análise, exceto começando com a equação para u_r, mostrando todo o seu trabalho.

10–58 Considere uma linha de vórtice irrotacional de intensidade Γ no plano xy ou $r\theta$. As componentes da velocidade

são $u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$ e $u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$.

Gere expressões para a função potencial de velocidade e de função corrente para a linha de vórtice, mostrando todo o seu trabalho.

10–59 A função de corrente para o escoamento bidimensional permanente, incompressível sobre um cilindro circular de raio a e velocidade da corrente livre V_∞ é $\psi = V_\infty \operatorname{sen}\theta(r - a^2/r)$ para o caso no qual o campo de escoamento é aproximado como irrotacional (Figura P10–59). Gere uma expressão para função potencial de velocidade f para esse escoamento como uma função de r e θ e parâmetros V_∞ e a.

10–60 O que é o paradoxo de D'Alembert? Por que ele é um paradoxo?

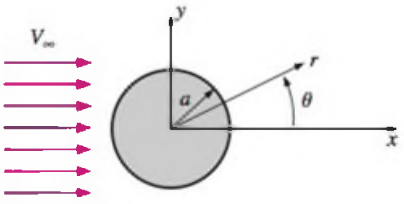


FIGURA P10–60

Camadas Limites

10–61C Neste capítulo, afirmamos que a aproximação de camada limite estabelece uma "ponte" entre a equação de Euler e a equação de Navier-Stokes. Explique.

10–62C Para cada afirmativa, decida se ela é verdadeira ou falsa e discuta a sua resposta brevemente. Essas afirmativas se referem à camada limite laminar sobre uma placa plana (Figura P10–63C).

(*a*) Em uma dada posição x, se o número de Reynolds fosse aumentado, a espessura da camada limite também aumentaria.

(*b*) À medida que a velocidade do escoamento externo aumenta, aumenta também a espessura da camada limite.

(*c*) À medida que a viscosidade do fluido aumenta, aumenta também a espessura da camada limite.

(*d*) À medida que a densidade do fluido aumenta, aumenta também a espessura da camada limite.

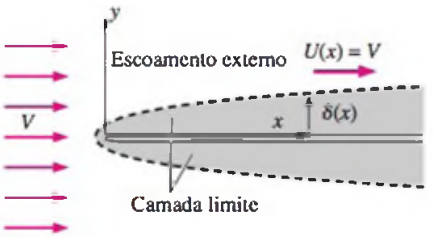


FIGURA P10–62C

10–63C Normalmente pensamos nas camadas limite como se elas estivessem ocorrendo ao longo de paredes sólidas. No entanto, há outras situações de escoamento nas quais a aproximação da camada limite também é apropriada. Cite três desses escoamentos e explique por que a aproximação da camada limite é apropriada.

10–64C A camada limite laminar que se desenvolve ao longo de uma placa plana está desenhada na Figura P10–64C. São mostrados também vários perfis de velocidade e espessuras $\delta(x)$ de camada limite. Desenhe várias linhas de corrente nesse campo de escoamento. A curva representando $\delta(x)$ é uma linha de corrente?

10–65C O que é um *fio de disparo*, e qual é a sua finalidade?

10–66 Ar a 30°C flui a uma velocidade uniforme de 25,0 m/s ao longo de uma placa plana e lisa. Calcule a posição x aproximada ao longo da placa onde a camada limite começa o processo de transição para a turbulência. Em que posição aproximada x ao longo da placa, a camada limite tende a se tornar totalmente turbulenta?
Respostas: 6 a 7 cm, 2 m

10–67 O ar flui paralelo a uma placa de limite de velocidade em uma rodovia à velocidade V = 5,0 m/s. A temperatura do ar é 25°C e a largura W da placa paralela à direção do escoamento é 0,45 m. A camada limite na placa é laminar, turbulenta ou de transição?

10–68 A pressão estática P é medida em duas posições ao longo da parede de uma camada limite laminar (Figura P10–68). As pressões medidas são P_1 e P_2 e a distância entre as tomadas de pressão é pequena comparada com a dimensão característica do corpo ($\Delta x = x_2 - x_1 \ll L$). A velocidade do escoamento externo acima da camada limite no ponto 1 é U_1. A densidade e a viscosidade do fluido são ρ e μ, respectivamente. Gere uma expressão aproximada para U_2, a velocidade do escoamento externo acima da camada limite no ponto 2, em termos de P_1, P_2, Δx, U_1, ρ e μ.

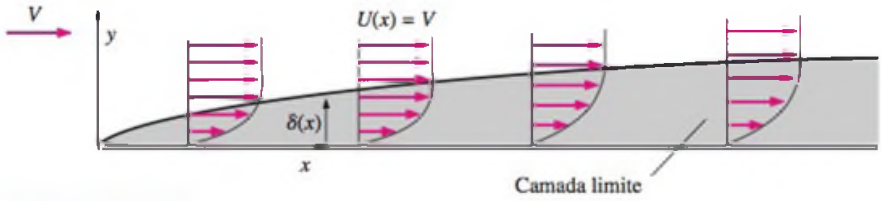


FIGURA P10–64C

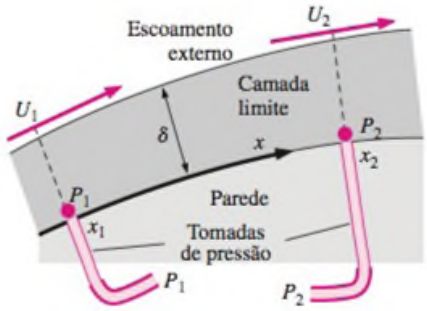


FIGURA P10–68

10–69 Considere duas tomadas de pressão ao longo da parede de uma camada limite laminar como na Figura P10–68. O fluido é o ar à temperatura de 25°C, $U_1 = 10{,}3$ m/s e a pressão estática P_1 é 2,44 Pa acima da pressão estática P_2, medida por um transdutor de pressão diferencial bastante sensível. A velocidade do escoamento externo U_2 é maior do que, igual a ou menor do que a velocidade do escoamento externo U_1? Explique. Estimar U_2. *Respostas:* Menor, 10,1 m/s

10–70 Com suas próprias palavras, faça um resumo dos cinco passos do procedimento da camada limite.

10–71 Com suas próprias palavras, liste pelo menos três "alertas" para prestar atenção ao executar cálculos de camada limite laminar.

10–72 Considere a solução de Blasius para uma camada limite laminar sobre uma placa plana. A inclinação adimensional na parede é dada pela Equação 8 do Exemplo 10–10. Transforme esse resultado em variáveis físicas e mostre que a Equação 9 do Exemplo 10–10 está correta.

10–73 Uma dimensão de uma placa retangular é o dobro da outra dimensão. O ar a uma velocidade uniforme flui paralelo à placa e uma camada limite laminar se forma em ambos os lados da placa. Qual a orientação — dimensão mais longa paralela ao vento (Figura P10–73*a*) ou dimensão mais curta paralela ao vento (Figura P10–73*b*) — apresenta um arrasto maior? Explique.

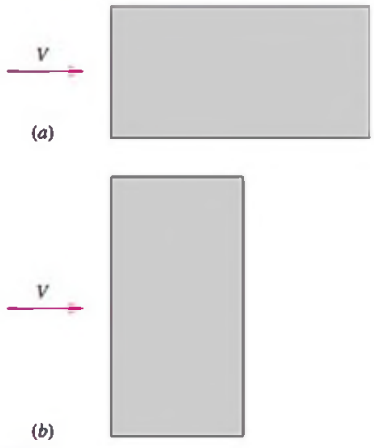


FIGURA P10–73

10–74 Neste capítulo são dadas duas definições de espessura de deslocamento. Escreva ambas as definições, com suas próprias palavras. Para a camada limite laminar que se desenvolve sobre uma placa plana, qual é maior — a espessura δ da camada limite ou a espessura de deslocamento δ^*? Discuta.

10–75 Um túnel de vento de escoamento laminar tem uma seção de teste com 40 cm de diâmetro e 60 cm de comprimento. O ar está a 20°C. Com uma velocidade uniforme do ar a 2,0 m/s na entrada da seção de teste, de quanto irá acelerar a velocidade do ar no eixo central, no fim da seção de teste?
Resposta: Aprox. 4%

10–76 Repita os cálculos do Problema 10–75, exceto que a seção de teste é quadrada e não redonda, com seção transversal de 40 cm × 40 cm e comprimento de 60 cm. Compare o resultado com o do Problema 10–75 e discuta.

10–77 Para evitar a interferência da camada limite, os engenheiros desenham uma "cavidade de camada limite" para afinar a camada limite em um túnel de vento grande (Figura P10–77). A cavidade é construída com chapa fina de metal. O ar está a 20°C e flui à velocidade $V = 65{,}0$ m/s. A que altura (dimensão h) deverá estar a cavidade na distância a jusante $x = 1{,}45$ m?

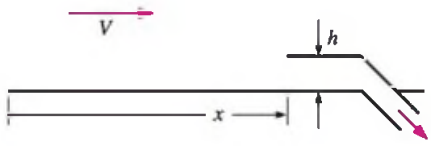


FIGURA P10–77

10–78 Ar a 20°C flui à velocidade $V = 5{,}0$ m/s paralelo a uma placa plana (Figura P10–78). A frente da placa é bem arredondada e a placa tem 40 cm de comprimento. A espessura da placa é $h = 0{,}75$ cm, mas devido aos efeitos de deslocamento da camada limite, o escoamento fora da camada limite "enxerga" uma placa com espessura aparentemente maior. Calcule a espessura aparente da placa (inclua ambos os lados) na distância a jusante $x = 25$ cm. *Respostas:* 1,05 cm

FIGURA P10–78

10–79 Ar a 20°C flui com a velocidade $V = 80{,}0$ m/s sobre uma placa plana lisa de comprimento $L = 17{,}5$ m. Faça um gráfico do perfil da camada limite turbulenta em variáveis físicas (u em função de y) na distância $x = L$. Compare o perfil gerado pela lei da potência um sétimo, pela lei logarítmica e pela lei da parede de Spalding, supondo que a camada limite é completamente turbulenta desde o início da placa.

10–80 Explique a diferença entre um gradiente de pressão *favorável* e *adverso* em uma camada limite. Em qual dos casos a pressão aumenta a jusante? Por quê?

10–81 Discuta a implicação de um ponto de inflexão em um perfil de camada limite. Especificamente, a existência de um ponto de inflexão provoca um gradiente de pressão favorável ou adverso? Explique.

10–82 Compare a separação de escoamento para uma camada limite laminar versus camada limite turbulenta. Especificamente, qual dos casos é mais resistente à separação de escoamento? Por quê? Com base na sua resposta, explique por que as bolas de golfe possuem covinhas.

10–83 A componente da velocidade na corrente de uma camada limite sobre placa plana permanente, incompressível, laminar e de espessura d é aproximada pela expressão linear simples, $u = Uy/\delta$ para $y < \delta$ e $u = U$ para $y > \delta$ (Figura P10–83). Gere expressões para espessura de deslocamento e espessura do momento em função de δ, baseado nessa aproximação linear. Compare os valores aproximados de δ^*/δ e θ/δ com os valores de δ^*/δ e θ/δ obtidos na solução de Blasius.
Respostas: 0,500, 0,167

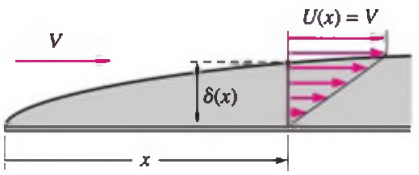


FIGURA P10–83

10–84 Para a aproximação linear do Problema 10–83, use a definição de coeficiente local de atrito superficial e a equação integral de Kármán para gerar uma expressão para δ/x. Compare o seu resultado com a expressão de Blasius para δ/x. (Sugestão: Para resolver esse problema você precisará dos resultados do Problema 10–83.)

10–85 O perfil de Blasius da camada limite é uma solução exata das equações da camada limite para escoamento sobre uma placa plana. No entanto, os resultados são um pouco incômodos de usar, pois os dados aparecem em forma tabular (a solução é numérica). Assim, uma aproximação de uma onda senoidal simples (Figura P10–87) é usada freqüentemente no lugar da solução de Blasius, isto é, $u(y) \cong U \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$ para $y < \delta$, e $u = U$ para $y \ll \delta$, onde δ a espessura da camada limite. Coloque em um mesmo gráfico o perfil de Blasius e a aproximação da onda senoidal, na forma adimensional (u/U versus y/δ) e compare. O perfil da onda senoidal é uma aproximação razoável?

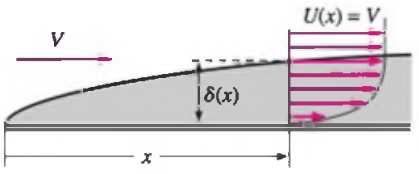


FIGURA P10–85

10–86 A componente de velocidade na direção da corrente da camada limite sobre placa plana permanente, incompressível, laminar e com espessura δ é aproximada pelo perfil de onda senoidal do Problema 10–85. Gere expressões para a espessura de deslocamento e espessura do momento em função de δ, com base nessa aproximação da onda senoidal. Compare os valores aproximados de δ^*/δ e θ/δ com os valores de δ^*/δ e θ/δ obtidos pela solução de Blasius.

10–87 Para a aproximação da onda senoidal do Problema 10–85, use a definição de coeficiente local de atrito superficial e a equação integral de Kármán para gerar uma expressão para δ/x. Compare o seu resultado com a expressão de Blasius para δ/x. (Observação: Para resolver esse problema você precisará dos resultados do Problema 10–86.)

10–88 Compare o *fator de forma H* (definido na Equação 10–95) para uma camada limite laminar versus camada limite turbulenta sobre uma placa plana, assumindo que a camada limite turbulenta é turbulenta desde o início da placa. Discuta. Especificamente, por que você acha que H é chamado de "fator de forma"? *Respostas:* 2,59, 1,25 a 1,30

10–89 Calcule o valor do fator de forma H para o caso limite de uma camada limite que é infinitesimalmente fina (Figura P10–89). Esse valor de H é o valor mínimo possível.

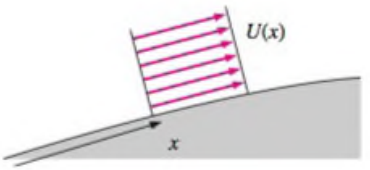


FIGURA P10–89

10–90 Integre a Equação 5 para obter a Equação 6 do Exemplo 10–14, mostrando todo o seu trabalho.

10–91 Considere uma camada limite turbulenta sobre uma placa plana. Suponha que somente duas coisas são conhecidas: $C_{f,x} \cong 0{,}059(\mathrm{Re}_x)^{2/5}$ e $\theta \cong 0{,}097\delta$. Use a equação integral de Kármán para gerar uma expressão para δ/x e compare o seu resultado com a coluna (b) da Tabela 10–4.

Problemas de Revisão

10–92C Para cada afirmativa, decida se ela é verdadeira ou falsa e discuta brevemente a sua resposta.
(*a*) A função potencial de velocidade pode ser definida para escoamentos tridimensionais.
(*b*) A vorticidade deve ser zero para que a função de corrente seja definida.
(*c*) A vorticidade deve ser zero para que a função potencial de velocidade seja definida.
(*d*) A função de corrente pode ser definida somente para campos de escoamento bidimensionais.

10–93 Neste capítulo, discutimos a rotação de corpo sólido (Figura P10–93) como um exemplo de um escoamento sem viscosidade que é também rotacional. As componentes de velocidade são $u_r = 0$, $u_\theta = \omega r$ e $u_z = 0$. Calcule o termo viscoso da componente u da equação de Navier-Stokes e discuta. Verifique que esse campo de velocidade é realmente rotacional calculando a componente z da vorticidade.

Resposta: $\zeta_z = 2\omega$

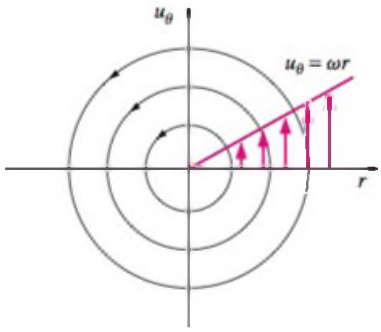


FIGURA P10–93

10–94 Calcule as nove componentes do tensor de tensão viscosa em coordenadas cilíndricas (veja o Capítulo 9) para o campo de velocidade do Problema 10–93. Discuta.

10–95 Neste capítulo, discutimos a linha de vórtice (Figura P10–95) como um exemplo de um campo de escoamento irrotacional. As componentes da velocidade são $u_r = 0$, $u_\theta = \Gamma/(2\pi r)$ e $u_z = 0$. Calcule o termo viscoso da componente θ da equação de Navier-Stokes e discuta. Verifique que esse campo de velocidade é realmente irrotacional calculando a componente z da vorticidade.

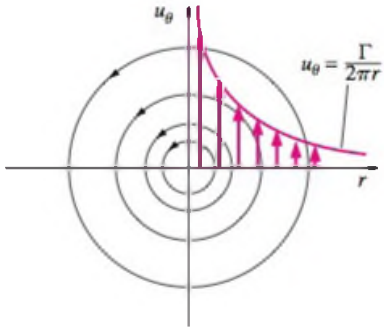


FIGURA P10–95

10–96 Calcule as nove componentes do tensor de tensão viscosa em coordenadas cilíndricas (veja o Capítulo 9) para o campo de velocidade do Problema 10–95. Discuta.

10–97 A água desce por um tubo vertical *apenas por gravidade*. O escoamento entre as posições verticais z_1 e z_2 é totalmente desenvolvido e os perfis de velocidade nessas duas posições estão representados na Figura P10–97. Como não há gradiente de pressão forçada, a pressão P é constante em todos os pontos no escoamento ($P = P_{atm}$). Calcule a *pressão modificada* nas posições z_1 e z_2. Desenhe perfis de pressão modificada nas posições z_1 e z_2. Discuta.

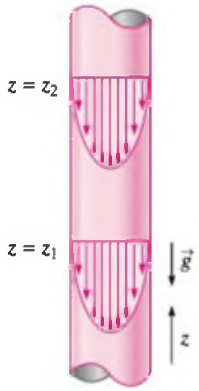


FIGURA P10–97

10–98 Suponha que o tubo vertical do Problema 10–97 agora é *horizontal*. Para obter a mesma vazão de volume do Problema 10–106, precisamos fornecer um gradiente de pressão forçado. Calcule a queda de pressão necessária entre duas posições axiais no tubo que estejam separadas por distâncias como z_2 e z_1 da Figura P10–97. Como a pressão modificada P' muda entre os casos vertical e horizontal?

Problemas de Projeto e Ensaio

10–99 Explique por que há um excesso de velocidade significativo para os valores intermediários do número de Reynolds nos perfis de velocidade da Figura 10–136, mas não para os valores muito pequenos de Re ou para os valores muito grandes de Re.

CAPÍTULO

11

ESCOAMENTO SOBRE CORPOS: ARRASTO E SUSTENTAÇÃO

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura deste capítulo, você deve ser capaz de:

- Entender intuitivamente os vários fenômenos físicos como arrasto, atrito e arrasto de pressão, redução de arrasto e sustentação
- Calcular a força de arrasto associada com o escoamento sobre geometrias comuns
- Compreender os efeitos do regime de escoamento sobre os coeficientes de arrasto associados com escoamento sobre cilindros e esferas
- Entender os fundamentos do escoamento sobre aerofólios e calcular as forças de arrasto e de sustentação agindo sobre aerofólios

No Capítulo 8, consideramos o escoamento de fluidos dentro de tubos, com ênfase sobre a queda de pressão e perdas de carga, bem como suas relações com a vazão. Neste capítulo, consideramos o escoamento de fluidos sobre corpos que estão imersos em um fluido, chamado de *escoamento externo*, com ênfase sobre a sustentação resultante e as forças de arrasto. O escoamento externo é caracterizado por uma camada limite de crescimento livre envolvida por uma região de escoamento externo que envolve pequenos gradientes de velocidade e temperatura.

Em escoamentos internos, todo o campo de escoamento é dominado por efeitos viscosos, já no escoamento externo, os efeitos viscosos estão confinados a algumas partes do campo de escoamento como as camadas limite e esteiras.

Quando um fluido se move sobre um corpo rígido, ele exerce forças de pressão normais à superfície e forças de cisalhamento paralelas à superfície ao longo da fronteira externa do corpo. Geralmente estamos interessados na *resultante* das forças de pressão e cisalhamento agindo sobre o corpo e não nos detalhes das distribuições dessas forças ao longo de toda a superfície do corpo. A componente das forças resultantes de pressão e de cisalhamento que age na direção do escoamento é chamada de *força de arrasto* (ou apenas *arrasto*); e a componente que age na direção normal à direção do escoamento é chamada de *força de sustentação* (ou apenas *sustentação*).

Iniciamos este capítulo com uma discussão sobre arrasto e sustentação e exploramos os conceitos de arrasto de pressão, arrasto de fricção e separação de escoamento. Continuamos com os coeficientes de arrasto das várias geometrias bidimensionais e tridimensionais encontradas na prática e determinamos a força de arrasto usando coeficientes de arrasto determinados experimentalmente. Examinamos então o desenvolvimento da camada limite durante o escoamento paralelo sobre uma superfície plana e deduzimos relações para coeficientes de atrito superficial de arrasto para escoamento sobre placas planas, cilindros e esferas. Finalmente, discutimos a sustentação desenvolvida por aerofólios e os fatores que afetam as características de sustentação dos corpos.

11–1 ▪ INTRODUÇÃO

O escoamento de fluidos sobre corpos rígidos ocorre frequentemente na prática; e ele é responsável por numerosos fenômenos físicos, tais como a *força de arrasto* que age sobre os automóveis, linhas de transmissão de energia, árvores e canalizações de água submersas; a *sustentação* desenvolvida pelas asas de um avião; *ascenção* da chuva, neve, granizo e partículas de pó em ventos fortes; o transporte das células vermelhas do sangue pela corrente sangüínea; o espalhamento de gotículas líquidas pelos sprays; a vibração e o ruído gerado por corpos movendo-se em um fluido; e a força gerada pelas turbinas eólicas (Figura 11–1). Portanto, é importante entender muito bem o escoamento externo no projeto de muitos sistemas de engenharia como aviões, automóveis, prédios, navios, submarino e todos os tipos de turbinas. Os modelos mais recentes de automóveis, por exemplo, foram projetados com ênfase particular na aerodinâmica. Isso resultou em reduções significativas no consumo de combustível e no nível de ruído e na considerável melhora na operação.

FIGURA 11–1
O escoamento sobre corpos é comumente encontrado na prática.

Às vezes um fluido move-se sobre um corpo estacionário (como o vento soprando sobre um prédio); outras vezes, um corpo move-se através de um fluido quiescente (como um carro movendo-se através do ar). Esses dois processos aparentemente diferentes são equivalentes um ao outro; o que importa é o movimento relativo entre o fluido e o corpo. Esses movimentos são convenientemente analisados, fixando-se o sistema de coordenadas no corpo e são chamados de **escoamento sobre corpos** ou **escoamento externo.** Os aspectos aerodinâmicos dos diferentes desenhos de asas de avião, por exemplo, são estudados convenientemente em um laboratório colocando-se as asas em um túnel de vento e soprando ar sobre elas por meio de grandes ventiladores. Além disso, um escoamento pode ser classificado como sendo permanente ou não-permanente, dependendo do sistema de referência selecionado. Por exemplo, o escoamento ao redor de um avião é sempre não-permanente com relação ao solo, mas ele é permanente com relação a um sistema de referência que se move com o avião nas condições de cruzeiro.

Os campos de escoamento e geometrias para a maioria dos problemas de escoamento externo são muito complicados para serem resolvidos analiticamente, e, portanto, temos que lançar mão de correlações baseadas em dados experimentais. A disponibilidade de computadores de alta velocidade tornou possível executar séries de "experimentos numéricos" rapidamente, resolvendo numericamente as equações que governam tais fenômenos (Capítulo 15), fazendo-se as experiências caras e demoradas somente nos estágios finais do projeto. Esses testes são feitos em túneis de vento. H. F. Phillips (1845–1912) construiu o primeiro túnel de vento em 1894 e mediu sustentação e arrasto. Neste capítulo, usaremos na maior parte do tempo relações desenvolvidas experimentalmente.

A velocidade de um fluido que se aproxima de um corpo é chamada de **velocidade de corrente livre** e é denotada por V. Ela é representada também por u_∞ ou U_∞ quando o escoamento é alinhado com o eixo x, pois u é usado para representar a componente x da velocidade. A velocidade do fluido varia de zero na superfície (a condição de não-escorregamento) até o valor da corrente livre longe da superfície e o subscrito "infinito" serve como um lembrete de que este é o valor a uma distância onde a presença do corpo não é percebida. A velocidade de corrente livre pode variar com a posição e com o tempo (por exemplo, o vento que sopra através de um prédio). Mas no projeto e análise, a velocidade da corrente livre usualmente é considerada como *uniforme* e *permanente* por conveniência, e isto é o que faremos neste capítulo.

A forma de um corpo tem uma profunda influência no escoamento sobre o corpo e no campo de velocidades. Dizemos que o escoamento sobre um corpo é **bidimensional** quando o corpo é muito longo, tem seção transversal constante e o escoamento é normal ao corpo. O vento soprando sobre um longo tubo perpendicularmente ao seu eixo é um exemplo de escoamento bidimensional. Note que a componente da velocidade na direção axial é zero neste caso, e, portanto, a velocidade é bidimensional.

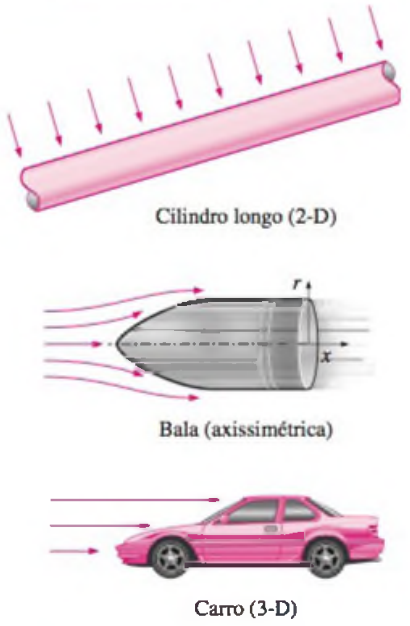


FIGURA 11–2
Escoamentos bidimensional, axissimétrico e tridimensional.

A idealização bidimensional é apropriada quando o corpo é suficientemente longo de maneira que os efeitos de extremidade são desprezíveis e o escoamento é uniforme. Ocorre uma outra simplificação quando o corpo possui simetria rotacional em relação um eixo na direção do escoamento. O escoamento neste caso é também bidimensional e dizemos que ele é **axissimétrico.** A trajetória de uma bala através do ar é um exemplo de escoamento axissimétrico. A velocidade neste caso varia com a distância axial x e com a distância radial r. O escoamento sobre um corpo que não pode ser modelado como bidimensional ou axissimétrico, como o escoamento sobre um carro, é **tridimensional** (Figura 11–2).

Os escoamentos sobre corpos podem também ser classificados como **escoamentos incompressíveis** (por exemplo, escoamentos sobre automóveis, submarinos e prédios) e **escoamentos compressíveis** (por exemplo, escoamentos sobre aviões em alta velocidade, foguetes e mísseis). Os efeitos da compressibilidade são desprezíveis em baixas velocidades (escoamentos com Ma $\lesssim 0{,}3$) e podem ser tratados como incompressíveis). O escoamento compressível é discutido no Capítulo 12, e os escoamentos que envolvem corpos parcialmente imersos com uma superfície livre (como um navio movendo-se sobre a água) estão além do escopo deste livro introdutório.

Corpos submetidos a escoamento de fluido são classificados como sendo carenados ou rombudos, dependendo de sua forma geral. Dizemos que um corpo é **carenado** se é feito um esforço consciente para alinhar sua forma com as linhas de corrente que se espera encontrar no escoamento. Corpos carenados como carros de corrida e aviões parecem ser curvilíneos e lisos. Caso contrário, um corpo (como por exemplo um prédio) tende a bloquear o escoamento e neste caso dizemos que ele é **rombudo ou arredondado**. Geralmente é muito mais fácil forçar um corpo carenado através de um fluido, portanto, a carenagem tem uma grande importância no projeto de veículos e aviões (Figura 11–3).

11–2 • ARRASTO E SUSTENTAÇÃO

É uma experiência comum o fato de que um corpo encontra resistência quando é forçado a se mover através de um fluido, especialmente um líquido. Conforme você já observou, é muito difícil caminhar dentro d'água devido à resistência muito maior que a água oferece ao movimento, comparada com o ar. Além disso, você já deve ter visto ventos fortes derrubando árvores, linhas de transmissão de energia e até mesmo caminhões e deve ter sentido o forte "empurrão" que o vento exerce no seu corpo (Figura 11–4). Você experimenta a mesma sensação quando estende o braço para fora da janela do seu carro quando este está em movimento. Um fluido pode exercer forças e momentos sobre um corpo em várias direções. A força que um fluido em movimento exerce sobre um corpo na direção do escoamento é chamada de **arrasto**. A força de arrasto pode, simplesmente, ser medida diretamente, prendendo-se o objeto que está submetido ao escoamento do fluido e a uma mola calibrada e medindo o deslocamento na direção do escoamento (é como medir o peso de um objeto com uma balança de mola). Dispositivos mais sofisticados para medição de arrasto, chamados de balanças de arrasto, usam barras flexíveis equipadas com medidores de deformação para medir o arrasto eletronicamente.

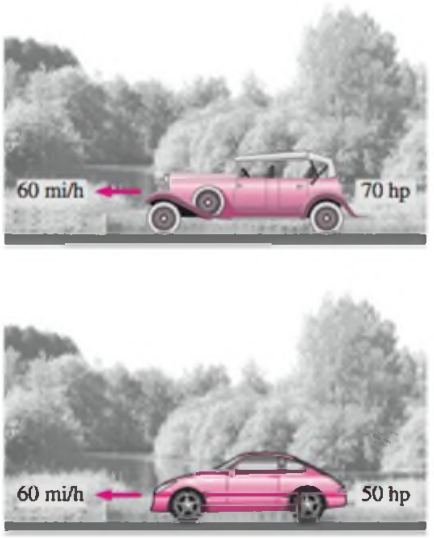


FIGURA 11–3
É muito mais fácil forçar um corpo carenado do que um corpo rombudo através de um fluido.

O arrasto geralmente é um efeito indesejado, assim como o atrito, e fazemos o melhor possível para minimizá-lo. A redução do arrasto está intimamente associada com a redução do consumo de combustível nos automóveis, submarinos, e aviões; com uma melhor segurança e durabilidade das estruturas submetidas a ventos fortes; e com a redução do ruído e da vibração. Mas em alguns casos, o arrasto produz um efeito muito benéfico e tentamos maximizá-lo. Por exemplo, o atrito é um "salva-vidas" nos freios dos automóveis. Da mesma forma, é o arrasto que torna possível às pessoas saltar com pára-quedas, permite que o pólem das flores seja levado a locais distantes e nos permite desfrutar das ondas dos oceanos e dos movimentos relaxantes das folhas das árvores.

Um fluido em repouso exerce somente forças de pressão normais na superfície de um corpo imerso nele. No entanto, um fluido em movimento também exerce forças tangenciais de cisalhamento na superfície devido à condição de não-escorregamento causada por efeitos viscosos. Ambas as forças, em geral, têm componentes na direção do escoamento, portanto a força de arrasto é devida aos efeitos combinados da pressão e das forças de cisalhamento na parede, na direção do escoamento. As componentes da pressão e forças de cisalhamento na parede na direção *normal* ao escoamento tendem a mover o corpo nessa direção, sua soma é chamada de **sustentação.**

Para escoamentos bidimensionais, a resultante das forças de pressão e de cisalhamento pode se dividir em duas componentes: uma na direção do escoamento, que é a força de arrasto, e a outra na direção normal ao escoamento, que é a sustentação, como mostra a Figura 11–5. Para escoamentos tridimensionais, há também uma componente de força lateral na direção normal à página que tende a mover o corpo nessa direção.

As forças do fluido também podem gerar momentos e podem fazer o corpo girar. O momento em relação à direção do escoamento é chamado de *momento de rolagem*, o momento em relação à direção da sustentação é chamado de *momento de guinada*, e o momento em relação à direção da força lateral é chamado de *momento de arfagem*. Para corpos que possuem simetria em relação ao plano sustentação-arrasto, como carros, aviões e navios, a força lateral, o momento de guinada e o momento de rolagem são iguais a zero quando as forças do vento e das ondas estão alinhadas com o corpo. O que resta para esses corpos são as forças de arrasto e sustentação e o momento de arfagem. Para corpos axissimétricos alinhados com o escoamento, como por exemplo uma bala, a única força exercida pelo fluido no corpo é a força de arrasto.

As forças de pressão e cisalhamento agindo sobre uma área infinitesinal dA na superfície são PdA e $\tau_w\, dA$, respectivamente. A força de arrasto diferencial e a força de sustentação agindo sobre dA no escoamento bidimensional são (Figura 11–5)

$$dF_D = -P\, dA \cos\theta + \tau_w\, dA \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(11–1)}$$

e

$$dF_L = -P\, dA \operatorname{sen}\theta - \tau_w\, dA \cos\theta \qquad \textbf{(11–2)}$$

onde θ é o ângulo que a normal exterior a dA faz com a direção positiva do escoamento. A força de arrasto total e as forças de sustentação agindo sobre o corpo são determinadas integrando as Equações 11–1 e 11–2 sobre toda a superfície do corpo,

$$\textit{Força de arrasto:} \qquad F_D = \int_A dF_D = \int_A (-P\cos\theta + \tau_w \operatorname{sen}\theta)\, dA \qquad \textbf{(11–3)}$$

e

$$\textit{Força de sustentação:} \qquad F_L = \int_A dF_L = -\int_A (P\operatorname{sen}\theta + \tau_w \cos\theta)\, dA \qquad \textbf{(11–4)}$$

Essas são as equações usadas para estimar as forças livres de arrasto e sustentação sobre corpos quando o escoamento é simulado em um computador (Capítulo 15). No entanto, quando fazemos análises experimentais, as Equações 11–3 e 11–4 não são práticas pois as distribuições detalhadas de forças de pressão e cisalhamento são difíceis de obter por medições. Felizmente, essa informação em geral não é necessária. Usualmente tudo o que precisamos saber é a força de arrasto resultante e a sustentação agindo sobre todo o corpo, que pode ser medida direta e facilmente em um túnel de vento.

As Equações 11–1 e 11–2 mostram que tanto o atrito superficial (cisalhamento na parede) quanto a pressão, em geral, contribuem para o arrasto e para a sustentação. No caso especial de uma *placa plana* fina alinhada paralelalamente à direção do escoamento, a força de arrasto depende somente do cisalhamento na parede e é independente da pressão, já que $\theta = 90°$. No entanto, quando a placa plana é colocada em posição normal à direção do escoamento, a força de arrasto depende

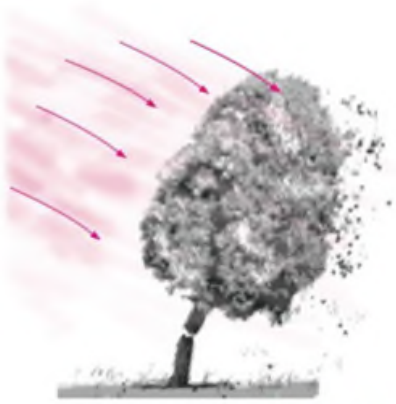
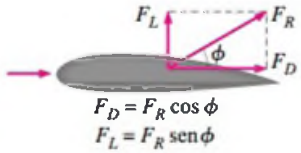


FIGURA 11–4
Ventos fortes derrubam árvores, linhas de transmissão e até pessoas, devido à força de arrasto.



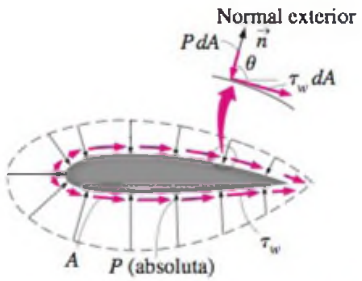


FIGURA 11–5
As forças de pressão e forças viscosas agindo em um corpo bidimensional e as forças resultantes de sustentação e arrasto.

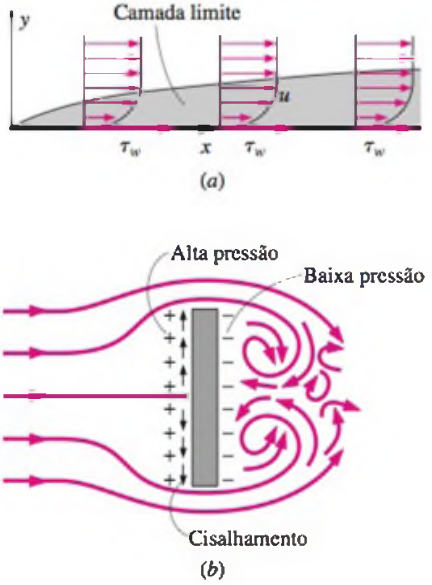


FIGURA 11–6
(*a*) A força de arrasto agindo sobre uma placa plana paralela ao escoamento depende somente do cisalhamento na parede. (*b*) A força de arrasto agindo sobre uma placa plana normal ao escoamento depende somente da pressão e é independente do cisalhamento na parede, que age na direção normal ao escoamento de corrente livre.

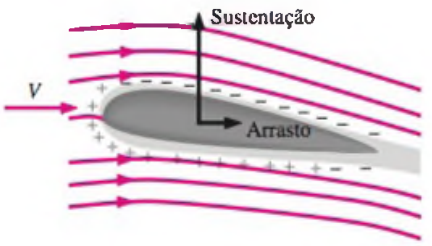


FIGURA 11–7
As asas dos aviões são modeladas e posicionadas para gerar sustentação suficiente durante o vôo mantendo ao mesmo tempo o arrasto no mínimo. As pressões acima e abaixo da pressão atmosférica são indicadas por sinais de mais e de menos, respectivamente.

somente da pressão e é independente do cisalhamento na parede já que a tensão de cisalhamento neste caso age na direção normal ao escoamento e $\theta = 0°$ (Figura 11–6). Se a placa plana é inclinada a um ângulo relativo à direção do escoamento, então a força de arrasto depende tanto da pressão quanto da tensão de cisalhamento.

As asas dos aviões são modeladas e posicionadas especificamente para gerar sustentação com um mínimo de arrasto. Isso é feito mantendo-se um ângulo de ataque durante o vôo de cruzeiro, como mostra a Figura 11–7. Tanto a sustentação quanto o arrasto são funções que dependem muito do ângulo de ataque, conforme discutiremos mais adiante neste capítulo. A diferença de pressão entre as superfícies superior e inferior da asa gera uma força para cima que tende a levantar a asa e portanto o avião ao qual ela está presa. Para corpos delgados como as asas, a força de cisalhamento age aproximadamente paralela à direção do escoamento, e portanto sua contribuição para a sustentação é pequena. A força de arrasto para esses corpos delgados é devida principalmente às forças de cisalhamento (o atrito superficial).

As forças de arrasto e sustentação dependem da densidade ρ do fluido, da velocidade a montante V e do tamanho, forma e orientação do corpo, entre outras coisas, além disso, não é prático listar essas forças para uma variedade de situações. Em vez disso, considera-se conveniente trabalhar com números adimensionais apropriados que representam as características de arrasto e sustentação do corpo. Esses números são o **coeficiente de arrasto** C_D e o **coeficiente de sustentação** C_L; eles são definidos como

Coeficiente de arrasto:
$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{11–5}$$

Coeficiente de sustentação
$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{11–6}$$

onde A é ordinariamente a **área frontal** (a área projetada sobre um plano normal à direção do escoamento) do corpo. Em outras palavras, A é a área que seria vista por uma pessoa que está olhando para o corpo a partir da direção do fluido que se aproxima. A área frontal de um cilindro de diâmetro D e comprimento L, por exemplo, é $A = LD$. Em cálculos de sustentação de alguns corpos delgados, como aerofólios, A é considerada como a **área planiforme**, que é a área vista por uma pessoa que está olhando para o corpo a partir de cima em uma direção normal ao corpo. Os coeficientes de arrasto e sustentação são primariamente funções da forma do corpo, mas em alguns casos eles também dependem do número de Reynolds e da rugosidade da superfície. O termo $\frac{1}{2}\rho V^2$ nas Equações 11–5 e 11–6 é a **pressão dinâmica**.

Os coeficientes locais de arrasto e sustentação variam ao longo da superfície como resultado das mudanças na camada limite de velocidade na direção do escoamento. Usualmente estamos interessados nas forças de arrasto e sustentação para a superfície *inteira*, que pode ser determinada usando os coeficientes *médios* de arrasto e de sustentação. Portanto, apresentamos correlações para os coeficientes de arrasto e sustentação tanto local (identificado com o subscrito x) quanto médio. Quando as relações para coeficientes locais de arrasto e de sustentação para uma superfície de comprimento L estão disponíveis, os coeficientes *médios* de arrasto e sustentação para a superfície inteira podem ser determinados por integração por meio de

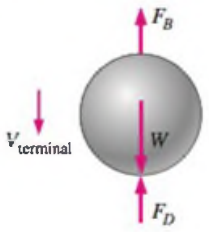
$$C_D = \frac{1}{L}\int_0^L C_{D,x}\, dx \tag{11–7}$$

e

$$C_L = \frac{1}{L}\int_0^L C_{L,x}\, dx \tag{11–8}$$

Quando um corpo é solto na atmosfera ou em um lago, ele primeiro acelera sob a influência de seu próprio peso. O movimento do corpo encontra uma resistência que é a força de arrasto, que age na direção oposta ao movimento. À medida em que a velocidade do corpo aumenta, aumenta também a força de arrasto. Isso

continua até que todas as forças se equilibrem umas às outras e a força resultante agindo sobre o corpo (e portanto sua aceleração) seja zero. Então a velocidade do corpo permanece constante durante o resto de sua queda se as propriedades do fluido no caminho do corpo permanecerem essencialmente constantes. Essa é a velocidade máxima que um corpo em queda pode atingir e é chamada de **velocidade terminal** (Figura 11–8). As forças que agem sobre um corpo em queda são normalmente a força de arrasto, a força de flutuação e o peso do corpo.



$F_D = W - F_B$
(Sem aceleração)

FIGURA 11–8
Durante a queda livre, um corpo alcança sua velocidade terminal quando a força de arrasto se torna igual ao peso do corpo menos a força de flutuação.

EXEMPLO 11–1 Medindo o Coeficiente de Arrasto de um Carro

O coeficiente de arrasto de um carro nas condições de projeto de 1 atm, 70° F, e 60 mi/h deve ser determinado experimentalmente em um grande túnel de vento em um teste em escala real (Figura 11–9).A área frontal do carro é 22,26 pés^2. Se a medida da força que age sobre o carro na direção do escoamento for 68 lbf, determine o coeficiente de arrasto desse carro.

SOLUÇÃO A força de arrasto que age sobre um carro é medida em um túnel de vento. O coeficiente de arrasto do carro deve ser determinado nas condições de teste.

Hipóteses 1 O escoamento do ar é permanente e incompressível. **2** A seção transversal do túnel é larga o suficiente para simular o escoamento livre sobre o carro. **3** A parte inferior do túnel também está se movendo à velocidade do ar para aproximar as condições reais em que se dirige o carro ou esse efeito é desprezível.

Propriedades A densidade do ar a 1 atm e 70°F é $\rho = 0{,}07489$ lbm/pés^3.

Análise A força de arrasto agindo sobre um corpo e o coeficiente de arrasto são dados por

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2} \quad \text{e} \quad C_D = \frac{2F_D}{\rho A V^2}$$

onde A é a área frontal. Substituindo e observando que 1 mi/h = 1,467 pé/s, o coeficiente de arrasto do carro é determinado como sendo

$$C_D = \frac{2 \times (68 \text{ lbf})}{(0{,}07489 \text{ lbm/pé}^3)(22{,}26 \text{ pés}^2)(60 \times 1{,}467 \text{ pés/s})^2}\left(\frac{32{,}2 \text{ lbm} \cdot \text{pés/s}^2}{1 \text{ lbf}}\right) = \mathbf{0{,}34}$$

Discussão Note que o coeficiente de arrasto depende das condições de projeto e seu valor pode ser diferente em diferentes condições como, por exemplo, o número de Reynolds. Portanto, os coeficientes de arrasto publicados para vários veículos diferentes podem ser comparados de forma significativa somente se eles forem determinados sob condições similares. Isso mostra a importância de se desenvolver procedimentos padronizados de testes na indústria

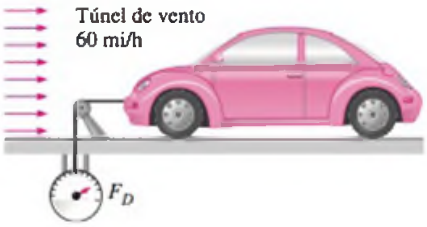


FIGURA 11–9
Esquema do Exemplo 11–1.

11–3 • ARRASTOS DE ATRITO E PRESSÃO

Conforme mencionamos na Seção 11–2, a força de arrasto é a força total exercida por um fluido sobre um corpo na direção do escoamento devido aos efeitos combinados de forças de cisalhamento na parede e forças de pressão. Muitas vezes, é esclarecedor separar os dois efeitos e estudá-los separadamente.

A parte do arrasto que é devida, diretamente, à tensão de cisalhamento na parede τ_w é chamada de **arrasto de atrito superficial** (ou apenas *arrasto de atrito* $F_{D,\text{ atrito}}$) pois ela é causada por efeitos de atrito, e a parte que é devida diretamente à pressão P é chamada de **arrasto de pressão** (também chamado de *arrasto de forma* devido à sua forte dependência da forma ou perfil do corpo). Os coeficientes de arrasto de atrito e pressão são definidos como

$$C_{D,\text{ atrito}} = \frac{F_{D,\text{ atrito}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \quad \text{e} \quad C_{D,\text{ pressão}} = \frac{F_{D,\text{ pressão}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad (11\text{–}9)$$

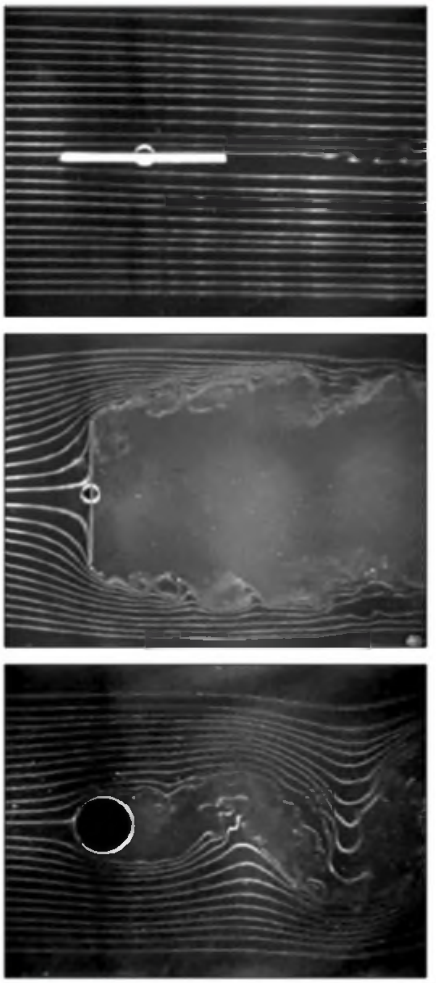


FIGURA 11–10
O arrasto é devido inteiramente ao arrasto de atrito para uma placa plana paralela ao escoamento; ele é devido inteiramente ao arrasto de pressão para uma placa plana normal ao escoamento; e é devido a ambos (mas principalmente ao arrasto de pressão) para um cilindro normal ao escoamento. O coeficiente de arrasto total C_D é mais baixo para uma placa plana paralela, mais alto para uma placa plana vertical e intermediário (mas próximo àquele de uma placa plana vertical) para um cilindro.
G. M. Homsy, et al. (2000)

Quando estão disponíveis os coeficientes ou forças de atrito e pressão, o coeficiente total de arrasto ou força de arrasto pode ser determinado simplesmente somando-os,

$$C_D = C_{D,\text{ atrito}} + C_{D,\text{ pressão}} \quad \text{e} \quad F_D = F_{D,\text{ atrito}} + F_{D,\text{ pressão}} \tag{11–10}$$

O *arrasto de atrito* é a componente da força de cisalhamento da parede na direção do escoamento, portanto ele depende da orientação do corpo, bem como da intensidade da tensão de cisalhamento na parede, τ_w. O arrasto de atrito é *zero* para uma superfície plana normal ao escoamento, e *máximo* para uma superfície plana paralela ao escoamento, já que o arrasto de atrito nesse caso é igual à força de cisalhamento total na superfície. Portanto, para escoamento paralelo sobre uma superfície plana, o coeficiente de arrasto é igual ao *coeficiente de arrasto de atrito*, ou simplesmente o *coeficiente de atrito*. O arrasto de atrito é uma função que depende muito da viscosidade e aumenta com o aumento da viscosidade.

O número de Reynolds é inversamente proporcional à viscosidade do fluido. Portanto, a contribuição do arrasto de atrito para o arrasto total para corpos rombudos é menor com números de Reynolds mais altos e pode ser desprezível com números de Reynolds muito altos. O arrasto nesses casos é devido, principalmente ao arrasto de pressão. Com números de Reynolds baixos, a maior parte do arrasto é devida ao arrasto de atrito. Esse é especialmente o caso para corpos altamente, carenados como os aerofólios. O arrasto de atrito é também proporcional à área da superfície. Portanto, corpos com uma área superficial maior sofrem um arrasto de atrito maior. Por exemplo, os grandes aviões comerciais reduzem sua área superficial total e, portanto, o arrasto, retraindo as extensões da asa quando atingem altitudes de cruzeiro para economizar combustível. O coeficiente de arrasto de atrito é independente da *rugosidade superficial* no escoamento laminar, mas é uma função que depende muito da rugosidade superficial no escoamento turbulento devido aos elementos de rugosidade superficial que se projetam mais na camada limite. O *coeficiente de arrasto de atrito* é análogo ao *fator de atrito* em escoamento em tubos discutido no Capítulo 8, e seu valor depende do regime de escoamento.

O arrasto de pressão é proporcional à área frontal e à *diferença* entre as pressões que agem na frente e atrás do corpo imerso. Portanto, o arrasto de pressão é usualmente dominante para corpos rombudos, pequeno para corpos carenados como os aerofólios e zero para placas planas e finas paralelas ao escoamento (Figura 11–10). O arrasto de pressão torna-se mais significativo quando a velocidade do fluido é muito alta para o fluido seguir a curvatura do corpo e portanto o fluido se *separa* do corpo em algum ponto e cria uma região de pressão muito baixa na parte de trás. O arrasto de pressão neste caso é devido à grande diferença de pressão entre os lados da frente e de trás do corpo.

Reduzindo o Arrasto por Carenagem

A primeira idéia que vem em mente quando se pensa em reduzir o arrasto é carenar um corpo para reduzir a separação do escoamento e, portanto, reduzir o arrasto de pressão. Até mesmo os vendedores de automóveis são bastante eficientes em apontar os baixos coeficientes de arrasto de seus carros, devido à carenagem. Mas a carenagem tem efeitos opostos sobre arrastos de pressão e de atrito. Ela diminui o arrasto de pressão retardando a separação da camada limite, reduzindo assim a diferença de pressão entre a parte da frente e de trás do corpo, além de aumentar o arrasto de atrito, porque aumenta a área da superfície. O resultado final depende de qual efeito predomina. Portanto, qualquer estudo de otimização para reduzir o arrasto de um corpo deve levar em consideração ambos os efeitos e deve tentar diminuir a *soma* dos dois, como está ilustrado na Figura 11–11. O arrasto total mínimo ocorre em $D/L = 0{,}25$ para o caso mostrado na Figura 11–11. Para o caso de um cilindro circular com a mesma espessura da forma carenada da Figura 11–11, o coeficiente de arrasto seria aproximadamente cinco vezes maior. Portanto, é possível reduzir o arrasto de um componente cilíndrico para um quinto usando-se carenagens apropriadas.

O efeito da carenagem sobre o coeficiente de arrasto pode ser melhor descrito considerando-se cilindros elípticos longos com diferentes vazões de aspecto (ou

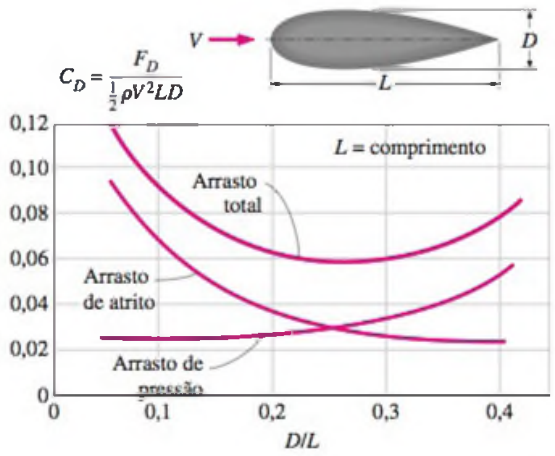


FIGURA 11–11
A variação dos coeficientes de atrito, pressão e arrasto total de uma estrutura carenada com a vazão entre espessura e comprimento da corda para $\mathrm{Re} = 4 \times 10^4$. Note que C_D para aerofólios e outros corpos finos é baseado na área planiforme e não na área frontal.
De Abbott e von Doenhoff (1959).

comprimento-para-espessura) L/D, onde L é o comprimento na direção do escoamento e D é a espessura, como mostra a Figura 11–12. Note que o coeficiente de arrasto diminui drasticamente à medida que a elipse se torna mais fina. Para o caso especial de $L/D = 1$ (um cilindro circular), o coeficiente de arrasto é $C_D \cong 1$ com esse número de Reynolds. À medida que a relação de aspecto diminui e o cilindro se assemelha a uma placa plana, o coeficiente de arrasto aumenta para 1,9, que é o valor para uma placa plana normal ao escoamento. Note que a curva se torna quase plana para vazões de aspecto maiores do que aproximadamente 4. Portanto, para um dado diâmetro D, formas elípticas com uma vazão de aspecto de aproximadamente $L/D \cong 4$ geralmente oferecem um bom compromisso entre o coeficiente de arrasto total e o comprimento L. A redução no coeficiente de arrasto com altas vazões de aspecto é devida principalmente à camada limite ligada à superfície por mais tempo e à recuperação de pressão resultante. O arrasto de atrito sobre um cilindro elíptico com uma vazão de aspecto 4 é desprezível (menos de 2% do arrasto total com esse número de Reynolds).

À medida que a vazão de aspecto de um cilindro elíptico aumenta quando ele é achatado (isto é, diminundo D conservando L constante), o coeficiente de arrasto aumenta e tende ao infinito à medida que $L/D \to \infty$ (isto é, à medida que a elipse se torna semelhante a uma placa plana paralela ao escoamento). Isso é devido à área frontal, que aparece no denominador na definição de C_D e tende a zero. Isso não quer dizer que a força de atrito aumente drasticamente (na realidade, a força de atrito diminui) à medida em que o corpo se torna plano. Isso mostra que a área frontal é inadequada para uso nas vazões de força de arrasto para corpos delgados como aerofólios finos e placas planas. Nesses casos, o coeficiente de arrasto é definido com base na *área planiforme*, que é simplesmente a área superficial para uma placa plana paralela ao escoamento. Isso é bastante apropriado pois para corpos delgados o arrasto é quase inteiramente devido ao arrasto de atrito, que é proporcional à área da superfície.

A carenagem acrescenta a vantagem da *redução da vibração e ruído*. A carenagem deve ser considerada somente para corpos rombudos que estejam submetidos a escoamento de fluido em alta velocidade (e portanto altos números de Reynolds) para os quais a separação do escoamento é uma possibilidade real. Não é necessário para corpos que tipicamente envolvam escoamentos com baixo número de Reynolds (por exemplo, escoamentos lentos nos quais $\mathrm{Re} < 1$) conforme discutido no Capítulo 10, já que o arrasto nesses casos é quase inteiramente devido ao arrasto de atrito; a carenagem somente aumentará a área da superfície e portanto o arrasto total. Portanto, uma carenagem descuidada pode na realidade aumentar o arrasto em vez de diminuí-lo.

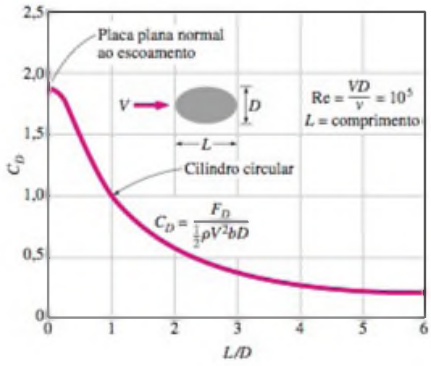


FIGURA 11–12
A variação do coeficiente de arrasto de um cilindro elíptico longo com a vazão de aspecto. Aqui C_D é baseado na área frontal bD, onde b é a largura do corpo.
De Blevins (1984).

Separação de Escoamento

Quando dirigimos em estradas do interior, uma medida comum de segurança é diminuir bastante a velocidade nas curvas fechadas para não ser jogado para fora da

FIGURA 11–13
Separação do escoamento em uma queda de água.

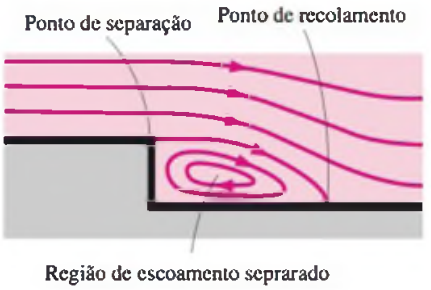


FIGURA 11–14
Separação do escoamento no degrau de uma parede.

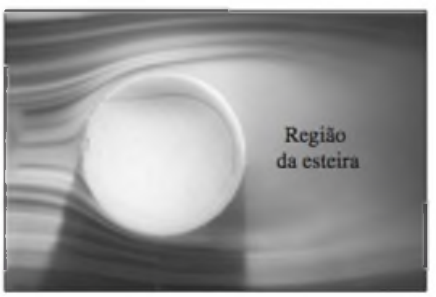


FIGURA 11–15
Separação no escoamento sobre uma bola de tênis e região da esteira
Cortesia NASA e Cislunar Aerospace, Inc.

estrada. Muitos motoristas já constataram de maneira muito penosa que um carro não obedece aos comandos quando é forçado a fazer uma curva em velocidade muito alta. Podemos visualizar esse fenômeno como a "separação dos carros" da estrada. Esse fenômeno é observado também quando veículos em alta velocidade saltam nas lombadas. Em baixas velocidades, as rodas do veículo sempre se mantêm em contato com a superfície da estrada. Mas em altas velocidades, o veículo é muito rápido para seguir a curvatura da estrada e salta na lombada, perdendo contato com a estrada.

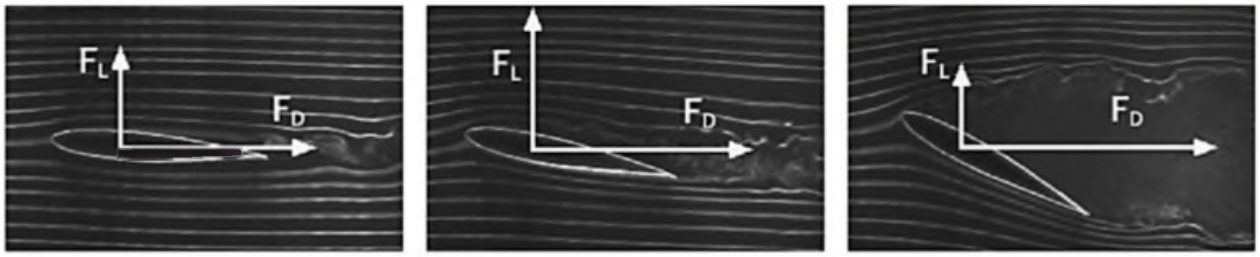
Um fluido age de maneira muito semelhante quando é forçado a escoar sobre uma superfície curva em altas velocidades. Um fluido sobe a parte ascendente da superfície curva sem problemas, mas tem dificuldade em permanecer em contato com a superfície no lado da descida. Em velocidades suficientemente altas a corrente de fluido se separa da superfície do corpo. Isso é chamado de **separação do escoamento** (Figura 11–13). O escoamento pode se separar da superfície mesmo que esteja totalmente submerso em um líquido ou imerso em um gás (Figura 11–14). A posição do ponto de separação depende de vários fatores como, por exemplo, do número de Reynolds, da rugosidade da superfície e do nível de flutuações na corrente livre e usualmente é difícil prever exatamente onde ocorrerá a separação a menos que haja cantos agudos ou mudanças bruscas na forma da superfície sólida.

Quando um fluido se separa de um corpo, ele forma uma região separada entre o corpo e a corrente de fluido. Essa região de baixa pressão atrás do corpo onde ocorre recirculação e fluxos invertidos é chamada de **região de separação.** Quanto maior a região separada, maior é o arrasto de pressão. Os efeitos da separação de escoamento são sentidos a jusante do corpo na forma de uma redução na velocidade (em relação à velocidade a montante). A região do escoamento na parte traseira do corpo onde são sentidos os efeitos do corpo sobre a velocidade é chamada de **esteira** (Figura 11–15). A região separada termina quando as duas correntes de escoamento se juntam novamente. Portanto, a região separada é um volume fechado, enquanto a esteira continua crescendo atrás do corpo até que o fluido na região da esteira recupere sua velocidade e o perfil de velocidades se torne quase uniforme novamente. Os efeitos viscosos e rotacionais são os mais significativos na camada limite, na região separada e na esteira.

A ocorrência da separação não está limitada a corpos rombudos. A separação completa sobre toda a superfície de trás também pode ocorrer em um corpo carenado como uma asa de avião a um **ângulo de ataque** suficientemente alto (mais de 15° para a maioria dos aerofólios), que é o ângulo que a corrente de fluido forma com a **corda** (a linha que conecta a parte da frente e o fim) da asa. A separação de escoamento na superfície superior de uma asa reduz a sustentação drasticamente e pode fazer o avião entrar em **estol**. O efeito estol tem sido o culpado por muitos acidentes aeronáuticos e pela perda de eficiência em turbomáquinas (Figura 11–16).

Note que o arrasto e a sustentação são fortemente dependentes da forma do corpo, e qualquer efeito que faça a forma se alterar tem um profundo efeito sobre o arrasto e a sustentação. Por exemplo, o acúmulo de neve e a formação de gelo nas asas do avião pode mudar a forma das asas suficientemente para causar uma perda significativa da sustentação. Esse fenômeno tem feito muitos aviões perderem altura e cair e muitos outros já tiveram que abortar a decolagem. Portanto, já se tornou uma medida de segurança rotineira a verificação quanto à formação de gelo ou neve em componentes críticos dos aviões antes da decolagem com mau tempo. Isso é especialmente importante para aviões que permaneceram longo tempo em espera na pista antes de decolar devido ao tráfego intenso.

Uma conseqüência importante da separação de escoamento é a formação e desprendimento de porções de fluido em rotação, chamadas de **vórtices,** na região da esteira. A geração periódica desses vórtices a jusante é conhecida como desprendimento de **vórtices.** Esse fenômeno ocorre usualmente durante o escoamento normal sobre cilindros longos ou esferas para $Re \gtrsim 90$. As vibrações geradas pelos vórtices próximo ao corpo podem fazer o corpo entrar em ressonância atingindo níveis perigosos se a freqüência dos vórtices estiver próxima da freqüência natural do corpo — uma situação que deve ser evitada no projeto de equipamentos que estão sujeitos a escoamento de fluido em alta velocidade, como as asas dos aviões e pontes suspensas sujeitas a ventos fortes e constantes.



(*a*) 5° (*b*) 15° (*c*) 30°

FIGURA 11–16
Em grandes ângulos de ataque (geralmente maiores do que 15°), o escoamento pode se separar completamente da superfície superior de um aerofólio, reduzindo a sustentação drasticamente e fazendo o aerofólio entrar em regime de estol.
De G. M. Homsy, et al. (2000).

11–4 • COEFICIENTES DE ARRASTO DE GEOMETRIAS COMUNS

O conceito de arrasto tem conseqüências importantes na vida diária, o comportamento do arrasto de vários corpos naturais e feitos pelo homem é caracterizado pelos seus coeficientes de arrasto medidos sob condições típicas de operação. Embora o arrasto seja causado por dois efeitos diferentes (atrito e pressão), geralmente é difícil determiná-los separadamente. Além disso, em muitos casos, estamos interessados no arrasto *total* e não nos componentes individuais do arrasto, portanto geralmente se registra o coeficiente de arrasto *total*. A determinação dos coeficientes de arrasto tem sido o tópico de numerosos estudos (principalmente experimentais), há uma enorme quantidade de dados sobre coeficientes de arrasto na literatura para qualquer geometria de interesse prático.

O coeficiente de arrasto, em geral, depende do *número de Reynolds*, especialmente para números de Reynolds abaixo de aproximadamente 10^4. Com números de Reynolds mais altos, os coeficientes de arrasto para a maioria das geometrias permanecem essencialmente constante (Figura 11–17). Isso é devido ao fato de que o escoamento em altos números de Reynolds torna-se totalmente turbulento. No entanto, esse não é o caso para corpos arredondados como cilindros circulares e esferas, conforme discutiremos mais adiante nesta seção. Os coeficientes de arrasto listados geralmente são aplicáveis somente a escoamentos com altos números de Reynolds.

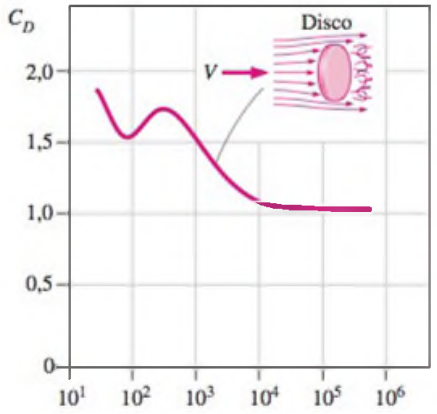


FIGURA 11–17
Os coeficientes de arrasto para a maioria das geometrias (mas nem todas) permanece essencialmente constante com números de Reynolds acima de aproximadamente 10^4.

O coeficiente de arrasto exibe comportamento diferente nas regiões de número de Reynolds baixo (escoamento lento), moderado (laminar) e alto (turbulento). Os efeitos de inércia são desprezíveis em escoamentos com baixos números de Reynolds ($Re < 1$), chamados de *escoamentos lentos*, e o fluido se distribui ao redor do corpo uniformemente. O coeficiente de arrasto neste caso é inversamente proporcional ao número de Reynolds. Para uma esfera ele é determinado como sendo

$$\textit{Esfera:} \qquad C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} \qquad (\mathrm{Re} \lesssim 1) \qquad \textbf{(11–11)}$$

Então a força de arrasto que age sobre um objeto esférico em baixos números de Reynolds se torna

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2} = \frac{24}{\mathrm{Re}} A \frac{\rho V^2}{2} = \frac{24}{\rho V D/\mu} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho V^2}{2} = 3\pi\mu V D \qquad \textbf{(11–12)}$$

que é conhecida como **Lei de Stokes**, em homenagem ao matemático e físico Britânico G. G. Stokes (1819–1903). Essa relação mostra que com números de Reynolds muito baixos, a força de arrasto que age sobre objetos esféricos é proporcional ao diâmetro, à velocidade e à viscosidade do fluido. Essa relação freqüentemente é aplicável a partículas de poeira no ar e partículas sólidas suspensas na água.

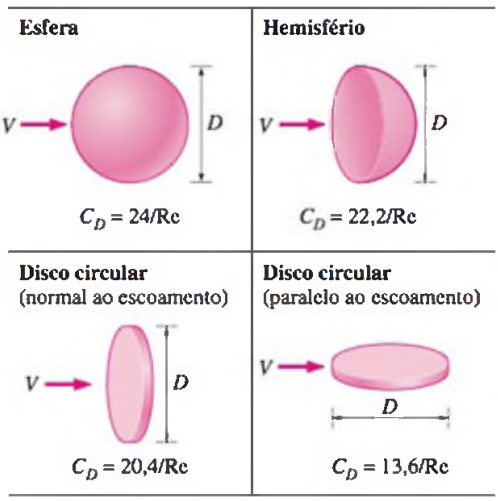


FIGURA 11–18
Coeficientes de arrasto C_D em baixas velocidades ($Re \leq 1$ onde $Re = VD/\nu$ e $A = \pi D^2/4$).

Os coeficientes de arrasto para escoamentos com baixo número de Reynolds sobre outras geometrias são dados na Figura 11–18. Note que para números de Reynolds baixos, a forma do corpo não tem uma influência muito importante no coeficiente de arrasto.

Os coeficientes de arrasto para vários corpos bidimensionais e tridimensionais são dados nas Tabelas 11–1 e 11–2 para grandes números de Reynolds. Podemos fazer várias observações a partir dessas tabelas sobre o coeficiente de arrasto com altos números de Reynolds. Em primeiro lugar, a *orientação* do corpo em relação à direção do escoamento tem uma grande influência sobre o coeficiente de arrasto. Por exemplo, o coeficiente de arrasto para escoamento sobre um hemisfério é 0,4 quando o lado esférico está voltado para o escoamento, mas aumenta três vezes atingindo 1,2 quando o lado chato está voltado para o escoamento (Figura 11–19). Isso mostra que a forma arredondada de uma *bala* tem outra finalidade além de perfurar: reduzir o arraste e assim aumentar o alcance da arma.

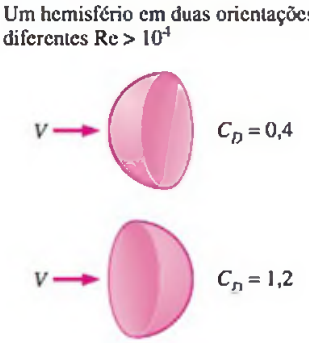


FIGURA 11–19
O coeficiente de arrasto de um corpo pode mudar drasticamente mudando-se a orientação do corpo (e, portanto, a forma) em relação à direção do escoamento.

Para corpos rombudos com arestas agudas, como, por exemplo, o escoamento sobre um bloco retangular ou uma placa plana normal ao escoamento, a separação ocorre nas bordas das superfícies da frente e de trás, sem uma alteração significativa no caráter do escoamento. Portanto, o coeficiente de arrasto desses corpos é mais ou menos independente do número de Reynolds. Observe que o coeficiente de arrasto de uma barra retangular longa pode ser reduzido quase pela metade, de 2,2 para 1,2 arredondando as arestas.

Sistemas Biológicos e Arrasto

O conceito de arrasto também tem conseqüências importantes para os sistemas biológicos. Por exemplo, os corpos dos *peixes*, especialmente aqueles que nadam muito rapidamente por longas distâncias (como o caso dos golfinhos), são altamente carenados para minimizar o arrasto (o coeficiente de arrasto dos golfinhos com base na área da superfície molhada é aproximadamente 0,0035, comparável com o valor para uma placa plana em escoamento turbulento). Portanto não surpreende o fato de que construímos submarinos que imitam o corpo de grandes peixes. Por outro lado, os peixes tropicais com sua fascinante beleza e elegância, nadam graciosamente apenas por curtas distâncias. Obviamente a graça, não a alta velocidade e arrasto, foi a consideração primária no projeto de seus corpos. Os pássaros nos ensinam uma lição sobre redução de arrasto, estendendo o bico para a frente e dobrando os pés para trás durante o vôo (Figura 11–20). Os aviões, que de certa forma se assemelham a grandes pássaros, recolhem as rodas após a decolagem para reduzir o arrasto e assim economizar combustível.

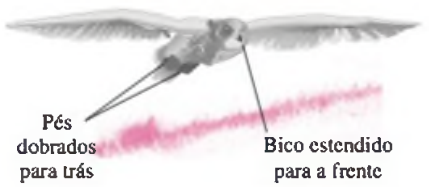


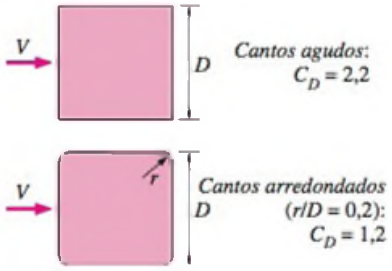
FIGURA 11–20
Os pássaros nos ensinam uma lição sobre redução de arrasto estendendo o bico para a frente e dobrando os pés para trás durante o vôo.

A estrutura flexível nas plantas permite que elas reduzam o arrasto durante ventos fortes mudando suas formas. Por exemplo, folhas largas se enrolam em uma

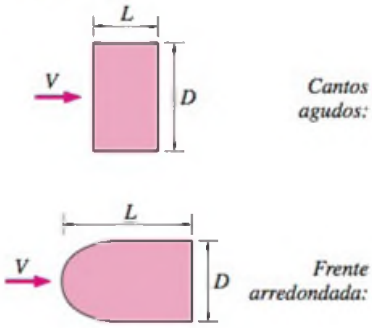
TABELA 11–1

Coeficientes de arrasto C_D de vários corpos bidimensionais para Re > 10^4 com base na área frontal $A = bD$, onde b é o comprimento na direção normal à página (para uso na relação da força de arrasto $F_D = C_D A\rho V^2/2$ onde V é a velocidade a montante)

Barra quadrada



Barra retangular

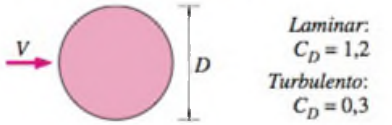


L/D	C_D
0,0*	1,9
0,1	1,9
0,5	2,5
1,0	2,2
2,0	1,7
3,0	1,3

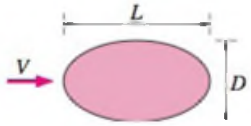
* Corresponde a uma placa fina

L/D	C_D
0,5	1,2
1,0	0,9
2,0	0,7
4,0	0,7

Haste circular (cilindro)

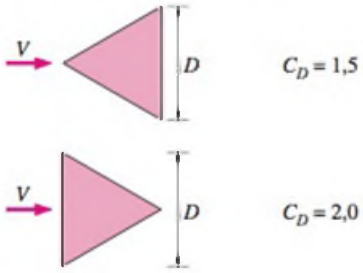


Haste elíptica

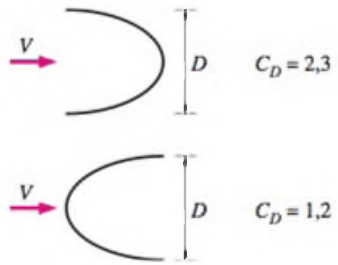


L/D	C_D Laminar	C_D Turbulento
2	0,60	0,20
4	0,35	0,15
8	0,25	0,10

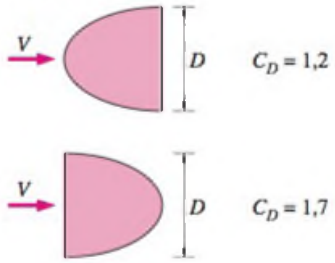
Haste triangular equilátera



Casca semicircular



Haste semicircular



forma cônica de baixo coeficiente de arrasto durante ventos fortes, e os galhos se juntam para reduzir o arrasto. Os caules flexíveis dobram sob a influência do vento para reduzir o arrasto; o momento fletor é reduzido quando se reduz a área frontal.

Se você já assistiu aos Jogos Olímpicos, provavelmente já observou muitas ocorrências de um esforço consciente dos competidores para reduzir o arrasto. Veja alguns exemplo: durante a corrida de 100 metros, os corredores mantêm seus dedos unidos e retos e movem suas mãos paralelamente à direção do movimento para reduzir o arrasto em suas mãos. Os nadadores que têm cabelos compridos cobrem a cabeça com uma touca apertada e macia para reduzir o arrasto da cabeça. Eles usam também trajes de natação apertados de uma única peça. Pessoas que cavalgam ou que andam de bicicleta inclinam o corpo para a frente o máximo possível para reduzir o arrasto (reduzindo tanto o coeficiente de arrasto quanto a área frontal). Esquiadores fazem o mesmo. Geralmente são usadas carenagens em motocicletas para reduzir o arrasto.

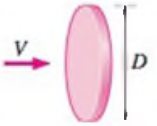
TABELA 11–2

Coeficientes de arrasto C_D representativos para vários corpos tridimensionais para Re > 10^4 com base na área frontal (para uso na relação da força de arrasto $F_D = C_D A\rho V^2/2$ onde V é a velocidade a montante)

Cubo, $A = D^2$

$C_D = 1{,}05$

Disco circular fino, $A = \pi D^2/4$

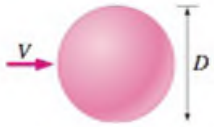


$C_D = 1{,}1$

Cone (para $\theta = 30°$), $A = \pi D^2/4$

$C_D = 0{,}5$

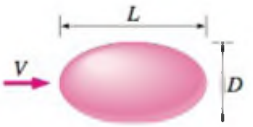
Hemisfério, $A = \pi D^2/4$



Laminar: $C_D = 0{,}5$
Turbulento: $C_D = 0{,}2$

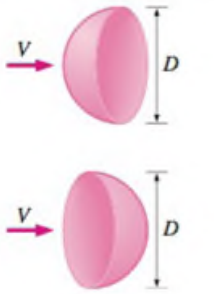
Veja a Figura 11–36 para C_D *versus* Re para esferas rugosas.

Elipsóide, $A = \pi D^2/4$



	C_D	
L/D	Laminar	Turbulento
0,75	0,5	0,2
1	0,5	0,2
2	0,3	0,1
4	0,3	0,1
8	0,2	0,1

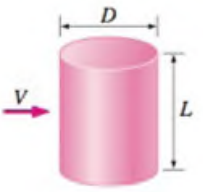
Hemisfério, $A = \pi D^2/4$



$C_D = 0{,}4$

$C_D = 1{,}2$

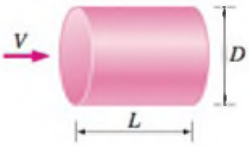
Cilindro curto, vertical, $A = LD$



L/D	C_D
1	0,6
2	0,7
5	0,8
10	0,9
40	1,0
∞	1,2

Valores para escoamento laminar

Cilindro curto, horizontal, $A = \pi D^2/4$



L/D	C_D
0,5	1,1
1	0,9
2	0,9
4	0,9
8	1,0

FIGURA 11–21
As linhas de corrente ao redor de um carro moderno projetado aerodinamicamente se assemelham às linhas de corrente ao redor do carro no escoamento potencial ideal (supõe-se atrito desprezível), exceto próximo da extremidade traseira, resultando em um baixo coeficiente de arrasto.
De G. M. Homsy, et al. (2000).

Coeficiente de Arrasto de Veículos

O termo *coeficiente de arrasto* é usado comumente em várias áreas da vida diária. Os fabricantes de automóveis tentam atrair os consumidores destacando os *baixos coeficientes de arrasto* de seus carros (Figura 11–21). Os coeficientes de arrasto dos veículos variam de aproximadamente 1,0 para grandes carretas a 0,4 para minivans e 0,3 para carros de passageiros. Em geral, quanto mais rombudo for o veículo, maior é o coeficiente de arrasto. A instalação de uma carenagem reduz o coeficiente de arrasto das carretas de carga em aproximadamente 20% tornando a área frontal mais carenada. Como regra prática, a porcentagem de economia de combustível devido à redução do arrasto é de aproximadamente metade da porcentagem de redução do arrasto.

Quando é desconsiderado o efeito da estrada no movimento do ar, a forma ideal de um *veículo* é a forma básica de uma gota de água, com um coeficiente de arrasto de aproximadamente 0,1 para o caso do escoamento turbulento. Mas essa forma precisa ser modificada para acomodar vários componentes externos necessários como rodas, espelhos retrovisores, eixos e maçanetas de portas. Além disso, o veículo deve ser alto o suficiente para que seja confortável e deve haver uma altura mínima do chão. Além disso, o veículo não pode ser muito longo para que possa caber nas garagens e estacionamentos. O controle de material e fabri-

TABELA 11–2 (Continuação)

Corpo carenado, $A = \pi D^2/4$

$C_D = 0{,}04$

Pára-quedas, $A = \pi D^2/4$

Árvore, A = área frontal

V, m/s	C_D
10	0,4–1,2
20	0,3–1,0
30	0,2–0,7

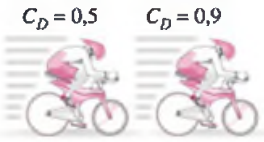
Pessoa (média)

Em pé: C_DA = 9 pés² = 0,84 m²
Sentado: C_DA = 6 pés² = 0,56 m²

Bicicletas

Reto:
A = 5,5 pés² = 0,51 m²
C_D = 1,1

$C_D = 0{,}5$ $C_D = 0{,}9$

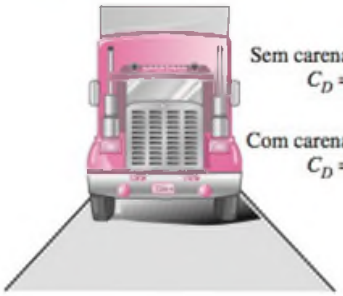


Pegando o vácuo:
A = 3,9 pés² = 0,36 m²
C_D = 0,50

Correndo:
A = 3,9 pés² = 0,36 m²
C_D = 0,9

Com carenagem:
A = 5,0 pés² = 0,46 m²
C_D = 0,12

Carreta, A = área frontal



Sem carenagem:
C_D = 0,96

Com carenagem:
C_D = 0,76

Automotivo, A = área frontal

Minivan:
C_D = 0,4

Carro de passeio:
C_D = 0,3

Prédios altos, A = área frontal

$C_D = 1{,}4$

cação requer uma minimização ou eliminação de qualquer volume "morto" que não possa ser utilizado. O resultado é uma forma que se assemelha muito mais a uma caixa do que a uma gota; essa era a forma dos primeiros automóveis com um coeficiente de arrasto de aproximadamente 0,8 na década de 1920. Isso não era um problema naqueles tempos, porque as velocidades eram baixas e o arrasto não era uma preocupação importante no projeto.

Os coeficientes de arrasto médios dos carros caiu para aproximadamente 0,70 na década de 1940, para 0,55 na década de 1970, para 0,45 na década de 1980, e para 0,30 na década de 1990 como resultado de melhorias nas técnicas de fabricação na moldagem da chapa de aço e prestando mais atenção à forma do carro e à carenagem (Figura 11–22). O coeficiente de arrasto para carros de corrida bem pro-

FIGURA 11–22
Esse lindo modelo 2005 do Toyota de aparência lisa, Prius, tem um coeficiente de arrasto de 0,26 — um dos mais baixos para carros de passageiros.
Cortesia da Toyota.

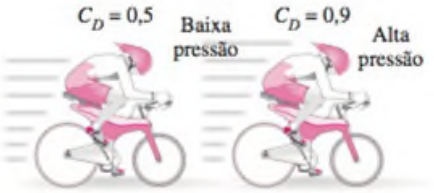


FIGURA 11–23
Os coeficientes de arrasto de corpos que seguem de perto outros corpos em movimento podem ser reduzidos consideravelmente devido ao *drafting* (isto é, entrando na região de baixa pressão criada pelo corpo que vai na frente).

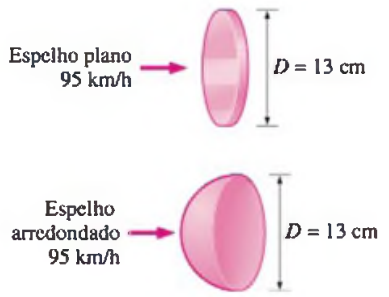


FIGURA 11–24
Esquema para o Exemplo 11–2.

jetados é de aproximadamente 0,2, mas isso é conseguido colocando-se o conforto do motorista em segundo plano. Observando que o limite inferior teórico de C_D é aproximadamente 0,1 e o valor para os carros de corrida é 0,2, parece que há poucas possibilidades de melhoria no coeficiente de arrasto para automóveis de passageiros em relação ao valor atual que é aproximadamente 0,3. Para caminhões e ônibus, o coeficiente de arrasto pode ser reduzido ainda mais otimizando-se os contornos da frente e de trás (por exemplo, arredondando-os) até o limite prático, mantendo inalterado o comprimento total do veículo.

Quando se viaja em um grupo, uma maneira esperta de reduzir o arrasto é "pegar o vácuo" ou ***drafting***, um fenômeno bem conhecido pelos corredores de bicicleta e de corrida de carros. Esse fenômeno consiste em se aproximar de um corpo em movimento por trás e ser *sugado* pela região de baixa pressão na traseira do corpo. O coeficiente de arrasto de um ciclista de corrida, por exemplo, pode ser reduzido de 0,9 para 0,5 pelo *drafting*, como mostra a Tabela 11–2 (Figura 11–23).

Podemos também ajudar a reduzir o coeficiente de arrasto de um veículo e, conseqüentemente, reduzir o consumo de combustível sendo motoristas mais conscientes. Por exemplo, a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade. Portanto, andar acima dos limites de velocidade nas estradas não só aumenta as chances de ser multado ou causar um acidente, mas também aumenta o consumo de combustível por km rodado. Portanto, dirigir em velocidades moderadas é seguro e econômico. Além disso, qualquer coisa que se estenda para fora do carro, mesmo um braço, aumenta o coeficiente de arrasto. Dirigir com os vidros abertos também aumenta o arrasto e o consumo de combustível. Nas rodovias, pode-se economizar combustível em dias quentes usando o ar-condicionado em lugar de rodar com os vidros abertos. Geralmente a turbulência e o arrasto adicional gerado pelos vidros abertos consomem mais combustível do que o ar-condicionado.

Superposição

As formas de muitos corpos encontrados na prática não são simples. Mas esses corpos podem ser tratados convenientemente nos cálculos de força de arrasto considerando-os compostos por dois ou mais corpos simples. Por exemplo, uma antena parabólica de satélite montada sobre um teto com uma barra cilíndrica, pode ser considerada como uma combinação de um corpo hemisférico e um cilindro. Então o coeficiente de arrasto do corpo pode ser determinado aproximadamente usando-se a **superposição**. Uma abordagem simplista como essa não leva em conta os efeitos dos componentes uns sobre os outros, portanto os resultados obtidos deverão ser interpretados adequadamente.

EXEMPLO 11–2 Efeito do Design do Espelho Retrovisor sobre o Consumo de Combustível de um Carro

Como parte dos esforços contínuos para reduzir o coeficiente de arrasto e assim aumentar a eficiência no consumo de combustível dos carros, o projeto dos espelhos retrovisores laterais tem sido alterado drasticamente desde uma simples placa circular até uma forma carenada. Determine a quantidade de combustível e o dinheiro economizado por ano como resultado da substituição de um espelho retrovisor plano de 13 cm de diâmetro por um outro com um fundo hemisférico (Figura 11–24). Suponha que o carro percorra 24.000 km por ano a uma velocidade média de 95 km/h. Considere a densidade e o preço da gasolina 0,8 kg/L e \$0,60/L, respectivamente, sendo o valor calórico da gasolina 44.000 kJ/kg e a eficiência global do motor 30%.

SOLUÇÃO O espelho plano do carro é substituído por outro com fundo hemisférico. Deve-se calcular a quantidade de combustível e o dinheiro economizado por ano.

Hipóteses **1** O carro percorre 24.000 km por ano a uma velocidade média de 95 km/h. **2** O efeito da carroceria do carro no escoamento ao redor do espelho é desprezível (não há interferência).

Propriedades As densidades do ar e da gasolina são considerados como 1,20 kg/m^3 e 800 kg/m^3, respectivamente. O valor calórico da gasolina é considerado como 44.000 kJ/kg. Os coeficientes de arrasto C_D são 1,1 para um disco circular e 0,4 para um corpo hemisférico.

Análise A força de arrasto agindo sobre um corpo é determinada a partir de

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2}$$

onde A é a área frontal do corpo, que é $A = \pi D^2/4$ para espelhos planos e arredondados. A força de arrasto que age sobre o espelho plano é

$$F_D = 1{,}1 \frac{\pi(0{,}13\ \text{m})^2}{4} \frac{(1{,}20\ \text{kg/m}^3)(95\ \text{km/h})^2}{2} \left(\frac{1\ \text{m/s}}{3{,}6\ \text{km/h}}\right)^2 \left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 6{,}10\ \text{N}$$

Observando que o trabalho é igual à força vezes a distância, a quantidade de trabalho realizado para vencer essa força de arrasto e a quantidade de energia necessária para uma distância de 24.000 km são

$$W_{\text{arrasto}} = F_D \times L = (6{,}10\ \text{N})(24.000\ \text{km/ano}) = 146.400\ \text{kJ/ano}$$

$$E_{\text{gastou}} = \frac{W_{\text{arrasto}}}{\eta_{\text{carro}}} = \frac{146.400\ \text{kJ/ano}}{0{,}3} = 488.000\ \text{kJ/ano}$$

Então o custo do combustível que fornece essa energia é

$$\text{Quant. de combustível} = \frac{m_{\text{combustível}}}{\rho_{\text{combustível}}} = \frac{E_{\text{arrasto}}/\text{HV}}{\rho_{\text{combustível}}} = \frac{(488.000\ \text{kJ/ano})/(44.000\ \text{kJ/kg})}{0{,}8\ \text{kg/L}}$$

$$= 13{,}9\ \text{L/ano}$$

$$\text{Custo} = (\text{Quant. de comb.})(\text{Custo por un.}) = (13{,}9\ \text{L/ano})(\$0{,}60/\text{L}) = \$8{,}32/\text{ano}$$

Ou seja, o carro usa 13,9 L de gasolina a um custo de $8,32 por ano para vencer o arrasto gerado pelo espelho plano preso na lateral do carro.

A força de arrasto e o trabalho executado para vencê-la são diretamente proporcionais ao coeficiente de arrasto. Então a redução percentual no consumo de combustível devido à substituição do espelho é igual à redução percentual no coeficiente de arrasto:

$$\text{Taxa de redução} = \frac{C_{D,\text{plana}} - C_{D,\text{hemisfério}}}{C_{D,\text{plana}}} = \frac{1{,}1 - 0{,}4}{1{,}1} = 0{,}636$$

$$\text{Redução do combustível} = (\text{Redução na taxa})(\text{Quant. de combustível})$$

$$= 0{,}636(13{,}9\ \text{L/ano}) = \mathbf{8{,}84\ L/ano}$$

$$\text{Redução no custo} = (\text{Redução na taxa})(\text{Custo}) = 0{,}636(\$8{,}32/\text{ano}) = \mathbf{\$5{,}29/ano}$$

Como um carro típico tem dois espelhos retrovisores laterais, são economizados mais de $10 por ano em gasolina substituindo os espelhos planos por hemisféricos.

Discussão Observe por meio deste exemplo que podem ser obtidas reduções significativas no arrasto e consumo de combustível, carenando a forma de vários componentes e a forma do carro inteiro. Portanto não é surpresa o fato de que as arestas agudas sejam substituídas por contornos arredondados nos carros mais modernos. Isso também explica por que os grandes aviões recolhem o trem de pouso após a decolagem e os pequenos aviões usam coberturas carenadas ao redor de suas rodas.

O Exemplo 11–2 é um indicativo do tremendo esforço feito nos anos recentes no reprojeto de várias partes dos carros, como a forma dos vidros, as maçanetas das portas, o pára-brisa e as extremidades da frente e de trás para reduzir o arrasto aerodinâmico. Para um carro que se move em uma estrada nivelada a velocidade constante, a potência desenvolvida pelo motor é usada para

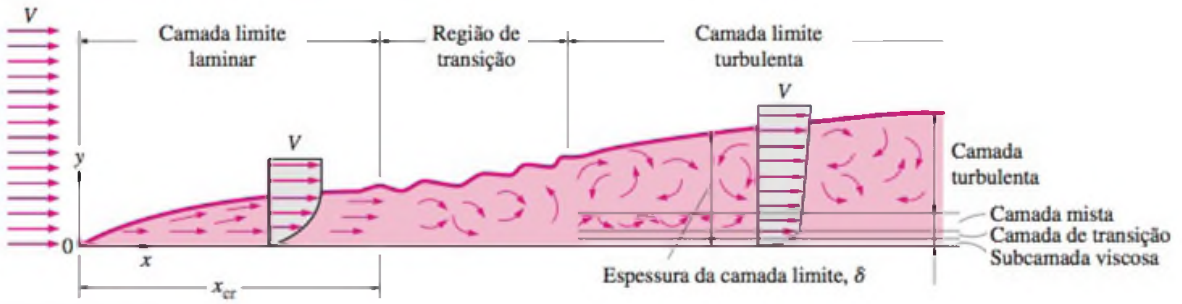


FIGURA 11–25
O desenvolvimento da camada limite para escoamento sobre uma placa plana e os diferentes regimes de escoamento. Não está em escala.

vencer a resistência de rolagem, o atrito entre as partes móveis, o arrasto aerodinâmico e o acionamento de equipamentos auxiliares. O arrasto aerodinâmico é desprezível em baixas velocidades, mas torna-se significativo em velocidades acima de 45 km/h. A redução da área frontal dos carros (com o desconforto para os motoristas de estatura maior) tem contribuído muito para a redução do arrasto e do consumo de combustível.

11–5 • ESCOAMENTO PARALELO SOBRE PLACAS PLANAS

Considere o escoamento de um fluido sobre uma *placa plana*, como mostra a Figura 11–25. Superfícies levemente curvadas como as pás de uma turbina também podem ser aproximadas como placas planas com precisão razoável. A coordenada x é medida ao longo da superfície da placa desde o bordo de ataque da placa na direção do escoamento e y é medido a partir da superfície na direção normal. O fluido se aproxima da placa na direção x com uma velocidade uniforme V, que é equivalente à velocidade sobre a placa em um ponto distante da superfície.

Para simplificar a discussão, podemos considerar o fluido como sendo formado por camadas adjacentes umas sobre as outras. A velocidade das partículas na primeira camada de fluido adjacente à placa se torna zero devido à condição de não-escorregamento. Essa camada sem movimento retarda as partículas da camada vizinha de fluido devido ao atrito entre as partículas dessas duas camadas de fluido adjacentes com diferentes velocidades. Essa camada de fluido então retarda as moléculas da próxima camada, e assim por diante. Assim, a presença da placa é sentida até uma certa distância normal δ da placa além da qual a velocidade da corrente livre permanece virtualmente inalterada. Conseqüentemente, a componente x da velocidade do fluido varia desde 0 em $y = 0$ até aproximadamente V em $y = \delta$ (Figura 11–26).

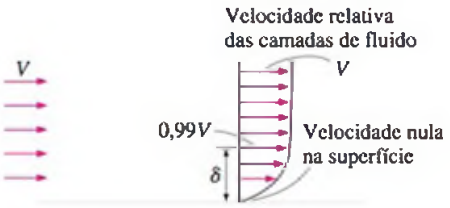


FIGURA 11–26
O desenvolvimento de uma camada limite sobre uma superfície é devido à condição de não-escorregamento e ao atrito.

A região do escoamento acima da placa limitada por δ na qual são sentidos os efeitos das forças de cisalhamento viscoso causadas pela viscosidade do fluido é chamada de **camada limite de velocidade.** A *espessura δ da camada limite* é definida tipicamente como a distância y a partir da superfície na qual $u = 0{,}99V$.

A linha hipotética de $u = 0{,}99V$ divide o escoamento sobre uma placa em duas regiões: a **região da camada limite**, na qual os efeitos viscosos e as alterações de velocidade são significativas, e a **região de escoamento irrotacional,** na qual os efeitos de atrito são desprezíveis e a velocidade permanece essencialmente constante.

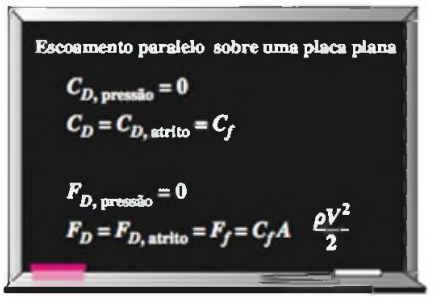


FIGURA 11–27
Para escoamento paralelo sobre uma placa plana, o arrasto de pressão é zero, e portanto o coeficiente de arrasto é igual ao coeficiente de atrito e a força de arrasto é igual à força de atrito.

Para o escoamento paralelo sobre uma placa plana, o arrasto de pressão é zero, e portanto o coeficiente de arrasto é igual ao *coeficiente de arrasto de atrito*, ou simplesmente *o coeficiente de atrito* (Figura 11–27). Ou seja,

Placa plana:
$$C_D = C_{D,\text{atrito}} = C_f \qquad (11\text{–}13)$$

Uma vez disponível o coeficiente médio de atrito C_f, a força de arrasto (ou atrito) sobre a superfície pode ser determinada a partir de

Força de atrito sobre uma placa plana: $$F_D = F_f = \tfrac{1}{2} C_f A \rho V^2 \quad (11\text{–}14)$$

onde A é a área de superfície da placa exposta ao escoamento do fluido. Quando ambos os lados de uma placa fina são submetidos ao escoamento, A torna-se a área total das superfícies superior e inferior. Note que o valor local do coeficiente de atrito $C_{f,x}$, em geral, varia com a posição ao longo da superfície.

Na Figura 11–25 são dados também perfis típicos de velocidade média em um escoamento laminar e turbulento. Note que o perfil de velocidade em escoamento turbulento é muito mais cheio do que aquele no escoamento laminar, com uma queda brusca junto à superfície. A camada limite turbulenta é formada por quatro regiões caracterizadas pela distância em relação à parede. A camada muito fina junto à parede onde os efeitos viscosos são dominantes é a **subcamada viscosa**. O perfil de velocidade nesta camada é aproximadamente *linear*, e o escoamento é retilíneo. Em seguida à subcamada viscosa está a **camada de transição**, na qual os efeitos turbulentos vão se tornando significativos, mas o escoamento ainda é dominado por efeitos viscosos. Acima da camada de transição está a **camada mista**, na qual os efeitos turbulentos são muito mais significativos, mas ainda não dominantes. Acima desta está a **camada turbulenta** na qual os efeitos turbulentos dominam os efeitos viscosos. Note que o perfil da camada limite turbulenta sobre uma placa plana se assemelha muito ao perfil da camada limite no escoamento turbulento em tubo, totalmente estabelecido.

A transição do escoamento laminar para turbulento depende da *geometria da superfície,* da *rugosidade da superfície,* da *velocidade a montante* da *temperatura da superfície* e do *tipo de fluido,* entre outras coisas, e é melhor caracterizado pelo número de Reynolds. O número de Reynolds a uma distância x do bordo de ataque de uma placa plana é expresso por

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{V x}{\nu} \quad (11\text{–}15)$$

onde V é a velocidade a montante e x é o comprimento característico da geometria, que, para uma placa plana, é o comprimento da placa na direção do escoamento. Note que, diferentemente do escoamento em tubo, o número de Reynolds varia para uma placa plana ao longo do escoamento, chegando ao valor $\mathrm{Re}_L = VL/\nu$ no fim da placa. Para qualquer ponto em uma placa plana, o comprimento característico é a distância x do ponto ao bordo de ataque na direção do escoamento.

Para o escoamento sobre uma placa plana, a transição do escoamento laminar para turbulento começa aproximadamente com $\mathrm{Re} \cong 1 \times 10^5$, mas não se torna completamente turbulento enquanto o número de Reynolds não atingir valores muito mais altos, tipicamente ao redor de 3×10^6 (Capítulo 10). Em análises de engenharia, um valor geralmente aceito para o número de Reynolds crítico é

$$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}} = \frac{\rho V x_{\mathrm{cr}}}{\mu} = 5 \times 10^5$$

O valor real do número de Reynolds crítico da engenharia para uma placa plana pode variar desde aproximadamente 10^5 até 3×10^6 dependendo da rugosidade da superfície, do nível de turbulência e da variação de pressão ao longo da superfície, conforme foi discutido em mais detalhes no Capítulo 10.

Coeficiente de Atrito

O coeficiente de atrito para escoamento laminar sobre uma placa plana pode ser determinado teoricamente resolvendo numericamente as equações da conservação da massa da conservação do momento (Capítulo 10). No entanto, para escoamento turbulento, ele deve ser determinado experimentalmente e expresso por correlações empíricas.

O coeficiente de atrito local *varia* ao longo da superfície da placa plana em conseqüência das alterações na camada limite de velocidade na direção do escoa-

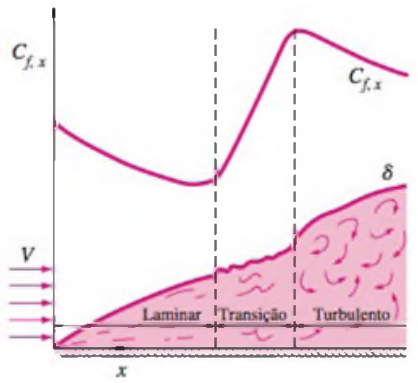


FIGURA 11–28
A variação do coeficiente de atrito local para escoamento sobre uma placa plana. Note que a escala vertical da camada limite está bastante exagerada neste esboço.

mento. Geralmente estamos interessados na força de arrasto sobre a superfície *inteira*, que pode ser determinada usando o coeficiente de atrito *médio*. Mas às vezes estamos interessados também na força de arrasto em uma certa posição e, nesses casos, precisamos saber o valor *local* do coeficiente de atrito. Tendo isso em mente, apresentamos correlações tanto para coeficientes de atrito local (identificado com um subscrito x) quanto para coeficientes de atrito médios sobre uma placa plana para condições de escoamento *laminar, turbulento* e *laminar e turbulento combinados*. Uma vez disponíveis os valores locais, o coeficiente de atrito *médio* para a placa inteira pode ser determinado por integração a partir de

$$C_f = \frac{1}{L}\int_0^L C_{f,x}\,dx \tag{11–16}$$

Com base em análise, a espessura da camada limite e o coeficiente de atrito local na posição x do escoamento laminar sobre uma placa plana foram determinados no Capítulo 10 sendo

$$\textit{Laminar:}\quad \delta = \frac{4{,}91x}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \quad \text{e} \quad C_{f,x} = \frac{0{,}664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}, \quad \mathrm{Re}_x < 5\times 10^5 \tag{11–17}$$

As relações correspondentes para escoamento turbulento são

$$\textit{Turbulento:}\quad \delta = \frac{0{,}38x}{\mathrm{Re}_x^{1/5}} \quad \text{e} \quad C_{f,x} = \frac{0{,}059}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}, \quad 5\times 10^5 \le \mathrm{Re}_x \le 10^7 \tag{11–18}$$

onde x é a distância a partir do bordo de ataque da placa e $\mathrm{Re}_x = Vx/\nu$ é o número de Reynolds na posição x. Note que $C_{f,x}$ é proporcional a $1/\mathrm{Re}_x^{1/2}$ e, portanto, a $x^{-1/2}$ para escoamento laminar e é proporcional a $x^{-1/5}$ para escoamento turbulento. Em qualquer dos casos, $C_{f,x}$ é infinito no bordo de ataque ($x = 0$), e portanto as Equações 11–17 e 11–18 não são válidas próximo ao bordo de ataque. A variação da espessura δ da camada limite e do coeficiente de atrito $C_{f,x}$ ao longo de uma placa plana é mostrado na Figura 11–28. Os coeficientes de atrito locais são mais altos no escoamento turbulento do que no escoamento laminar devido à mistura intensa que ocorre na camada limite turbulenta. Note que $C_{f,x}$ alcança seus valores mais altos quando o escoamento se torna totalmente turbulento, e então diminui por um fator de $x^{-1/5}$ na direção do escoamento, como está ilustrado na figura.

O coeficiente de atrito *médio* sobre toda a placa é determinado substituindo-se as Equações 11–17 e 11–18 na Equação 11–16 e fazendo as integrações (Figura 11–29). Obtemos

$$\textit{Laminar:}\quad C_f = \frac{1{,}33}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} \qquad \mathrm{Re}_L < 5\times 10^5 \tag{11–19}$$

$$\textit{Turbulento:}\quad C_f = \frac{0{,}074}{\mathrm{Re}_L^{1/5}} \qquad 5\times 10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7 \tag{11–20}$$

A primeira dessas relações nos dá o coeficiente de atrito médio para a placa inteira quando o escoamento é *laminar* sobre a placa *inteira*. A segunda relação nos dá o coeficiente de atrito médio para a placa inteira somente quando o escoamento é *turbulento* sobre a placa *inteira* ou quando a região de escoamento laminar da placa é muito pequena em relação à região de escoamento turbulento (ou seja, $x_{cr} << L$ onde o comprimento da placa x_{cr} sobre o qual o escoamento é laminar pode ser determinado por meio de $\mathrm{Re}_{cr} = 5\times 10^5 = Vx_{cr}/\nu$).

Em alguns casos, uma placa plana é suficientemente longa para o escoamento se tornar turbulento, mas não longa o bastante para se desprezar a região de escoamento laminar. Nesses casos, o coeficiente de atrito *médio* sobre a placa inteira é determinado integrando-se a Equação 11–16 sobre duas partes: a região laminar $0 \le x \le x_{cr}$ e a região turbulenta $x_{cr} < x \le L$ como

$$C_f = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{cr}} C_{f,x,\,\text{laminar}}\,dx + \int_{x_{cr}}^{L} C_{f,x,\,\text{turbulento}}\,dx\right) \tag{11–21}$$

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{1}{L}\int_0^L C_{f,x}\,dx \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L \frac{0.664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}\,dx \\ &= \frac{0.664}{L}\int_0^L \left(\frac{Vx}{\nu}\right)^{-1/2} dx \\ &= \frac{0.664}{L}\left(\frac{V}{\nu}\right)^{-1/2}\left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^L \\ &= \frac{2\times 0.664}{L}\left(\frac{V}{\nu L}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1.328}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} \end{aligned}$$

FIGURA 11–29
O coeficiente de atrito médio sobre uma superfície é determinado integrando-se o coeficiente de atrito local sobre a superfície inteira. Os valores mostrados aqui são para camada limite laminar sobre uma placa plana.

Note que incluímos a região de transição com a região turbulenta. Uma vez mais, tomando o número de Reynolds crítico como $Re_{cr} = 5 \times 10^5$ e fazendo essas integrações após substituir as expressões indicadas, o coeficiente de atrito *médio* sobre *toda* a placa é determinado como

$$C_f = \frac{0{,}074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1742}{Re_L} \qquad 5 \times 10^5 \le Re_L \le 10^7 \qquad (11\text{–}22)$$

As constantes nessa relação serão diferentes para diferentes números de Reynolds críticos. E também, supomos que as superfícies são *lisas* e que a corrente livre tenha uma turbulência com intensidade muito baixa. Para o escoamento laminar, o coeficiente de atrito depende somente do número de Reynolds e a rugosidade da superfície não tem nenhum efeito. No entanto, para escoamento turbulento, a rugosidade da superfície faz o coeficiente de atrito aumentar várias vezes, até o ponto em que no regime totalmente turbulento o coeficiente de atrito é uma função apenas da rugosidade da superfície e é independente do número de Reynolds (Figura 11–30). Isto é análogo ao escoamento em tubos.

Uma curva de ajuste de dados experimentais para o coeficiente de atrito médio nesse regime é dada por Schlichting como

Regime totalmente turbulento:
$$C_f = \left(1{,}89 - 1{,}62 \log \frac{\varepsilon}{L}\right)^{-2.5} \qquad (11\text{–}23)$$

onde ε é a rugosidade da superfície e L é o comprimento da placa na direção do escoamento. Na falta de coisa melhor, essa relação pode ser usada para escoamento turbulento em superfícies rugosas para $Re > 10^6$, especialmente quando $\varepsilon/L > 10^{-4}$.

Os coeficientes de atrito C_f para escoamento paralelo sobre placas planas lisas e rugosas são mostrados na Figura 11–31 para escoamentos laminar e turbulento. Note que C_f aumenta várias vezes com a rugosidade no escoamento turbulento. Observe também que C_f é independente do número de Reynolds na região completamente rugosa. Esse diagrama é análogo ao diagrama da placa plana do ábaco de Moody para escoamentos em tubo.

Rugosidade Relativa, ε/L	Coeficiente de Atrito, C_f
0.0*	0,0029
1×10^{-5}	0,0032
1×10^{-4}	0,0049
1×10^{-3}	0,0084

* Superfície lisa para $Re = 10^7$. Outros dados calculados pela Equação 11–23 para escoamento completamente rugoso.

FIGURA 11–30
Para escoamento turbulento, a rugosidade da superfície pode fazer o coeficiente de atrito aumentar várias vezes.

EXEMPLO 11–3 Escoamento de Óleo Quente sobre uma Placa Plana

Óleo de motor a 40°C escoa sobre uma placa plana de 5 m de comprimento com uma velocidade de corrente livre de 2 m/s (Figura 11–32). Determine a força de arrasto que age sobre a placa por unidade de largura.

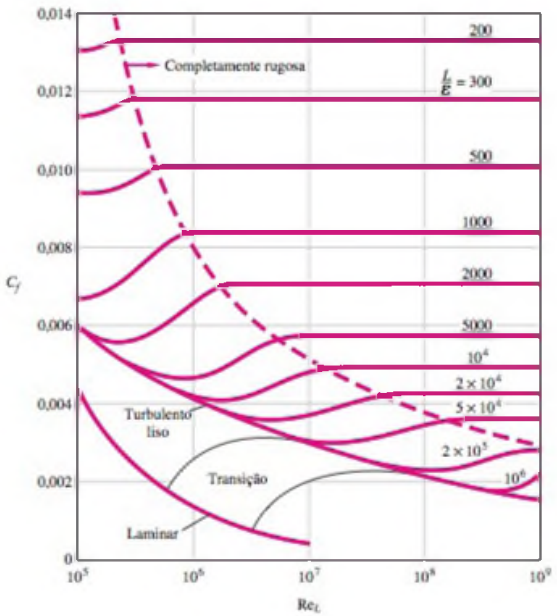


FIGURA 11–31
Coeficiente de atrito para escoamento paralelo sobre placas planas lisas e rugosas.
De White (2003).

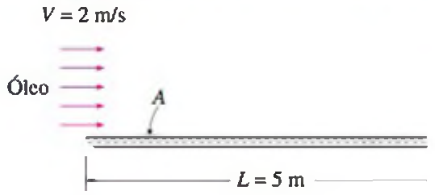


FIGURA 11–32
Esquema para o Exemplo 11–3.

SOLUÇÃO Óleo de motor escoa sobre uma placa plana. Deve ser determinada a força de arrasto por unidade de largura da placa.
Hipóteses 1 O escoamento é permanente e incompressível. **2** O número de Reynolds crítico é $Re_{cr} = 5 \times 10^5$.
Propriedades A densidade e a viscosidade cinemática do óleo de motor a 40°C são $\rho = 876$ kg/m^3 e $\nu = 2{,}485 \times 10^{-4}$ m^2/s.
Análise Observando que $L = 5$ m, o número de Reynolds no fim da placa é

$$Re_L = \frac{VL}{\nu} = \frac{(2 \text{ m/s})(5 \text{ m})}{2{,}485 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}} = 4{,}024 \times 10^4$$

que é menor do que o número de Reynolds crítico. Portanto temos *escoamento laminar* sobre toda a placa e o coeficiente de atrito médio é (Figura 11–29)

$$C_f = 1{,}328 Re_L^{-0.5} = 1{,}328 \times (4{,}024 \times 10^4)^{-0.5} = 0{,}00662$$

Observando que o arrasto de pressão é zero e, portanto, $C_D = C_f$ para escoamento paralelo sobre uma placa plana, a força de arrasto que age na placa por unidade de largura torna-se

$$F_D = C_f A \frac{\rho V^2}{2} = 0{,}00662(5 \times 1 \text{ m}^2) \frac{(876 \text{ kg/m}^3)(2 \text{ m/s})^2}{2} \left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) = \mathbf{58{,}0 \text{ N}}$$

A força de arrasto total que age sobre a placa inteira pode ser determinada multiplicando-se o valor que acabamos de obter pela largura da placa.
Discussão A força por unidade de largura corresponde ao peso de uma massa de aproximadamente 6 kg. Portanto, uma pessoa que aplicar uma força igual e oposta à placa para impedir que ela se mova, terá a sensação de que está usando a força necessária para impedir que uma massa de 6kg caia.

11–6 • ESCOAMENTO SOBRE CILINDROS E ESFERAS

Na prática encontramos freqüentemente escoamento sobre cilindros e esferas. Por exemplo, os tubos em um trocador de calor do tipo casco-e-tubo envolvem tanto o *escoamento interno* através dos tubos quanto o *escoamento externo* sobre os tubos; ambos os escoamentos devem ser considerados na análise do trocador de calor. Além disso, muitos esportes como o futebol, tênis e golfe envolvem escoamento sobre objetos esféricos.

O comprimento característico para um cilindro circular ou uma esfera é tomado como o *diâmetro externo D*. Assim, o número de Reynolds é definido como $Re = VD/\nu$ onde V é a velocidade uniforme do fluido quando ele se aproxima do cilindro ou esfera. O número de Reynolds crítico para escoamento sobre um cilindro circular ou de uma esfera é, aproximadamente, $Re_{cr} \cong 2 \times 10^5$. Ou seja, a camada limite permanece laminar para $Re \lesssim 2 \times 10^5$, aproximadamente, e torna-se turbulenta para $Re \gtrsim 2 \times 10^5$.

O escoamento transversal sobre um cilindro apresenta padrões de escoamento complexos, como está ilustrado na Figura 11–33. O fluido que se aproxima do cilindro se divide e envolve o cilindro, formando uma camada limite que engloba o

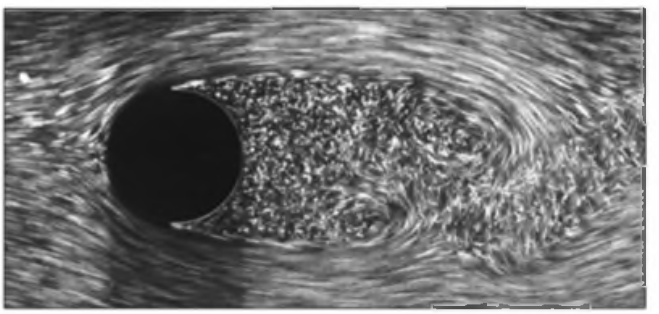


FIGURA 11–33
Separação da camada limite laminar com uma esteira turbulenta; escoamento sobre um cilindro circular com Re = 2000.
Cortesia de ONERA, fotografado por Werlé.

cilindro. As partículas de fluido no plano médio atingem o cilindro no ponto de estagnação, fazendo o fluido parar completamente, aumentando assim a pressão nesse ponto. A pressão diminui na direção do escoamento enquanto a velocidade do fluido aumenta.

Em velocidades a montante muito baixas ($Re \lesssim 1$), o fluido envolve completamente o cilindro e os dois ramos do fluido voltam a se encontrar no lado de trás do cilindro de uma forma bem ordenada. Assim, o fluido segue a curvatura do cilindro. Em velocidades mais altas, o fluido ainda envolve o cilindro no lado da frente, mas ele está muito rápido para permanecer ligado à superfície à medida que se aproxima do topo (ou base) do cilindro. Conseqüentemente, a camada limite se separa da superfície, formando uma região de separação atrás do cilindro. O escoamento na região da esteira é caracterizado por formação periódica de vórtices e pressões muito mais baixas do que a pressão do ponto de estagnação.

A natureza do escoamento através de um cilindro ou esfera afeta fortemente o coeficiente de arrasto total C_D. Tanto o *arrasto de atrito* quanto o *arrasto de pressão* podem ser significativos. A pressão alta nas vizinhanças do ponto de estagnação e a pressão baixa no lado oposto na esteira produzem uma força resultante no corpo na direção do escoamento. A força de arrasto é devida principalmente ao arrasto de atrito com baixos números de Reynolds ($Re < 10$) e ao arrasto de pressão com altos números de Reynolds ($Re > 5000$). Ambos os efeitos são significativos em números de Reynolds intermediários.

Os coeficientes de arrasto C_D médios para escoamento transversal sobre um cilindro circular único liso e uma esfera são dados na Figura 11–34. As curvas mostram comportamentos diferentes em intervalos diferentes de números de Reynolds:

- Para $Re \lesssim 1$, temos o escoamento lento (Capítulo 10), e o coeficiente de arrasto diminui quando o número de Reynolds aumenta. Para uma esfera, ele é $C_D = 24/Re$. Não há separação de escoamento nesse regime.
- Aproximadamente em $Re = 10$, começa a ocorrer a separação na parte de trás do corpo com desprendimento de vórtices começando em $Re < 90$. A região de separação aumenta com o aumento do número de Reynolds até aproximadamente $Re = 10^3$. Nesse ponto, o arrasto é devido principalmente (aproximadamente 95%) ao arrasto de pressão. O coeficiente de arrasto continua a diminuir com o aumento do número de Reynolds nesse intervalo de $10 < Re < 10^3$. (Uma diminuição no coeficiente de arrasto não indica necessariamente uma diminuição no arrasto. A força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade, e o aumento da velocidade com números de Reynolds mais altos geralmente desloca ainda mais a diminuição no coeficiente de arrasto.)
- No intervalo moderado de $10^3 < Re < 10^5$, o coeficiente de arrasto permanece relativamente constante. Esse comportamento é característico de corpos rombudos. O escoamento na camada limite é laminar nesse intervalo, mas o escoamento na região separada depois do cilindro ou da esfera é altamente turbulento com uma ampla esteira turbulenta.

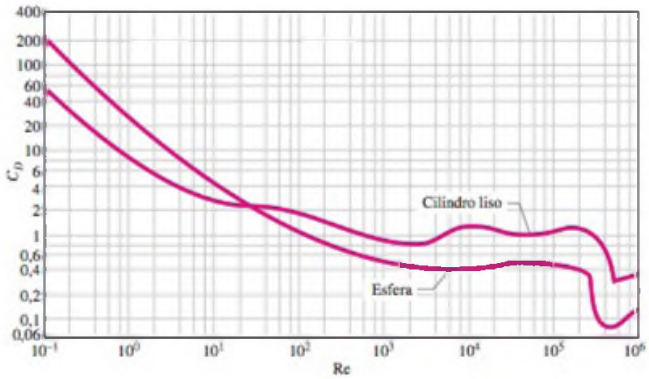
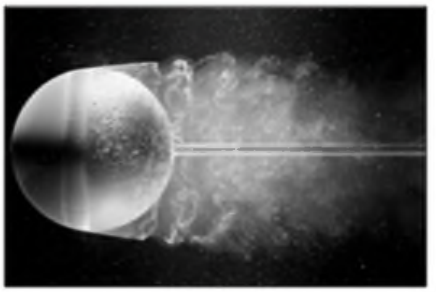
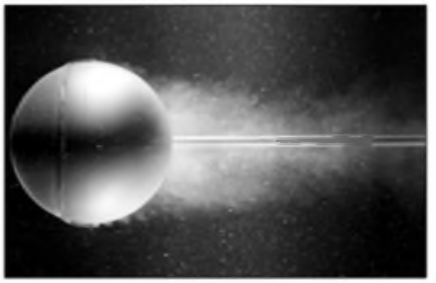


FIGURA 11–34
Coeficiente de arrasto médio para escoamento transversal sobre um cilindro circular liso e uma esfera lisa.
De H. Schlichting, Boundary Layer Theory 7e. © 1979 The McGraw-Hill Companies, Inc. Usado com permissão.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 11–35
Visualização do escoamento sobre (a) uma esfera lisa com Re = 15.000, e (b) uma esfera com Re = 30.000 com um indutor de turbulência. O atraso na separação da camada limite é visto claramente comparando-se as duas fotografias.
Cortesia ONERA, fotografia de Werlé.

- Há uma queda brusca no coeficiente de arrasto em algum ponto no intervalo de $10^5 < \text{Re} < 10^6$ (geralmente ao redor de 2×10^5). Essa grande redução no valor de C_D é devida ao escoamento na camada limite que vai se tornando *turbulenta*, movendo o ponto de separação diminui mais para trás do corpo, reduzindo o tamanho da esteira e reduzindo assim a intensidade do arrasto de pressão. Isto está em contraste com os corpos carenados, que experimentam um aumento no coeficiente de arrasto (principalmente devido ao arrasto de atrito) quando a camada limite se torna turbulenta.

A separação de escoamento ocorre aproximadamente em $\theta \cong 80°$ (medido a partir do ponto de estagnação da frente de um cilindro) quando a camada limite é *laminar* e, aproximadamente, em $\theta \cong 140°$ quando ela é *turbulenta* (Figura 11–35). O atraso da separação no escoamento turbulento é causado pelas rápidas flutuações do fluido na direção transversal, o que permite que a camada limite turbulenta avance mais ao longo da superfície antes de ocorrer a separação, resultando em uma esteira mais estreita e em um arrasto de pressão menor. Tenha em mente que o escoamento turbulento tem um perfil de velocidade mais cheio comparado com o caso laminar, assim ele requer um gradiente de pressão adversa mais forte para superar o momento adicional junto à parede. No intervalo de números de Reynolds onde o escoamento muda de laminar para turbulento, até mesmo a força de arrasto F_D diminui à medida que a velocidade (e portanto o número de Reynolds) aumenta. Isso resulta em uma diminuição brusca no arrasto de um corpo em vôo (às vezes chamado de *crise de arrasto*) e causa instabilidades no vôo.

Efeito da Rugosidade da Superfície

Mencionamos anteriormente que a *rugosidade da superfície*, em geral, aumenta o coeficiente de arrasto no escoamento turbulento. Esse é o caso especialmente dos corpos carenados. Para corpos rombudos como um cilindro circular ou uma esfera, no entanto, um aumento na rugosidade da superfície pode na realidade *diminuir* o coeficiente de arrasto, como está ilustrado na Figura 11–36 para uma esfera. Isso é feito induzindo a turbulência na camada limite para um número de Reynolds mais baixo, fazendo assim o fluido fechar atrás do corpo, estreitando a esteira e reduzindo consideravelmente o arrasto de pressão. Isso resulta em um coeficiente de arrasto muito menor e, portanto, força de arrasto muito menor para um cilindro ou esfera com superfície rugosa em um certo intervalo do número de Reynolds comparados com outros de superfície lisa e tamanho idêntico na mesma velocidade. Por exemplo, em $\text{Re} = 2 \times 10^5$, $C_D \cong 0{,}1$ para uma esfera rugosa com $\varepsilon/D = 0{,}0015$, enquanto $C_D \cong 0{,}5$ para uma esfera lisa. Portanto, o coeficiente de arrasto nesse caso é reduzido por um fator 5 simplesmente acrescentando rugosidade à superfície. Observe, no entanto, que $\text{Re} = 10^6$, $C_D \cong 0{,}4$ para uma esfera muito rugosa

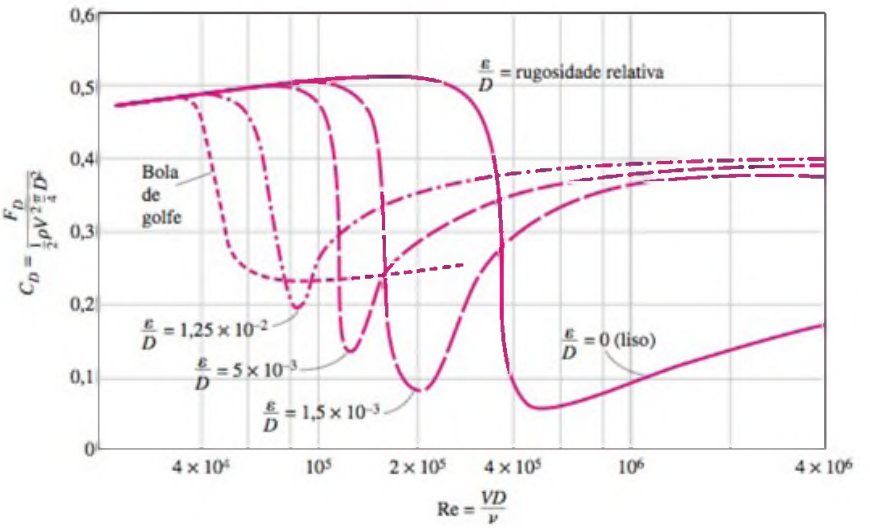


FIGURA 11–36
O efeito da rugosidade da superfície sobre o coeficiente de arrasto de uma esfera.
De Blevins (1984).

enquanto $C_D \cong 0{,}1$ para uma outra esfera lisa. Obviamente, o fato de tornar a esfera rugosa nesse caso aumentará o arrasto por um fator 4 (Figura 11–37).

A discussão anterior mostra que o aumento na rugosidade da superfície pode ser usado com grande vantagem para reduzir o arrasto, mas pode também se voltar contra nós se não formos cuidadosos — especificamente, se não operarmos no intervalo correto do número de Reynolds. Com essa consideração, são introduzidas rugosidades intencionalmente nas bolas de golfe para induzir a *turbulência* com um número de Reynolds mais baixo para tirar vantagem da *queda* brusca no coeficiente de arrasto no início da turbulência, na camada limite (o intervalo de velocidades típico das bolas de golfe é 15 a 150 m/s e o número de Reynolds é menor que 4×10^5). O número de Reynolds crítico das bolas de golfe com covinhas é aproximadamente 4×10^4. A ocorrência do escoamento turbulento nesse número de Reynolds reduz o coeficiente de arrasto de uma bola de golfe para aproximadamente a metade, como está ilustrado na Figura 11–36. Para uma certa tacada, isto significa uma distância mais longa a ser percorrida pela bola. Os jogadores de golfe experientes causam uma rotação da bola durante a tacada, o que ajuda a bola rugosa a desenvolver uma sustentação e assim ir mais alto e mais longe. Pode-se apresentar um argumento similar para uma bola de tênis. No entanto, para uma bola de tênis, as distâncias são muito curtas e as bolas nunca atingem as velocidades no intervalo turbulento. Portanto, as superfícies das bolas de tênis são lisas.

Uma vez disponível o coeficiente de arrasto, a força de arrasto que age sobre um corpo em escoamento transversal pode ser determinada a partir da Equação 11–5, onde A é a *área frontal* ($A = LD$ para um cilindro de comprimento L e $A = \pi D^2/4$ para uma esfera). Deve-se ter em mente que a turbulência da corrente livre e os distúrbios causados por outros corpos no escoamento (como, por exemplo, o escoamento sobre um feixe de tubos) pode afetar significativamente os coeficiente de arrasto.

Re	C_D Superfície Lisa	C_D Superfície Rugosa $\varepsilon/D = 0{,}0015$
2×10^5	0,5	0,1
10^6	0,1	0,4

FIGURA 11–37
A rugosidade da superfície pode aumentar ou diminuir o coeficiente de arrasto de um objeto esférico, dependendo do valor do número de Reynolds.

EXEMPLO 11–4 Força de Arrasto Agindo em um Tubo em um Rio

Um tubo com diâmetro externo de 2,2 cm deve atravessar um rio em um ponto onde a largura do rio é 30 m, ficando completamente imerso na água (Figura 11–38). A velocidade média do escoamento da água é 4 m/s e a temperatura da água é 15°C. Determine a força de arrasto exercida sobre o tubo pelo rio.

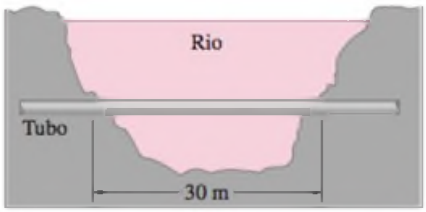


FIGURA 11–38
Esquema do Exemplo 11–4.

SOLUÇÃO Um tubo é submerso em um rio. Deve ser determinada a força de arrasto que age sobre o tubo.

Hipóteses **1** A superfície externa do tubo é lisa de modo que a Figura 11–34 pode ser usada para determinar o coeficiente de arrasto. **2** O escoamento da água no rio é permanente. **3** A direção do escoamento da água é normal ao tubo. **4** A turbulência no escoamento do rio não é levada em consideração.

Propriedades A densidade e a viscosidade dinâmica da água a 15°C são $\rho = 999{,}1\ \text{kg/m}^3$ e $\mu = 1{,}138 \times 10^{-3}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}$.

Análise Observando que $D = 0{,}022$ m, o número de Reynolds é

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{(999{,}1\ \text{kg/m}^3)(4\ \text{m/s})(0{,}022\ \text{m})}{1{,}138 \times 10^{-3}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 7{,}73 \times 10^4$$

O coeficiente de arrasto correspondente a esse valor é, pela Figura 11–34, $C_D = 1{,}0$. E também, a área frontal para o escoamento pelo cilindro é $A = LD$. Então a força de arrasto que age sobre o tubo torna-se

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2} = 1{,}0(30 \times 0{,}022\ \text{m}^2)\frac{(999{,}1\ \text{kg/m}^3)(4\ \text{m/s})^2}{2}\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= 5275\ \text{N} \cong \mathbf{5300\ N}$$

Discussão Note que essa força é equivalente ao peso de uma massa de mais de 500 kg. Portanto, a força de arrasto que o rio exerce sobre o tubo é equivalente a levantar uma massa total de mais de 500 kg pelo tubo apropriado em suas extremidades distam 30 m uma da outra. Devem ser tomadas as precauções necessárias se o tubo não puder suportar essa força. Se o rio tivesse uma velocidade de escoamento maior ou se as flutuações turbulentas no rio fossem mais significativas, a força de arrasto seria ainda maior. As forças *variáveis* sobre o tubo podem então ser significativas.

11–7 • SUSTENTAÇÃO

A sustentação foi definida anteriormente como a componente da força resultante (devido a forças viscosas e de pressão), que é perpendicular à direção do escoamento; o coeficiente de sustentação foi expresso como

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{11–6}$$

onde A neste caso é normalmente a *área planiforme*, que é a área que seria vista por uma pessoa que estivesse olhando para o corpo de cima, em uma direção normal ao corpo, e V é a velocidade a montante do fluido (ou, de forma equivalente, a velocidade de um corpo voando em um fluido quiescente). Para um aerofólio com largura (ou envergadura) b e comprimento de corda igual a c (o comprimento entre as bordas de ataque e de fuga), a área planiforme é $A = bc$. A distância entre as duas extremidades de uma asa ou aerofólio é chamada de **envergadura**. Para um avião, a envergadura é considerada a distância total entre as pontas das duas asas, que inclui a largura da fuselagem entre as asas (Figura 11–39). A sustentação média por unidade de área planiforme F_L/A é chamada de **carga da asa,** que é simplesmente a relação entre o peso do avião e a área planiforme das asas (pois a sustentação é igual ao peso do avião durante o vôo a uma altitude constante).

Os aviões voam baseados em sustentação, e portanto um melhor entendimento da sustentação bem como uma melhora nas características de sustentação de corpos têm sido o foco de numerosos estudos. Nossa ênfase nesta seção está nos dispositivos como os *aerofólios* que são projetados especificamente para gerar sustentação mantendo ao mesmo tempo o arrasto em um nível mínimo. Mas deve-se ter em mente que alguns dispositivos como os *spoilers* e os *aerofólios invertidos* nos carros de corrida são projetados com a finalidade de evitar sustentação ou mesmo gerar uma sustentação negativa para melhorar a tração e o controle (alguns dos primeiros carros realmente "decolavam" ao atingir altas velocidades em conseqüência da sustentação produzida, o que alertou os engenheiros a procurarem maneiras de reduzir a sustentação nos seus projetos).

Para dispositivos que se destinam a gerar sustentação como é o caso dos aerofólios, a contribuição dos *efeitos viscosos* para a sustentação geralmente é desprezível, já que os corpos são carenados e o cisalhamento na parede é paralelo

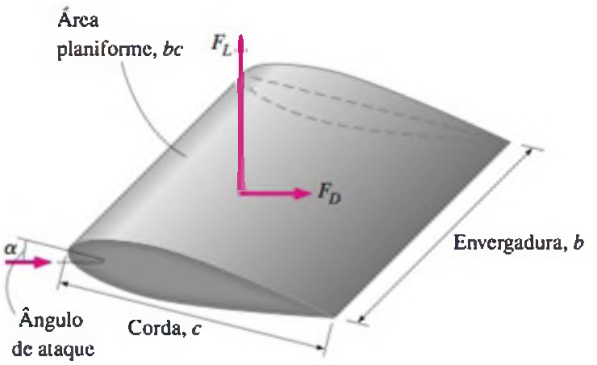


FIGURA 11–39
Definição de vários termos associados com um aerofólio.

às superfícies desses dispositivos e, portanto, normal à direção da sustentação (Figura 11–40). Portanto, a sustentação na prática pode ser considerada devida inteiramente à distribuição de pressão nas superfícies do corpo, e assim a forma do corpo tem uma influência fundamental sobre a sustentação. Então a consideração fundamental no projeto de aerofólios é minimizar a pressão média na superfície superior e ao mesmo tempo maximizá-la na superfície inferior. A equação de Bernoulli pode ser usada como um guia na identificação das regiões de pressão alta e baixa: *a pressão é baixa em posições onde a velocidade do escoamento é alta, e a pressão é alta em posições onde a velocidade do escoamento é baixa.* Além disso, a sustentação é praticamente independente da rugosidade da superfície, pois a rugosidade afeta o cisalhamento na parede, não a pressão. A contribuição do cisalhamento para a sustentação usualmente só é significativa para corpos muito pequenos (leves) que podem voar a baixas velocidades (e portanto com números de Reynolds muito baixos).

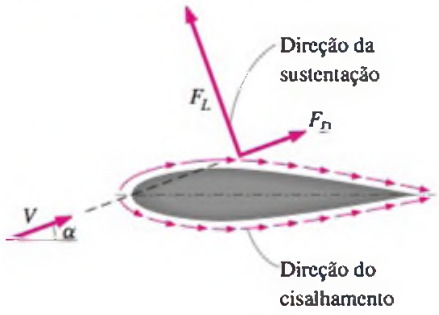
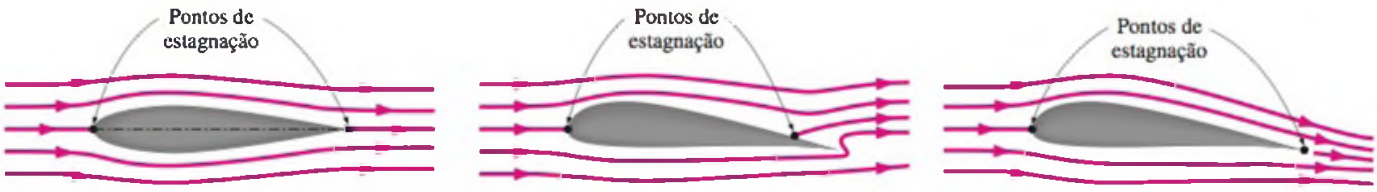


FIGURA 11–40
Para aerofólios, a contribuição dos efeitos viscosos para a sustentação é geralmente desprezível, já que o cisalhamento na parede é paralelo à superfície e portanto praticamente normal à direção da sustentação.

Observando que a contribuição dos efeitos viscosos para a sustentação é desprezível, podemos determinar a sustentação que age sobre um aerofólio simplesmente integrando a distribuição de pressão ao redor do aerofólio. A pressão muda na direção do escoamento ao longo da superfície, mas ela permanece essencialmente constante através da camada limite em uma direção normal à superfície (Capítulo 10). Portanto, parece razoável ignorar a camada limite muito fina no aerofólio e calcular a distribuição de pressão ao redor do aerofólio a partir da teoria relativamente simples do escoamento potencial (vorticidade zero, escoamento irrotacional) para a qual as forças viscosas resultantes são nulas para o escoamento sobre um aerofólio.

Os campos de escoamento obtidos através desses cálculos estão desenhados na Figura 11–41 para aerofólios simétricos e não simétricos ignorando a fina camada limite. Com ângulo de ataque zero, a sustentação produzida pelo aerofólio simétrico é zero, como se esperava devido à simetria, e os pontos de estagnação estão nos bordos de ataque e de fuga. Para o aerofólio não simétrico, que está em um pequeno ângulo de ataque, o ponto de estagnação da frente moveu-se para baixo do bordo de ataque e o ponto de estagnação de trás move-se para cima da superfície superior para perto do bordo de fuga. Para nossa surpresa, o cálculo da sustentação produzida resulta novamente em zero — uma clara contradição das observações e medidas experimentais. Obviamente, a teoria precisa ser modificada para que fique alinhada com o fenômeno observado.

A fonte da inconsistência está no fato de que o ponto de estagnação de trás está na superfície superior em lugar de estar no bordo de fuga. Isso exige que o fluido do lado inferior faça uma curva praticamente de 180° e escoe ao redor do bordo de fuga em direção ao ponto de estagnação, permanecendo ao mesmo tempo ligado à superfície, o que é uma impossibilidade física, já que o fenômeno observado é a separação do escoamento em curvas fechadas (imagine um carro tentando fazer essa curva em alta velocidade). Portanto, o fluido do lado inferior separa-se do bordo de fuga e o fluido do lado superior responde empurrando o ponto de estagnação traseiro para a jusante. Na verdade, o ponto de estagnação na superfície superior move-se totalmente para o bordo de fuga. Dessa forma as duas correntes de escoa-



(*a*) Escoamento irrotacional ao redor de um aerofólio simétrico (sustentação nula)

(*b*) Escoamento irrotacional ao redor de um aerofólio não simétrico (sustentação nula)

(*c*) Escoamento real ao redor de um aerofólio não simétrico (sustentação positiva)

FIGURA 11–41
Escoamento irrotacional e real ao redor de aerofólios bidimensionais simétricos e não simétricos.

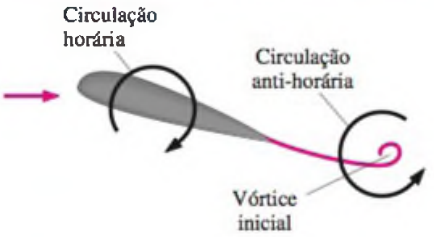


FIGURA 11–42
Logo após um aumento brusco no ângulo de ataque, um vórtice inicial anti-horário é formado a partir do aerofólio, enquanto aparece a circulação no sentido horário ao redor do aerofólio, causando o aparecimento da sustentação.

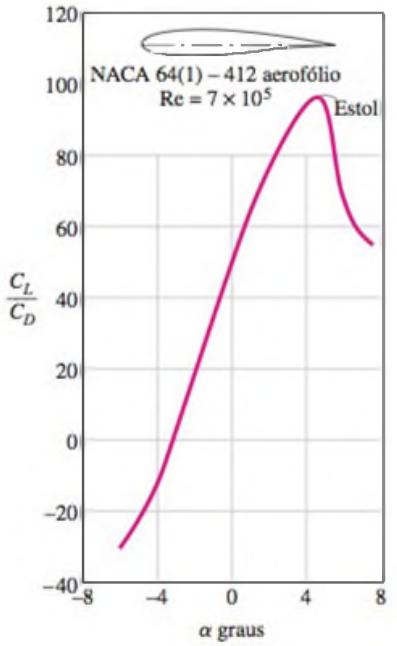


FIGURA 11–43
A variação da relação sustentação-arrasto com o ângulo de ataque para um aerofólio bidimensional.
De Abbott, von Doenhoff e Stivers (1945).

mento dos lados de cima e de baixo do aerofólio se encontram no bordo de fuga, gerando um escoamento suave a jusante paralelo ao bordo de fuga. É gerada sustentação porque a velocidade do escoamento na superfície superior é mais alta, portanto a pressão nessa superfície é menor devido ao efeito Bernoulli.

A teoria do escoamento potencial e o fenômeno observado podem ser reconciliados da seguinte forma: o escoamento se inicia conforme previsto pela teoria, sem sustentação, mas a corrente de fluido inferior separa-se no bordo de fuga quando a velocidade atinge um certo valor. Isso força a corrente separada de fluido superior a fechar no bordo de fuga, iniciando uma circulação no sentido horário ao redor do aerofólio. Essa circulação no sentido horário aumenta a velocidade da corrente superior ao mesmo tempo em que diminui aquela da corrente inferior, gerando a sustentação. Um **vórtice inicial** de sinal contrário (circulação no sentido anti-horário) é então desprendido a jusante (Figura 11–42), é então estabelecido sobre o aerofólio um fluxo paralelo à parede. Quando a teoria do escoamento potencial é modificada pela adição de uma quantidade apropriada de circulação para mover o ponto de estagnação para o bordo de fuga, obtém-se uma excelente concordância entre a teoria e a experiência para o campo de escoamento e para a sustentação.

É desejável que os aerofólios gerem o máximo de sustentação produzindo ao mesmo tempo um mínimo de arrasto. Portanto, uma medida do desempenho para aerofólios é a **relação sustentação-arrasto**, que é equivalente à relação dos coeficientes sustentação-arrasto C_L/C_D. Essas informações são obtidas fazendo o gráfico de C_L *versus* C_D para diferentes valores do ângulo de ataque (um gráfico pola da sustentação *versus* arrasto) ou fazendo o gráfico da relação C_L/C_D *versus* ângulo de ataque. Este último é feito para um desenho especial de aerofólio na Figura 11–43. Note que a relação C_L/C_D aumenta com o ângulo de ataque até que o aerofólio entre em regime de estol e o valor da relação sustentação-arrasto pode ser da ordem de 100 para um aerofólio bidimensional.

Uma maneira óbvia de alterar as características de sustentação e arrasto de um aerofólio é mudar o ângulo de ataque. Nas manobras de um avião, por exemplo, levanta-se o nariz do avião para aumentar a sustentação, pois as asas estão fixas em relação à fuselagem. Uma outra abordagem é mudar a forma do aerofólio utilizando-se flaps móveis nos *bordos de ataque* e *de fuga*, como se faz nos modernos aviões comerciais (Figura 11–44). Os flaps são usados para alterar a forma das asas durante a decolagem e pouso para maximizar a sustentação e permitir o pouso e a decolagem com baixas velocidades. O aumento do arrasto durante a decolagem e pouso não é uma preocupação muito grande devido ao tempo relativamente curto envolvido. Uma vez atingida a altitude de cruzeiro, os flaps são recolhidos e as asas voltam à sua forma "normal" com coeficiente de arrasto mínimo e coeficiente de sustentação adequado para minimizar o consumo de combustível voando a uma altitude constante. Note que mesmo um pequeno coeficiente de sustentação pode gerar uma grande força de sustentação durante a operação normal devido à alta velocidade de cruzeiro do avião e à proporcionalidade da sustentação com o quadrado da velocidade do escoamento.

Os efeitos dos flaps sobre os coeficientes de sustentação e arrasto estão ilustrados na Figura 11–45 para um aerofólio. Note que o coeficiente de sustentação máximo aumenta de aproximadamente 1,5 para o aerofólio sem flaps para 3,5 para o caso do flap com fenda dupla. Mas observe também que o coeficiente de arrasto

(*a*) Flaps estendidos (decolagem) (*b*) Flaps recolhidos (cruzeiros)

FIGURA 11–44
As características de sustentação e arrasto de um aerofólio durante a decolagem e o pouso podem ser alteradas mudando a forma do aerofólio através de flaps móveis.
Foto de Yunus Çengel.

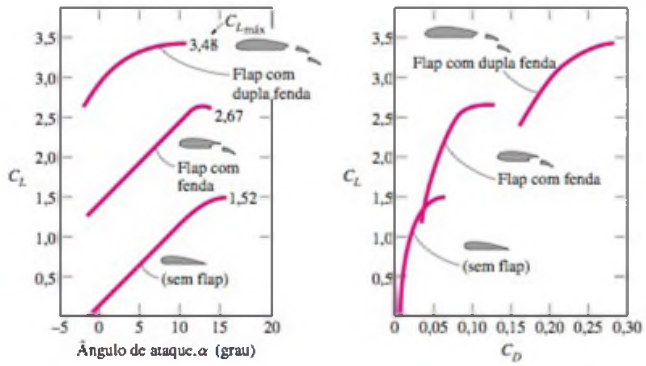


FIGURA 11–45
Efeito dos flaps sobre os coeficientes de sustentação e arrasto de um aerofólio.
De Abbott e von Doenhoff, para NACA 23012 (1959).

máximo aumenta de aproximadamente 0,06, em aerofólio sem flaps para aproximadamente 0,3 para o caso do flap com fenda dupla. Isso é um aumento de cinco vezes no coeficiente de arrasto. Os motores devem desenvolver uma potência muito maior para proporcionar o empuxo necessário para vencer esse arrasto. O ângulo de ataque dos flaps pode ser aumentado para maximizar o coeficiente de sustentação. Além disso, os bordos de ataque e de fuga aumentam o comprimento da corda, assim aumentam a área A da asa. O Boeing 727 usa um flap de fenda tripla no bordo de fuga e um flap de fenda no bordo de ataque.

A velocidade de vôo mínima pode ser determinada a partir do requisito de que o peso total W do avião deve ser igual à sustentação e $C_L = C_{L,\,máx}$. Ou seja,

$$W = F_L = \tfrac{1}{2} C_{L,\,máx}\, \rho V_{mín}^2 A \quad \rightarrow \quad V_{mín} = \sqrt{\frac{2W}{\rho C_{L,\,máx} A}} \qquad (11\text{–}24)$$

Para um dado peso, a velocidade de pouso ou decolagem pode ser minimizada maximizando-se o produto do coeficiente de sustentação e a área da asa, $C_{L,\,máx}A$. Uma maneira de fazer isso é usando os flaps, conforme já discutimos. Uma outra maneira é controlar a camada limite, o que pode ser conseguido simplesmente deixando seções de escoamento (fendas) entre os flaps, como está ilustrado na Figura 11–46. As fendas são usadas para impedir a separação da camada limite da superfície superior das asas e dos flaps. Isso é feito deixando o ar passar da região de alta pressão sob a asa para a região de baixa pressão na superfície superior. Note que o coeficiente de sustentação alcança seu valor máximo $C_L = C_{L,\,máx}$, e assim a velocidade de vôo alcança seu valor mínimo, nas condições de estol, que é uma região de operação instável e deve ser evitada. A Federal Aviation Administration (FAA) não permite a operação abaixo de 1,2 vez a velocidade de estol por questão de segurança.

Uma outra coisa que notamos nessa equação é que a velocidade mínima de decolagem ou pouso é inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade. Notando que a densidade do ar diminui com a altitude (em aproximadamente 15% a 1500 m), são necessárias pistas mais longas em aeroportos situados a maiores altitudes como, por exemplo, em Denver para atender às velocidades mínimas de decolagem e pouso mais altas. A situação torna-se ainda mais crítica em dias quentes de verão, pois a densidade do ar é inversamente proporcional à temperatura.

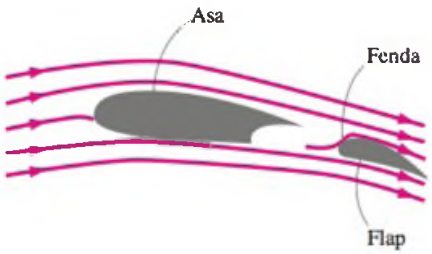


FIGURA 11–46
Um aerofólio com flap e com uma fenda para evitar a separação da camada limite da superfície superior e para aumentar o coeficiente de sustentação.

Efeitos de Extremidade das Pontas das Asas

Nas asas dos aviões e outros aerofólios de tamanho finito, os efeitos de extremidade nas pontas das asas tornam-se importantes devido ao vazamento de fluido entre as superfícies inferior e superior. A diferença de pressão entre a superfície inferior (região de alta pressão) e a superfície superior (região de baixa pressão) dirige o fluido para cima nas pontas enquanto ele é varrido para trás devido ao movimento relativo entre o fluido e a asa. Isso resulta em um movimento em turbilhão que forma espirais ao longo do escoamento, chamadas de vórtices de ponta, nas pontas de ambas as asas. Os vórtices são formados também ao longo do aerofólio entre as pontas das asas. Esses vórtices distribuídos se movem na

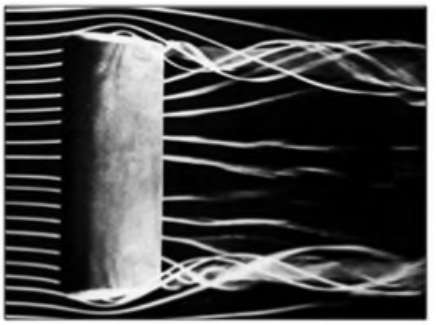


FIGURA 11–47
Vórtices de fuga de uma asa retangular com centros de vórtice saindo do bordo de fuga nas pontas.
Cortesia de The Parabolic Press, Stanford, California. Usada com permissão.

direção das extremidades depois de serem desprendidos pelos bordos de fuga das asas e se combinarem com os vórtices das pontas para formar duas esteiras de vórtices de fuga ("**trailing vórtices**") muito fortes ao longo das pontas das asas (Figuras 11–47 e 11–48). Os vórtices de fuga gerados por um avião grande continuam a existir por um longo tempo e por longas distâncias (mais de 10 km) até desaparecerem gradualmente devido à dissipação viscosa. Esses vórtices e sua corrente induzida são fortes o bastante para fazer um avião pequeno perder o controle e virar de cabeça para baixo se ele voar na esteira de um avião maior. Portanto, seguir um avião grande muito perto (menos de 10 km) representa um grande perigo para um avião pequeno. Esse problema é o fator controlador que especifica o espaçamento dos aviões na decolagem, limitando a capacidade dos aeroportos. Na natureza, esse efeito é usado com vantagem pelos pássaros que migram voando em formação V utilizando a corrente ascendente gerada pelo pássaro que está à frente. Já se sabe que os pássaros voando em grupo podem chegar ao seu destino voando em formação V com um terço a menos de energia. Os jatos militares ocasionalmente voam em formação V pela mesma razão.

Os vórtices de pontas que interagem com a corrente livre exercem forças nas pontas das asas em todas as direções, incluindo a direção do escoamento. A componente da força na direção do escoamento é somada ao arrasto e é chamada de **arrasto induzido.** O arrasto total de uma asa é então a soma do arrasto induzido (efeitos 3-D) mais o arrasto da seção do aerofólio.

A vazão entre o quadrado da envergadura média de um aerofólio e a área planiforme é chamada de **relação de aspecto**. Para um aerofólio com uma área planiforme retangular de corda c e envergadura b, ela é expressa comos

$$AR = \frac{b^2}{A} = \frac{b^2}{bc} = \frac{b}{c} \qquad \textbf{(11-25)}$$

Portanto, a vazão de aspecto é uma medida de quão estreito é um aerofólio na direção do escoamento. O coeficiente de sustentação das asas, em geral, aumenta enquanto o coeficiente de arrasto diminui com o aumento da vazão de aspecto. Isso é porque uma asa longa e estreita (vazão de aspecto alta) tem um comprimento de ponta menor e, portanto, menor perda nas pontas e menor arrasto induzido do que uma asa curta e larga com a mesma área planiforme. Portanto, corpos com maior vazão de aspecto voam de forma mais eficiente, mas são menos manobráveis devido ao seu maior momento de inércia (devido à maior distância do centro). Corpos com menor vazão de aspecto manobram melhor, pois as asas estão mais próximas da parte central. Assim, não é surpresa o fato de *aviões de caça* (e aves de rapina como os falcões) têm asas curtas e largas enquanto os *grandes aviões comerciais* (e pássaros enormes como os albatrozes) têm asas longas e estreitas.

Os efeitos das extremidades podem ser minimizados acrescentando-se **placas** ou **aletas** ("winglets") nas pontas das asas perpendiculares à superfície superior. As aletas funcionam bloqueando um pouco do vazamento ao redor das pontas das asas,

FIGURA 11–48
Um avião agrícola voa através do ar enfumaçado para ilustrar os vórtices das pontas produzidos nas pontas das asas.
NASA Langley Research Center.

resultando em uma redução considerável na força dos vórtices de ponta e do arrasto induzido. As penas das pontas das asas dos pássaros se estendem com a mesma finalidade (Figura 11–49).

O desenvolvimento de aerofólios eficientes (baixo arrasto) foi o assunto de intensas investigações experimentais na década de 1930. Esses aerofólios eram padronizados pela National Advisory Committee for Aeronautics (NACA, que agora se tornou a Nasa); foram geradas extensas listas de dados sobre coeficientes de sustentação. A variação do coeficiente de sustentação C_L com o ângulo de ataque para dois aerofólios (NACA 0012 e NACA 2412) está na Figura 11–50. Temos as seguintes observações sobre esta figura:

- O coeficiente de sustentação aumenta quase linearmente com o ângulo de ataque α, alcança um valor máximo com aproximadamente $\alpha = 16°$, aí então começa a cair bruscamente. Essa diminuição da sustentação com um aumento maior do ângulo de ataque é chamada de *estol* e é causada pela separação de escoamento e formação de uma ampla região de esteira na superfície superior do aerofólio. O estol é altamente indesejado, pois também aumenta o arrasto.
- Com ângulo de ataque igual a zero ($\alpha = 0°$), o coeficiente de sustentação é zero para aerofólios simétricos mas não é zero para os aerofólios assimétricos com uma curvatura maior na superfície superior. Portanto, aviões com seções de asa simétricas devem voar com suas asas em um ângulo de ataque maior para produzir a mesma sustentação.
- O coeficiente de sustentação pode ser aumentado várias vezes ajustando-se o ângulo de ataque (de 0,25 em $\alpha = 0°$ para aerofólio assimétrico até 1,25 em $\alpha = 10°$).
- O coeficiente de arrasto também aumenta com o ângulo de ataque, geralmente exponencialmente (Figura 11–51). Portanto, grandes ângulos de ataque deverão ser usados raramente por breves períodos de tempo para obter economia de combustível.

(a) Um abutre com as penas das asas levantadas durante o vôo.

(b) Aletas são usadas por este planador para reduzir o arrasto induzido.

FIGURA 11–49
O arrasto induzido é reduzido (a) por penas nas pontas das asas dos pássaros e (b) aletas ou outros dispositivos nas asas dos aviões.
(a) © Vol. 44/PhotoDisc. (b) Cortesia Schempp-Hirth. Usada com permissão.

Sustentação Gerada pela Rotação

Provavelmente você já fez a experiência de aplicar uma rotação a uma bola de tênis ou aplicar um efeito em uma bola de tênis ou de ping-pong aplicando uma rotação para alterar as características de sustentação e fazer a bola percorrer uma trajetória melhor e cair repentinamente. Os jogadores de golf, futebol e baseball também utilizam a rotação em suas jogadas. O fenômeno de se produzir sustentação pela rotação de um corpo sólido é chamado de **efeito Magnus** em homenagem ao cientista Alemão Heinrich Magnus (1802–1870), que foi o primeiro a estudar a susten-

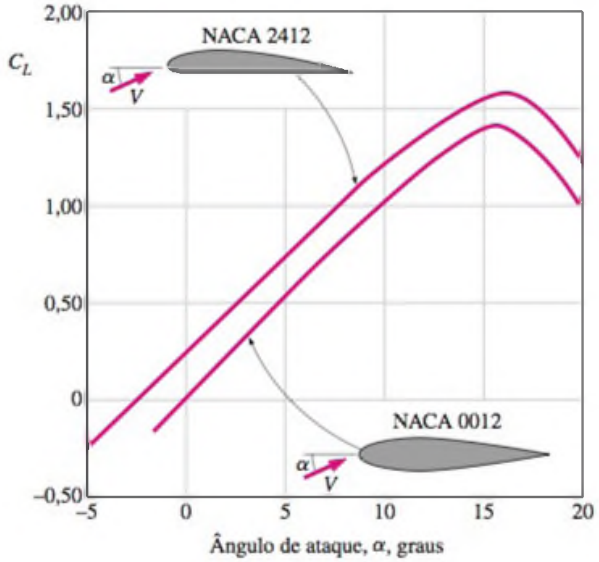


FIGURA 11–50
A variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque para aerofólio simétrico e assimétrico.
De Abbott (1932).

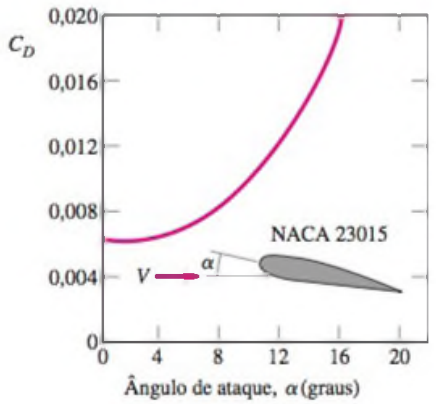
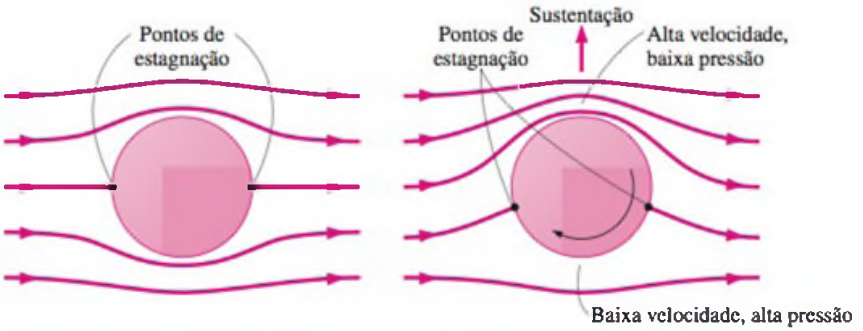


FIGURA 11–51
A variação do coeficiente de arrasto de um aerofólio com o ângulo de ataque.
De Abbott e von Doenhoff (1959).

tação de corpos em rotação, que está ilustrada na Figura 11–52 para o caso simplificado do escoamento (potencial) irrotacional. Quando o cilindro não está girando, a sustentação é zero devido à simetria entre a parte de baixo e a de cima. Mas quando o cilindro gira sobre seu próprio eixo, o cilindro arrasta um pouco de fluido ao redor dele devido à condição de não-escorregamento e o campo de escoamento reflete a superposição dos escoamentos com rotação e sem rotação. Os pontos de estagnação são desviados para baixo, e o escoamento não é mais simétrico em relação ao plano horizontal que passa através do centro do cilindro. A pressão média na metade superior é menor do que a pressão média na metade inferior devido ao efeito Bernoulli, portanto há uma *força livre para cima* (sustentação) agindo sobre o cilindro. Um argumento similar pode ser dado para a sustentação gerada em uma bola em rotação.

O efeito da velocidade de rotação nos coeficientes de sustentação e de arrasto de uma esfera lisa é mostrado na Figura 11–53. Note que o coeficiente de sustentação depende fortemente da velocidade de rotação, especialmente em baixas velocidades angulares. O efeito da velocidade de rotação sobre o coeficiente de arrasto é pequeno. A rugosidade também afeta os coeficientes de sustentação e de arrasto. Em um certo intervalo do número de Reynolds, a rugosidade produz o efeito desejável de aumento do coeficiente de sustentação ao mesmo tempo em que diminui o coeficiente de arrasto. Portanto, bolas de golfe com a rugosidade correta atingem altitudes e distâncias maiores do que as bolas lisas com a mesma tacada.



(*a*) Escoamento potencial sobre um cilindro estacionário

(*b*) Escoamento potencial sobre um cilindro em rotação

FIGURA 11–52
Geração de sustentação em um cilindro circular em rotação para o caso "idealizado" do escoamento potencial (o escoamento real envolve separação de escoamento na região da esteira).

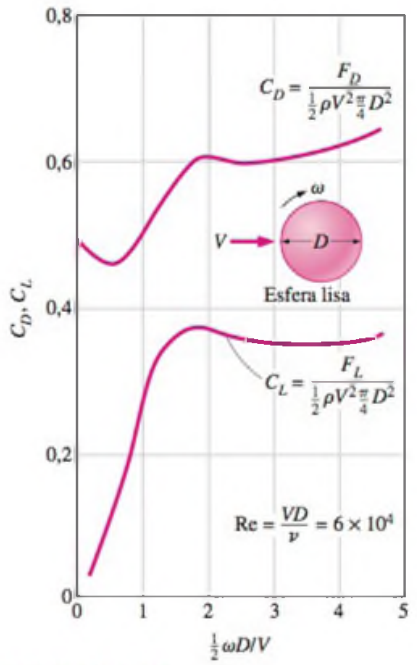


FIGURA 11–53
A variação dos coeficientes de sustentação e arrasto de uma esfera lisa com a taxa adimensional da rotação para $\mathrm{Re} = VD/\nu = 6 \times 10^4$.
De Goldstein (1938).

EXEMPLO 11–5 Sustentação e Arrasto de um Avião Comercial

Um avião comercial tem uma massa total de 70.000 kg e uma área planiforme de asa de 150 m² (Figura 11–54). O avião tem uma velocidade de cruzeiro de 558 km/h e uma altitude de cruzeiro de 12.000 m, onde a densidade do ar é 0,312 kg/m³. O avião tem flaps com fenda dupla para usar durante a decolagem e pouso, mas ele viaja com todos os flaps recolhidos. Supondo que as características de sustentação e arrasto das asas podem ser aproximadas pela NACA 23012 (Figura 11–45), determine (*a*) a velocidade mínima segura para decolagem e pouso com e sem os flaps estendidos, (*b*) o ângulo de ataque para vôo estável na altitude de cruzeiro e (*c*) a potência que deve ser fornecida pelos motores para produzir empuxo suficiente para vencer o arrasto da asa.

SOLUÇÃO São dadas as condições de vôo de cruzeiro de um avião de passageiros e as características de suas asas. Devem ser determinadas as velocidades seguras mínimas de pouso e decolagem, o ângulo de ataque durante o vôo de cruzeiro e a potência necessária.

Hipóteses **1** O arrasto e a sustentação produzidos pelas partes do avião exceto as asas, como por exemplo, o arraste da fuselagem, não são considerados. **2** Supomos que as asas são seções de aerofólios bidimensionais e os efeitos das pontas das asas não são considerados. **3** As características de sustentação e arrasto das asas podem ser aproximadas pela NACA 23012 de modo que se aplica à Figura 11–45. **4** A densidade média do ar no solo é 1,20 kg/m³.

FIGURA 11–54
Esquema para o Exemplo 11–5.

Propriedades As densidades do ar são 1,20 kg/m³ no solo e 0,312 kg/m³ na altitude de cruzeiro. Os coeficientes de sustentação máxima $C_{L,\,máx}$ das asas são 3,48 e 1,52 com e sem flaps, respectivamente (Figura 11–45).

Análise (*a*) O peso e a velocidade de cruzeiro do avião são

$$W = mg = (70.000\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2)\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 686.700\ \text{N}$$

$$V = (558\ \text{km/h})\left(\frac{1\ \text{m/s}}{3{,}6\ \text{km/h}}\right) = 155\ \text{m/s}$$

As velocidades mínimas correspondentes às condições de estol sem os flaps e com os flaps, respectivamente, são obtidas da Equação 11–24,

$$V_{mín\,1} = \sqrt{\frac{2W}{\rho C_{L,\,máx\,1} A}} = \sqrt{\frac{2(686.700\ \text{N})}{(1{,}2\ \text{kg/m}^3)(1{,}52)(150\ \text{m}^2)}\left(\frac{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right)} = 70{,}9\ \text{m/s}$$

$$V_{mín\,2} = \sqrt{\frac{2W}{\rho C_{L,\,máx\,2} A}} = \sqrt{\frac{2(686.700\ \text{N})}{(1{,}2\ \text{kg/m}^3)(3{,}48)(150\ \text{m}^2)}\left(\frac{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right)} = 46{,}8\ \text{m/s}$$

Então as velocidades mínimas "seguras" para evitar a região de estol são obtidas multiplicando os valores acima por 1,2:

Sem flaps: $V_{mín\,1,\,segura} = 1{,}2V_{mín\,1} = 1{,}2(70{,}9\ \text{m/s}) = 85{,}1\ \text{m/s} = \mathbf{306\ km/h}$

Com flaps: $V_{mín\,2,\,segura} = 1{,}2V_{mín\,2} = 1{,}2(46{,}8\ \text{m/s}) = 56{,}2\ \text{m/s} = \mathbf{202\ km/h}$

pois 1 m/s = 3,6 km/h. Note que o uso dos flaps permite ao avião decolar e pousar com velocidades consideravelmente menores, e portanto em uma pista mais curta.

(*b*) Quando o avião está em vôo estável a uma altitude constante, a sustentação deve ser igual ao peso do avião, $F_L = W$. Então determinam-se os coeficientes de sustentação, obtendo-se

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \frac{686.700\ \text{N}}{\frac{1}{2}(0{,}312\ \text{kg/m}^3)(155\ \text{m/s})^2(150\ \text{m}^2)}\left(\frac{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right) = 1{,}22$$

Para o caso sem os flaps, o ângulo de ataque correspondente a esse valor de C_L é determinado a partir da Figura 11–45 sendo $\alpha \cong \mathbf{10°}$.

(*c*) Quando o avião está em vôo estacionária a uma altitude constante, a força resultante que age sobre o avião é zero, e portanto o empuxo produzido pelos motores deve ser igual à força de arrasto. O coeficiente de arrasto correspondente ao coeficiente de sustentação de cruzeiro de 1,22 é determinado a partir da Figura 11–45, sendo $C_D \cong 0{,}03$ para o caso sem os flaps. Então a força de arrasto que age nas asas torna-se

$$F_D = C_D A\frac{\rho V^2}{2} = (0{,}03)(150\ \text{m}^2)\frac{(0{,}312\ \text{kg/m}^3)(155\ \text{m/s})^2}{2}\left(\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$
$$= 16{,}9\ \text{kN}$$

Lembrando que potência é força multiplicada pela velocidade (distância por unidade de tempo), a potência necessária para vencer esse arrasto é igual ao empuxo multiplicado pela velocidade de cruzeiro:

$$\text{Potência} = \text{Empuxo} \times \text{Velocidade} = F_D V = (16{,}9\ \text{kN})(155\ \text{m/s})\left(\frac{1\ \text{kW}}{1\ \text{kN}\cdot\text{m/s}}\right)$$
$$= \mathbf{2620\ kW}$$

Portanto, os motores devem fornecer 2620 kW de potência para vencer o arrasto nas asas durante o vôo de cruzeiro. Para uma eficiência de 30% na propulsão (isto é, 30 por cento da energia do combustível é utilizada para manter o avião voando), o avião necessita de 8733 kJ/s.

Discussão A potência determinada é a potência para vencer o arrasto que age nas asas somente e não inclui o arrasto que age sobre as demais partes do avião (a fuselagem, a cauda etc.). Portanto, a potência total necessária durante o vôo de cruzeiro será muito maior. Além disso, não foi considerado o arrasto induzido, que pode ser dominante durante a decolagem quando o ângulo de ataque é alto (a Figura 11–45 é para um aerofólio 2-D, e não inclui os efeitos 3-D).

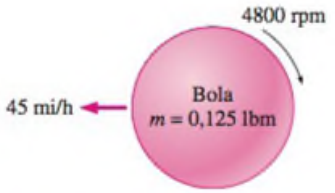


FIGURA 11–55
Esquema do Exemplo 11–6.

EXEMPLO 11–6 Efeito da Rotação sobre uma Bola de Tênis

Uma bola de tênis com uma massa de 0,125 lbm e diâmetro de 2,52 pols é lançada a 45 mi/h com uma rotação para trás de 4800 rpm (Figura 11–55). Determine se a bola irá cair ou subir sob o efeito combinado da gravidade e sustentação devido à rotação logo depois de ter sido rebatidos no ar a 1 atm e 80°F.

SOLUÇÃO Uma bola de tênis é rebatida com uma rotação para trás. Deve-se determinar se ela irá cair ou subir depois de ser rebatida.

Hipóteses **1** A superfície da bola é lisa o bastante para que a Figura 11–53 possa ser aplicável. **2** A bola é lançada horizontalmente de forma que ela comece seu movimento horizontalmente.

Propriedades A densidade e a viscosidade cinemática do ar a 1 atm e 80°F são $\rho = 0{,}07350$ lbm/pé^3 e $\nu = 1{,}697 \times 10^{-4}$ pé^2/s.

Análise A bola é lançada horizontalmente, e, portanto, sem rotação normalmente ela cairia sob o efeito da gravidade. A rotação gera uma sustentação e a bola subirá se a sustentação for maior do que o peso da bola. A sustentação pode ser determinada a partir de

$$F_L = C_L A \frac{\rho V^2}{2}$$

onde A é a área frontal da bola, que é $A = \pi D^2/4$. As velocidades de translação e angular da bola são

$$V = (45 \text{ min/h})\left(\frac{5280 \text{ pés}}{1 \text{ mi}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 66 \text{ pés/s}$$

$$\omega = (4800 \text{ rev/mín})\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ mín}}{60 \text{ s}}\right) = 502 \text{ rad/s}$$

Então,

$$\frac{\omega D}{2V} = \frac{(502 \text{ rad/s})(2{,}52/12 \text{ pés})}{2(66 \text{ pés/s})} = 0{,}80 \text{ rad}$$

Da Figura 11–53, o coeficiente de sustentação correspondente a esse valor é $C_L = 0{,}21$. Então a força de sustentação agindo sobre a bola é

$$F_L = (0{,}21)\frac{\pi(2{,}52/12 \text{ pés})^2}{4}\frac{(0{,}0735 \text{ lbm/pé}^3)(66 \text{ pés/s})^2}{2}\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32{,}2 \text{ lbm} \cdot \text{pés/s}^2}\right)$$

$$= 0{,}036 \text{ lbf}$$

O peso da bola é

$$W = mg = (0{,}125 \text{ lbm})(32{,}2 \text{ pés/s}^2)\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32{,}2 \text{ lbm} \cdot \text{pés/s}^2}\right) = 0{,}125 \text{ lbf}$$

que é maior do que a sustentação. Portanto a bola **cairá** sob o efeito combinado da gravidade e sustentação devido à rotação com uma força resultante de 0,125-0,036 = 0,089 lbf.

Discussão Este exemplo mostra que a bola pode ser lançada muito mais longe se for aplicada a ela uma rotação. Note que uma rotação em sentido contrário tem o efeito oposto (sustentação negativa) e acelera a queda da bola até o chão. Além disso, o número de Reynolds para esse problema é 8×10^4, que é suficientemente próximo de 6×10^4 para o qual foi preparada a Figura 11–53.

Tenha em mente também que embora alguma rotação possa aumentar a distância percorrida pela bola, há uma rotação ótima que é uma função do ângulo de lançamento, como muitos jogadores de tênis já sabem. Rotação muito alta diminui a distância introduzindo mais arraste induzido.

RESUMO

Neste capítulo, nós estudamos o escoamento dos fluidos sobre corpos imersos com ênfase na sustentação resultante e nas forças de arrasto. Um fluido pode exercer forças e momento em um corpo em várias direções. A força que um fluido em escoamento exerce sobre um corpo na direção do escoamento é chamada de *arrasto,* enquanto aquela força age na direção normal ao escoamento é chamada de *sustentação*. A parte do arrasto que é devida diretamente à tensão de cisalhamento na parede, τ_w, é chamada de *arrasto de atrito superficial* já que ele é causado por efeitos de atrito, a parte que é devida diretamente à pressão P é chamada de *arrasto de pressão* ou *arrasto de forma* devido à grande dependência da forma do corpo.

O *coeficiente de arrasto* C_D e o *coeficiente de sustentação* C_L são números adimensionais que representam as características de arrasto e sustentação de um corpo e são definidos por

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \quad \text{e} \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

onde A é geralmente a *área frontal* (a área projetada em um plano normal à direção do escoamento) do corpo. Para placas e aerofólios, A é considerada como a *área planiforme,* que é a área que seria vista por uma pessoa que estivesse olhando para o corpo diretamente acima dele. O coeficiente de arrasto, em geral, depende do *número de Reynolds,* especialmente para números de Reynolds abaixo de 10^4. Com números de Reynolds mais altos, os coeficientes de arrasto para a maioria das geometrias permanecem essencialmente constante.

Dizemos que um corpo é *carenado* quando é feito um esforço para alinhar sua forma com as linhas de corrente que se espera encontrar no escoamento para reduzir o arrasto. Por outro lado, se um corpo (como por exemplo um edifício) tende a bloquear o escoamento, dizemos que ele é *rombudo.* Em velocidades suficientemente altas, a corrente de fluido se separa da superfície do corpo. Isso é chamado de *separação de escoamento.* Quando uma corrente de fluido se separa do corpo, ele forma uma *região separada* entre o corpo e a corrente de fluido. A separação também pode ocorrer em um corpo carenado, como uma asa de avião com um *ângulo de ataque* suficientemente alto, que é o ângulo que a corrente de fluido que se aproxima faz com a *corda* (a linha que conecta o início e o final) do corpo. A separação de escoamento na superfície superior de uma asa reduz a sustentação drasticamente e pode fazer o avião entrar em regime de *estol.*

A região de escoamento acima da superfície, na qual são sentidos os efeitos das forças de cisalhamento viscoso causadas pela viscosidade do fluido, é chamada de *camada limite de velocidade* ou apenas *camada limite.* A *espessura* δ da camada limite é definida como a distância a partir da superfície, na qual a velocidade é $0{,}99V$. A linha hipotética de velocidade $0{,}99V$ divide o escoamento sobre uma placa em duas regiões: a *região da camada limite,* na qual os efeitos viscosos e as mudanças de velocidade são significativos; e a *região de escoamento externo irrotacional,* na qual os efeitos de atrito são desprezíveis e a velocidade permanece essencialmente constante.

Para escoamento externo, o número de Reynolds é expresso como

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

onde V é a velocidade a montante e L é o comprimento característico da geometria, ou seja o comprimento da placa na direção do escoamento para uma placa plana e o diâmetro D para um cilindro ou esfera. Os coeficientes *médios* de atrito sobre toda a placa plana são

Escoamento laminar: $$C_f = \frac{1{,}33}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} \qquad \mathrm{Re}_L < 5 \times 10^5$$

Escoamento turbulento: $$C_f = \frac{0{,}074}{\mathrm{Re}_L^{1/5}} \qquad 5 \times 10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7$$

Se o escoamento for aproximado como laminar até o número crítico de engenharia de $\mathrm{Re}_{cr} = 5 \times 10^5$, e, depois turbulento além dele, o coeficiente de atrito médio sobre toda a placa plana torna-se

$$C_f = \frac{0{,}074}{\mathrm{Re}_L^{1/5}} - \frac{1742}{\mathrm{Re}_L} \qquad 5 \times 10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7$$

O ajuste de uma curva de dados experimentais para o coeficiente médio de atrito no regime totalmente turbulento rugoso é

Superfície rugosa: $$C_f = \left(1{,}89 - 1{,}62 \log \frac{\varepsilon}{L}\right)^{-2.5}$$

onde ε é a rugosidade da superfície e L é o comprimento da placa na direção do escoamento. Na falta de algo melhor, essa relação pode ser usada para escoamento turbulento sobre superfícies rugosas para $Re > 10^6$, especialmente quando $\varepsilon/L > 10^{-4}$.

A rugosidade da superfície, em geral, aumenta o coeficiente de arrasto no escoamento turbulento. No entanto, para corpos rombudos como um cilindro circular ou uma esfera, um aumento na rugosidade da superfície pode *diminuir* o coeficiente de arrasto. Isso é feito provocando o escoamento na turbulência com um número de Reynolds mais baixo, fazendo assim o fluido se fechar atrás do corpo, estreitanto a esteira e reduzindo o arrasto de pressão consideravelmente.

Nos aerofólios deseja-se produzir maior sustentação e ao mesmo tempo menor arrasto. Portanto, uma medida do desempenho dos aerofólios é a *vazão sustentação-arrasto*, C_l/C_D.

A velocidade mínima de segurança de vôo para um avião pode ser determinada a partir de

$$V_{mín} = \sqrt{\frac{2W}{\rho C_{L,\,máx} A}}$$

Para um dado peso, a velocidade de pouso e decolagem pode ser minimizada, maximizando-se o produto do coeficiente de sustentação e a área da asa, $C_{L,\,máx}A$.

Para asas de avião e outros aerofólios de tamanho finito, a diferença de pressão entre as superfícies inferior e superior impulsiona o fluido para cima nas pontas. Isso resulta em um turbilhão, chamado de *vórtice de ponta*. Os vórtices das pontas que interagem com a corrente livre geram forças nas pontas das asas em todas as direções, incluindo a direção do escoamento. A componente da força na direção do escoamento soma-se ao arrasto e é chamada de *arrasto induzido*. O arrasto total de uma asa é então a soma do arrasto induzido (efeitos 3-D) e o arrasto da seção do aerofólio.

Observa-se que a sustentação se desenvolve quando um cilindro ou esfera no escoamento é gerada com uma velocidade suficientemente alta. O fenômeno pelo qual se produz sustentação pela rotação de um corpo sólido é chamado de *efeito Magnus*.

Alguns escoamentos externos, completos com detalhes de escoamento, incluindo gráficos dos campos de velocidade, são resolvidos usando dinâmica dos fluidos computacional e apresentados no Capítulo 15.

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. I. H. Abbott. "The Drag of Two Streamline Bodies as Affected by Protuberances and Appendages". *NACA Report* 451, 1932.
2. I. H. Abbott e A. E. von Doenhoff. *Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data*. Nova Iorque: Dover, 1959.
3. I. H. Abbott, A, E. von Doenhoff e L. S. Stivers. "Summary of Airfoil Data", *NACA Report* 824, Langley Field, VA, 1945.
4. J. D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. 2nd ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1991.
5. R. D. Blevins. *Applied Fluid Dynamics Handbook*. Nova Iorque: Van Nostrand Reinhold, 1984.
6. S. W. Churchill e M. Bernstein. "A Correlating Equation for Forced Convection from Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Cross Flow". *Journal of Heat Transfer* 99, p. 300-306, 1977.
7. C. T. Crowe, J. A. Roberson e D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*. 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
8. S. Goldstein. *Modern Developments in Fluid Dynamics*. Londres: Oxford Press, 1938.
9. J. Happel. *Low Reynolds Number Hydrocarbons*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1965.
10. S. F. Hoerner. *Fluid-Dynamic Drag*. [Publicado pelo autor.] Library of Congress N. 64, 1966.
11. G. M. Homsy, H. Aref, K. S. Breuer, S. Hochgreb, J. R. Koseff, B. R. Munson, K. G. Powell, C. R. Robertson, S. T. Thoroddsen. *Multi-Media Fluid Mechanics* (CD). Cambridge University Press, 2000.
12. W. H. Hucho. *Aerodynamics of Road Vehicles*. Londres: Butterworth-Heinemann, 1987.
13. B. R. Munson, D. F. Young e T. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. 4. ed. Nova Iorque: Wiley, 2002.
14. M. C. Potter e D. C. Wiggert. *Mechanics of Fluids*. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
15. C. T. Crowe, J. A. Roberson e D.F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*. 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
16. H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*, 7. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1979.
17. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.
18. J. Vogel. *Life in Moving Fluids*. 2. ed. Boston: Willard Grand Press, 1994.
19. F. M. White. *Mecânica dos Fluidos*, 4. ed. McGraw-Hill Interamericana do Brasil, 2002.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Redução de Arrasto

Autor Convidado: Werner J. A. Dahm, Universidade de Michigan

Uma pequena redução percentual no arrasto que age sobre um veículo no ar, um veículo na superfície do mar ou um veículo submarino pode representar grandes reduções no consumo de combustível e nos custos operacionais, ou ainda um aumento no alcance do veículo e na capacidade de carga. Uma abordagem para se conseguir essa redução de arrasto é o controle ativo dos vórtices alinhados com a direção da corrente que ocorrem naturalmente na subcamada viscosa da camada limite turbulenta, na superfície do veículo. A subcamada fina viscosa na base de qualquer camada limite turbulenta é um poderoso sistema não-linear, capaz de amplificar pequenas perturbações induzidas por microatuadores, a grandes reduções no arrasto do veículo. Numerosos estudos experimentais, computacionais e teóricos têm mostrado que são possíveis reduções de 15% a 25% na tensão de cisalhamento da parede, controlando adequadamente essas estruturas de subcamada. O desafio tem sido desenvolver conjuntos grandes e densos de microatuadores que possam manipular essas estruturas para obter a redução de arrasto na prática em veículos aéreos e náuticos (Figura 11–57). As estruturas de subcamada têm normalmente alguns décimos de milímetro, e, portanto se adaptam bem à escala dos *sistemas microeletromecânicos* (MEMS).

A Figura 11–58 mostra um exemplo de um tipo desses conjuntos de atuadores em microescala, baseados no princípio eletrocinético que é potencialmente adequado para controle ativo da subcamada em veículos reais. O escoamento eletrocinético proporciona uma maneira de movimentar pequenas quantidades de fluido em escalas de tempo muito rápido, em dispositivos muito pequenos. Os atuadores deslocam impulsivamente um volume fixo de fluido entre a parede e a subcamada viscosa, de uma maneira que age contra o efeito dos vórtices da subcamada. Uma arquitetura de sistema baseada em células unitárias independentes, apropriada para grandes conjuntos desses microatuadores, reduz bastante os requisitos de processamento do controle dentro das células unitárias individuais, que consistem de um número relativamente pequeno de sensores e atuadores individuais. A consideração fundamental dos princípios de escala que governam o escoamento eletrocinético, bem como a estrutura de subcamada e dinâmica e tecnologias de microfabricação, foram usadas para desenvolver e produzir conjuntos de microatuadores eletrocinéticos em escala total que podem satisfazer muitos dos requisitos para controle ativo de subcamada de camadas limites turbulentas sob condições reais nos veículos.

Esses atuadores microeletrocinéticos (MEKA), quando fabricados com sensores de tensão de cisalhamento da parede também baseados em fabricação de sistemas microeletromecânicos, podem futuramente permitir aos engenheiros obter reduções enormes no arrasto que age praticamente em todos os veículos aeronáuticos e náuticos.

Referências

Diez-Garias, F. J., Dahm, W. J. A. e Paul, P. H., "Microactuator Arrays for Sublayer Control in Turbulent Boundary Layers Using the Electrokinetic Principle", *AIAA Paper No. 2000-0548*, AIAA, Washington, DC, 2000.

Diez, F. J. e Dahm, W. J. A., "Electrokinetic Microactuator Arrays and System Architecture for Active Sublayer Control of Turbulent Boundary Layers", *AIAA Journal*, Vol. 41, p. 1906-1915, 2003.

FIGURA 11–57
Conjuntos de microatuadores de redução de arrasto no casco de um submarino. A figura mostra a arquitetura do sistema com matrizes compostas de células unitárias contendo sensores e atuadores.

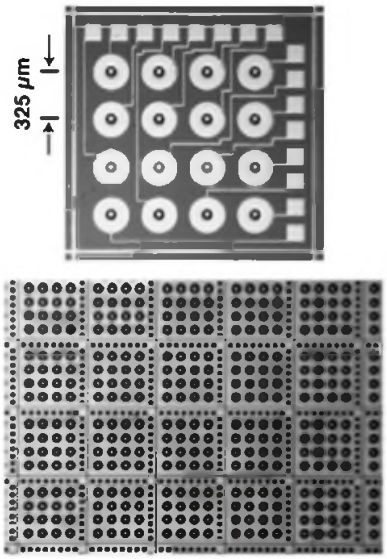


FIGURA 11–58
Conjunto atuador microeletrocinético (MEKA-5) com 25.600 atuadores individuais com um espaçamento de 325 μm para redução de arraste hidronáutico em escala total. Visualização ampliada de uma única célula unitária (*superior*) e visualização parcial do conjunto completo (*inferior*).

PROBLEMAS*

Arrasto e Coeficientes de Arrasto e Sustentação

11–1C Explique quando um escoamento externo é bidimensional, tridimensional ou axissimétrico. Que tipo de escoamento é o escoamento sobre um carro?

11–2C Qual é a diferença entre a velocidade a montante e a velocidade da corrente livre? Para que tipo de escoamento essas velocidades são iguais entre si?

11–3C Qual é a diferença entre corpos carenados e corpos rombudos? Uma bola de tênis é um corpo carenado ou rombudo?

11–4C Cite o nome de algumas aplicações nas quais é desejável um grande arrasto.

11–5C O que é arrasto? O que causa o arrasto? Por que geralmente tentamos minimizá-lo?

11–6C O que é sustentação? O que a causa? O cisalhamento na parede contribui para a sustentação?

11–7C Durante o escoamento sobre um dado corpo, são medidas a força de arrasto, a velocidade a montante e a densidade do fluido. Explique como você determinaria o coeficiente de arrasto. Que área você usaria nos cálculos?

11–8C Durante o escoamento sobre uma dada área delgada como por exemplo uma asa, são medidas a força de sustentação, a velocidade a montante e a densidade do fluido. Explique como você determinaria o coeficiente de sustentação. Que área você usaria nos cálculos?

11–9C Defina a área frontal de um corpo submetido a escoamento externo. Quando é correto usar a área frontal nos cálculos de arrasto e sustentação?

11–10C Defina a área planiforme de um corpo submetido a escoamento externo. Quando é correto usar a área planiforme nos cálculos de arrasto e sustentação?

11–11C O que é velocidade terminal? Como ela é determinada?

11–12C Qual é a diferença entre arrasto de atrito superficial e arrasto de pressão? Qual deles geralmente é mais significativo para corpos delgados como os aerofólios?

11–13C Qual é o efeito da rugosidade da superfície sobre o coeficiente de arrasto de atrito em escoamentos laminar e turbulento?

11–14C Em geral, como varia o coeficiente de arrasto com o número de Reynolds em (*a*) números de Reynolds baixo e moderado e (*b*) números de Reynolds altos ($Re > 10^4$)?

11–15C São fixadas carenagens na frente e atrás de um corpo cilíndrico para fazê-lo parecer mais carenado. Qual é o efeito dessa modificação sobre (*a*) o arrasto de atrito, (*b*) arrasto de pressão e (*c*) arrasto total? Suponha que o número de Reynolds seja grande o suficiente de forma que o escoamento seja turbulento em ambos os casos.

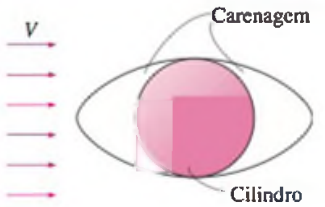


FIGURA P11–15C

11–16C Qual é o efeito da carenagem no (*a*) arrasto de atrito e (*b*) arrasto de pressão? O arrasto total agindo sobre um corpo necessariamente diminui como resultado da carenagem? Explique.

11–17C O que é separação de escoamento? O que a causa? Qual é o efeito da separação de escoamento sobre o coeficiente de arrasto?

11–18C O que é "pegar o vácuo" (*drafting*)? Como andar na esteira de um corpo ("*drafting*") afeta o coeficiente de arrasto?

11–19C Qual dos carros pode ser mais eficiente em termos de consumo de combustível: aquele com arestas vivas ou um outro mais arredondado assemelhando-se a uma elipse? Por quê?

11–20C Qual ciclista deve ser mais rápido: aquele que mantém a cabeça e o corpo na posição vertical ou aquele que inclina o corpo aproximando-o dos joelhos? Por quê?

11–21 O coeficiente de arrasto de um carro nas condições de projeto de 1 atm, 25°C e 90 km/h deve ser determinado experimentalmente em um grande túnel de vento em um teste de escala total. A altura e largura do carro são 1,40 m e 1,65 m, respectivamente. Se a medida da força horizontal agindo sobre o carro foi de 300 N, determine o coeficiente de arrasto total desse carro. *Resposta:* 0,35

11–22 Um carro está se movendo a uma velocidade constante de 80 km/h. Determine a velocidade a montante a ser usada na análise de escoamento de fluido se (*a*) o ar está calmo, (*b*) o vento está soprando na direção contrária ao movimento do carro a 30 km/h e (*c*) o vento está soprando na mesma direção do movimento do carro a 50 km/h.

11–23 A resultante das forças de pressão e cisalhamento na parede agindo sobre um corpo foi medida, resultando em 700 N, formando um ângulo de 35° com a direção do escoamento. Determine as forças de arrasto e sustentação agindo sobre o corpo.

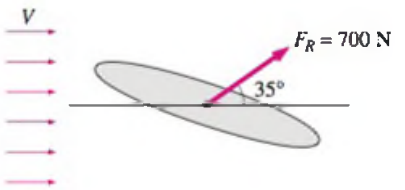


FIGURA P11–23

11–24 Durante um experimento com alto número de Reynolds, a força de arrasto total agindo sobre um corpo esférico de diâmetro $D = 12$ cm submetido a um escoamento de ar a 1 atm e 5°C é medida como 5,2 N. O arrasto de pressão agindo sobre o corpo é calculado integrando-se a distribuição de pressão (medida usando-se sensores de pressão através da superfície) resultando em 4,9 N. Determine o coeficiente de arrasto de atrito da esfera. *Resposta:* 0,0115

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

11–25 Uma placa de sinalização circular tem um diâmetro de 50 cm e está submetida a ventos normais de até 150 km/h a 10°C e 100 kPa. Determine a força de arrasto que age sobre a placa. Determine também o momento fletor na base do mastro da placa cuja altura, da parte inferior da placa até o solo é 1,5 m. Desconsidere o arrasto sobre o mastro.

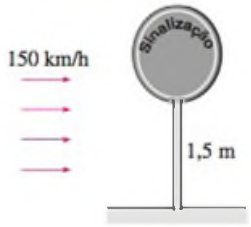


FIGURA P11–25

11–26 Os motoristas de táxis geralmente carregam sobre o teto de seus carros painéis de propaganda para obter uma renda extra, mas isso aumenta também o consumo de combustível. Considere um painel que consiste de um bloco retangular de 0,30m de altura, 0,9 m de largura e 0,9 m de comprimento montado sobre o teto do carro de maneira que o painel tenha uma área frontal de 0,3 m por 0,9 m nos quatro lados. Determine o aumento no custo anual de combustível deste táxi devido a este display. Suponha que o táxi rode 60.000 km por ano a uma velocidade média de 50 km/h e que a eficiência global do motor seja 28%. Considere a densidade, o preço unitário e o valor calórico da gasolina como 0,75 kg/l, S0,50/l e 42.000 kJ/kg, respectivamente, e a densidade do ar 1,25 kg/m^3.

FIGURA P11–26

11–27 Pretende-se suprir as necessidades de água de um trailer instalando-se um tanque cilíndrico de 2 m de comprimento e 0,5 m de diâmetro sobre o teto do veículo. Determine a potência adicional necessária do trailer a uma velocidade de 95 km/h quando o tanque estiver instalado de forma que suas superfícies circulares estejam voltadas para (*a*) a frente e atrás do veículo e (*b*) os lados do veículo. Suponha que as condições atmosféricas sejam 87 kPa e 20°C. *Respostas: (a)* 1,67 kW, *(b)* 7,55 kW

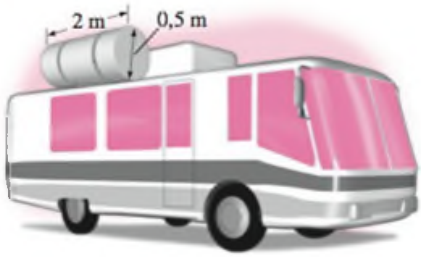


FIGURA P11–27

11–28 Uma esfera de plástico de 4 mm de diâmetro, cuja densidade é 1150 kg/m^3, é jogada na água a 20°C. Determine a velocidade terminal da esfera na água.

11–29 Durante tempestades com ventos fortes, veículos altos como os caminhões-baú e carretas podem ser jogados para fora da estrada, assim como vagões de trens podem sair dos trilhos, especialmente quando estão vazios e em áreas abertas. Considere uma carreta de 5.000 kg com 8 m de comprimento, 2 m de altura e 2 m de largura. A distância entre o assoalho do veículo e a estrada é 0,75 m. Agora ele está exposto a ventos laterais. Determine a velocidade do vento que fará o caminhão tombar lateralmente. Considere a densidade do ar como 1,1 kg/m^3 e suponha que o peso esteja distribuído uniformemente.

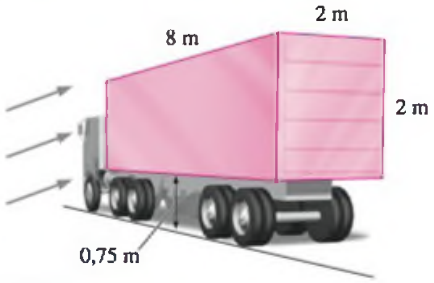


FIGURA P11–29

11–30 Uma ciclista de 80 kg está andando com sua bicicleta de 15 kg descendo em uma estrada com inclinação de 12° sem pedalar nem brecar. A ciclista tem uma área frontal de 0,45 m^2 e um coeficiente de arrasto de 1,1 com o corpo na posição vertical, e uma área frontal de 0,4 m^2 e um coeficiente de arrasto de 0,9 na posição de corrida. Desprezando a resistência de rodagem e o atrito nos rolamentos, determine a velocidade terminal da ciclista para ambas as posições. Considere a densidade do ar como 1,25 kg/m^3. *Respostas:* 90 km/h, 106 km/h

11–31 Uma turbina eólica com duas ou quatro conchas hemisféricas conectadas a um pivô é usada comumente para medir a velocidade do vento. Considere uma turbina de vento com duas conchas de 8 cm de diâmetro com uma distância de centro a centro de 25 cm, conforme mostra a Figura P11–31. O pivô está preso devido a um defeito mecânico e as conchas não estão girando. Para um vento com velocidade de 15 m/s e densidade do ar de 1,25 kg/m^3, determine o torque máximo que a turbina aplica ao pivô.

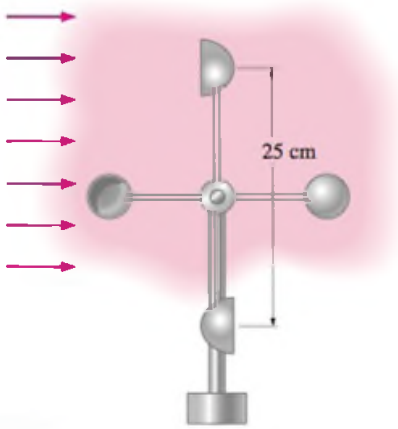


FIGURA P11–31

11–32 Reconsidere o Problema 11–31. Usando o software EES (ou outro), verifique o efeito da velocidade do vento sobre o torque aplicado ao pivô. Suponha que a velocidade do vento varie de 0 a 50 m/s em incrementos de 5 m/s. Faça uma tabela e um gráfico dos resultados.

11–33 Durante o movimento de um veículo com velocidade constante em uma estrada nivelada, a potência fornecida às rodas é usada para vencer o arrasto aerodinâmico e a resistência de rolagem (o produto do coeficiente da resistência de rolagem e pelo do veículo), supondo que o atrito nos rolamentos das rodas

é desprezível. Considere um carro que tenha uma massa total de 950 kg, um coeficiente de arrasto de 0,32, uma área frontal de 1,8 m^2 e um coeficiente de resistência de rolagem de 0,04. A potência máxima que o motor pode fornecer para as rodas é 80 kW. Determine (*a*) a velocidade na qual a resistência de rolagem é igual à força de arrasto aerodinâmico e (*b*) a velocidade máxima desse carro. Considere a densidade do ar como 1,20 kg/m^3.

11–34 Reconsidere o Problema 11–33. Usando o software EES (ou outro), verifique o efeito da velocidade do carro sobre a potência necessária para vencer (*a*) a resistência de rolagem, (*b*) o arrasto aerodinâmico e (*c*) o efeito combinado. Suponha que a velocidade do carro varie de 0 até 150 km/h em incrementos de 15 km/h. Faça uma tabela e um gráfico dos resultados.

11–35 Um submarino pode ser considerado como um elipsóide com diâmetro de 5 m e um comprimento de 25 m. Determine a potência necessária para que esse submarino navegue horizontalmente e com velocidade constante de 40 km/h na água do mar, cuja densidade é 1025 kg/m^3. Determine também a potência requerida para rebocar este submarino no ar cuja densidade é 1,30 kg/m^3. Suponha que o escoamento seja turbulento em ambos os casos.

FIGURA P11–35

11–36 Uma lata de lixo de 0,80 m de diâmetro e 1,2 m de altura foi encontrada de manhã tombada devido a ventos fortes durante a noite. Supondo que a densidade média do lixo que estava dentro seja 150 kg/m^3 e considerando a densidade do ar como 1,25 kg/m^3, calcule a velocidade do vento durante a noite quando a lata de lixo foi tombada. Considere o coeficiente de arrasto da lata de lixo como 0,7. *Resposta:* 186 km/h

Escoamento sobre Placas Planas

11–37C Que propriedade dos fluidos é responsável pelo desenvolvimento da camada limite de velocidade? Qual é o efeito da velocidade sobre a espessura da camada limite?

11–38C O que o coeficiente de atrito representa no escoamento sobre uma placa plana? Como ele está relacionado com a força de arrasto que age sobre a placa?

11–39C Considere o escoamento laminar sobre uma placa plana. Como o coeficiente local de atrito muda com a posição?

11–40C Como é determinado o coeficiente médio de atrito em escoamento sobre uma placa plana?

11–41 A pressão atmosférica local em Denver, Colorado (altitude 1610 m) é 83,4 kPa. Ar a essa pressão e a 25°C escoa com uma velocidade de 6 m/s sobre uma placa plana de 2,5 m × 8 m. Determine a força de arrasto que age sobre a superfície superior da placa se o escoamento do ar é paralelo (*a*) ao lado de 8 m de comprimento e (*b*) ao lado de 2,5 m de comprimento.

11–42 Durante um dia de inverno, sopra um vento a 55 km/h, 5°C e 1 atm paralelo à parede de uma casa com 4 m de altura e 10 m de comprimento. Supondo que as superfícies das paredes sejam lisas, determine o arrasto de atrito que age sobre a parede. Qual seria a sua resposta se a velocidade do vento fosse o dobro? Quão realístico é tratar o escoamento sobre superfícies de paredes laterais como escoamento sobre placa plana?
Respostas: 16 N, 58 N

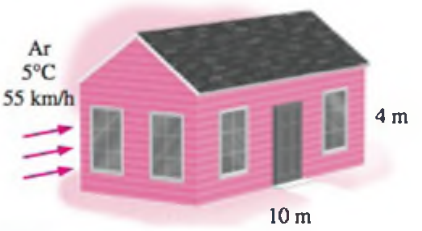


FIGURA P11–42

11–43 A seção de laminação de uma fábrica de plásticos produz uma folha contínua de plástico que tem 1,2 m de largura e 2 mm de espessura a uma razão de 15 m/min. A folha de plástico está sujeita a um escoamento de ar a uma velocidade de 3 m/s em ambos os lados ao longo de suas superfícies normal à direção do movimento da folha. A largura da seção de resfriamento a ar é tal que um ponto fixo na folha de plástico passa através daquela seção em 2 s. Usando propriedades do ar a 1 atm e 60°C, determine a força de arrasto que o ar exerce sobre a folha de plástico na direção do escoamento do ar.

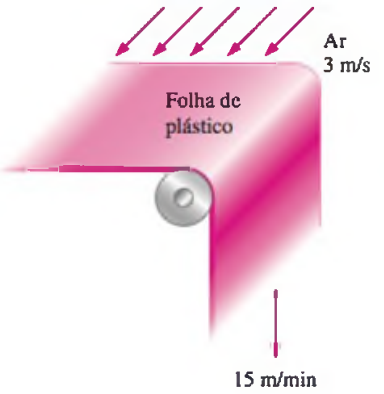


FIGURA P11–43

11–44 A superfície superior de um vagão de passageiros de um trem movendo-se a uma velocidade de 70 km/h tem 3,2 m de largura e 8 m de comprimento. Se o ar externo estiver a 1 atm e 25°C, determine a força de arrasto que age sobre a superfície superior do vagão.

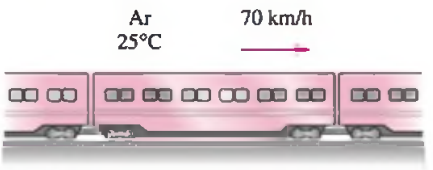


FIGURA P11–44

11–45 O peso de uma placa plana fina com tamanho de 50 cm × 50 cm é equilibrado por um contrapeso que tem uma massa de 2 kg, como mostra a Figura P11–45. Agora é ligado um ventilador; o ar a 1 atm e 25°C escoa para baixo sobre ambas as superfícies da placa como uma velocidade de corrente livre de 10 m/s. Determine a massa do contrapeso que precisa ser acrescentada para equilibrar a placa neste caso.

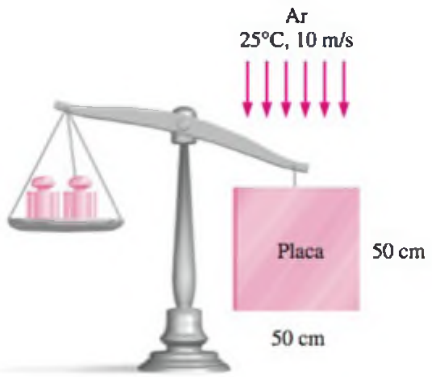


FIGURA P11–45

11–46 Considere o escoamento laminar de um fluido sobre uma placa plana. Agora a velocidade de corrente livre do fluido é dobrada. Determine a alteração na força de arrasto na placa. Suponha que o escoamento permaneça laminar. *Resposta:* Um aumento de 2,83 vezes.

11–47 Ar a 25°C e 1 atm está escoando sobre uma longa placa plana com a velocidade de 8 m/s. Determine a distância a partir do bordo de ataque da placa, onde o escoamento se torna turbulento, e a espessura da camada limite nessa posição.

11–48 Repita o Problema 11–47 para água.

Escoamento Transversal por Cilindros e Esferas

11–49C No escoamento sobre cilindros, por que o coeficiente de arrasto cai subitamente quando o escoamento se torna turbulento? Não se supõe que a turbulência aumente o coeficiente de arrasto em vez de diminuí-lo?

11–50C No escoamento sobre corpos rombudos como um cilindro, como o arrasto de pressão difere do arrasto de atrito?

11–51C Por que a separação de escoamento no escoamento sobre cilindros é retardada no escoamento turbulento?

11–52 Um longo tubo de vapor com 8 cm de diâmetro passa através de uma área que está aberta aos ventos. Determine a força de arrasto que age sobre o tubo por unidade de seu comprimento quando o ar está a 1 atm e 5°C e o vento está soprando através do tubo a uma velocidade de 50 km/h.

11–53 Uma linha de transmissão de energia elétrica com diâmetro de 6 mm está exposta ao vento. Determine a força de arrasto exercida sobre uma seção do cabo de 120 m de comprimento durante um dia com ventos quando o ar está a 1 atm e 15°C e o vento está soprando através da linha de transmissão a 40 km/h.

11–54 Considere um granizo de 0,8 cm de diâmetro caindo livremente no ar a 1 atm e 5°C. Determine a velocidade terminal do granizo. Considere a densidade do granizo como 910 kg/m^3.

11–55 Observa-se que uma partícula de pó com 0,1 mm de diâmetro cuja densidade é 2,1 g/cm^3 está suspensa no ar a 1 atm e 25°C em um ponto fixo. Estime a velocidade ascendente do ar nesse local. Suponha que a lei de Stokes seja aplicável. Essa hipótese é válida? *Resposta:* 0,62 m/s.

11–56 Partículas de pó com diâmetro de 0,05 mm e densidade de 1,8 g/cm^3 são levantadas pelo ar durante ventos fortes e sobem até uma altitude de 350 m quando o vento se acalma. Estime quanto tempo levará para que as partículas de pó caiam de volta à terra em ar parado a 1 atm e 15°C; estime também sua velocidade. Desconsidere o período de transição inicial durante o qual as partículas de pó aceleram até atingir sua velocidade terminal; suponha que a lei de Stokes seja aplicável.

11–57 Um tronco de pinho cilíndrico de 2 m de comprimento e 0,2 m de diâmetro (densidade = 513 kg/m^3) é suspenso por um guindaste na posição horizontal. O tronco está sujeito a ventos normais de 40 km/h a 5°C e 88 kPa. Desconsiderando o peso do cabo e seu arrasto, determine o ângulo θ que o cabo fará com a horizontal e a tensão no cabo.

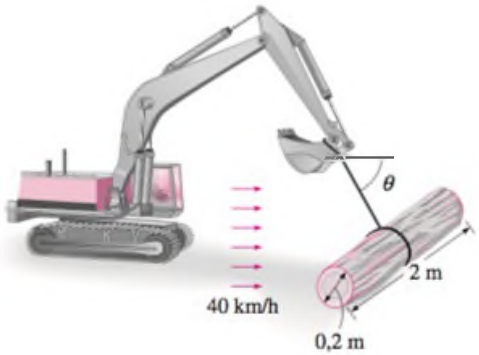


FIGURA P11–57

11–58 Uma das demonstrações populares em feiras de ciências envolve a suspensão de uma bola de ping-pong por um jato de ar dirigido para cima. As crianças ficam encantadas observando que a bola sempre retorna para o centro do jato de ar quando ela é empurrada para o lado com o dedo. Explique esse fenômeno usando a equação de Bernoulli. Determine também a velocidade do ar se a bola tiver uma massa de 2,6 g e um diâmetro de 3,8 cm. Suponha que o ar está a 1 atm e 25°C.

FIGURA P11–58

Sustentação

11–59C Por que a contribuição dos efeitos viscosos para a sustentação usualmente é desprezível nos aerofólios?

11–60C O ar está escoando por um aerofólio simétrico com um ângulo de ataque zero. (*a*) A sustentação e (*b*) o arrasto, que agem sobre o aerofólio, serão iguais a zero ou não?

11–61C O ar está escoando por um aerofólio assimétrico com um ângulo de ataque zero. (*a*) A sustentação e (*b*) o arrasto, que agem sobre o aerofólio, serão iguais a zero ou não?

11–62C O ar está escoando por um aerofólio simétrico com um ângulo de ataque de 5°. (*a*) A sustentação e (*b*) o arrasto, que agem sobre o aerofólio, serão iguais a zero ou não?

11–63C O que é estol? O que faz um aerofólio entrar em estol? Por que os aviões comerciais não podem voar em condições próximas de estol?

11–64C Tanto a sustentação quanto o arrasto em um aerofólio aumentam com o aumento no ângulo de ataque. Em geral, o que aumenta a uma taxa maior, a sustentação ou o arrasto?

11–65C Por que são usados os flaps nos bordos de ataque e de fuga das asas de grandes aviões durante a decolagem e o pouso? Um avião pode decolar ou pousar sem eles?

11–66C Como os flaps afetam a sustentação e o arrasto das asas?

11–67C Qual é o efeito dos vórtices das pontas das asas (a circulação de ar da parte inferior das asas para a parte superior) sobre o arrasto e a sustentação?

11–68C O que é arrasto induzido nas asas? Pode o arrasto induzido ser minimizado usando-se asas longas e estreitas ou asas curtas e largas?

11–69C O ar está escoando sobre uma bola. A sustentação exercida na bola é zero ou diferente de zero? Responda à mesma questão se a bola estiver girando.

11–70 Uma bola de tênis com uma massa de 57 g e diâmetro de 6,4 cm é rebatida com uma velocidade inicial de 92 km/h e uma rotação para trás de 4200 rpm. Determine se a bola cairá ou subirá sob o efeito combinado da gravidade e sustentação devido à rotação logo depois de ser lançada. Suponha que o ar está a 1 atm e 25°C.

FIGURA P11–70

11–71 Considere um avião, que decola a 190 km/h com sua carga total. Se o peso do avião for aumentado em 20 por cento em razão de uma sobrecarga, determine a velocidade na qual o avião sobrecarregado irá decolar.

Resposta: 208 km/h

11–72 Considere um avião cuja velocidade de decolagem é 220 km/h e que leva 15 segundos para decolar ao nível do mar. Para um aeroporto que está a uma altitude de 1600 m (como por exemplo Denver), determine (*a*) a velocidade de decolagem, (*b*) o tempo de decolagem e (*c*) o comprimento adicional da pista necessária para esse avião. Suponha aceleração constante em ambos os casos.

FIGURA P11–72

11–73 Um jato jumbo jet tem uma massa de aproximadamente 400.000 kg quando está totalmente lotado com mais de 400 passageiros e decola a uma velocidade de 250 km/h. Determine a velocidade de decolagem quando o avião estiver com 100 assentos vazios. Suponha que cada passageiro com sua bagagem pese 140 kg e os ajustes de asa e flaps permaneçam os mesmos.

Resposta: 246 km/h

11–74 Reconsidere o Problema 11–73. Usando EES (ou outro software), investigue o efeito do número de passageiros na velocidade de decolagem do avião. Faça o número de passageiros variar de 0 até 500 em incrementos de 50. Faça uma tabela e um gráfico dos resultados.

11–75 Um pequeno avião tem uma asa com área de 30 m^2, um coeficiente de sustentação de 0,45 nos parâmetros de decolagem, e uma massa total de 2800 kg. Determine (*a*) a velocidade de decolagem desse avião ao nível do mar nas condições atmosféricas padrão, (*b*) a carga da asa e (*c*) a potência necessária para manter uma velocidade de cruzeiro constante de 300 km/h para um coeficiente de arrasto de cruzeiro de 0,035.

11–76 Um pequeno avião tem massa total de 1800 kg e uma área de asa de 42 m^2. Determine os coeficientes de sustentação e arrasto desse avião enquanto viaja a uma altitude de 4000 m a uma velocidade constante de 280 km/h gerando 190 kW de potência.

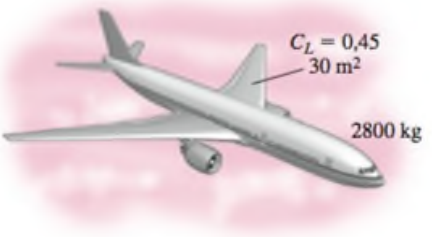


FIGURA P11–76

11–77 O aerofólio NACA 64(1)-412 tem uma vazão sustentação-arrasto de 50 com ângulo de ataque 0°, como mostra a Figura 11–43. Em que ângulo de ataque essa vazão aumenta para 80?

11–78 Considere um avião leve com um peso total de 15.000 N e uma área de asa de 46 m^2, essas asas são semelhantes ao aerofólio NACA 23012 sem flaps. Usando dados da Figura 11–45, determine a velocidade de decolagem a um ângulo de ataque de 5° ao nível do mar. Determine também a velocidade de estol.

Respostas: 94 km/h, 67,4 km/h.

11–79 Um avião tem uma massa de 50.000 kg, e 300 m^2 de área de asa, um coeficiente de sustentação máximo de 3,2 e coeficiente de arrasto em velocidade de cruzeiro de 0,03 a uma altitude de 12.000 m. Determine (*a*) a velocidade de decolagem ao nível do mar, supondo que ela é 20 por cento acima da velocidade de estol e (*b*) o empuxo que os motores precisam fornecer para uma velocidade de cruzeiro de 700 km/h.

Problemas de Revisão

11–80 Um motor de automóvel pode ser considerado aproximadamente como um bloco retangular com 0,4 m de altura, 0,60 m de largura, e 0,7 m de comprimento. O ar ambiente está a 1 atm e 15°C. Determine a força de arrasto que age sobre a superfície inferior do bloco do motor quando o carro está a uma velocidade de 85 km/h. Suponha que o escoamento seja turbulento sobre a superfície do motor devido à constante agitação do bloco do motor.

Resposta: 0,65 N

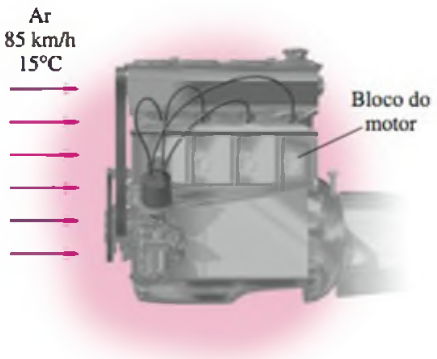


FIGURA P11–80

11–81 Calcule a espessura da camada limite durante o escoamento sobre uma placa plana de 2,5 m de comprimento a intervalos de 25 cm e faça um gráfico da camada limite sobre a placa para o escoamento de (*a*) ar, (*b*) água e (*c*) óleo de motor a 1 atm e 20°C a uma velocidade a montante de 3 m/s.

11–82 Um tanque esférico com diâmetro externo de 1 m está localizado ao ar livre a 1 atm e 25°C e está sujeito a ventos de 35 km/h. Determine a força de arrasto exercida sobre ele pelo vento.

Resposta: 3,5 N

11–83 Um painel de anúncio retangular de 2 m de altura e 4 m de largura está preso a um bloco de concreto retangular de 4 m de largura e 0,15 m de altura (densidade = 2300 kg/m^3) por dois mastros de 5 cm de diâmetro, 4 m de altura (parte exposta), como mostra a Figura P11–83. Se o anúncio deve resistir a ventos de 150 km/h de qualquer direção, determine (*a*) a máxima força de arrasto no painel, (*b*) a força de arrasto que age nos mastros e (*c*) o comprimento mínimo *L* do bloco de concreto para que o painel resista aos ventos. Considere a densidade do ar como 1,30 kg/m^3.

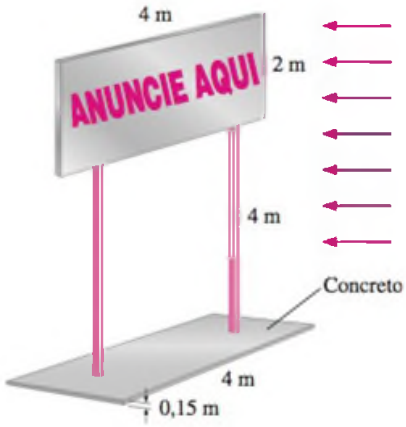


FIGURA P11–83

11–84 Um barco plástico, cujo fundo pode ser aproximado como uma superfície plana de 1,5 m de largura e 2 m de comprimento, deve se mover através da água a 15°C a velocidades de até 30 km/h. Determine o arrasto de atrito no barco pela água e a potência necessária para vencê-lo.

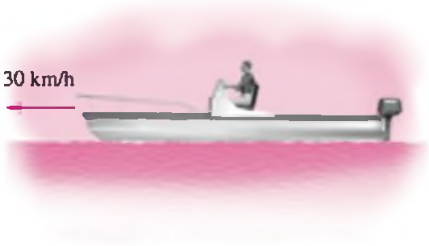


FIGURA P11–84

11–85 Reconsidere o Problema 11–84. Usando EES (ou outro software), estude o efeito da velocidade do barco sobre a força de arrasto que age na superfície do fundo do barco e a potência necessária para vencê-lo. Faça a velocidade do barco variar de 0 até 100 km/h em incrementos de 10 km/h. Faça uma tabela e um gráfico dos resultados.

11–86 Uma bola lisa de 8 cm de diâmetro tem uma velocidade de 36 km/h durante uma rebatida típica. Determine o aumento percentual no coeficiente de arrasto se for aplicada à bola uma rotação de 3500 rpm no ar a 1 atm e 25°C.

11–87 Um pára-quedista e seu pára-quedas de 8 m de diâmetro pesam 950 N. Considerando a densidade média do ar como 1,2 kg/m^3, determine a velocidade terminal do pára-quedista.

Resposta: 4,9 m/s

FIGURA P11–87

11–88 Um caminhão-baú de 17.000 kg tem uma área frontal de 9,2 m^2, um coeficiente de arrasto de 0,96, um coeficiente de resistência de rolagem de 0,05 (multiplicando-se o peso de um veículo pelo coeficiente de resistência de rolagem, obtemos a resistência de rolagem), uma resistência de atrito nos mancais de 350 N e uma velocidade máxima de 110 km/h em uma estrada nivelada com velocidade constante em tempo calmo com a densidade do ar igual a 1,25 kg/m^3. A seguir, é instalada uma carenagem na frente do reboque para eliminar a separação e para carenar o escoamento na superfície superior; o coeficiente de arrasto é reduzido para 0,76. Determine a velocidade máxima do reboque com a carenagem. *Resposta:* 133 km/h

11–89 A lei de Stokes pode ser usada para determinar a viscosidade de um fluido fazendo cair um objeto esférico no fluido e medindo a velocidade terminal do objeto nesse fluido. Isso pode ser feito traçando-se um gráfico da distância percorrida versus tempo e observando quando a curva se torna linear. Durante um experimento desses, uma bola de vidro de 3 mm de diâmetro (ρ = 2.500 kg/m^3) é jogada no fluido cuja densidade é 875 kg/m^3 e a velocidade terminal resultante é 0,12 m/s. Desprezando os efeitos de parede, determine a viscosidade do fluido.

FIGURA P11–89

11–90 Durante uma experiência, três bolas de alumínio (ρ_s = 2600 kg/m^3) com diâmetros de 2, 4 e 10 mm, respectivamente, são jogadas em um tanque cheio com glicerina a 22°C (ρ_f = 1274 kg/m^3 e μ = 1 kg/m · s). As velocidades terminais de descida das bolas são medidas resultando em 3,2, 12,8 e 60,4 mm/s, respectivamente. Compare esses valores com as velocidades previstas pela lei de Stokes para a força de arrasto $F_D = 3\pi\mu DV$, que é válida para números de Reynolds muito baixos (Re << 1). Determine o erro envolvido em cada caso e avalie a precisão da lei de Stokes.

11–91 Repita o Problema 11–90 considerando a forma geral da lei de Stokes expressa como $F_D = 3\pi\mu DV + (9\pi/16)\rho_s V^2 D^2$.

11–92 Uma pequena bola de alumínio com D = 2 mm e ρ_s = 2700 kg/m^3 é jogada em um grande recipiente cheio com óleo a 40°C (ρ_f = 876 kg/m^3 e μ = 0,2177 kg/m · s). Espera-se que o número de Reynolds seja baixo e portanto que a lei de Stokes para a força de arrasto, $F_D = 3\pi\mu DV$ seja aplicável. Mostre que a variação de velocidade com o tempo pode ser expressa como $V = (a/b)(1 - e^{-bt})$ onde $a = g(1 - \rho_f/\rho_s)$ e $b = 18\mu/(\rho_s D^2)$. Faça um gráfico da variação da velocidade com o tempo e calcule o tempo necessário para que a bola alcance 99 por cento de sua velocidade terminal.

11–93 Um óleo de motor a 40°C está escoando sobre uma longa placa plana com a velocidade de 4 m/s. Determine a distância x_{cr} a partir do bordo de ataque da placa onde o escoamento se torna turbulento, calcule e faça um gráfico da espessura da camada limite sobre um comprimento de $2x_{cr}$.

Problemas de Projeto e Ensaio

11–94 Escreva um relatório sobre a história da redução dos coeficientes de arrasto dos carros e obtenha os dados de coeficientes de arrasto para alguns modelos mais modernos de carros através dos catálogos dos fabricantes.

11–95 Escreva um relatório sobre os flaps usados nos bordos de ataque e de fuga das asas dos grandes aviões comerciais. Discuta como os flaps afetam os coeficientes de arrasto e sustentação durante a decolagem e pouso.

11–96 Os grandes aviões comerciais voam a grandes altitudes (até aproximadamente 40.000 pés) para economizar combustível. Discuta como o vôo em grandes altitudes reduz o arrasto e economiza combustível. Discuta também por que os pequenos aviões voam a altitudes relativamente baixas.

11–97 Muitos motoristas desligam o ar-condicionado do carro e abrem os vidros das janelas esperando que com isso estarão economizando combustível. Mas há quem diga que esse aparente "resfriamento gratuito" na realidade aumenta o consumo de combustível do carro. Investigue esse assunto e escreva um relatório sobre qual prática economizará gasolina e em que condições.

CAPÍTULO

12

ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

Em geral, tivemos até agora uma apreciação limitada dos escoamentos para os quais os efeitos das variações da massa específica e, portanto, da compressibilidade são desprezíveis. Neste capítulo abordamos essa limitação e consideramos os escoamentos que envolvem variações significativas da massa específica. Tais escoamentos são chamados *escoamentos compressíveis*, e freqüentemente podem ser encontrados em dispositivos que envolvem o escoamento de gases a velocidades muito altas. O escoamento compressível combina a dinâmica dos fluidos e a termodinâmica, já que as duas são necessárias para o desenvolvimento do fundamento teórico necessário. Neste capítulo, desenvolvemos as relações gerais associadas aos escoamentos unidimensionais compressíveis de um gás ideal com calores específicos constantes.

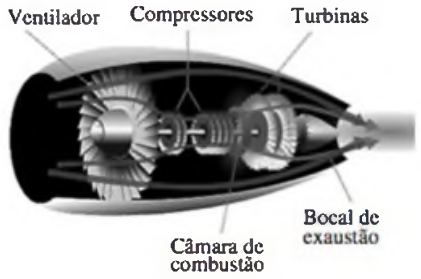
Iniciamos apresentando os conceitos do *estado de estagnação, velocidade do som* e *número de Mach* para os escoamentos compressíveis. As relações entre as propriedades estáticas e de estagnação dos fluidos são desenvolvidas para os escoamentos isentrópicos dos gases ideais, e são expressas como funções das razões de calores específicos e do número de Mach. Os efeitos das variações de área para os escoamentos subsônicos isentrópicos unidimensionais e supersônicos são discutidos. Esses efeitos são ilustrados levando-se em conta o escoamento isentrópico através de *bocais convergentes* e *convergentes-divergentes*. Discutimos o conceito de *ondas de choque* e da variação das propriedades do escoamento através de ondas de choque normais e oblíquas. Finalmente consideramos os efeitos do atrito e da transferência de calor sobre os escoamentos compressíveis e desenvolvemos relações para as variações de propriedades.

OBJETIVOS

Ao terminar de ler este capítulo você deve ser capaz de:

- Avaliar as conseqüências da compressibilidade sobre o escoamento de um gás
- Entender por que um bocal deve ter uma seção divergente para acelerar um gás até velocidades supersônicas
- Prever a ocorrência de choques e calcular as variações das propriedades através de uma onda de choque
- Entender os efeitos do atrito e da transferência de calor sobre os escoamentos compressíveis

(*a*)



(*b*)

FIGURA 12–1
Os motores de aeronaves e motores a jato envolvem altas velocidades e, portanto, o termo energia cinética sempre deve ser considerado ao analisá-los.

(a) Foto cortesia da NASA. http://lisar.larc.nasa.gov/IMAGES/SMALL/EL-1999-00108.jpeg e (b) Figura cortesia da Pratt and Whitney. Usada com permissão.

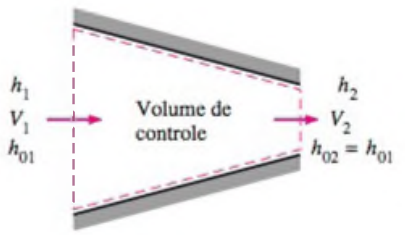


FIGURA 12–2
O escoamento permanente de um fluido através de um duto adiabático.

12–1 • PROPRIEDADES DE ESTAGNAÇÃO

Ao analisarmos os volumes de controle, descobrimos que é muito conveniente combinar a *energia interna* e a *energia de escoamento* de um fluido em um único termo, a *entalpia*, definida por unidade de massa como $h = u + P/\rho$. Sempre que as energias cinética e potencial do fluido são desprezíveis, como acontece com freqüência, a entalpia representa a *energia total* de um fluido. Para escoamentos a alta velocidade, como aqueles encontrados em motores a jato (Figura 12–1), a energia potencial do fluido ainda é desprezível, mas não a energia cinética. Em tais casos, é conveniente combinar a entalpia e a energia cinética do fluido em um único termo chamado de **entalpia de estagnação** (ou **total**) h_0, definida por unidade de massa como

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad \text{(kJ/kg)} \tag{12–1}$$

Quando a energia potencial do fluido é desprezível, a entalpia de estagnação representa a *energia total de uma corrente de fluido passante* por unidade de massa. Assim, isso simplifica a análise termodinâmica dos escoamentos de alta velocidade.

Neste capítulo a entalpia comum h é denominada **entalpia estática**, sempre que necessário, para distingui-la da entalpia de estagnação. Observe que a entalpia de estagnação é uma propriedade combinada de um fluido, assim como a entalpia estática, e essas duas tornam-se idênticas quando a energia cinética do fluido é desprezível.

Considere o escoamento permanente de um fluido através de um duto, como um bocal, um difusor ou alguma outra passagem de escoamento na qual o escoamento ocorre de forma adiabática e sem nenhum trabalho de eixo ou elétrico, como mostra a Figura 12–2. Considerando que o fluido passe por pouca ou nenhuma variação em sua elevação e em sua energia potencial, a relação de equilíbrio da energia ($\dot{E}_e = \dot{E}_s$) para este dispositivo de escoamento permanente e corrente única se reduz a:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12–2}$$

ou:

$$h_{01} = h_{02} \tag{12–3}$$

Ou seja, na ausência de qualquer interação de calor e trabalho e de variações na energia potencial, a entalpia de estagnação de um fluido permanece constante durante um processo de escoamento permanente. Os escoamentos através de bocais e difusores em geral atendem a essas condições, e todo aumento da velocidade do fluido nesses dispositivos cria uma diminuição equivalente da entalpia estática do fluido.

Se o fluido fosse parado completamente, a velocidade no estado 2 seria zero e a Equação 12–2 se tornaria:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 = h_{02}$$

Assim, a *entalpia de estagnação* representa a *entalpia de um fluido quando ele é levado ao repouso de forma adiabática.*

Durante um processo de estagnação, a energia cinética de um fluido é convertida em entalpia (energia interna + energia de escoamento), o que resulta em um aumento da temperatura e da pressão do fluido (Figura 12–3). As propriedades de um fluido no estado de estagnação são chamadas de **propriedades de estagnação** (temperatura de estagnação, pressão de estagnação, massa específica de estagnação etc.). O estado de estagnação e as propriedades de estagnação são indicados pelo subscrito 0.

O estado de estagnação é chamado de **estado de estagnação isentrópico** quando o processo de estagnação é reversível e também adiabático (ou seja, isentró-

pico). A entropia de um fluido permanece constante durante um processo de estagnação isentrópico. Os processos de estagnação real (irreversível) e isentrópico são mostrados no diagrama *h-s* da Figura 12–4. Observe que a entalpia de estagnação do fluido (e a temperatura de estagnação caso o fluido seja um gás ideal) é igual nos dois casos. Entretanto, a pressão de estagnação real é mais baixa do que a pressão de estagnação isentrópica, uma vez que a entropia aumenta durante o processo de estagnação real como resultado do atrito de fluidos. Os processos de estagnação quase sempre são aproximados como isentrópicos, e as propriedades de estagnação isentrópica são chamadas simplesmente de propriedades de estagnação.

Quando o fluido é aproximado como um *gás ideal* com calores específicos constantes, sua entalpia pode ser substituída por c_pT e a Equação 12–1 pode ser expressa como:

$$c_pT_0 = c_pT + \frac{V^2}{2}$$

ou:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} \tag{12–4}$$

Aqui T_0 é chamada de **temperatura de estagnação** (ou **total**), e representa *a temperatura que um gás ideal atinge quando é levado ao repouso de forma adiabática.* O termo $V^2/2c_p$ corresponde à elevação de temperatura durante tal processo e é chamado de **temperatura dinâmica**. Por exemplo, a temperatura dinâmica do ar que escoa a 100 m/s é $(100\ \text{m/s})^2/(2 \times 1{,}005\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K}) = 5{,}0$ K. Assim, quando o ar a 300 K e 100 m/s é levado ao repouso de forma adiabática (na ponta de uma sonda de temperatura, por exemplo), sua temperatura se eleva até o valor de estagnação de 305 K (Figura 12–5). Observe que nos escoamentos de baixa velocidade, as temperaturas de estagnação e estática (ou comum) praticamente são iguais. Mas para escoamentos de alta velocidade, a temperatura medida por uma sonda estacionária colocada no fluido (a temperatura de estagnação) pode ser significativamente mais alta do que a temperatura estática do fluido.

A pressão que um fluido atinge quando é levado ao repouso de forma isentrópica é chamada de **pressão de estagnação** P_0. Para os gases ideais com calores específicos constantes, P_0 está relacionada à pressão estática do fluido por:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{k/(k-1)} \tag{12–5}$$

Observando que $\rho = 1/v$ e usando a relação isentrópica $Pv^k = P_0v_0^k$, a relação entre a massa específica de estagnação e a massa específica estática pode ser expressa como:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(k-1)} \tag{12–6}$$

Quando as entalpias de estagnação são usadas, não há necessidade de se referir explicitamente à energia cinética. Em seguida, o balanço de energia $\dot{E}_e = \dot{E}_s$ de um dispositivo de escoamento permanente e de corrente única pode ser expresso como:

$$q_e + w_e + (h_{01} + gz_1) = q_s + w_s + (h_{02} + gz_2) \tag{12–7}$$

onde h_{01} e h_{02} são as entalpias de estagnação nos estados 1 e 2, respectivamente. Quando o fluido é um gás ideal com calores específicos constantes, a Equação 12–7 torna-se:

$$(q_e - q_s) + (w_e - w_s) = c_p(T_{02} - T_{01}) + g(z_2 - z_1) \tag{12–8}$$

onde T_{01} e T_{02} são as temperaturas de estagnação.

Observe que os termos da energia cinética não aparecem explicitamente nas Equações 12–7 e 12–8, mas os da entalpia de estagnação dão conta de sua contribuição.

FIGURA 12–3
A energia cinética é convertida em entalpia durante um processo de estagnação.

© *Reimpresso com permissão especial do King Features Syndicate.*

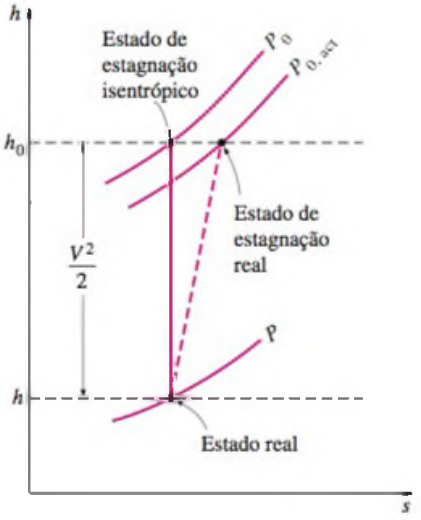


FIGURA 12–4
O estado real, o estado de estagnação real e o estado de estagnação isentrópico de um fluido em um diagrama *h–s*.

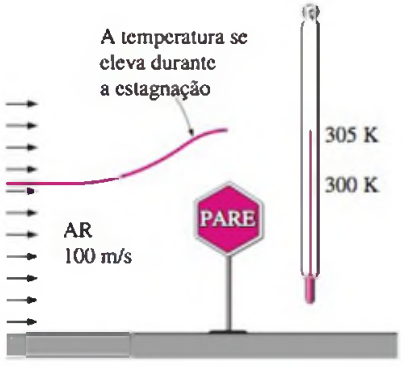


FIGURA 12–5
A temperatura de um gás ideal que escoa a uma velocidade V se eleva em $V^2/2c_p$ quando ele é totalmente freado.

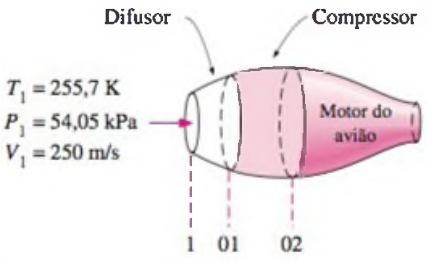


FIGURA 12–6
Esquema do Exemplo 12–1.

EXEMPLO 12–1 Compressão do Ar a Alta Velocidade em um Avião

Um avião voa à velocidade de cruzeiro de 250 m/s, altitude de 5.000 m na qual a pressão atmosférica é de 54,05 kPa, e a temperatura do ar ambiente é 255,7 K. O ar ambiente primeiro é desacelerado em um difusor antes de entrar no compressor (Figura 12–6). Considerando que o difusor e o compressor sejam isentrópicos, determine (*a*) a pressão de estagnação na entrada do compressor e (*b*) o trabalho de compressor por unidade de massa se a razão de pressão de estagnação do compressor for 8.

SOLUÇÃO O ar a alta velocidade entra no difusor e no compressor de um avião. A pressão de estagnação do ar e a entrada de trabalho do compressor devem ser determinadas.

Hipóteses 1 Tanto o difusor quanto o compressor são isentrópicos. **2** O ar é um gás ideal com calores específicos constantes à temperatura ambiente.

Propriedades O calor específico a pressão constante, c_p, e a razão de calor específico k do ar à temperatura ambiente são:

$$c_p = 1{,}005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \qquad \text{e} \qquad k = 1{,}4$$

Análise (*a*) Em condições isentrópicas, a pressão de estagnação na entrada do compressor (saída do difusor) pode ser determinada com a Equação 12–5. Entretanto, primeiro precisamos encontrar a temperatura de estagnação T_{01} na entrada do compressor. De acordo com as hipóteses declaradas, T_{01} pode ser determinada com a Equação 12–4 como:

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 255{,}7 \text{ K} + \frac{(250 \text{ m/s})^2}{(2)(1{,}005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})}\left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}\right)$$
$$= 286{,}8 \text{ K}$$

Assim, da Equação 12–5:

$$P_{01} = P_1\left(\frac{T_{01}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = (54{,}05 \text{ kPa})\left(\frac{286{,}8 \text{ K}}{255{,}7 \text{ K}}\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)}$$
$$= \mathbf{80{,}77 \text{ kPa}}$$

Ou seja, a temperatura do ar aumentaria em 31,1°C e a pressão em 26,72 kPa à medida que o ar é desacelerado de 250 m/s até a velocidade zero. Esses aumentos da temperatura e pressão do ar são devidos à conversão da energia cinética em entalpia.

(*b*) Para determinarmos o trabalho do compressor, precisamos conhecer a temperatura de estagnação do ar na saída do compressor T_{02}. A relação da pressão de estagnação através do compressor, P_{02}/P_{01}, é especificada como 8. Como o processo de compressão é considerado isentrópico, T_{02} pode ser determinada da relação isentrópica do gás ideal (Equação 12–5):

$$T_{02} = T_{01}\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{(k-1)/k} = (286{,}8 \text{ K})(8)^{(1{,}4-1)/1{,}4} = 519{,}5 \text{ K}$$

Desprezando as variações da energia potencial e a transferência de calor, o trabalho do compressor por unidade de massa de ar é determinado com a Equação 12–8:

$$w_e = c_p(T_{02} - T_{01})$$
$$= (1{,}005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(519{,}5 \text{ K} - 286{,}8 \text{ K})$$
$$= \mathbf{233{,}9 \text{ kJ/kg}}$$

Assim, o trabalho fornecido ao compressor é 233,9 kJ/kg.

Discussão Observe que o uso das propriedades de estagnação leva em conta automaticamente todas as variações da energia cinética de uma corrente de fluido.

12–2 • VELOCIDADE DO SOM E NÚMERO DE MACH

Um parâmetro importante do estudo do escoamento compressível é a **velocidade do som** (ou **velocidade sônica**), que é a velocidade com a qual uma onda de pressão infinitesimalmente pequena viaja através de um meio. A onda de pressão pode ser causada por uma pequena perturbação, que cria uma ligeira elevação da pressão local.

Para obter uma relação para a velocidade do som em um meio, considere um duto cheio com um fluido em descanso, como mostra a Figura 12–7. Um pistão ajustado ao duto agora é movimentado para a direita com velocidade incremental constante dV, criando uma onda sônica. A parte da frente da onda move-se para a direita através do fluido à velocidade do som c e separa o fluido em movimento adjacente ao pistão do fluido imóvel em repouso. O fluido à esquerda da frente da onda passa por uma variação incremental em suas propriedades termodinâmicas, enquanto o fluido à direita da frente da onda mantém suas propriedades termodinâmicas originais, como mostra a Figura 12–7.

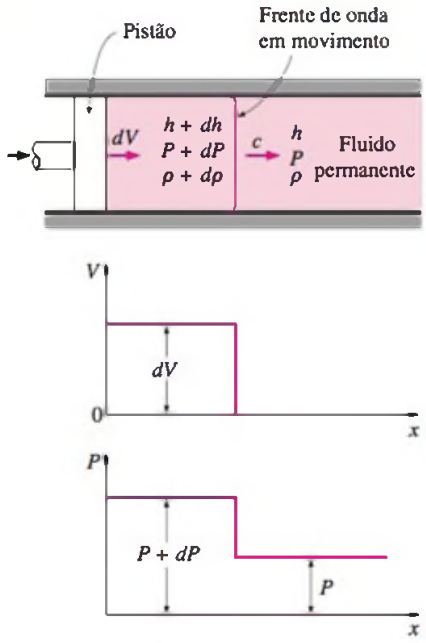


FIGURA 12–7
Propagação de uma onda de pressão pequena ao longo de um duto.

Para simplificar a análise, considere um volume de controle que inclui a frente da onda e movimenta-se com ela, como mostra a Figura 12–8. Para um observador que viaja com a frente da onda, o fluido à direita parece estar se movendo na direção da frente da onda com uma velocidade c e o fluido à esquerda parece se afastar da frente da onda com velocidade $c - dV$. Obviamente, o observador pensaria que o volume de controle que inclui a frente da onda (e o próprio observador) está fixo, e ele estaria testemunhando um processo de escoamento em regime permanente. O balanço de massa desse processo de escoamento permanente e de corrente única pode ser expresso como:

$$\dot{m}_{\text{direita}} = \dot{m}_{\text{esquerda}}$$

ou:

$$\rho A c = (\rho + d\rho)A(c - dV)$$

Cancelando a área A de seção transversal (ou de escoamento) e desprezando os termos de ordem superior, essa equação pode ser reduzida a:

$$c\,d\rho - \rho\,dV = 0 \qquad \text{(a)}$$

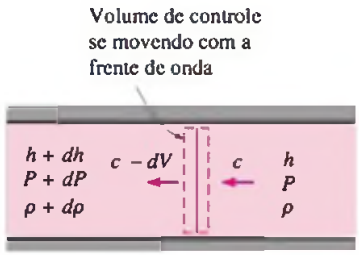


FIGURA 12–8
Volume de controle movimentando-se com onda de pressão pequena ao longo de um duto.

Nenhum calor ou trabalho atravessa as fronteiras do volume de controle durante esse processo de escoamento permanente, e a variação da energia potencial pode ser desprezada. Em seguida, o balanço de energia do escoamento permanente $e_e = e_s$ torna-se:

$$h + \frac{c^2}{2} = h + dh + \frac{(c - dV)^2}{2}$$

que resulta em:

$$dh - c\,dV = 0 \qquad \text{(b)}$$

onde desprezamos o termo de segunda ordem dV^2. A amplitude da onda sônica comum é muito pequena e não causa nenhuma variação apreciável na pressão e temperatura do fluido. Assim, a propagação de uma onda sônica não é apenas adiabática, mas também quase isentrópica. Em seguida, a relação termodinâmica $Tds = dh - dP/\rho$ (consulte Çengel, 2002) se reduz a:

$$\cancel{T\,ds}^{\,0} = dh - \frac{dP}{\rho}$$

ou:

$$dh = \frac{dP}{\rho} \qquad \text{(c)}$$

Combinando as Equações a, b e c, temos que a expressão desejada para a velocidade do som é:

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \qquad \text{com } s = \text{constante}$$

ou:

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \tag{12-9}$$

Como exercício o leitor pode mostrar, usando as relações de propriedades termodinâmicas (consulte a Referência 1), que a Equação 12-9 também pode ser escrita como:

$$c^2 = k\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \tag{12-10}$$

onde k é a razão de calor específico do fluido. Observe que a velocidade do som de um fluido é uma função das propriedades termodinâmicas daquele fluido.

Quando o fluido é um gás ideal ($P = \rho RT$), a diferenciação da Equação 12–10 pode ser feita facilmente para resultar em:

$$c^2 = k\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = k\left[\frac{\partial(\rho RT)}{\partial \rho}\right]_T = kRT$$

ou:

$$c = \sqrt{kRT} \tag{12-11}$$

Observando que a constante do gás R tem um valor fixo para um gás ideal especificado e que a razão de calor específico k de um gás ideal é, no máximo, uma função da temperatura, vemos que a velocidade do som de um gás ideal especificado é uma função apenas da temperatura (Figura 12–9).

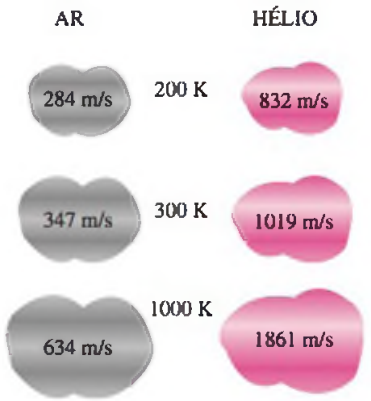


FIGURA 12–9
A velocidade do som varia com a temperatura e com o fluido.

Um segundo parâmetro importante da análise do escoamento de fluido compressível é o **número de Mach, Ma**, assim denominado em homenagem ao físico austríaco Ernst Mach (1838–1916). Ma é a razão entre a velocidade real do fluido (ou de um objeto no ar imóvel) e a velocidade do som no mesmo fluido ao mesmo estado:

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} \tag{12-12}$$

Observe que o número de Mach depende da velocidade do som, que depende do estado do fluido. Assim, o número de Mach de um avião a velocidade de cruzeiro constante no ar imóvel pode ser diferente em locais diferentes (Figura 12–10).

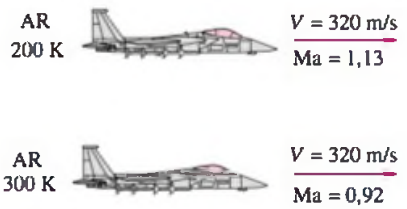


FIGURA 12–10
O número de Mach pode ser diferente a temperaturas diferentes, mesmo que a velocidade de vôo seja igual.

Os regimes quase sempre são descritos em termos do número de Mach do escoamento. O escoamento é chamado de **sônico** quando Ma = 1, **subsônico** quando Ma < 1, **supersônico** quando Ma > 1, **hipersônico** quando Ma >> 1 e **transônico** quando Ma ≅ 1.

EXEMPLO 12–2 **Número de Mach do Ar Que Entra em um Difusor**

O ar entra no difusor mostrado na Figura 12–11 com velocidade de 200 m/s. Determine (*a*) a velocidade do som e (*b*) o número de Mach na entrada do difusor quando a temperatura do ar é de 30°C.

SOLUÇÃO O ar entra em um difusor com uma velocidade alta. A velocidade do som e o número de Mach devem ser determinados na entrada do difusor.
Hipótese O ar a condições especificadas se comporta como um gás ideal.
Propriedades A constante de gás do ar é $R = 0{,}287$ kJ/kg · K e sua razão de calor específico a 30°C é de 1,4.
Análise Observamos que a velocidade do som de um gás varia com a temperatura, que é dada como 30°C.

(*a*) A velocidade do som no ar a 30°C é determinada com a Equação 12–11 como:

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1{,}4)(0{,}287\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K})(303\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)} = \mathbf{349\ m/s}$$

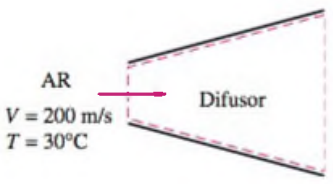


FIGURA 12–11
Esquema do Exemplo 12–2.

(*b*) Assim, o número de Mach torna-se:

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{200 \text{ m/s}}{349 \text{ m/s}} = \mathbf{0{,}573}$$

Discussão O escoamento na entrada do difusor é subsônico, uma vez que Ma < 1.

12–3 • ESCOAMENTO ISENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL

Durante o escoamento do fluido através de muitos dispositivos, como bocais, difusores e passagens de palhetas de turbina, as quantidades de escoamento variam primariamente apenas na direção do escoamento, e o escoamento pode ser aproximado como escoamento isentrópico unidimensional com bom nível de exatidão. Assim, ele merece consideração especial. Antes de apresentarmos uma discussão formal sobre o escoamento isentrópico unidimensional, ilustramos alguns de seus aspectos importantes com exemplos.

EXEMPLO 12–3 Escoamento de Gás através de um Duto Convergente-Divergente

Dióxido de carbono escoa de forma permanente através de um duto de área de seção transversal variada, como o bocal mostrado na Figura 12–12 a uma vazão mássica de 3 kg/s. O dióxido de carbono entra no duto a uma pressão de 1.400 kPa e a 200°C com velocidade baixa, e se expande no bocal até uma pressão de 200 kPa. O duto foi criado para que o escoamento possa ser aproximado como isentrópico. Determine a massa específica, velocidade, área de escoamento e número de Mach em cada local ao longo do duto que corresponde a uma queda de pressão de 200 kPa.

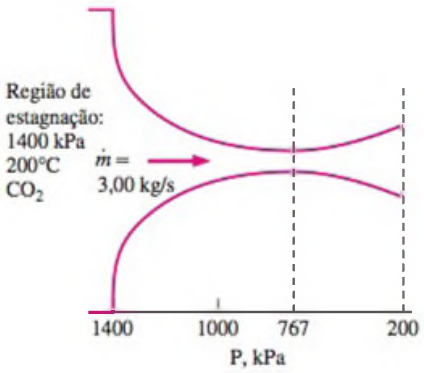


FIGURA 12–12
Esquema do Exemplo 12–3.

SOLUÇÃO O dióxido de carbono entra em um duto de área de seção transversal variada a condições especificadas. As propriedades do escoamento ao longo do duto devem ser determinadas.

Hipóteses **1** O dióxido de carbono é um gás ideal com calores específicos constantes à temperatura ambiente. **2** O escoamento através do duto é permanente, unidimensional e isentrópico.

Propriedades Para simplificarmos usamos c_p = 0,846 kJ/kg · K e k = 1,289 em todos os cálculos, que estão a valores de razão de calor específico e de calor específico a pressão constante do dióxido de carbono à temperatura ambiente. A constante de gás do dióxido de carbono é R = 0,1889 kJ/kg · K.

Análise Observamos que a temperatura de entrada é quase igual à temperatura de estagnação, uma vez que a velocidade de entrada é pequena. O escoamento é isentrópico e, portanto, as temperaturas de estagnação e pressão através do duto permanecem constantes. Portanto:

$$T_0 \cong T_1 = 200°\text{C} = 473 \text{ K}$$

e:

$$P_0 \cong P_1 = 1400 \text{ kPa}$$

Para ilustrarmos o procedimento da solução, calculamos as propriedades desejadas no local onde a pressão é 1.200 kPa, o primeiro local que corresponde a uma queda de pressão de 200 kPa.

Na Equação 12–5:

$$T = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{(k-1)/k} = (473 \text{ K})\left(\frac{1200 \text{ kPa}}{1400 \text{ kPa}}\right)^{(1{,}289-1)/1{,}289} = 457 \text{ K}$$

Na Equação 12–4:

$$V = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}$$

$$= \sqrt{2(0{,}846\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K})(473\ \text{K} - 457\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)}$$

$$= \mathbf{164{,}5\ m/s}$$

Da relação de gás ideal:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{1200\ \text{kPa}}{(0{,}1889\ \text{kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(457\ \text{K})} = \mathbf{13{,}9\ kg/m^3}$$

Da relação da vazão mássica:

$$A = \frac{\dot{m}}{\rho V} = \frac{3\ \text{kg/s}}{(13{,}9\ \text{kg/m}^3)(164{,}5\ \text{m/s})} = 13{,}1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 = \mathbf{13{,}1\ cm^2}$$

Das Equações 12–11 e 12–12:

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1{,}289)(0{,}1889\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K})(457\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)} = 333{,}6\ \text{m/s}$$

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{164{,}5\ \text{m/s}}{333{,}6\ \text{m/s}} = \mathbf{0{,}493}$$

Os resultados das outras etapas de pressão são resumidos na Tabela 12–1 e mostrados no gráfico da Figura 12–13.

Discussão Observe que à medida que a pressão diminui, a temperatura e a velocidade do som diminuem, enquanto a velocidade do fluido e o número de Mach aumentam na direção do escoamento. A massa específica diminui lentamente a princípio e, depois, rapidamente à medida que a velocidade do fluido aumenta.

TABELA 12–1

A variação das propriedades do fluido na direção do escoamento do duto descrito no Exemplo 12–3 para $\dot{m}$ = 3 kg/s = constante

P, kPa	T, K	V, m/s	ρ, kg/m^3	c, m/s	A, cm^2	Ma
1400	473	0	15,7	339,4	∞	0
1200	457	164,5	13,9	333,6	13,1	0,493
1000	439	240,7	12,1	326,9	10,3	0,736
800	417	306,6	10,1	318,8	9,64	0,962
767*	413	317,2	9,82	317,2	9,63	1,000
600	391	371,4	8,12	308,7	10,0	1,203
400	357	441,9	5,93	295,0	11,5	1,498
200	306	530,9	3,46	272,9	16,3	1,946

* 767 kPa é a pressão crítica quando o número de Mach do local é a unidade.

Observamos pelo Exemplo 12–3 que a área de escoamento diminui com a diminuição da pressão até um valor de pressão crítica, no qual o número de Mach é uma unidade e, em seguida, começa a aumentar à medida que a pressão é reduzida. O número de Mach é uma unidade no local da menor área de escoamento, chamado de **garganta** (Figura 12–14). Observe que a velocidade do fluido continua aumentando após passar pela garganta, embora a área de escoamento aumente rapidamente naquela região. Esse aumento da velocidade após a garganta deve-se à rápida diminuição da massa específica do fluido. A área de escoamento do duto considerada neste exemplo primeiro diminui e, em seguida, aumenta. Tais dutos são chamados de **bocais convergentes-divergentes**. Esses bocais são usados para acelerar os gases até velocidades supersônicas e não devem ser confundidos com os *bocais de*

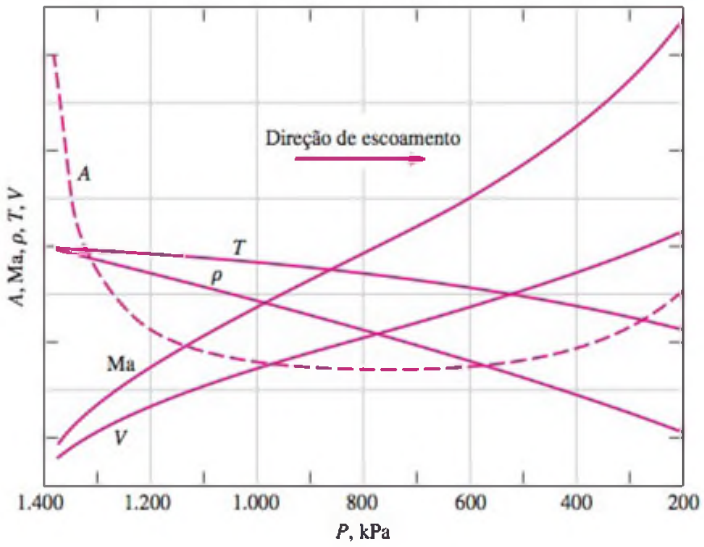


FIGURA 12–13
A variação das propriedades normalizadas dos fluidos e da área de seção transversal à medida que a pressão cai de 1.400 para 200 kPa.

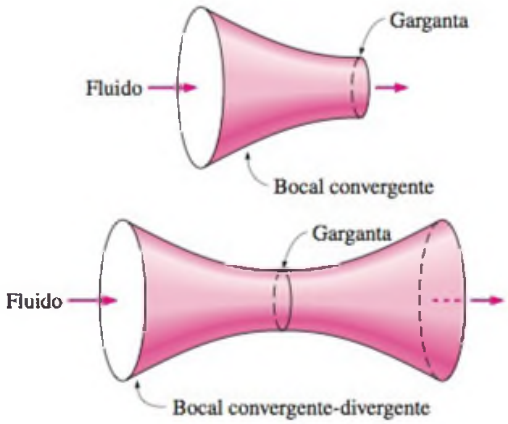


FIGURA 12–14
A seção transversal de um bocal na área de menor escoamento é chamada de *garganta*.

Venturi, usados exclusivamente para o escoamento incompressível. O primeiro uso de tal bocal ocorreu em 1893 em uma turbina a vapor desenvolvida pelo engenheiro sueco Carl G. B. de Laval (1845–1913) e, portanto, os bocais convergentes-divergentes também são chamados de *bocais de Laval*.

Variação da Velocidade do Fluido com a Área de Escoamento

O Exemplo 12–3 deixa claro que as conexões entre a velocidade, massa específica e área de escoamento para escoamentos isentrópicos em dutos são bastante complexas. No restante desta seção investigaremos essas conexões com mais detalhes e desenvolveremos relações para a variação das relações entre as propriedades estática e de estagnação com o número de Mach para a pressão, a temperatura e a massa específica.

Começaremos buscando relações entre a pressão, temperatura, massa específica, velocidade, área de escoamento e o número de Mach para o escoamento isentrópico unidimensional. Considere o balanço de massa de um processo com escoamento permanente:

$$\dot{m} = \rho A V = \text{constante}$$

Diferenciando e dividindo a equação resultante pela vazão mássica obtemos:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \qquad \textbf{(12–13)}$$

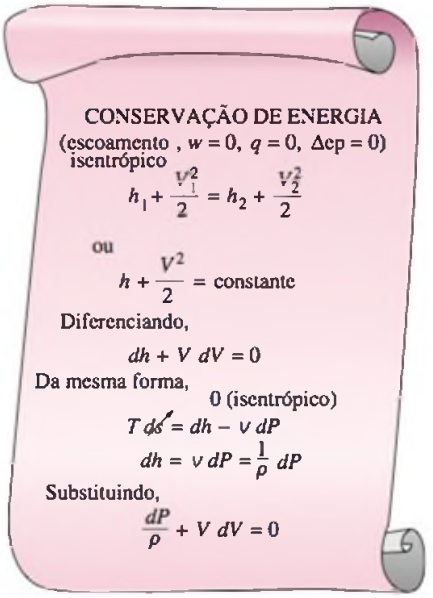


FIGURA 12–15
Dedução da forma diferencial da equação da energia para o escoamento isentrópico permanente.

Desprezando a energia potencial, o balanço de energia de um escoamento isentrópico sem interações de trabalho pode ser expresso na forma diferencial como (Figura 12–15):

$$\frac{dP}{\rho} + V\,dV = 0 \qquad \textbf{(12–14)}$$

Essa relação também é a forma diferencial da equação de Bernoulli quando as variações da energia potencial são desprezíveis, que é uma forma do princípio da conservação da quantidade de movimento para os volumes de controle com escoamento permanente. Combinando as Equações 12–13 e 12–14, obtemos:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho}\left(\frac{1}{V^2} - \frac{d\rho}{dP}\right) \qquad \textbf{(12–15)}$$

Reorganizando a Equação 12–9 como $(\partial\rho/\partial P)_s = 1/c^2$ e substituindo na Equação 12–15 temos:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho V^2}(1 - \text{Ma}^2) \qquad \textbf{(12–16)}$$

Essa é uma relação importante para o escoamento isentrópico em dutos, uma vez que descreve a variação da pressão com a área de escoamento. Observamos que A, ρ e V são quantidades positivas. Para o escoamento *subsônico* (Ma $<$ 1), o termo $1 - \text{Ma}^2$ é positivo e, portanto, dA e dP devem ter o mesmo sinal. Ou seja, a pressão do fluido deve aumentar à medida que a área de escoamento do duto aumenta, e deve diminuir à medida que a área de escoamento do duto diminui. Assim, a velocidades subsônicas, a pressão diminui nos dutos convergentes (bocais subsônicos) e aumenta nos dutos divergentes (difusores subsônicos).

Para o escoamento *supersônico* (Ma $>$ 1), o termo $1 - \text{Ma}^2$ é negativo e, portanto, dA e dP devem ter sinais opostos. Ou seja, a pressão do fluido deve aumentar à medida que a área de escoamento do duto diminui, e deve diminuir à medida que a área de escoamento do duto aumenta. Assim, a velocidades supersônicas, a pressão diminui nos dutos divergentes (bocais supersônicos) e aumenta nos dutos convergentes (difusores supersônicos).

Outra relação importante para o escoamento isentrópico de um fluido é obtida pela substituição de $pV = -dP/dV$ da Equação 12–14 na Equação 12–16:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V}(1 - \text{Ma}^2) \qquad \textbf{(12–17)}$$

Essa equação determina a forma de um bocal ou difusor no escoamento isentrópico subsônico ou supersônico. Observando que A e V são quantidades positivas, concluímos o seguinte:

Para escoamento subsônico (Ma < 1), $\quad \frac{dA}{dV} < 0$

Para escoamento supersônico (Ma > 1), $\quad \frac{dA}{dV} > 0$

Para escoamento sônico (Ma $= 1$), $\quad \frac{dA}{dV} = 0$

Assim, a forma adequada de um bocal depende da mais alta velocidade desejada com relação à velocidade sônica. Para acelerar um fluido, devemos utilizar um bocal convergente a velocidades subsônicas e um bocal divergente a velocidades supersônicas. As velocidades encontradas nas aplicações mais conhecidas estão bem abaixo da velocidade sônica e, portanto, é natural visualizarmos um bocal como um duto convergente. Entretanto, a mais alta velocidade que pode ser atingida por

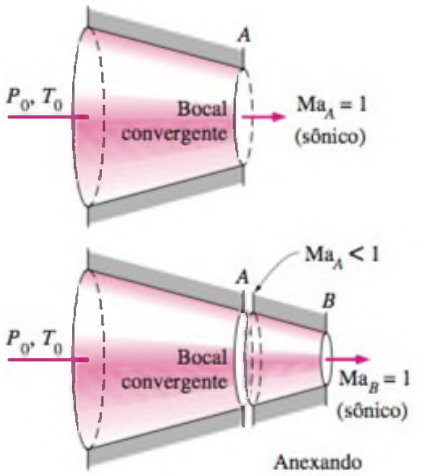


FIGURA 12–16
Não podemos obter velocidades supersônicas anexando uma seção convergente a um bocal convergente. Isso só moverá a seção transversal sônica ainda mais a jusante e diminuirá a vazão mássica.

um bocal convergente é a velocidade sônica, que ocorre na saída do bocal. Se estendermos o bocal convergente ainda mais, diminuindo a área de escoamento, esperando acelerar o fluido até velocidades supersônicas, como mostra a Figura 12–16, muito provavelmente vamos nos desapontar. Agora a velocidade sônica ocorrerá na saída da extensão convergente, em vez de na saída do bocal original, e a vazão mássica através do bocal diminuirá por causa da área de saída reduzida.

Com base na Equação 12–16, que é uma expressão da conservação de massa e dos princípios de energia, devemos adicionar uma seção divergente a um bocal convergente para acelerar um fluido até velocidades supersônicas. O resultado é um bocal convergente-divergente. A princípio, o fluido passa através de uma seção subsônica (convergente), na qual o número de Mach aumenta à medida que a área de escoamento do bocal diminui e, em seguida, atinge o valor de unidade na garganta do bocal. O fluido continua acelerando à medida que passa através de uma seção supersônica (divergente). Observando que $\dot{m} = \rho AV$ para o escoamento permanente, vemos que a diminuição grande da massa específica torna possível a aceleração na seção divergente. Um exemplo desse tipo de escoamento é o escoamento dos gases de combustão quentes através de um bocal em uma turbina a gás.

O processo oposto ocorre na entrada do motor de um avião supersônico. O fluido é desacelerado quando é passado primeiro através de um difusor supersônico, que tem uma área de escoamento que diminui na direção do escoamento. Idealmente, o escoamento atinge um número de Mach de unidade na garganta do difusor. O fluido desacelera ainda mais em um difusor subsônico, que tem uma área de escoamento que aumenta na direção do escoamento, como mostra a Figura 12–17.

Relações de Propriedades para o Escoamento Isentrópico de Gases Ideais

A seguir, desenvolvemos relações entre as propriedades estáticas e de estagnação de um gás ideal em termos da razão de calor específico k e do número de Mach Ma. Consideramos que o escoamento é isentrópico e que o gás tem calores específicos constantes.

A temperatura T de um gás ideal em qualquer parte do escoamento é relacionada à temperatura de estagnação T_0 por meio da Equação 12–4:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

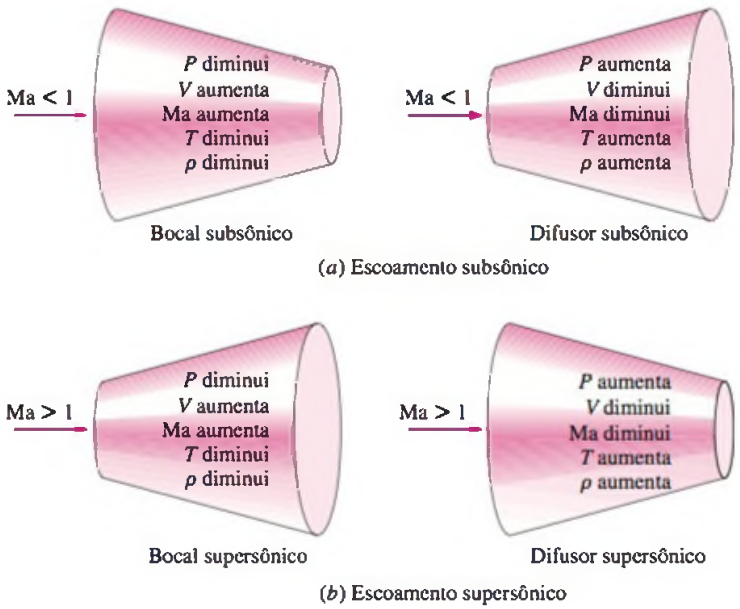


FIGURA 12–17
Variação das propriedades de escoamento em bocais e difusores subsônicos e supersônicos.

ou:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2c_pT}$$

Observando que $c_p = kR/(k-1)$, $c^2 = kRT$ e $\text{Ma} = V/c$ vemos que:

$$\frac{V^2}{2c_pT} = \frac{V^2}{2[kR/(k-1)]T} = \left(\frac{k-1}{2}\right)\frac{V^2}{c^2} = \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2$$

Substituindo, temos:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2 \qquad \textbf{(12–18)}$$

que é a relação desejada entre T_0 e T.

A relação entre a pressão de estagnação e a pressão estática é obtida substituindo-se a Equação 12-18 na Equação 12–5:

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2\right]^{k/(k-1)} \qquad \textbf{(12–19)}$$

A relação entre a massa específica de estagnação e a massa específica estática é obtida substituindo-se a Equação 12-18 na Equação 12–6:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2\right]^{1/(k-1)} \qquad \textbf{(12–20)}$$

Os valores numéricos de T/T_0, P/P_0 e ρ/ρ_0 são listados com relação ao número de Mach na Tabela A–32 para $k = 1{,}4$ e são muito úteis para os cálculos do escoamento compressível que envolve o ar.

As propriedades de um fluido em um local onde o número de Mach é unidade (a garganta) são chamadas de **propriedades críticas** e as relações das Equações (12–18) até (12–20) são chamadas de **relações críticas** (Figura 12–18). É prática comum na análise do escoamento compressível deixar que o asterisco sobrescrito (*) represente os valores críticos. Definindo Ma = 1 nas Equações 12–18 a 12–20 temos:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \qquad \textbf{(12–21)}$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \qquad \textbf{(12–22)}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \qquad \textbf{(12–23)}$$

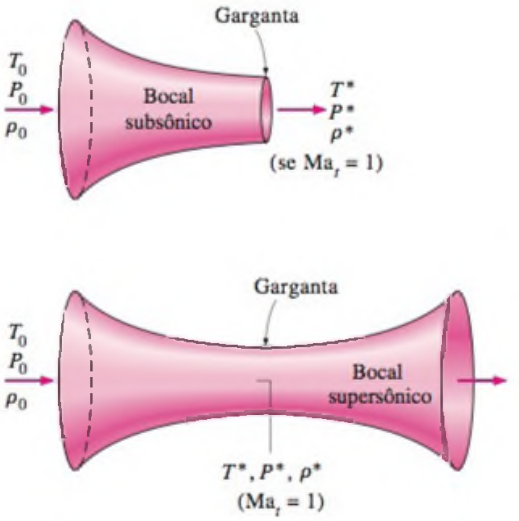


FIGURA 12–18
Quando $\text{Ma}_t = 1$, as propriedades da garganta do bocal tornam-se as propriedades críticas.

Essas relações são avaliadas para diversos valores de k e estão listadas na Tabela 12–2. As propriedades críticas do escoamento compressível não devem ser confundidas com as propriedades termodinâmicas das substâncias no *ponto crítico* (como a temperatura crítica T_c e a pressão crítica P_c).

TABELA 12–2

As relações entre pressão crítica, temperatura crítica e massa específica crítica para o escoamento isentrópico de alguns gases ideais.

	Vapor superaquecido, $k = 1{,}3$	Produtos quentes da combustão, $k = 1{,}33$	Ar, $k = 1{,}4$	Gases monoatômicos, $k = 1{,}667$
$\frac{P^*}{P_0}$	0,5457	0,5404	0,5283	0,4871
$\frac{T^*}{T_0}$	0,8696	0,8584	0,8333	0,7499
$\frac{\rho^*}{\rho_0}$	0,6276	0,6295	0,6340	0,6495

EXEMPLO 12–4 **Temperatura e Pressão Críticas do Escoamento de Gás**

Calcule a pressão e a temperatura críticas do dióxido de carbono para as condições de escoamento descritas no Exemplo 12–3 (Figura 12–19).

SOLUÇÃO Para o escoamento discutido no Exemplo 12–3, a pressão e a temperatura críticas devem ser calculadas.

Hipóteses 1 O escoamento é permanente, adiabático e unidimensional. **2** O dióxido de carbono é um gás ideal com calores específicos constantes.

Propriedades A razão de calor específico do dióxido de carbono à temperatura ambiente é $k = 1{,}289$.

Análise As relações entre temperatura e pressão crítica e de estagnação são determinadas como:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{1{,}289+1} = 0{,}8737$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{2}{1{,}289+1}\right)^{1{,}289/(1{,}289-1)} = 0{,}5477$$

Observando que a temperatura de estagnação e pressão são, do Exemplo 12–3, $T_0 = 473$ K e $P_0 = 1400$ kPa, vemos que a temperatura e a pressão críticas neste caso são:

$$T^* = 0{,}8737T_0 = (0{,}8737)(473\text{ K}) = \mathbf{413\text{ K}}$$

$$P^* = 0{,}5477P_0 = (0{,}5477)(1400\text{ kPa}) = \mathbf{767\text{ kPa}}$$

Discussão Observe que esses valores coincidem com os listados na Tabela 12–1, como esperado. Da mesma forma, outros valores diferentes de propriedades na garganta indicariam que o escoamento não é crítico e que o número de Mach não é igual a um.

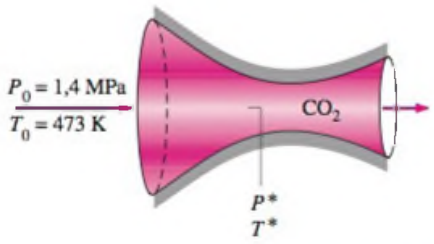


FIGURA 12–19
Esquema do Exemplo 12–4.

12–4 ▪ ESCOAMENTO ISENTRÓPICO ATRAVÉS DE BOCAIS

Os bocais convergentes ou convergentes-divergentes encontram-se em muitas aplicações da engenharia, incluindo as turbinas a vapor e gás, os aviões e os sistemas de propulsão de naves espaciais, e até mesmo os bocais de jato de areia industriais e os bocais de maçarico. Nesta seção consideramos os efeitos da **contrapressão** (ou seja, a pressão aplicada à região de descarga do bocal) sobre a velocidade de saída, a vazão mássica e a distribuição da pressão ao longo do bocal.

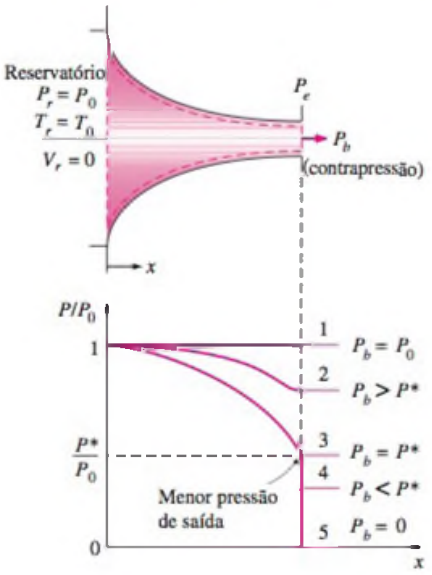


FIGURA 12–20
O efeito da contrapressão sobre a distribuição da pressão ao longo de um bocal convergente.

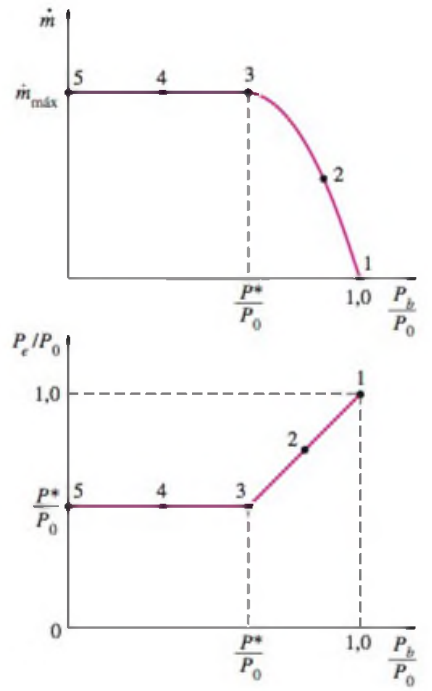


FIGURA 12–21
O efeito da contrapressão P_b sobre a vazão mássica $\dot{m}$ e sobre a pressão de saída P_e de um bocal convergente.

Bocais Convergentes

Considere o escoamento subsônico através de um bocal convergente, como mostra a Figura 12–20. A entrada do bocal é ligada a um reservatório à pressão P_r e temperatura T_r. O reservatório é suficientemente grande para que a velocidade de entrada do bocal seja desprezível. Como a velocidade do fluido no reservatório é zero e o escoamento através do bocal é aproximado como isentrópico, a pressão e a temperatura de estagnação do fluido em qualquer seção transversal através do bocal são iguais à pressão e à temperatura do reservatório, respectivamente.

Agora começamos reduzindo a contrapressão e observando os efeitos resultantes sobre a distribuição da pressão ao longo do comprimento do bocal, como mostra a Figura 12–20. Se a contrapressão P_b for igual a P_1, que é igual a P_r, não há escoamento e a distribuição da pressão é uniforme ao longo do bocal. Quando a contrapressão é reduzida para P_2, a pressão no plano de saída P_e também cai para P_2. Isso faz com que a pressão ao longo do bocal diminua na direção do escoamento.

Quando a contrapressão é reduzida para P_3 ($= P^*$ que é a pressão necessária para aumentar a velocidade do fluido até a velocidade do som no plano de saída ou garganta), a vazão mássica atinge um valor máximo e diz-se que o escoamento é **estrangulado**. Uma maior redução da contrapressão ate o nível P_4 ou abaixo dele não resulta em variações adicionais na distribuição da pressão, ou em qualquer outra coisa ao longo do comprimento do bocal.

Sob condições de escoamento estacionário, a vazão mássica através do bocal é constante e pode ser expressa como:

$$\dot{m} = \rho AV = \left(\frac{P}{RT}\right) A(\text{Ma}\sqrt{kRT}) = PA\text{Ma}\sqrt{\frac{k}{RT}}$$

Solucionando T da Equação 12–18 e P da Equação 12–19 e substituindo temos:

$$\dot{m} = \frac{A\text{Ma}P_0\sqrt{k/(RT_0)}}{[1 + (k-1)\text{Ma}^2/2]^{(k+1)/[2(k-1)]}} \qquad (12\text{–}24)$$

Assim, a vazão mássica de determinado fluido através de um bocal é uma função das propriedades de estagnação do fluido, da área de escoamento e do número de Mach. A Equação 12–24 é válida em qualquer seção transversal e, portanto, $\dot{m}$ pode ser avaliado em qualquer local ao longo do comprimento do bocal.

Para uma área de escoamento especificada A e propriedades de estagnação T_0 e P_0, a taxa de escoamento máxima de massa pode ser determinada pela diferenciação da Equação 12–24 com relação a Ma e pela definição do resultado como zero. Isso resulta em Ma = 1. Como o único local de um bocal onde o número de Mach pode ser unidade é o local de área de escoamento mínima (a garganta), a vazão mássica através de um bocal é máxima quando Ma = 1 na garganta. Indicando essa área como A^*, obtemos uma expressão para a taxa máxima de escoamento de massa substituindo Ma = 1 na Equação 12–24:

$$\dot{m}_{máx} = A^*P_0\sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]} \qquad (12\text{–}25)$$

Assim, para determinado gás ideal, a taxa máxima de escoamento de massa através de um bocal com determinada área de garganta é fixada pela pressão de estagnação e pela temperatura do escoamento de entrada. A taxa de escoamento pode ser controlada pela variação da pressão de estagnação ou temperatura e, portanto, um bocal convergente pode ser usado como um medidor de vazão. A vazão também pode ser controlada, obviamente, variando a área da garganta. Esse princípio é de importância vital para os processos químicos, dispositivos médicos, medidores de vazão e em toda parte onde o fluxo de massa de um gás deve ser conhecido e controlado.

Um gráfico de $\dot{m}$ *versus* P_b/P_0 para um bocal convergente é mostrado na Figura 12–21. Observe que a vazão mássica aumenta com a diminuição de P_b/P_0, atinge um máximo de $P_b = P^*$ e permanece constante para valores de P_b/P_0 menores do

que essa taxa crítica. Esta figura também ilustra o efeito da contrapressão sobre a pressão de saída do bocal P_e. Observamos que:

$$P_e = \begin{cases} P_b & \text{para } P_b \geq P^* \\ P^* & \text{para } P_b < P^* \end{cases}$$

Para resumir, em todas as contrapressões abaixo da pressão crítica P^*, a pressão no plano de saída do bocal convergente P_e é igual a P^*, o número de Mach no plano de saída é unidade e a vazão mássica é a vazão máxima (ou estrangulada). Como a velocidade do escoamento é sônica na garganta para a vazão máxima, uma contrapressão mais baixa do que a pressão crítica não pode ser sentida no escoamento a montante do bocal, e não afeta a vazão.

Os efeitos da temperatura de estagnação T_0 e da pressão de estagnação P_0 sobre a vazão mássica através de um bocal convergente são ilustrados na Figura 12–22, na qual a vazão está mostrada graficamente para a relação entre pressão estática e de estagnação na garganta P/P_0. Um aumento de P_0 (ou uma diminuição de T_0) aumentará a vazão mássica através do bocal convergente, enquanto uma diminuição de P_0 (ou um aumento de T_0) a diminuirá. Também poderíamos concluir isso observando com cuidado as Equações 12–24 e 12–25.

Uma relação para a variação da área de escoamento A através do bocal com relação à área de garganta A^* pode ser obtida pela combinação entre as Equações 12–24 e 12–25 para a mesma vazão mássica e pelas propriedades de estagnação de determinado fluido. O resultado é:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]} \qquad \textbf{(12–26)}$$

A Tabela A–13 resulta em valores de A/A^* como função do número de Mach para o ar ($k = 1{,}4$). Existe um valor de A/A^* para cada valor do número de Mach, mas existem dois valores possíveis do número de Mach para cada valor de A/A^* — um para o escoamento subsônico e outro para o escoamento supersônico.

Outro parâmetro também utilizado na análise do escoamento isentrópico unidimensional dos gases ideais é Ma*, que é a relação entre a velocidade local e a velocidade do som na garganta:

$$\text{Ma}^* = \frac{V}{c^*} \qquad \textbf{(12–27)}$$

Ele também pode ser expresso como:

$$\text{Ma}^* = \frac{V}{c}\frac{c}{c^*} = \frac{\text{Ma}\,c}{c^*} = \frac{\text{Ma}\sqrt{kRT}}{\sqrt{kRT^*}} = \text{Ma}\sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

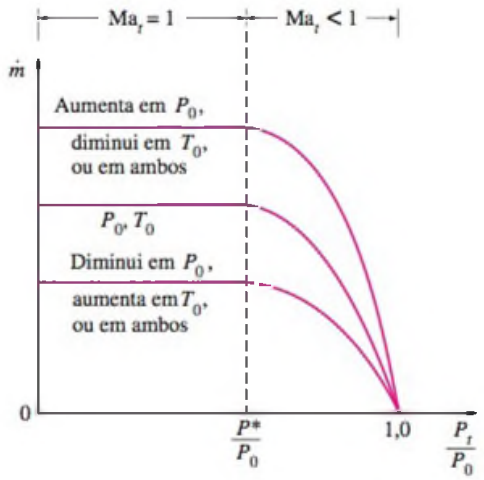


FIGURA 12–22
A variação da vazão mássica através de um bocal com propriedades de estagnação de entrada.

Ma	Ma*	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,90	0,9146	1,0089	0,5913	⋮	⋮
1,00	1,0000	1,0000	0,5283	⋮	⋮
1,10	1,0812	1,0079	0,4684	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

FIGURA 12–23
Diversas razões de propriedade para o escoamento isentrópico através de bocais e difusores são listadas na Tabela A–13 para $k = 1,4$ por questões de conveniência.

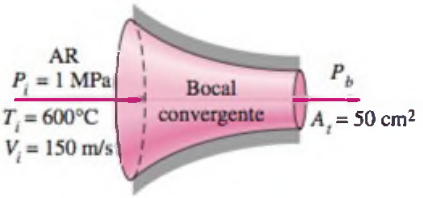


FIGURA 12–24
Esquema do Exemplo 12–5.

onde Ma é o número de Mach local, T é a temperatura local e T^* é a temperatura crítica. Solucionando T da Equação 12–18 e T^* da Equação 12–21 e substituindo, temos:

$$\text{Ma}^* = \text{Ma}\sqrt{\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}} \qquad (12\text{–}28)$$

Os valores de Ma* também estão listados na Tabela A–13 *versus* o número de Mach para $k = 1,4$ (Figura 12–23). Observe que o parâmetro Ma* difere do número de Mach, pois Ma* é a velocidade local adimensionalizada com relação à velocidade sônica da *garganta*, enquanto Ma é a velocidade local adimensionalizada com relação à velocidade sônica *local*. (Lembre-se de que a velocidade sônica de um bocal varia com a temperatura e, portanto, com a localização.)

EXEMPLO 12–5 Efeito da Contrapressão sobre a Vazão Mássica

Ar a 1 MPa e 600°C entra em um bocal convergente, mostrado na Figura 12–24, com velocidade de 150 m/s. Determine a vazão mássica através do bocal para uma área de garganta de bocal de 50 cm² quando a contrapressão é (*a*) 0,7 MPa e (*b*) 0,4 MPa.

SOLUÇÃO Ar entra em um bocal convergente. A vazão mássica do ar através do bocal deve ser determinada para diferentes contrapressões.

Hipóteses **1** O ar é um gás ideal com calores específicos constantes à temperatura ambiente. **2** O escoamento através do bocal é permanente, unidimensional e isentrópico.

Propriedades O calor específico a pressão constante e a razão de calor específico do ar são 1,005 kJ/kg · K e $k = 1,4$.

Análise Usamos os subscritos i e t para representar as propriedades na entrada do bocal e na garganta, respectivamente. A temperatura e pressão de estagnação na entrada do bocal são determinadas com as Equações 12–4 e 12–5:

$$T_{0i} = T_i + \frac{V_i^2}{2c_p} = 873\text{ K} + \frac{(150\text{ m/s})^2}{2(1,005\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})}\left(\frac{1\text{ kJ/kg}}{1000\text{ m}^2/\text{s}^2}\right) = 884\text{ K}$$

$$P_{0i} = P_i\left(\frac{T_{0i}}{T_i}\right)^{k/(k-1)} = (1\text{ MPa})\left(\frac{884\text{ K}}{873\text{ K}}\right)^{1,4/(1,4-1)} = 1,045\text{ MPa}$$

Esses valores de temperatura e pressão de estagnação permanecem constantes através do bocal, uma vez que o escoamento é considerado isentrópico. Ou seja:

$$T_0 = T_{0i} = 884\text{ K} \qquad \text{e} \qquad P_0 = P_{0i} = 1,045\text{ MPa}$$

A razão de pressão crítica é determinada na Tabela 12–2 (ou pela Equação 12–22) como $P^*/P_0 = 0,5283$.

(*a*) A razão de contrapressão neste caso é:

$$\frac{P_b}{P_0} = \frac{0,7\text{ MPa}}{1,045\text{ MPa}} = 0,670$$

que é maior do que a razão de pressão crítica, 0,5283. Assim, a pressão no plano de saída (ou a pressão de garganta P_t) é igual à contrapressão neste caso. Ou seja, $P_t = P_b = 0,7$ MPa e $P_t/P_0 = 0,670$. Portanto, o escoamento não é estrangulado. Na Tabela A–13 em $P_t/P_0 = 0,670$, vemos que $\text{Ma}_t = 0,778$ e $T_t/T_0 = 0,892$.

A vazão mássica através do bocal pode ser calculada pela Equação 12–24. Mas ela também pode ser determinada passo a passo como a seguir:

$$T_t = 0{,}892T_0 = 0{,}892(884\ \text{K}) = 788{,}5\ \text{K}$$

$$\rho_t = \frac{P_t}{RT_t} = \frac{700\ \text{kPa}}{(0{,}287\ \text{kPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{K})(788{,}5\ \text{K})} = 3{,}093\ \text{kg/m}^3$$

$$V_t = \text{Ma}_t c_t = \text{Ma}_t\sqrt{kRT_t}$$

$$= (0{,}778)\sqrt{(1{,}4)(0{,}287\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K})(788{,}5\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)}$$

$$= 437{,}9\ \text{m/s}$$

Assim:

$$\dot{m} = \rho_t A_t V_t = (3{,}093\ \text{kg/m}^3)(50\times10^{-4}\ \text{m}^2)(437{,}9\ \text{m/s}) = \mathbf{6{,}77\ kg/s}$$

(*b*) A razão de contrapressão neste caso é:

$$\frac{P_b}{P_0} = \frac{0{,}4\ \text{MPa}}{1{,}045\ \text{MPa}} = 0{,}383$$

que é menor do que a razão de pressão crítica, 0,5283. Portanto, existem condições sônicas no plano de saída (garganta) do bocal e Ma = 1. O escoamento é estrangulado neste caso, e a vazão mássica através do bocal pode ser calculada pela Equação 12–25:

$$\dot{m} = A^*P_0\sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

$$= (50\times10^{-4}\ \text{m}^2)(1045\ \text{kPa})\sqrt{\frac{1{,}4}{(0{,}287\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K})(884\ \text{K})}}\left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{2.4/0.8}$$

$$= \mathbf{7{,}10\ kg/s}$$

uma vez que $\text{kPa}\cdot\text{m}^2/\sqrt{\text{kJ/kg}} = \sqrt{1000}$ kg/s.

Discussão Esta é a vazão mássica máxima através do bocal para as condições especificadas de entrada e área de garganta do bocal.

EXEMPLO 12–6 Escoamento de Gás através de um Bocal Convergente

Nitrogênio entra em um duto com área de escoamento variada a T_1 = 400 K, P_1 = 100 kPa e Ma_1 = 0,3. Considerando o escoamento isentrópico estacionário, determine T_2, P_2 e Ma_2 em um local onde a área de escoamento foi reduzida em 20%.

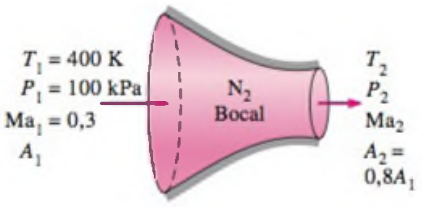


FIGURA 12–25
Esquema do Exemplo 12–6 (fora de escala).

SOLUÇÃO Gás nitrogênio entra em um bocal convergente. As propriedades na saída do bocal devem ser determinadas.

Hipóteses **1** O nitrogênio é um gás ideal com k = 1,4. **2** O escoamento através do bocal é permanente, unidimensional e isentrópico.

Análise A representação esquemática do duto é mostrada na Figura 12–25. No escoamento isentrópico através de um duto, a relação de área A/A^* (a área de escoamento com relação à área da garganta onde Ma = 1) também está listada na Tabela A–13. Ao número inicial de Mach Ma = 0,3 lemos:

$$\frac{A_1}{A^*} = 2{,}0351 \qquad \frac{T_1}{T_0} = 0{,}9823 \qquad \frac{P_1}{P_0} = 0{,}9395$$

Com uma redução de 20% na área de escoamento $A_2 = 0{,}8A_1$ e:

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{A_2}{A_1}\frac{A_1}{A^*} = (0{,}8)(2{,}0351) = 1{,}6281$$

Para esse valor de A_2/A^* da Tabela A–13 lemos:

$$\frac{T_2}{T_0} = 0{,}9701 \qquad \frac{P_2}{P_0} = 0{,}8993 \qquad \text{Ma}_2 = \mathbf{0{,}391}$$

Aqui optamos pelo número de Mach subsônico para a relação A_2/A^* calculada em vez do número de Mach supersônico, porque o duto é convergente na direção do escoamento e o escoamento inicial é subsônico. Como as propriedades de estagnação são constantes para o escoamento isentrópico, podemos escrever:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_0}{T_1/T_0} \rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{T_2/T_0}{T_1/T_0}\right) = (400\text{ K})\left(\frac{0{,}9701}{0{,}9823}\right) = \mathbf{395\text{ K}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0} \rightarrow P_2 = P_1\left(\frac{P_2/P_0}{P_1/P_0}\right) = (100\text{ kPa})\left(\frac{0{,}8993}{0{,}9395}\right) = \mathbf{95{,}7\text{ kPa}}$$

que são a temperatura e a pressão no local desejado.

Discussão Observe que a temperatura e a pressão caem à medida que o fluido é acelerado em um bocal convergente.

Bocais Convergentes-Divergentes

Quando pensamos em bocais, normalmente pensamos nas passagens de escoamento cuja área de seção transversal diminui na direção do escoamento. Entretanto, a mais alta velocidade com a qual um fluido pode ser acelerado em um bocal convergente é limitada à velocidade sônica (Ma = 1), que ocorre no plano de saída (garganta) do bocal. A aceleração de um fluido a velocidades supersônicas (Ma > 1) pode ser atingida apenas pela anexação de uma seção de escoamento divergente ao bocal subsônico na garganta. A seção de escoamento combinado resultante é um bocal convergente-divergente, que é o equipamento padrão do avião supersônico e da propulsão dos foguetes (Figura 12–26).

Forçar um fluido através de um bocal convergente-divergente não é garantia de que o fluido será acelerado até uma velocidade supersônica. Na verdade, o fluido pode ser desacelerado na seção divergente em vez de acelerado quando a contrapressão não estiver dentro do intervalo correto. O estado do escoamento do bocal é determinado pela relação da pressão geral P_b/P_0. Assim, para determinadas condições de entrada, o escoamento através de um bocal convergente-divergente é governado pela contrapressão P_b, como explicado a seguir.

FIGURA 12–26
Os bocais convergentes-divergentes normalmente são usados nos motores de foguetes para fornecer alto empuxo.
Cortesia da Pratt and Whitney, www.pratt-whitney.com/how.htm. Usadas com permissão.

Considere o bocal convergente-divergente da Figura 12–27. Um fluido entra no bocal com velocidade baixa à pressão de estagnação P_0. Quando $P_b = P_0$ (caso *A*), não haverá escoamento através do bocal. Isso é esperado, uma vez que o escoamento em um bocal é movido pela diferença de pressão entre a entrada e a saída do bocal. Agora vamos examinar o que acontece à medida que a contrapressão diminui.

1. Quando $P_0 > P_b > P_C$, o escoamento permanece subsônico em todo o bocal, e o escoamento de massa é menor do que aquele do escoamento estrangulado. A velocidade do fluido aumenta na primeira seção (convergente) e atinge o máximo na garganta (mas Ma < 1). Entretanto, a maior parte do ganho de velocidade se perde na segunda seção (divergente) do bocal que age como um difusor. A pressão diminui na seção convergente, atinge um mínimo na garganta e aumenta à custa da velocidade na seção divergente.
2. Quando $P_b = P_C$, a pressão da garganta torna-se P^* e o fluido atinge a velocidade sônica na garganta. Mas a seção divergente do bocal ainda age como um difusor, diminuindo a velocidade do fluido até velocidades subsônicas. A vazão mássica que diminuía com a redução de P_b também atinge seu valor máximo.

   Lembre-se de que P^* é a pressão mais baixa que pode ser obtida na garganta, e a velocidade sônica é a mais alta velocidade que pode ser atingida com um bocal convergente. Assim, a diminuição adicional de P_b não tem influência sobre o escoamento de fluido da parte convergente do bocal ou sobre

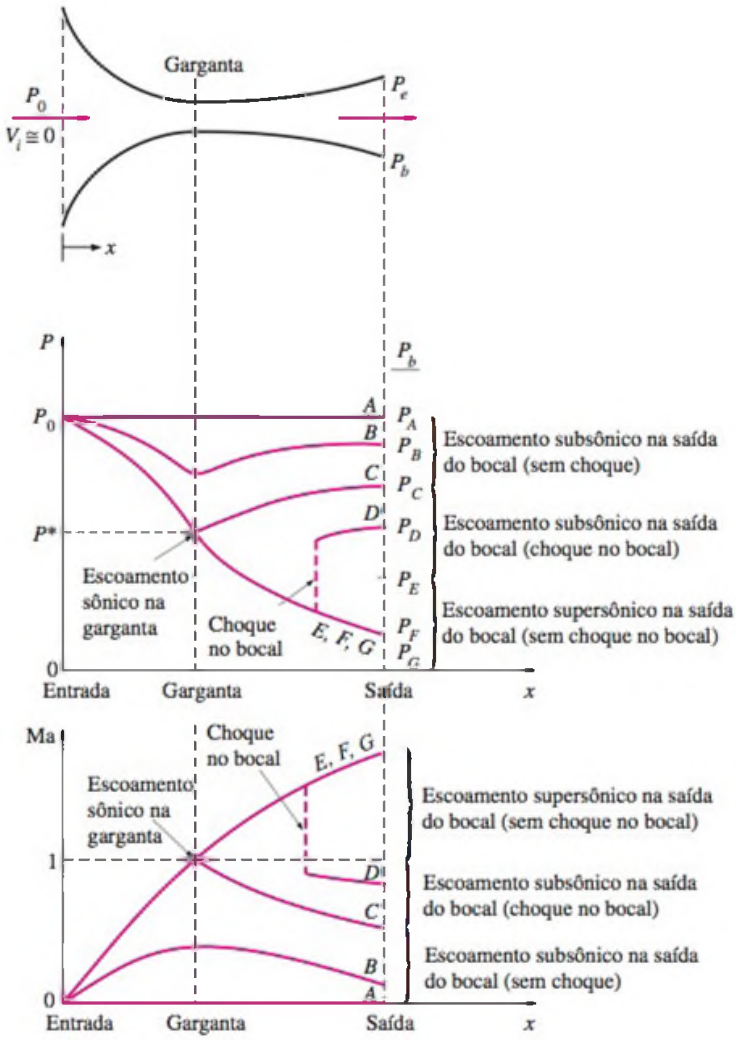


FIGURA 12–27
Os efeitos da contrapressão sobre o escoamento através de um bocal convergente-divergente.

a vazão mássica através do bocal. Entretanto, ela não influencia o caráter do escoamento na seção divergente.

3. Quando $P_C > P_b > P_E$, o fluido que atingiu uma velocidade sônica na garganta continua acelerando até velocidades supersônicas na seção divergente à medida que a pressão diminui. Entretanto, essa aceleração pára repentinamente à medida que um **choque normal** se desenvolve em uma seção entre a garganta e o plano de saída, causando uma queda repentina da velocidade até níveis subsônicos e um aumento repentino da pressão. Em seguida, o fluido continua desacelerando ainda mais na parte restante do bocal convergente-divergente. O escoamento através do choque é altamente irreversível e, portanto, ele não pode ser aproximado como isentrópico. O choque normal move-se a jusante para longe da garganta à medida que P_b diminui e se aproxima do plano de saída do bocal à medida que P_b se aproxima de P_E.

   Quando $P_b = P_E$ o choque normal forma-se no plano de saída do bocal. O escoamento é supersônico em toda a seção divergente neste caso e pode ser aproximado como isentrópico. Entretanto, a velocidade do fluido cai até níveis subsônicos imediatamente antes de sair do bocal ao cruzar o choque normal. As ondas de choque normal são discutidas na Seção 12–5.
4. Quando $P_E > P_b > 0$, o escoamento na seção divergente é supersônico e o fluido se expande até P_F na saída do bocal sem a formação de choque normal dentro do bocal. Assim, o escoamento através do bocal pode ser aproximado como isentrópico. Quando $P_b = P_F$, nenhum choque ocorre dentro ou fora do bocal. Quando $P_b < P_F$, as ondas irreversíveis de mistura e expansão ocorrem a jusante do plano de saída do bocal. Quando $P_b > P_F$, porém, a pressão do fluido aumenta de P_F até P_b de forma irreversível na esteira da saída do bocal, criando aquilo que é chamado de *choques oblíquos*.

EXEMPLO 12–7 O Escoamento de Ar através de um Bocal Convergente-Divergente

Ar entra em um bocal convergente-divergente, mostrado na Figura 12–28, a 1,0 MPa e 800 K com velocidade desprezível. O escoamento é permanente, unidimensional e isentrópico com $k = 1,4$. Para um número de Mach de saída Ma = 2 e uma área de garganta de 20 cm^2, determine (*a*) as condições de garganta, (*b*) as condições no plano de saída, incluindo a área de saída e (*c*) a vazão mássica através do bocal.

SOLUÇÃO Ar escoa através de um bocal convergente-divergente. As condições da garganta e de saída, e a vazão mássica devem ser determinadas.

Hipóteses **1** O ar é um gás ideal com calores específicos constantes à temperatura ambiente. **2** O escoamento através do bocal é permanente, unidimensional e isentrópico.

Propriedades A razão de calor específico do ar é dada como $k = 1,4$. A constante de gás do ar é 0,287 kJ/kg · K.

Análise O número de saída de Mach é dado como 2. Assim, o escoamento deve ser sônico na garganta e supersônico na seção divergente do bocal. Como a velocidade de entrada é desprezível, a pressão e a temperatura de estagnação são iguais à temperatura e pressão da entrada, $P_0 = 1,0$ MPa e $T_0 = 800$ K. Considerando o comportamento do gás ideal, a massa específica de estagnação é:

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0} = \frac{1000 \text{ kPa}}{(0,287 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(800 \text{ K})} = 4,355 \text{ kg/m}^3$$

(*a*) Na garganta do bocal Ma = 1 e na Tabela A–13 lemos:

$$\frac{P^*}{P_0} = 0,5283 \qquad \frac{T^*}{T_0} = 0,8333 \qquad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,6339$$

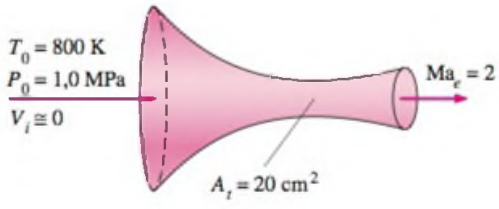


FIGURA 12–28
Esquema do Exemplo 12–7.

Assim:

$$P^* = 0{,}5283P_0 = (0{,}5283)(1{,}0\text{ MPa}) = \mathbf{0{,}5283\text{ MPa}}$$
$$T^* = 0{,}8333T_0 = (0{,}8333)(800\text{ K}) = \mathbf{666{,}6\text{ K}}$$
$$\rho^* = 0{,}6339\rho_0 = (0{,}6339)(4{,}355\text{ kg/m}^3) = \mathbf{2{,}761\text{ kg/m}^3}$$

Da mesma forma:

$$V^* = c^* = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{(1{,}4)(0{,}287\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(666{,}6\text{ K})\left(\frac{1000\text{ m}^2/\text{s}^2}{1\text{ kJ/kg}}\right)}$$
$$= \mathbf{517{,}5\text{ m/s}}$$

(*b*) Como o escoamento é isentrópico, as propriedades no plano de saída também podem ser calculadas usando os dados da Tabela A–13. Para Ma = 2 lemos que:

$$\frac{P_e}{P_0} = 0{,}1278 \quad \frac{T_e}{T_0} = 0{,}5556 \quad \frac{\rho_e}{\rho_0} = 0{,}2300 \quad \text{Ma}_e^* = 1{,}6330 \quad \frac{A_e}{A^*} = 1{,}6875$$

Assim:

$$P_e = 0{,}1278P_0 = (0{,}1278)(1{,}0\text{ MPa}) = \mathbf{0{,}1278\text{ MPa}}$$
$$T_e = 0{,}5556T_0 = (0{,}5556)(800\text{ K}) = \mathbf{444{,}5\text{ K}}$$
$$\rho_e = 0{,}2300\rho_0 = (0{,}2300)(4{,}355\text{ kg/m}^3) = \mathbf{1{,}002\text{ kg/m}^3}$$
$$A_e = 1{,}6875A^* = (1{,}6875)(20\text{ cm}^2) = \mathbf{33{,}75\text{ cm}^2}$$

e:

$$V_e = \text{Ma}_e^* c^* = (1{,}6330)(517{,}5\text{ m/s}) = \mathbf{845{,}1\text{ m/s}}$$

A velocidade de saída do bocal também poderia ser determinada com $V_e = \text{Ma}_e c_e$, onde c_e é a velocidade do som às condições de saída:

$$V_e = \text{Ma}_e c_e = \text{Ma}_e\sqrt{kRT_e} = 2\sqrt{(1{,}4)(0{,}287\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(444{,}5\text{ K})\left(\frac{1000\text{ m}^2/\text{s}^2}{1\text{ kJ/kg}}\right)}$$
$$= 845{,}2\text{ m/s}$$

(*c*) Como o escoamento é permanente, a vazão mássica do fluido é a mesma em todas as seções do bocal. Assim, ela pode ser calculada usando-se as propriedades de qualquer seção transversal do bocal. Usando as propriedades da garganta, descobrimos que a vazão mássica é:

$$\dot{m} = \rho^* A^* V^* = (2{,}761\text{ kg/m}^3)(20\times10^{-4}\text{ m}^2)(517{,}5\text{ m/s}) = \mathbf{2{,}86\text{ kg/s}}$$

Discussão Observe que essa é a mais alta vazão mássica possível que pode escoar através desse bocal para as condições de entrada especificadas.

12–5 • ONDAS DE CHOQUE E ONDAS DE EXPANSÃO

Vimos que as ondas de som são causadas por perturbações de pressão infinitesimalmente pequenas e viajam através de um meio à velocidade do som. Também vimos que para os mesmos valores de contrapressão, variações bruscas nas propriedades do fluido ocorrem em uma seção muito fina de um bocal convergente-divergente sob condições de escoamento supersônico, criando uma **onda de choque**. É interessante estudar as condições sob as quais as ondas de choque se desenvolvem e como elas afetam o escoamento.

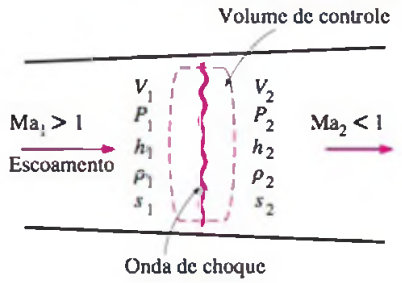


FIGURA 12–29
O volume de controle para o escoamento através de uma onda de choque normal.

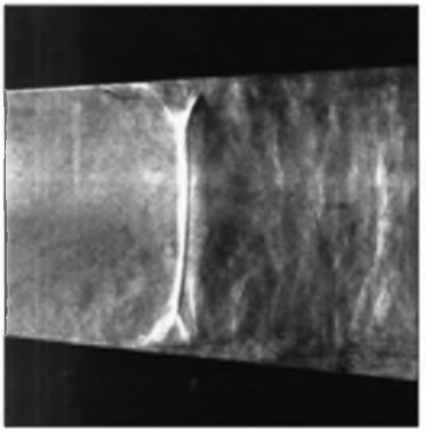


FIGURA 12–30
Imagem Schlieren de um choque normal em um bocal de Laval. O número de Mach do bocal a montante (à esquerda) da onda de choque é de cerca de 1,3. As camadas de fronteira distorcem a forma do choque normal próximo às paredes e levam à separação do escoamento abaixo do choque.
Foto de G. S. Settles, Universidade do Estado da Pensilvânia. Usada com permissão.

Choques Normais

Em primeiro lugar consideramos as ondas de choque que ocorrem em um plano normal à direção do escoamento, chamadas de **ondas de choque normais**. O processo de escoamento através da onda de choque é altamente irreversível e *não pode* ser aproximado como isentrópico.

A seguir, acompanhamos os passos de Pierre Laplace (1749–1827), G. F. Bernhard Riemann (1826–1866), William Rankine (1820–1872), Pierre Henry Hugoniot (1851–1887), Lord Rayleigh (1842–1919) e G. I. Taylor (1886–1975) e desenvolvemos relações para as propriedades de escoamento antes e após o choque. Fazemos isso aplicando a conservação da massa, a quantidade de movimento e as relações de energia, bem como algumas relações entre as propriedades e um volume de controle fixo que contém o choque, como mostra a Figura 12–29. As ondas de choque normais são extremamente finas, de modo que as áreas de escoamento de entrada e saída do volume de controle são aproximadamente iguais (Figura 12–30).

Consideramos o escoamento permanente sem interação de calor e trabalho nem variação da energia potencial. Indicando as propriedades a montante do choque pelo subscrito 1 e aquelas a jusante do choque por 2, temos o seguinte:

Conservação de massa:
$$\rho_1 A V_1 = \rho_2 A V_2 \tag{12–29}$$

ou:
$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

Conservação da energia:
$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12–30}$$

ou:
$$h_{01} = h_{02} \tag{12–31}$$

Conservação da quantidade de movimento: reorganizando a Equação 12–14 e integrando temos:

$$A(P_1 - P_2) = \dot{m}(V_2 - V_1) \tag{12–32}$$

Aumento de entropia:
$$s_2 - s_1 \geq 0 \tag{12–33}$$

Usando as relações de propriedade, podemos combinar a conservação das relações de massa e energia em uma única equação e fazer um gráfico em um diagrama *h-s*. A curva resultante é chamada de **linha de Fanno**. Ela é o local dos estados que têm o mesmo valor de entalpia de estagnação e fluxo de massa (vazão mássica por unidade de área de escoamento). Da mesma forma, combinando a conservação de massa e as equações de quantidade de movimento em uma única equação e fazendo um gráfico no diagrama *h-s*, temos uma curva chamada de **linha de Rayleigh**. Ambas essas linhas são mostradas no diagrama *h-s* da Figura 12–31. Como provará o Exemplo 12–8, os pontos de entropia máxima dessas linhas (pontos *a* e *b)* correspondem a Ma = 1. O estado da parte superior de cada curva é subsônico e na parte inferior é supersônico.

As linhas de Fanno e Rayleigh cruzam-se em dois pontos (pontos 1 e 2), que representam os dois estados nos quais todas as três equações de conservação são atendidas. Um deles (o estado 1) corresponde ao estado anterior ao choque, e o outro (o estado 2) corresponde ao estado após o choque. Observe que o escoamento é supersônico antes do choque e subsônico após o choque. Assim, para que ocorra um choque, o escoamento deve variar de supersônico a subsônico. Quanto maior for o número de Mach antes do choque, mais forte será o choque. No caso-limite de Ma = 1, a onda de choque simplesmente torna-se uma onda de som. Observe na Figura 12–31 que a entropia aumenta, $s_2 > s_1$. Isso é esperado, uma vez que o escoamento através do choque é adiabático, porém irreversível.

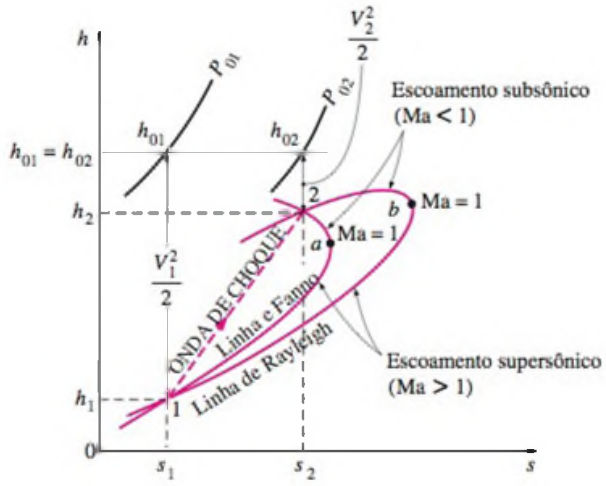


FIGURA 12–31
O diagrama *h*-*s* do escoamento através de um choque normal.

O princípio de conservação da energia (Equação 12–31) exige que a entalpia de estagnação permaneça constante através do choque: $h_{01} = h_{02}$. Para os gases ideais $h = h(T)$ e, portanto:

$$T_{01} = T_{02} \tag{12–34}$$

Ou seja, a temperatura de estagnação de um gás ideal também permanece constante através do choque. Observe, porém, que a pressão de estagnação diminui através do choque por causa das irreversibilidades, enquanto a temperatura termodinâmica (estática) sobe drasticamente por causa da conversão da energia cinética em entalpia, devido a uma grande queda na velocidade do fluido (veja a Figura 12–32).

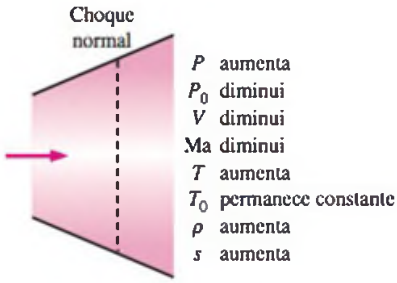


FIGURA 12–32
Variação das propriedades de escoamento através de um choque normal.

Agora desenvolvemos relações entre as diversas propriedades antes e após o choque para um gás ideal com calores específicos constantes. Uma relação entre as razões de temperaturas estáticas T_2/T_1 é obtida pela aplicação da Equação 12–18 duas vezes:

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}_1^2 \quad \text{e} \quad \frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}_2^2$$

Dividindo a primeira equação pela segunda e observando que $T_{01} = T_{02}$ temos:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \text{Ma}_1^2(k-1)/2}{1 + \text{Ma}_2^2(k-1)/2} \tag{12–35}$$

Da equação de estado do gás ideal:

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2}$$

Substituindo na relação da conservação de massa $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ e observando que Ma $= V/c$ e $c = \sqrt{kRT}$, temos:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{P_2 \text{Ma}_2 c_2}{P_1 \text{Ma}_1 c_1} = \frac{P_2 \text{Ma}_2 \sqrt{T_2}}{P_1 \text{Ma}_1 \sqrt{T_1}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 \left(\frac{\text{Ma}_2}{\text{Ma}_1}\right)^2 \tag{12–36}$$

Combinando as Equações 12–35 e 12–36, temos a razão de pressão através do choque:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\text{Ma}_1 \sqrt{1 + \text{Ma}_1^2(k-1)/2}}{\text{Ma}_2 \sqrt{1 + \text{Ma}_2^2(k-1)/2}} \tag{12–37}$$

A Equação 12–37 é uma combinação entre as equações de conservação de massa e energia. Assim, ela também é a equação da linha de Fanno para um gás ideal com calores específicos constantes. Uma relação semelhante para a linha de Rayleigh pode ser obtida combinando-se as equações da conservação de massa e da quantidade de movimento. Na Equação 12–32:

$$P_1 - P_2 = \frac{\dot{m}}{A}(V_2 - V_1) = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$$

Entretanto:

$$\rho V^2 = \left(\frac{P}{RT}\right)(\text{Ma}\, c)^2 = \left(\frac{P}{RT}\right)(\text{Ma}\sqrt{kRT})^2 = Pk\,\text{Ma}^2$$

Assim:

$$P_1(1 + k\text{Ma}_1^2) = P_2(1 + k\text{Ma}_2^2)$$

ou:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} \qquad \textbf{(12–38)}$$

Combinando as Equações 12–37 e 12–38, temos:

$$\text{Ma}_2^2 = \frac{\text{Ma}_1^2 + 2/(k-1)}{2\text{Ma}_1^2 k/(k-1) - 1} \qquad \textbf{(12–39)}$$

Isso representa as intersecções das linhas de Fanno e Rayleigh e relaciona o número de Mach a montante do choque com aquele a jusante do choque.

A ocorrência de ondas de choque não se limita aos bocais supersônicos. Esse fenômeno também é observado na entrada do motor de um avião supersônico, onde o ar passa através de um choque e desacelera até velocidades subsônicas antes de entrar no difusor do motor. As explosões também produzem poderosos choques normais esféricos de expansão, os quais podem ser bastante destrutivos (Figura 12–33).

As diversas razões de propriedade de escoamento através do choque são listadas na Tabela A–14 para um gás ideal com $k = 1{,}4$. A inspeção dessa tabela revela que Ma_2 (o número de Mach após o choque) sempre é menor do que 1, e que quanto maior for o número de Mach supersônico antes do choque, menor será o número de Mach subsônico após o choque. Da mesma forma, vemos que a pressão estática, a temperatura e a massa específica aumentam após o choque, enquanto a pressão de estagnação diminui.

A variação da entropia através do choque é obtida pela aplicação da equação de variação da entropia de um gás ideal através do choque:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1} \qquad \textbf{(12–40)}$$

FIGURA 12–33
A imagem Schlieren da onda provocada por uma explosão (choque normal esférico de expansão) produzida pela explosão de um eletrodo detonado dentro de um metal que pode ser assentado sobre uma bancada. O choque expandiu radialmente para fora em todas as direções a uma velocidade supersônica que diminui com o raio a partir do centro da explosão. O microfone no lado inferior direito detectou a mudança repentina da pressão da onda de choque de passagem e disparou o flash de microssegundo que expôs a fotografia.
Foto de G. S. Settles, Universidade do Estado da Pensilvânia. Usada com permissão.

que pode ser expressa em termos de k, R e Ma_1 usando as relações desenvolvidas anteriormente nesta seção. Um gráfico adimensional da variação de entropia através do choque normal $(s_2 - s_1)/R$ *versus* Ma_1 é mostrado na Figura 12–34. Como o escoamento através do choque é adiabático e irreversível, a segunda lei exige que a entropia aumente através da onda de choque. Assim, uma onda de choque não pode existir para os valores de Ma_1 menores do que a unidade, nos quais a variação da entropia seria negativa. Para os escoamentos adiabáticos, as ondas de choque podem existir apenas para os escoamentos supersônicos, $Ma_1 > 1$

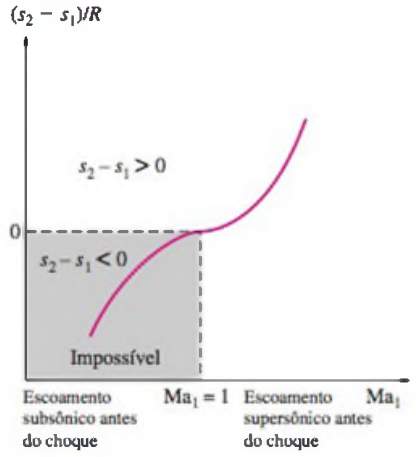


FIGURA 12–34
Variação da entropia através do choque normal.

EXEMPLO 12–8 O Ponto de Entropia Máxima na Linha de Fanno

Mostre que o ponto de entropia máxima na linha de Fanno (ponto *a* da Figura 12–31) para o escoamento permanente adiabático de um fluido em um duto corresponde à velocidade sônica Ma = 1.

SOLUÇÃO Demonstrar que o ponto de entropia máxima da linha de Fanno para o escoamento adiabático permanente corresponde à velocidade sônica.

Hipótese O escoamento é permanente, adiabático e unidimensional.

Análise Na falta de interações de calor e trabalho e de variações de energia potencial, a equação da energia de escoamento permanente se reduz a:

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

A diferenciação resulta em:

$$dh + V\,dV = 0$$

Para um choque muito pequeno com variação desprezível da área do duto através do choque, a equação da continuidade do escoamento permanente (conservação da massa) pode ser expressa como:

$$\rho V = \text{constante}$$

Fazendo a diferenciação, obtemos:

$$\rho\,dV + V\,d\rho = 0$$

Solucionando dV resulta:

$$dV = -V\frac{d\rho}{\rho}$$

Combinando isso à equação da energia, temos:

$$dh - V^2\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

que é a equação da linha de Fanno na forma diferencial. No ponto *a* (o ponto de entropia máxima) $ds = 0$. Assim, para a segunda relação $T\,ds$ ($T\,ds = dh - v\,dP$) temos $dh = v\,dP = dP/\rho$. Substituindo resulta:

$$\frac{dP}{\rho} - V^2\frac{d\rho}{\rho} = 0 \qquad \text{a} \quad s = \text{constante}$$

Resolvendo V, temos:

$$V = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s^{1/2}$$

que é a relação para a velocidade do som, Equação 12–9. Deste modo, a prova é concluída.

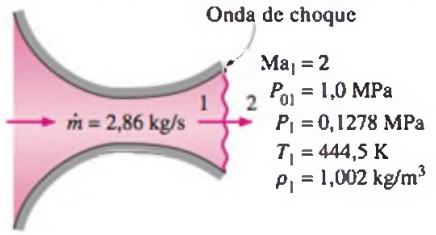


FIGURA 12–35
Esquema do Exemplo 12–9.

EXEMPLO 12–9 Onda de Choque em um Bocal Convergente-Divergente

Se o ar que escoa através do bocal convergente-divergente do Exemplo 12–7 passa por uma onda de choque normal no plano de saída do bocal (Figura 12–35), determine o seguinte após o choque: (*a*) a pressão de estagnação, a pressão estática, a temperatura estática e a massa específica estática, (*b*) a variação da entropia através do choque, (*c*) a velocidade de saída e (*d*) a vazão mássica através do bocal. Vamos considerar o escoamento permanente, unidimensional e isentrópico com $k = 1{,}4$ da entrada do bocal até o local do choque.

SOLUÇÃO O ar que escoa através de um bocal convergente-divergente passa por um choque normal na saída. O efeito da onda de choque sobre as diversas propriedades deve ser determinado.

Hipóteses **1** O ar é um gás ideal com calores específicos constantes à temperatura ambiente. **2** O escoamento através do bocal é permanente, unidimensional e isentrópico antes do choque ocorrer. **3** A onda de choque ocorre no plano de saída.

Propriedades O calor específico a pressão constante e a razão de calor específico do ar são 1,005 kJ/kg · K e $k = 1{,}4$. A constante de gás do ar é 0,287 kJ/kg · K.

Análise (*a*) As propriedades do fluido na saída do bocal imediatamente antes do choque (indicado pelo subscrito 1) são aquelas avaliadas no Exemplo 12–7 na saída do bocal como:

$$P_{01} = 1{,}0 \text{ MPa} \qquad P_1 = 0{,}1278 \text{ MPa} \qquad T_1 = 444{,}5 \text{ K} \qquad \rho_1 = 1{,}002 \text{ kg/m}^3$$

As propriedades do fluido após o choque (indicado pelo subscrito 2) estão relacionadas àquelas anteriores ao choque através das funções listadas na Tabela A–14. Para $Ma_1 = 2{,}0$ lemos:

$$Ma_2 = 0{,}5774 \qquad \frac{P_{02}}{P_{01}} = 0{,}7209 \qquad \frac{P_2}{P_1} = 4{,}5000 \qquad \frac{T_2}{T_1} = 1{,}6875 \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2{,}6667$$

Em seguida, a pressão de estagnação P_{02}, a pressão estática P_2, a temperatura estática T_2 e massa específica estática ρ_2 após o choque são:

$$P_{02} = 0{,}7209P_{01} = (0{,}7209)(1{,}0 \text{ MPa}) = \mathbf{0{,}721 \text{ MPa}}$$
$$P_2 = 4{,}5000P_1 = (4{,}5000)(0{,}1278 \text{ MPa}) = \mathbf{0{,}575 \text{ MPa}}$$
$$T_2 = 1{,}6875T_1 = (1{,}6875)(444{,}5 \text{ K}) = \mathbf{750 \text{ K}}$$
$$\rho_2 = 2{,}6667\rho_1 = (2{,}6667)(1{,}002 \text{ kg/m}^3) = \mathbf{2{,}67 \text{ kg/m}^3}$$

(*b*) A variação da entropia através do choque é:

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \\ &= (1{,}005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}) \ln (1{,}6875) - (0{,}287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}) \ln (4{,}5000) \\ &= \mathbf{0{,}0942 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}} \end{aligned}$$

Assim, a entropia do ar aumenta à medida que ele passa por um choque normal e altamente irreversível.

(*c*) A velocidade do ar após o choque pode ser determinada com $V_2 = Ma_2 c_2$, onde c_2 é a velocidade do som às condições de saída após o choque:

$$\begin{aligned} V_2 &= Ma_2 c_2 = Ma_2 \sqrt{kRT_2} \\ &= (0{,}5774)\sqrt{(1{,}4)(0{,}287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(750{,}1 \text{ K})\left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} \\ &= \mathbf{317 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

(*d*) A vazão mássica através de um bocal convergente-divergente com condições sônicas na garganta não é afetada pela presença das ondas de choque no bocal. Portanto, a vazão mássica neste caso é igual àquela determinada no Exemplo 12–7:

$$\dot{m} = 2{,}86 \text{ kg/s}$$

Discussão Esse resultado pode ser facilmente verificado usando valores de propriedade na saída do bocal após o choque em todos os números de Mach significativamente maiores do que a unidade.

O Exemplo 12–9 ilustra que a pressão de estagnação e a velocidade diminuem enquanto a pressão estática, a temperatura, a massa específica e a entropia aumentam através do choque. A elevação da temperatura do fluido a jusante de uma onda de choque é uma das grandes preocupações da engenharia aeroespacial, porque ela cria problemas de transferência de calor sobre as bordas de ataque das asas e cones do nariz nos veículos de reentrada espacial e nos aviões espaciais hipersônicos que estão sendo propostos recentemente. Na verdade, o superaquecimento levou à trágica perda do ônibus espacial *Columbia* em fevereiro de 2003 durante a reentrada na atmosfera terrestre.

Choques Oblíquos

Nem todas as ondas de choque são choques normais (perpendiculares à direção do escoamento). Por exemplo, quando a nave espacial viaja a velocidades supersônicas através da atmosfera, ela produz um padrão de choque complicado que consiste em ondas de choque inclinadas chamadas de **choques oblíquos** (Figura 12–36). Como você pode ver, algumas partes de um choque oblíquo são curvas, enquanto outras são retas.

Em primeiro lugar, consideramos os choques oblíquos retos, como aqueles produzidos quando um escoamento supersônico uniforme ($\text{Ma}_1 > 1$) é imposto sobre uma cunha delgada e bidimensional em semi-ângulo (Figura 12–37). Como as informações sobre a cunha não podem viajar a montante em um escoamento supersônico, o fluido não "sabe" nada sobre a cunha até atingir o nariz. Nesse ponto, como o fluido não pode escoar *através* da cunha, ele gira repentinamente através de um **ângulo de virada** ou **ângulo de deflexão** θ. O resultado é uma onda de choque oblíqua reta, alinhada ao **ângulo de choque** ou **ângulo de onda** β, medido com relação ao escoamento próximo (Figura 12–38). Para conservar a massa, β obviamente deve ser maior do que δ. Como o número de Reynolds para os escoamentos supersônicos em geral é grande, a camada limite que cresce ao longo da cunha é muito fina e ignoramos seus efeitos. Portanto, o escoamento gira com o mesmo ângulo da cunha. O ângulo de deflexão θ é igual ao semi-ângulo da cunha δ. Se levarmos em conta o efeito da espessura de deslocamento da camada limite (Capítulo 10), o ângulo de deflexão θ do choque oblíquo é ligeiramente maior do que o semi-ângulo da cunha δ.

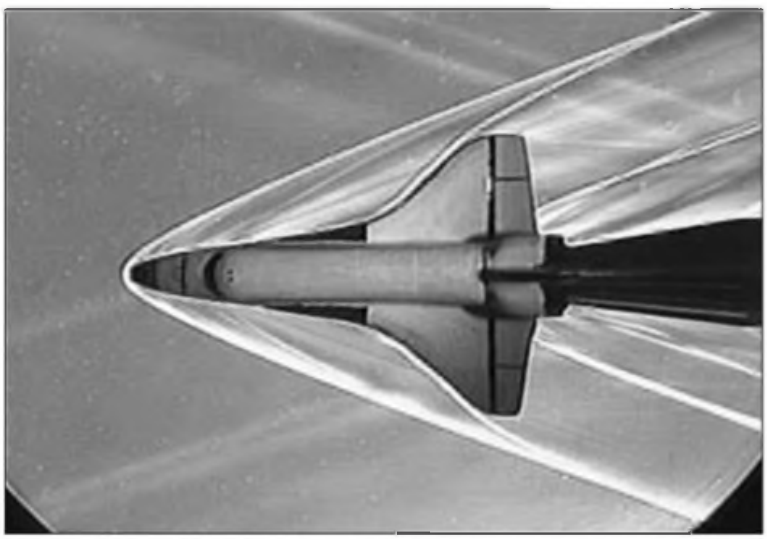


FIGURA 12–36
Imagem Schlieren de um modelo pequeno do ônibus espacial Orbiter sendo testado em Mach 3 no túnel de vento supersônico do Laboratório de Dinâmica dos Gases da Universidade do Estado da Pensilvânia. Vários *choques oblíquos* são vistos no ar ao redor da nave espacial.

Foto de G. S. Settles, Universidade do Estado da Pensilvânia. Usada com permissão.

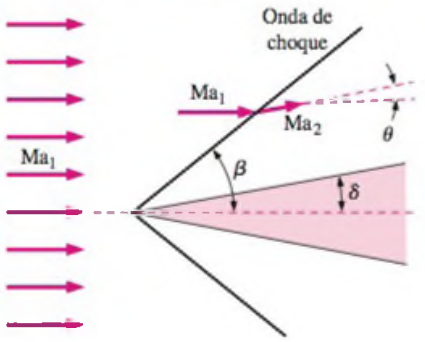


FIGURA 12–37
Um choque oblíquo de ângulo de choque β formado por uma cunha delgada e bidimensional de semi-ângulo δ. O escoamento é girado com o *ângulo de deflexão* θ a jusante do choque, e o número de Mach diminui.

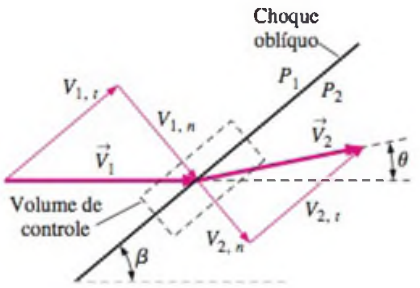


FIGURA 12–38
Os vetores de velocidade através de um choque oblíquo com ângulo de choque β e ângulo de deflexão θ.

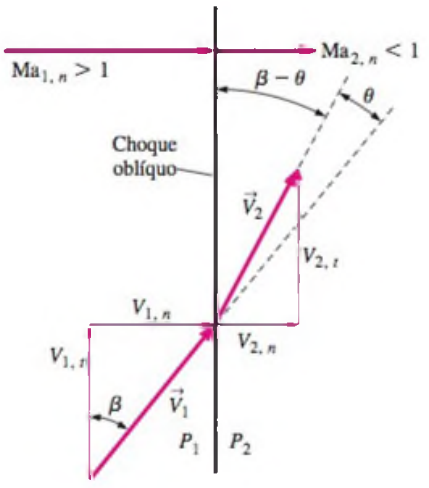


FIGURA 12–39
Os mesmos vetores de velocidade da Fig. 12–38, mas girado com o ângulo $\pi/2 - \beta$, para que o choque oblíquo seja vertical. Os números normais de $Ma_{1,n}$ e $Ma_{2,n}$ também são definidos.

Assim como os choques normais, o número de Mach diminui através de um choque oblíquo, e os choques oblíquos são possíveis apenas se o escoamento a montante for supersônico. Entretanto, ao contrário dos choques normais, nos quais o número de Mach a jusante sempre é subsônico, Ma_2 a jusante de um choque oblíquo pode ser subsônico, sônico ou supersônico, dependendo do número de Mach a montante Ma_1 e do ângulo de deflexão.

Analisamos um choque oblíquo reto na Figura 12–38 decompondo os vetores de velocidade a montante e a jusante do choque nos componentes normal e tangencial, e considerando um volume de controle pequeno ao redor do choque. A montante do choque todas as propriedades do fluido (velocidade, massa específica, pressão etc.) ao longo da face esquerda inferior do volume de controle são idênticas àquelas ao longo da face direita superior. O mesmo vale para a montante do choque. Assim, as vazões mássicas que entram e saem daquelas duas faces cancelam umas às outras e a conservação de massa se reduz a:

$$\rho_1 V_{1,n} A = \rho_2 V_{2,n} A \quad \rightarrow \quad \rho_1 V_{1,n} = \rho_2 V_{2,n} \tag{12–41}$$

onde A é a área da superfície de controle que é paralela ao choque. Como A é igual em ambos os lados do choque, ela foi deixada de fora na Equação 12–41.

Com seria de esperar, a componente tangencial da velocidade (paralela ao choque oblíquo) não varia através do choque, ou seja, $V_{1,t} = V_{2,t}$. Isso é comprovado facilmente pela aplicação da equação da quantidade de movimento tangencial ao volume de controle.

Quando aplicamos a conservação da quantidade de movimento na direção *normal* ao choque oblíquo, as únicas forças são as da pressão, e obtemos:

$$P_1 A - P_2 A = \rho V_{2,n} A V_{2,n} - \rho V_{1,n} A V_{1,n} \quad \rightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho_2 V_{2,n}^2 - \rho_1 V_{1,n}^2 \tag{12–42}$$

Finalmente, como não há trabalho realizado pelo volume de controle e nenhuma transferência de calor para dentro ou para fora do volume de controle, a entalpia de estagnação *não* varia através de um choque oblíquo e o resultado da conservação da energia é:

$$h_{01} = h_{02} = h_0 \quad \rightarrow \quad h_1 + \frac{1}{2} V_{1,n}^2 + \frac{1}{2} V_{1,t}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{2,n}^2 + \frac{1}{2} V_{2,t}^2$$

Mas como $V_{1,t} = V_{2,t}$, essa equação se reduz a:

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{1,n}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{2,n}^2 \tag{12–43}$$

Uma comparação cuidadosa revela que as equações para a conservação de massa, quantidade de movimento e energia (Equações 12–41 a 12–43) através de um choque oblíquo são idênticas àquelas de um choque normal, exceto que são escritas em termos apenas do componente *normal* da velocidade. Assim, as relações de choque normal derivadas anteriormente aplicam-se aos choques oblíquos também, mas devem ser escritas em termos de números de Mach $Ma_{1,n}$ e $Ma_{2,n}$ normais ao choque oblíquo. Isso pode ser melhor visualizado girando os vetores de velocidade da Figura 12–38 com o ângulo $\pi/2 - \beta$, para que o choque oblíquo pareça estar na vertical (Figura 12–39). A trigonometria resulta em:

$$Ma_{1,n} = Ma_1 \operatorname{sen} \beta \qquad \text{e} \qquad Ma_{2,n} = Ma_2 \operatorname{sen}(\beta - \theta) \tag{12–44}$$

onde $Ma_{1,n} = V_{1,n}/c_1$ e $Ma_{2,n} = V_{2,n}/c_2$. Sob o ponto de vista da Figura 12–39, vemos aquilo que se parece com um choque normal, mas com algum escoamento tangencial superimposto "que vem junto". Assim:

> Todas as equações, tabelas de choque e outras informações para os choques normais aplicam-se também aos choques oblíquos, desde que usemos apenas os componentes **normais** do número de Mach.

Na verdade, você pode imaginar os choques normais como oblíquos especiais nos quais o ângulo do choque $\beta = \pi/2$, ou 90°. Reconhecemos imediatamente que um choque oblíquo pode existir apenas se $Ma_{1,n} > 1$ e $Ma_{2,n} < 1$. As equações do

choque normal adequadas para os choques oblíquos de um gás ideal são resumidas na Figura 12–40 em termos de $Ma_{1,n}$.

Para o ângulo de choque β conhecido e o número de Mach a montante conhecido Ma_1, usamos a primeira parte da Equação 12–44 para calcular $Ma_{1,n}$ e, em seguida, utilizamos a tabela de choques normais (ou suas equações correspondentes) para obter $Ma_{2,n}$. Se também tivéssemos o ângulo de deflexão θ, poderíamos calcular Ma_2 com a segunda parte da Equação 12–44. Mas, em uma aplicação normal, conhecemos β ou θ, mas não ambas. Felizmente, um pouco mais de álgebra nos oferece uma relação entre θ, β e Ma_1. Começamos observando que $\text{tg}\,\beta = V_1, n/V_{1,t}$ e $\text{tg}(\beta - \theta) = V_2, n/V_{2,t}$ (Figura 12–39). Mas como $V_{1,t} = V_{2,t}$, combinamos essas duas expressões e temos

$$\frac{V_{2,n}}{V_{1,n}} = \frac{\text{tg}(\beta - \theta)}{\text{tg}\,\beta} = \frac{2 + (k-1)\text{Ma}_{1,n}^2}{(k+1)\text{Ma}_{1,n}^2} = \frac{2 + (k-1)\text{Ma}_1^2 \,\text{sen}^2\,\beta}{(k+1)\text{Ma}_1^2 \,\text{sen}^2\,\beta} \qquad \textbf{(12–45)}$$

onde também usamos a Equação 12–44 e a quarta equação da Figura 12–40. Aplicamos as identidades trigonométricas a cos 2β e $\text{tg}(\beta - \theta)$ a saber

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \text{sen}^2\,\beta \qquad \text{e} \qquad \text{tg}(\beta - \theta) = \frac{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\theta}{1 + \text{tg}\,\beta\,\text{tg}\,\theta}$$

Após alguma álgebra, a Equação 12–45 se reduz a

A relação θ-β-Ma:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{2\cot\beta(\text{Ma}_1^2\,\text{sen}^2\,\beta - 1)}{\text{Ma}_1^2(k + \cos 2\beta) + 2} \qquad \textbf{(12–46)}$$

A Equação 12–46 oferece o ângulo de deflexão θ como uma função exclusiva do ângulo de choque β, da razão de calor específico k e do número de Mach a montante Ma_1. Para o ar ($k = 1{,}4$), fazemos um gráfico de θ *versus* β para diversos valores de Ma_1 da Figura 12–41. Observamos que esse gráfico quase sempre é apresentado com os eixos invertidos (β *versus* θ) nos livros sobre escoamento compressível, uma vez que fisicamente o ângulo de choque β é determinado pelo ângulo de deflexão θ.

É possível aprender muita coisa estudando a Figura 12–41; listamos algumas observações a seguir:

- A Figura 12–41 exibe a variedade completa de possíveis ondas de choque, da mais fraca para a mais forte, para determinado número de Mach de corrente livre. Para um valor qualquer do número de Mach Ma_1 maior do que 1, os valores possíveis de θ variam de $\theta = 0°$ para algum valor de β entre 0 e 90° até um valor máximo $\theta = \theta_{máx}$ para um valor intermediário de β e, em seguida, voltando a $\theta = 0°$ a $\beta = 90°$. Os choques oblíquos retos para θ ou β fora desse intervalo

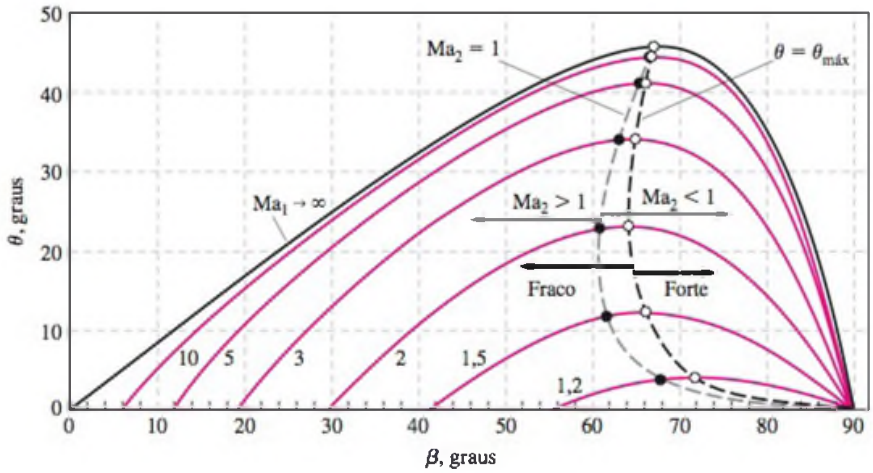


FIGURA 12–41
A dependência do ângulo de deflexão de choque oblíquo reto θ sobre o ângulo de choque β para diversos valores do número de Mach a montante Ma_1. Os cálculos referem-se a um gás ideal com $k = 1{,}4$. A linha preta tracejada conecta os pontos de ângulo de deflexão máxima ($\theta = \theta_{máx}$). Os *choques oblíquos fracos* estão à esquerda dessa linha, enquanto os *choques oblíquos fortes* estão à direita dela. A linha cinza tracejada conecta os pontos nos quais o número de Mach a jusante é sônico ($Ma_2 = 1$). O *escoamento supersônico a jusante* ($Ma_2 > 1$) está à esquerda dessa linha, enquanto o *escoamento subsônico a jusante* ($Ma_2 < 1$) está à direita dela.

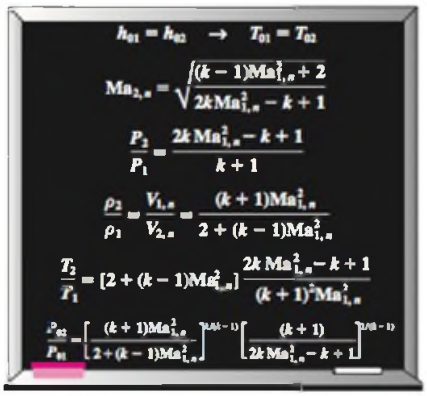


FIGURA 12–40
Relações através de um choque oblíquo para um gás ideal em termos do componente normal do número de Mach a montante $Ma_{1,n}$.

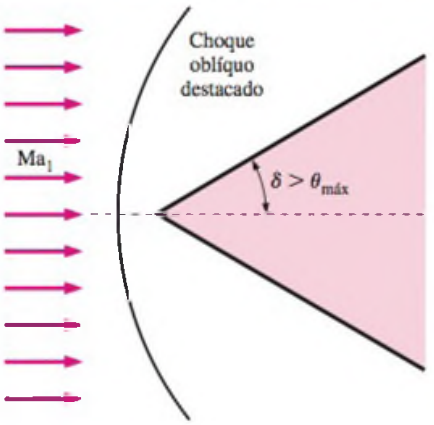


FIGURA 12–42
Um *choque oblíquo destacado* ocorre a montante de uma cunha bidimensional de semi-ângulo δ quando δ é maior do que o ângulo θ máximo possível de deflexão. Um choque desse tipo é chamado de *onda de proa*, por causa de sua semelhança com a onda de água que se forma na proa de um navio.

não podem existir e *não existem*. A $Ma_1 = 1{,}5$, por exemplo, os choques oblíquos retos não podem existir no ar com o ângulo de choque β menor do que cerca de 42°, nem com o ângulo de deflexão θ maior do que cerca de 12°. Se o semi-ângulo da cunha for maior do que $\theta_{máx}$, o choque torna-se curvo e se destaca do nariz da cunha, formando aquilo que chamamos de **choque oblíquo destacado** ou uma **onda de proa** (Figura 12–42). O ângulo de choque β do choque destacado é 90° no nariz, mas β diminui à medida que o choque se curva a jusante. É muito mais complicado analisar os choques destacados do que os choques oblíquos retos simples. Na verdade, não existem soluções simples e o cálculo dos choques destacados exige métodos computacionais (Capítulo 15).

- Um comportamento similar de choque oblíquo é observado no *escoamento axissimétrico* sobre cones, como mostra a Figura 12–43, embora a relação θ-β-Ma para os escoamentos axissimétricos seja diferente daquele da Equação 12–46.
- Quando o escoamento supersônico é imposto sobre um corpo rombudo — um corpo *sem* um nariz com ponta afiada, o semi-ângulo da cunha δ no nariz é 90°, e não pode existir um choque oblíquo destacado, independentemente do número de Mach. Na verdade, um choque oblíquo destacado ocorre na frente de *todos* esses corpos com nariz rombudo, sejam eles bidimensionais, axissimétricos ou totalmente tridimensionais. Por exemplo, um choque oblíquo destacado é visto na frente do modelo da nave espacial da Figura 12–36 e na frente de uma esfera na Figura 12–44.
- Embora θ seja uma função exclusiva de Ma_1 e de β para determinado valor de k, existem *dois* valores possíveis de β para $\theta < \theta_{máx}$. A linha preta tracejada da Figura 12–41 passa através do local dos valores $\theta_{máx}$, dividindo os choques em **choques oblíquos fracos** (o menor valor de β) e **choques oblíquos fortes** (o maior valor de β). A determinado valor de θ, o choque fraco é mais comum e é "preferido" pelo escoamento, a menos que as condições de pressão a jusante sejam suficientemente altas para a formação de um choque forte.
- Para determinado número de Mach a montante Ma_1, existe um valor exclusivo de θ para o qual o número de Mach a jusante Ma_2 é exatamente 1. A linha cinza tracejada da Figura 12-41 passa através do local dos valores onde $Ma_2 = 1$. À esquerda dessa linha $Ma_2 > 1$, e à direita dessa linha $Ma_2 < 1$. As condições sônicas a jusante ocorrem no lado do choque fraco do gráfico, com θ muito próximo de $\theta_{máx}$. Assim, o escoamento a jusante de um choque oblíquo forte *sempre* é *subsônico* ($Ma_2 < 1$). O escoamento a jusante de um choque oblíquo fraco permanece *supersônico*, exceto por um intervalo estreito de θ abaixo de $\theta_{máx}$, onde ele é subsônico, embora ainda seja chamado de choque oblíquo fraco.
- À medida que o número de Mach a montante aproxima-se de infinito, os choques oblíquos retos tornam-se possíveis para qualquer β entre 0 e 90°, mas o ângulo máximo possível de virada para $k = 1{,}4$ (ar) é $\theta_{máx} > 45{,}6°$ que ocorre a $\beta = 67{,}8°$. Os choques oblíquos retos com ângulos de virada acima desse valor de $\theta_{máx}$ não são possíveis independentemente do número de Mach.
- Para determinado valor do número de Mach a montante, existem dois ângulos de choque nos quais *não há virada do escoamento* ($\theta = 0°$): o caso forte, $\beta = 90°$,

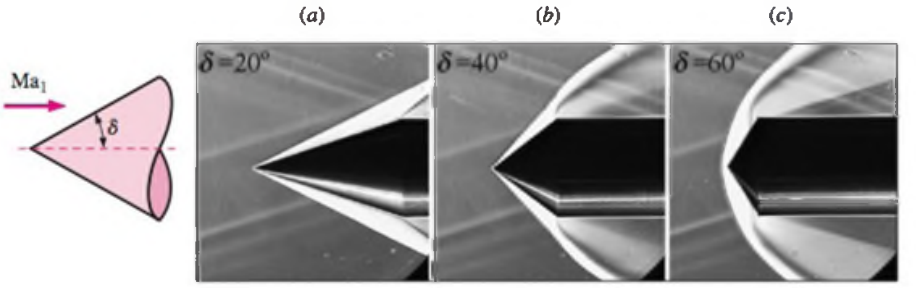


FIGURA 12–43
Quadros fixos de vídeo Schlieren ilustrando o destacamento de um choque oblíquo de um cone com o aumento de semi-ângulo do cone no ar a Mach 3. A (*a*) $\delta = 20°$ e (*b*) $\delta = 40°$ o choque oblíquo permanece colado, mas a (*c*) $\delta = 60°$, o choque oblíquo foi destacado, formando uma onda de proa.
Foto de G. S. Settles, Universidade do Estado da Pensilvânia. Usada com permissão.

corresponde a um *choque normal*, e o caso fraco, $\beta = \beta_{mín}$, representa o choque oblíquo mais fraco possível naquele número de Mach que é chamado de **onda de Mach**. As ondas de Mach são causadas, por exemplo, por não uniformidades muito pequenas nas paredes de um túnel de vento supersônico (várias delas podem ser vistas nas Figuras 12–36 e 12–43). As ondas de Mach não têm efeito sobre o escoamento, uma vez que o choque é tão fraco que tende a desaparecer. Na verdade, no limite, as ondas de Mach são *isentrópicas*. O ângulo de choque das ondas de Mach é uma função exclusiva do número de Mach e recebe o símbolo μ, que não deve ser confundido com o coeficiente de viscosidade. O ângulo μ é chamado de **ângulo de Mach** e é encontrado definindo-se θ como zero na Equação 12–46, solucionando $\beta = \mu$, e tomando a menor raiz. Obtemos:

Ângulo de Mach: $$\mu = \text{sen}^{-1}(1/\text{Ma}_1) \qquad (12\text{–}47)$$

Como a razão de calor específico aparece apenas no denominador da Equação 12–46, μ é independente de k. Assim, podemos estimar o número de Mach de qualquer escoamento supersônico simplesmente medindo o ângulo de Mach e aplicando a Equação 12–47.

Ondas de Expansão de Prandtl–Meyer

Agora tratamos das situações nas quais o escoamento supersônico é girado na direção *oposta*, como na parte superior de uma cunha bidimensional a um ângulo de ataque maior do que seu semi-ângulo δ (Figura 12–45). Chamamos esse tipo de escoamento de **escoamento de expansão,** enquanto o que produz um choque oblíquo pode ser chamado de **escoamento de compressão**. Como anteriormente, o escoamento muda de direção para conservar massa. Entretanto, ao contrário de um escoamento de compressão, um em expansão *não* resulta em uma onda de choque. Em vez disso, uma região em expansão contínua chamada **leque de expansão** aparece, composta por um número infinito de ondas de Mach chamadas **ondas de expansão de Prandtl–Meyer**. Em outras palavras, o escoamento não gira repentinamente, como se fosse por um choque, mas sim *gradualmente* — cada onda sucessiva de Mach gira o escoamento por uma quantidade infinitesimal. Como cada onda de expansão individual é isentrópica, o escoamento através de todo o leque de expansão também é isentrópico. O número de Mach a jusante da expansão *aumenta* ($\text{Ma}_2 > \text{Ma}_1$), enquanto a pressão, massa específica e temperatura *diminuem*, assim como na parte supersônica (em expansão) de um bocal convergente-divergente.

As ondas de expansão de Prandtl–Meyer são inclinadas no ângulo local de Mach μ, representado na Figura 12–45. O ângulo de Mach da primeira onda de expansão é determinado facilmente como $\mu_1 = \text{sen}^{-1}(1/\text{Ma}_1)$. Da mesma forma, $\mu_2 = \text{sen}^{-1}(1/\text{Ma}_2)$. Devemos medir cuidadosamente o ângulo relativo à *nova* direção do escoamento a jusante da expansão, a saber, paralelo à parede superior da cunha da Figura 12–45 quando desprezarmos a influência da camada limite ao longo da parede. Mas como determinamos Ma_2? Acontece que o ângulo de virada θ através do leque de expansão pode ser calculado por integração, utilizando as relações de escoamento isentrópico. Para um gás ideal, o resultado é (Anderson, 2003):

O ângulo de virada através de um leque de expansão: $$\theta = \nu(\text{Ma}_2) - \nu(\text{Ma}_1) \qquad (12\text{–}48)$$

onde $\nu(\text{Ma})$ é um ângulo chamado de **função de Prandtl–Meyer** (não confundir com a viscosidade cinemática):

$$\nu(\text{Ma}) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\text{tg}^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(\text{Ma}^2-1)}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\sqrt{\text{Ma}^2-1}\right) \qquad (12\text{–}49)$$

Observe que $\nu(\text{Ma})$ é um ângulo e pode ser calculado em graus ou radianos. Fisicamente, $\nu(\text{Ma})$ é o ângulo através do qual o escoamento deve se expandir, começando com $\nu = 0$ a $\text{Ma} = 1$, para atingir um número de Mach supersônico $\text{Ma} > 1$.

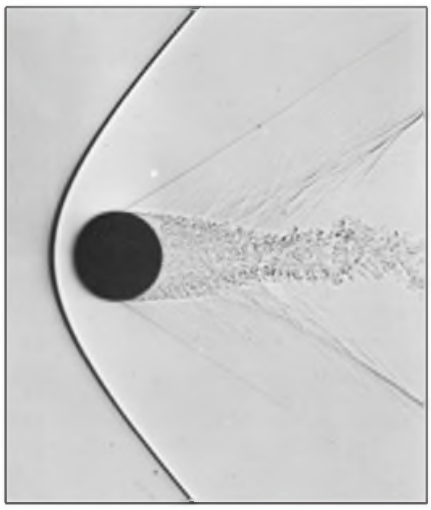


FIGURA 12–44
O gráfico por sombras de uma esfera de diâmetro em vôo livre através do ar a Ma = 1,53. O escoamento é subsônico atrás da parte da onda de proa que está à frente da esfera e sobre a superfície de volta a cerca de 45°. A cerca de 90° a camada limite laminar se separa através de uma onda de choque oblíqua e torna-se rapidamente turbulenta. A esteira flutuante gera um sistema de perturbações fracas que se incorporam à segunda onda de choque de "recompressão".
Foto de A. C. Charters, encontrada em Van Dyke (1982).

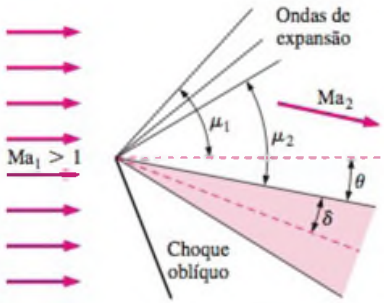


FIGURA 12–45
Um leque de expansão na parte superior do escoamento formado por uma cunha bidimensional ao ângulo de ataque de um escoamento supersônico. O escoamento é girado com o ângulo θ e o número de Mach aumenta através do leque de expansão. Os ângulos de Mach a montante e a jusante do leque de expansão são indicados. Apenas três ondas de expansão são mostradas por questões de simplicidade, mas na verdade existe um número infinito delas. (Um choque oblíquo está presente na parte inferior desse escoamento.)

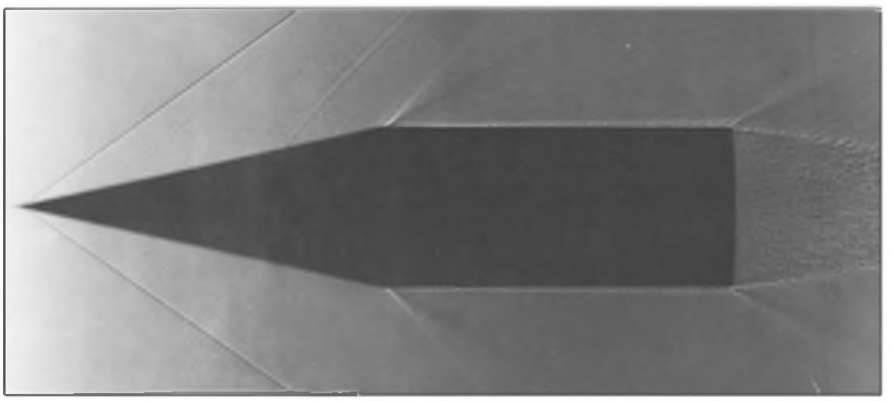


FIGURA 12–46
Um cilindro cônico de semi-ângulo de 12,5° em um escoamento com número de Mach de 1,84. A camada limite torna-se turbulenta logo a jusante do nariz, gerando ondas de Mach visíveis neste gráfico por sombras. As ondas de expansão são vistas nos cantos e nas bordas de fuga do cone.
Foto de A. C. Charters, encontrada em Van Dyke (1982).

Para encontrarmos Ma_2 para valores conhecidos de Ma_1, k e θ, calculamos $\nu(Ma_1)$ da Equação 12–49, $\nu(Ma_2)$ da Equação 12–48 e, em seguida, Ma_2 da Equação 12–49, observando que a última etapa envolve a solução de uma equação implícita para Ma_2. Como não há transferência de calor ou trabalho e o escoamento pode ser aproximado como isentrópico através da expansão, T_0 e P_0 permanecem constantes e utilizamos as relações de escoamento isentrópico derivadas anteriormente para calcular outras propriedades de escoamento a jusante da expansão, como T_2, p_2 e P_2.

Os leques de expansão de Prandtl–Meyer também ocorrem nos escoamentos supersônicos axissimétricos, como nos cantos e bordas de fuga de um cilindro cônico (Figura 12–46). Algumas interações bastante complexas e, para alguns de nós, muito bonitas que envolvem as ondas de choque e as ondas de expansão ocorrem no jato supersônico produzido por um bocal "superexpandido", como na Figura 12–47. A análise de tais escoamentos está além do escopo deste texto; os leitores interessados devem consultar livros sobre escoamento compressível, como Thompson (1972), Leipmann e Roshko (2001) e Anderson (2003).

EXEMPLO 12–10 **Estimativa do Número de Mach pelas Linhas de Mach**

Estime o número de Mach do escoamento de corrente livre a montante do ônibus espacial da Figura 12–36 somente pelo exame da figura. Compare com o valor conhecido do número de Mach fornecido na legenda da figura.

SOLUÇÃO Devemos estimar o número de Mach pela figura e compará-lo com o valor conhecido.
Análise Usando um transferidor, medimos o ângulo das linhas de Mach no escoamento de corrente livre: $\mu \cong 19°$. O número de Mach é obtido com a Equação 12–47:

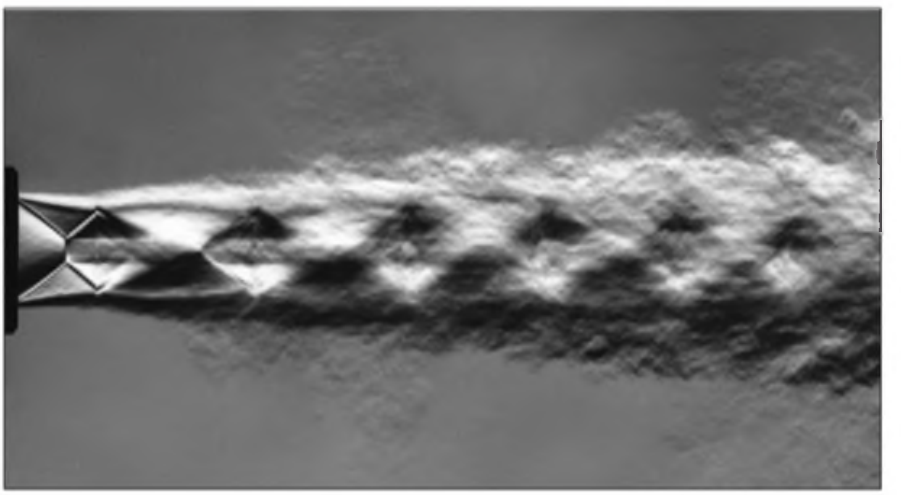


FIGURA 12–47
As interações complexas entre as ondas de choque e as ondas de expansão em um jato supersônico "superexpandido". O escoamento é visualizado por um interferograma diferencial do tipo Schlieren.
Foto de H. Oertelsen. Reproduzida por cortesia do Instituto de Pesquisa Franco-Germânico em Saint Louis, ISL. Usada com permissão.

$$\mu = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\text{Ma}_1}\right) \rightarrow \text{Ma}_1 = \frac{1}{\text{sen } 19°} \rightarrow \text{Ma}_1 = 3{,}07$$

Nosso número de Mach estimado coincide com o valor experimental de 3,0 ± 0,1.
Discussão O resultado não depende das propriedades do fluido.

EXEMPLO 12–11 Cálculos de Choque Oblíquo

Ar supersônico a $\text{Ma}_1 = 2{,}0$ e 75,0 kPa colide com uma cunha bidimensional de semi-ângulo $\delta = 10°$ (Figura 12–48). Calcule os dois ângulos de choque oblíquo possíveis, β_{fraco} e β_{forte}, que poderiam ser formados por essa cunha. Para cada caso, calcule a pressão e o número de Mach a jusante do choque oblíquo, compare e discuta.

SOLUÇÃO Devemos calcular o ângulo de choque, o número de Mach e a pressão a jusante dos choques oblíquos fraco e forte formados por uma cunha bidimensional.
Hipóteses 1 O escoamento é estável. **2** A camada limite na cunha é muito fina.
Propriedades O fluido é o ar com $k = 1{,}4$.
Análise Devido à hipótese 2, aproximamos a deflexão do choque oblíquo como igual ao semi-ângulo da cunha, ou seja, $\theta \cong \delta = 10°$. Com $\text{Ma}_1 = 2{,}0$ e $\theta = 10°$ solucionamos a Equação 12–46 para os dois valores possíveis do ângulo de choque oblíquo β: $\beta_{\text{fraco}} = 39{,}3°$ e $\beta_{\text{forte}} = 83{,}7°$. Com base nesses valores, usamos a primeira parte da Equação 12–44 para calcular o número de Mach normal a montante $\text{Ma}_{1,n}$,

Choque fraco: $$\text{Ma}_{1,n} = \text{Ma}_1 \text{ sen } \beta \rightarrow \text{Ma}_{1,n} = 2{,}0 \text{ sen } 39.3° = 1{,}267$$

e:

Choque forte: $$\text{Ma}_{1,n} = \text{Ma}_1 \text{ sen } \beta \rightarrow \text{Ma}_{1,n} = 2{,}0 \text{ sen } 83{,}7° = 1{,}988$$

Substituímos esses valores de $\text{Ma}_{1,n}$ na segunda equação da Figura 12–40 para calcular o número de Mach normal a jusante $\text{Ma}_{2,n}$. Para o choque fraco $\text{Ma}_{2,n} = 0{,}8032$ e para o choque forte $\text{Ma}_{2,n} = 0{,}5794$. Calculamos também a pressão a jusante para cada caso, usando a terceira equação da Figura 12–40 que resulta em:

Choque fraco:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2k\,\text{Ma}_{1,n}^2 - k + 1}{k + 1} \rightarrow P_2 = (75{,}0 \text{ kPa})\frac{2(1{,}4)(1{,}267)^2 - 1{,}4 + 1}{1{,}4 + 1} = 128 \text{ kPa}$$

e

Choque forte:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2k\,\text{Ma}_{1,n}^2 - k + 1}{k + 1} \rightarrow P_2 = (75{,}0 \text{ kPa})\frac{2(1{,}4)(1{,}988)^2 - 1{,}4 + 1}{1{,}4 + 1} = 333 \text{ kPa}$$

Finalmente usamos a segunda parte da Equação 12–44 para calcular o número de Mach a jusante:

Choque fraco: $$\text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{2,n}}{\text{sen}(\beta - \theta)} = \frac{0{,}8032}{\text{sen}(39{,}3° - 10°)} = 1{,}64$$

e:

Choque forte:: $$\text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{2,n}}{\text{sen}(\beta - \theta)} = \frac{0{,}5794}{\text{sen}(83{,}7° - 10°)} = 0{,}604$$

As variações no número de Mach e a pressão através do choque forte são muito maiores do que a variação através do choque fraco, como era esperado.

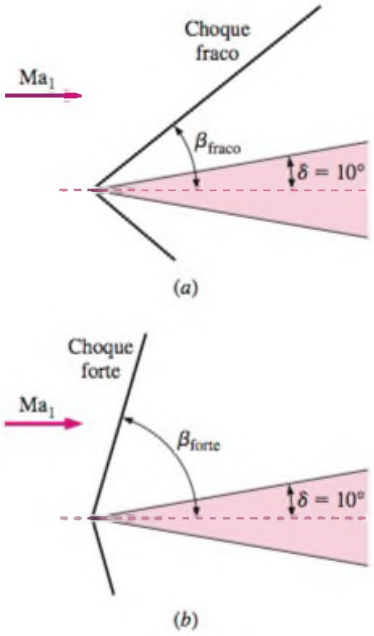


FIGURA 12–48
Dois ângulos de choque oblíquo possíveis (*a*) β_{fraco} e (*b*) β_{forte}, formados por uma cunha bidimensional de semi-ângulo $\delta = 10°$.

Discussão Como a Equação 12–46 está implícita em β, nós a solucionamos por uma abordagem interativa ou com um solucionador de equação como o EES. Para os casos de choque oblíquo fraco e forte $Ma_{1,n}$ é supersônico e $Ma_{2,n}$ é subsônico. Entretanto, Ma_2 é *supersônico* através do choque oblíquo fraco, mas *subsônico* através do choque oblíquo forte. Poderíamos também ter usado as tabelas de choque normal no lugar das equações, mas com perda de precisão.

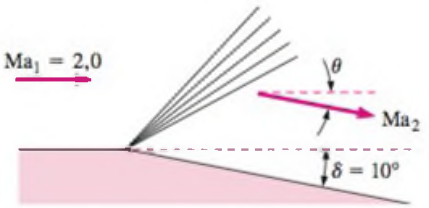


FIGURA 12–49
Um leque de expansão causado pela repentina expansão de uma parede com $\delta = 10°$.

EXEMPLO 12–12 **Cálculos de Onda de Expansão de Prandtl–Meyer**

O ar supersônico a $Ma_1 = 2{,}0$ e 230 kPa escoa paralelamente a uma parede plana que se expande repentinamente com $\delta = 10°$ (Figura 12–49). Ignorando todos os efeitos causados pela camada limite ao longo da parede, calcule o número de Mach a jusante Ma_2 e a pressão P_2.

SOLUÇÃO Devemos calcular o número de Mach e a pressão a jusante de uma expansão repentina ao longo de uma parede.
Hipóteses 1 O escoamento é estável. **2** A camada limite na parede é muito fina.
Propriedades O fluido é o ar com $k = 1{,}4$.
Análise Devido à hipótese 2, aproximamos o ângulo de deflexão total como igual ao ângulo de expansão da parede, ou seja, $\theta \cong \delta = 10°$. Com $Ma_1 = 2{,}0$, solucionamos a Equação 12–49 para a função de Prandtl–Meyer a montante:

$$\nu(\mathrm{Ma}) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(\mathrm{Ma}^2-1)}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{\mathrm{Ma}^2-1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}(2{,}0^2-1)}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{2{,}0^2-1}\right) = 26{,}38°$$

A seguir, usamos a Equação 12–48 para calcular a função de Prandtl–Meyer a jusante:

$$\theta = \nu(\mathrm{Ma}_2) - \nu(\mathrm{Ma}_1) \;\rightarrow\; \nu(\mathrm{Ma}_2) = \theta + \nu(\mathrm{Ma}_1) = 10° + 26{,}38° = 36{,}38°$$

Ma_2 é encontrado solucionando a Equação 12–49, que é implícita — um solucionador de equações é útil. Obtemos $Ma_2 = \mathbf{2{,}385}$. Existem também calculadores de escoamento compressível na Internet, os quais solucionam essas equações implícitas, juntamente com as equações de choque normal e oblíquo. Por exemplo, consulte www.aoe.vt.edu/~devenpor/aoe3114/calc.html (em inglês).

Utilizamos as relações isentrópicas para calcular a pressão a jusante:

$$P_2 = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0} P_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\mathrm{Ma}_2^2\right]^{-k/(k-1)}}{\left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\mathrm{Ma}_1^2\right]^{-k/(k-1)}}(230\ \mathrm{kPa}) = \mathbf{126\ kPa}$$

Como essa é uma expansão, o número de Mach aumenta e a pressão diminui como esperado.
Discussão Também poderíamos resolver temperatura, massa específica e outros dados a jusante usando as relações isentrópicas apropriadas.

12–6 • ESCOAMENTO DE DUTO COM TRANSFERÊNCIA DE CALOR E ATRITO DESPREZÍVEL (ESCOAMENTO DE RAYLEIGH)

Até agora limitamos nossa consideração principalmente ao *escoamento isentrópico*, também chamado de *escoamento adiabático reversível*, uma vez que ele não envolve transferência de calor e nenhuma irreversibilidade como atrito. Muitos problemas de escoamento compressível encontrados na prática envolvem reações quí-

micas, como combustão, reações nucleares, evaporação e condensação, bem como ganho de calor ou perda de calor através da parede do duto. Tais problemas são difíceis de analisar com exatidão, uma vez que podem envolver variações significativas da composição química durante o escoamento e a conversão de energias latentes, químicas e nucleares em energia térmica (Figura 12–50).

Os recursos essenciais desses escoamentos complexos ainda podem ser capturados como uma análise simples, modelando a geração ou absorção da energia térmica como transferência de calor através da parede do duto a mesma taxa e desprezando todas as variações da composição química. Esse problema simplificado ainda é muito complicado para receber um tratamento elementar neste tópico, uma vez que o escoamento pode envolver atrito, variações da área do duto e efeitos multidimensionais. Nesta seção, limitamos nossa consideração ao escoamento unidimensional em um duto com área de seção transversal com efeitos de atrito desprezíveis.

Considere o escoamento unidimensional permanente de um gás ideal com calores específicos constantes através de um duto com área constante e transferência de calor, mas com atrito desprezível. Esse tipo de escoamento é chamado de **escoamento de Rayleigh** em homenagem a Lord Rayleigh (1842–1919). A conservação de massa, a quantidade de movimento e as equações da energia para o volume de controle mostrado na Figura 12–51 podem ser escritas da seguinte maneira:

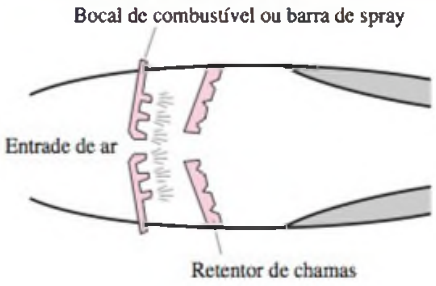


FIGURA 12–50
Muitos problemas práticos de escoamento compressível envolvem combustão, a qual pode ser modelada como ganho de calor através da parede do duto.

Equação de continuidade Observando que a área de seção transversal A é constante, a relação $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ ou $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$ se reduz a:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{12–50}$$

Equação de momento x Observando que os efeitos do atrito são desprezíveis e, portanto, que não há forças de cisalhamento, e considerando que não haja forças externas e de volume, a equação de

momento na direção do $\sum \vec{F} = \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_e \beta \dot{m} \vec{V}$

escoamento (ou x-) torna-se um equilíbrio entre as forças de pressão estática e a transferência de momento. Observando que os escoamentos têm alta velocidade e são turbulentos, o fator de correção do fluxo de momento é de aproximadamente 1 ($\beta \cong 1$) e, portanto, pode ser desprezado. Assim:

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \rightarrow P_1 - P_2 = (\rho_2 V_2) V_2 - (\rho_1 V_1) V_1$$

ou:

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \tag{12–51}$$

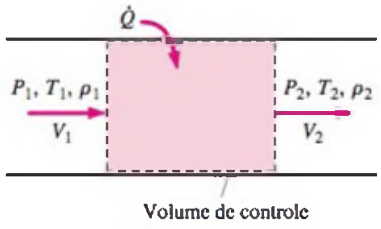


FIGURA 12–51
Volume de controle para o escoamento em um duto com área constante com transferência de calor e atrito desprezível.

Equação da energia O volume de controle não envolve trabalho de cisalhamento, eixo ou outras formas de trabalho, e a variação da energia é desprezível. Se a taxa de transferência de calor é $\dot{Q}$ e a transferência de calor por unidade de massa do fluido é $q = \dot{Q}/\dot{m}$, o balanço de energia de escoamento permanente $\dot{E}_e = \dot{E}_s$ torna-se:

$$\dot{Q} + \dot{m}\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) = \dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) \rightarrow q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12–52}$$

Para um gás ideal com calores específicos constantes $\Delta h = c_p \Delta T$ e, portanto:

$$q = c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \tag{12–53}$$

ou

$$q = h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01}) \tag{12–54}$$

Assim, a entalpia de estagnação h_0 e a variação da temperatura de estagnação T_0 durante o escoamento de Raylegh (ambas aumentam quando o calor é transferido para o fluido e, portanto, q é negativo).

Variação da entropia Na falta de quaisquer irreversibilidades, como atrito, a entropia de um sistema varia apenas por transferência de calor: ela aumenta com o ganho de calor e diminui com a perda de calor. A entropia é uma propriedade e, portanto, uma função do estado, e a variação da entropia de um gás ideal com calores específicos constantes durante uma variação do estado 1 para o estado 2 é dada por:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \tag{12–55}$$

A entropia de um fluido pode aumentar ou diminuir durante o escoamento de Rayleigh, dependendo da direção da transferência de calor.

Equação de estado Observando que $P = \rho RT$, as propriedades P, ρ e T de um gás ideal nos estados 1 e 2 estão relacionadas entre si por:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \tag{12–56}$$

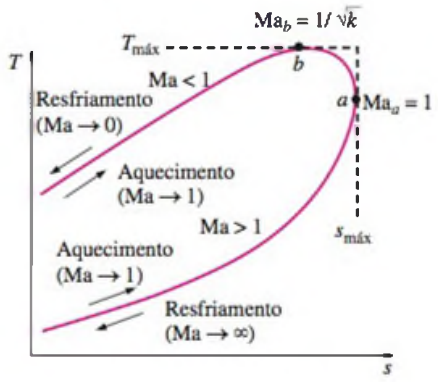


FIGURA 12–52
Digrama *T-s* do escoamento em um duto de área constante com transferência de calor e atrito desprezível (escoamento de Rayleigh).

Considere um gás com propriedades conhecidas R, k e c_p. Para um estado de entrada especificado 1, as propriedades de entrada P_1, T_1, ρ_1, V_1 e s_1 são conhecidas. As cinco propriedades de saída P_2, T_2, ρ_2, V_2 e s_2 podem ser determinadas com as cinco equações 12–50, 12–51, 12–53, 12–55 e 12–56 para qualquer valor especificado de transferência de calor q. Quando a velocidade e a temperatura são conhecidas, o número de Mach pode ser determinado de $\text{Ma} = V/c = V/\sqrt{kRT}$.

Obviamente existe um número infinito de estados 2 a jusante possíveis que correspondem a determinado estado 1 a montante. Uma forma prática de determinar esses estados a jusante é considerar diversos valores para T_2, e calcular todas as outras propriedades, bem como a transferência de calor q de cada T_2 assumida com as Equações 12–50 até 12–56. O gráfico dos resultados em um diagrama *T-s* permite uma curva que passa através do estado de entrada especificado, como mostra a Figura 12–52. O gráfico do escoamento de Rayleigh em um diagrama *T-s* é chamado de **linha de Rayleigh**, e várias observações importantes podem ser feitas com base nesse gráfico e nos resultados dos cálculos:

1. Todos os estados que atendem às equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, bem como às relações de propriedades, estão na linha de Rayleigh. Assim, para determinado estado inicial, o fluido não pode existir em nenhum estado a jusante fora da linha de Rayleigh de um diagrama *T-s*. Na verdade, a linha de Rayleigh é o local de todos os estados que podem ser atingidos fisicamente e que correspondem a um estado inicial.
2. A entropia aumenta com o ganho de calor e, portanto, continuamos para a direita da linha de Rayleigh à medida que o calor é transferido para o fluido. O número de Mach é Ma = 1 no ponto a, que é o ponto de máxima entropia (consultar o Exemplo 12–13 para obter a prova). Os estados no braço superior da linha de Rayleigh acima do ponto a são subsônicos e os estados no braço inferior abaixo do ponto a são supersônicos. Assim, um processo se desenvolve à direita da linha de Rayleigh com a adição de calor e à esquerda com a rejeição de calor independentemente do valor inicial do número de Mach.
3. O aquecimento aumenta o número de Mach para o escoamento subsônico, mas o diminui para o escoamento supersônico. O número de Mach do escoamento se aproxima de Ma = 1 em ambos os casos (de 0 no escoamento subsônico e a partir de ∞ no escoamento supersônico) durante o aquecimento.
4. O balanço da energia $q = c_p(T_{02} - T_{01})$ deixa claro que o aquecimento aumenta a temperatura de estagnação T_0 para os escoamentos subsônico e supersônico, e que o resfriamento o diminui. (O valor máximo de

T_0 ocorre a Ma = 1). Isso também acontece para a temperatura termodinâmica T, exceto para o intervalo de número de Mach estreito de $1/\sqrt{k} < \text{Ma} < 1$ no escoamento subsônico (consulte o Exemplo 12–13). Tanto a temperatura quanto o número de Mach aumentam com o calor no escoamento subsônico, mas T atinge um $T_{máx}$ a $\text{Ma} = 1/\sqrt{k}$ (que é 0,845 para o ar) e, em seguida, diminui. O fato de que a temperatura de um fluido cai à medida que o calor é transferido para ele pode parecer peculiar. Mas isso não é mais peculiar do que a velocidade do fluido aumentar na seção divergente de um bocal convergente-divergente. O efeito do resfriamento nessa região é devido ao grande aumento da velocidade do fluido e à conseqüente queda da temperatura de acordo com a relação $T_0 = T + V^2/2c_p$. Observe também que a rejeição de calor na região $1/\sqrt{k} < \text{Ma} < 1$ faz com que a temperatura do fluido aumente (Figura 12–53).

5. A equação de momento $P + KV$ = constante, onde $K = \rho V$ = constante (da equação da continuidade), revela que a velocidade e a pressão estática seguem tendências opostas. Assim, a pressão estática diminui com o calor no escoamento subsônico (uma vez que a velocidade e o número de Mach aumentam), mas aumenta com o ganho de calor no escoamento supersônico (uma vez que a velocidade e o número de Mach diminuem).
6. A equação da continuidade ρV = constante indica que a densidade e a velocidade são inversamente proporcionais. Assim, a densidade diminui com a transferência de calor para o fluido no escoamento subsônico (uma vez que a velocidade e o número de Mach aumentam), mas aumenta com o ganho de calor no escoamento supersônico (uma vez que a velocidade e o número de Mach diminuem).
7. Na metade esquerda da Figura 12–52, o braço inferior da linha de Rayleigh é mais íngreme (em termos de s como uma função de T), indicando que a variação da entropia correspondente a uma variação especificada de temperatura (e, portanto, determinada quantidade de transferência de calor) é maior no escoamento supersônico.

Os efeitos do aquecimento e resfriamento sobre as propriedades do escoamento de Rayleigh estão listados na Tabela 12–3. Observe que o aquecimento ou o resfriamento têm efeitos opostos sobre a maioria das propriedades. Da mesma forma, a pressão de estagnação diminui durante o aquecimento e aumenta durante o resfriamento, independentemente do escoamento ser subsônico ou supersônico.

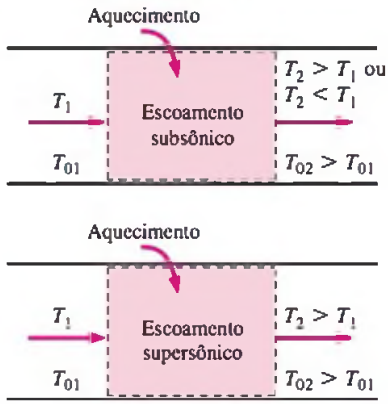


FIGURA 12–53
Durante o aquecimento, a temperatura do fluido sempre aumenta quando o escoamento de Rayleigh é supersônico, mas a temperatura pode na verdade cair quando o escoamento é subsônico.

TABELA 12–3

Os efeitos do aquecimento e resfriamento sobre as propriedades do escoamento de Rayleigh

	Aquecimento		*Resfriamento*	
Propriedade	Subsônico	Supersônico	Subsônico	Supersônico
Velocidade, V	Aumenta	Diminui	Diminui	Aumenta
Número de Mach, Ma	Aumenta	Diminui	Diminui	Aumenta
Temperatura de estagnação, T_0	Aumenta	Aumenta	Diminui	Diminui
Temperatura, T	Aumenta para $\text{Ma} < 1/k^{1/2}$ Diminui para $\text{Ma} > 1/k^{1/2}$	Aumenta	Diminui para $\text{Ma} < 1/k^{1/2}$ Aumenta para $\text{Ma} > 1/k^{1/2}$	Diminui
Densidade, ρ	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui
Pressão de estagnação, P_0	Diminui	Diminui	Aumenta	Aumenta
Pressão, P	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui
Entropia, s	Aumenta	Aumenta	Diminui	Diminui

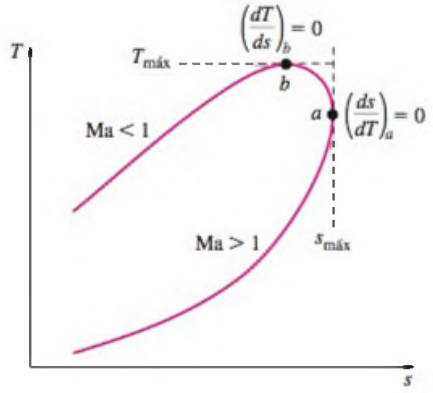


FIGURA 12–54
O diagrama *T-s* de um escoamento de Rayleigh considerado no Exemplo 12–13.

EXEMPLO 12–13 Extremos da Linha de Rayleigh

Considere o diagrama *T-s* do escoamento de Rayleigh, mostrado na Figura 12–54. Usando as formas diferenciais das equações de conservação e as relações de propriedades, mostre que o número de Mach é $Ma_a = 1$ no ponto de entropia máxima (o ponto *a*) e $Ma_b = 1/\sqrt{k}$ no ponto de temperatura máxima (o ponto *b*).

SOLUÇÃO Deve ser mostrado que $Ma_a = 1$ no ponto de entropia máxima e $Ma_b = 1/\sqrt{k}$ no ponto de temperatura máxima na linha de Rayleigh.

Hipóteses As hipóteses associadas ao escoamento de Rayleigh (ou seja, escoamento unidimensional permanente de um gás ideal com propriedades constantes através de um duto com área transversal constante e efeitos de atrito desprezíveis) são válidas.

Análises As formas diferenciais da massa (ρV = constante), de momento [reorganizado como $P + (\rho V)V$ = constante], do gás ideal ($P = \rho RT$) e as equações da variação da entalpia ($\Delta h = c_p \Delta T$) podem ser expressas como:

$$\rho V = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \rho\, dV + V\, d\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \qquad (1)$$

$$P + (\rho V)V = \text{constante} \quad \rightarrow \quad dP + (\rho V)\, dV = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dV} = -\rho V \qquad (2)$$

$$P = \rho RT \quad \rightarrow \quad dP = \rho R\, dT + RT\, d\rho \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \qquad (3)$$

A forma diferencial da relação da variação da entropia (Equação 12–40) de um gás ideal com calores específicos constantes é:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P} \qquad (4)$$

Substituindo a Equação 3 na Equação 4 temos:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}\right) = (c_p - R)\frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} = \frac{R}{k-1}\frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} \qquad (5)$$

uma vez que:

$$c_p - R = c_v \quad \rightarrow \quad kc_v - R = c_v \quad \rightarrow \quad c_v = R/(k-1)$$

Dividindo ambos os lados da Equação 5 por dT e combinando com a Equação 1:

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{V}\frac{dV}{dT} \qquad (6)$$

Dividindo a Equação 3 por dV e combinando-a às Equações 1 e 2, temos após a reorganização:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{T}{V} - \frac{V}{R} \qquad (7)$$

Substituindo a Equação 7 na Equação 6 e reorganizando:

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{T - V^2/R} = \frac{R(kRT - V^2)}{T(k-1)(RT - V^2)} \qquad (8)$$

Definindo $ds/dT = 0$ e solucionando a equação resultante $R(kRT - V^2) = 0$ para *V*, temos a velocidade no ponto *a* como:

$$V_a = \sqrt{kRT_a} \qquad \text{e} \qquad Ma_a = \frac{V_a}{c_a} = \frac{\sqrt{kRT_a}}{\sqrt{kRT_a}} = 1 \qquad (9)$$

Assim, existem condições sônicas no ponto *a* e, portanto, o número de Mach é 1.

Definindo $dT/ds = (ds/dT)^{-1} = 0$ e solucionando a equação resultante $T(k-1) \times (RT - V^2) = 0$ para a velocidade no ponto *b* temos:

$$V_b = \sqrt{RT_b} \quad \text{e} \quad \text{Ma}_b = \frac{V_b}{c_b} = \frac{\sqrt{RT_b}}{\sqrt{kRT_b}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{10}$$

Assim, o número de Mach no ponto *b* é $\text{Ma}_b = 1/\sqrt{k}$. Para o ar $k = 1{,}4$ e, portanto, $\text{Ma}_b = 0{,}845$.

Discussão Observe que no escoamento de Rayleigh, as condições sônicas são atingidas à medida que a entropia atinge seu valor máximo e a temperatura máxima ocorre durante o escoamento subsônico.

EXEMPLO 12–14 Efeito da Transferência de Calor sobre a Velocidade do Escoamento

Começando com a forma diferencial da equação da energia, mostre que a velocidade do escoamento aumenta com a adição de calor no escoamento subsônico de Rayleigh, mas diminui no escoamento de Rayleigh supersônico.

SOLUÇÃO Deve ser mostrado que a velocidade do escoamento aumenta com a adição de calor no escoamento de Rayleigh subsônico, e que o oposto ocorre no escoamento supersônico.

Hipóteses **1** As hipóteses associadas ao escoamento de Rayleigh são válidas. **2** Não há interações de trabalho e as variações da energia potencial são desprezíveis.

Análise Considere a transferência de calor para o fluido na quantidade diferencial de δq. A forma diferencial das equações da energia pode ser expressa como:

$$\delta q = dh_0 = d\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = c_p\,dT + V\,dV \tag{1}$$

Dividindo por c_pT e fatorando dV/V, temos:

$$\frac{\delta q}{c_pT} = \frac{dT}{T} + \frac{V\,dV}{c_pT} = \frac{dV}{V}\left(\frac{V}{dV}\frac{dT}{T} + \frac{(k-1)V^2}{kRT}\right) \tag{2}$$

onde também usamos $c_p = kR/(k-1)$. Observando que $\text{Ma}^2 = V^2/c^2 = V^2/kRT$ e usando a Equação 7 para dT/dV do Exemplo 12–13, temos:

$$\frac{\delta q}{c_pT} = \frac{dV}{V}\left(\frac{V}{T}\left(\frac{T}{V} - \frac{V}{R}\right) + (k-1)\text{Ma}^2\right) = \frac{dV}{V}\left(1 - \frac{V^2}{TR} + k\,\text{Ma}^2 - \text{Ma}^2\right) \tag{3}$$

Cancelando os dois termos do meio na Equação 3, uma vez que $V^2/TR = k\,\text{Ma}^2$, e reorganizando, temos a relação desejada:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_pT}\frac{1}{(1 - \text{Ma}^2)} \tag{4}$$

No escoamento subsônico $1 - \text{Ma}^2 > 0$ e, portanto, a transferência de calor e a variação da velocidade têm o mesmo sinal. Como resultado, o aquecimento do fluido ($\delta q > 0$) aumenta a velocidade do escoamento enquanto o resfriamento a diminui. No escoamento supersônico, porém, $1 - \text{Ma}^2 < 0$, a transferência de calor e a variação da velocidade têm sinais opostos. Como resultado, o aquecimento do fluido ($\delta q > 0$) diminui a velocidade do escoamento enquanto o resfriamento a diminui (Figura 12–55).

Discussão Observe que o aquecimento do fluido tem efeitos opostos sobre a velocidade do escoamento nos escoamentos subsônicos e supersônicos de Rayleigh.

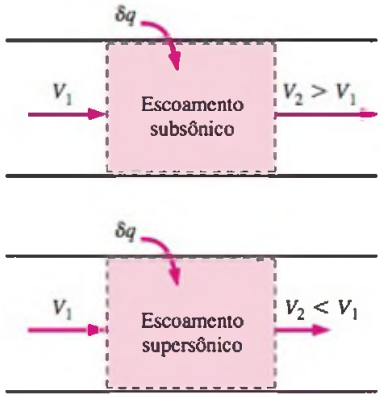


FIGURA 12–55
O aquecimento aumenta a velocidade de escoamento no escoamento subsônico, mas a diminui no escoamento supersônico.

Relações de Propriedades para o Escoamento de Rayleigh

Quase sempre é desejável expressar as variações das propriedades em termos do número de Mach Ma. Observando que $\text{Ma} = V/c = V/\sqrt{kRT}$ e, portanto, $V = \text{Ma}\sqrt{kRT}$:

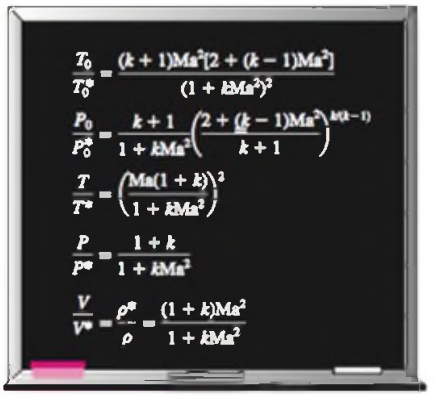


FIGURA 12–56
Resumo das relações do escoamento de Rayleigh.

$$\rho V^2 = \rho kRT\text{Ma}^2 = kP\text{Ma}^2 \tag{12–57}$$

como $P = \rho RT$. Substituindo na equação de momento (Equação 12–51), temos $P_1 + kP_1\text{Ma}_1^2 = P_2 + kP_2\text{Ma}_2^2$ que pode ser reorganizada como:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} \tag{12–58}$$

Mais uma vez, utilizando $V = \text{Ma}\sqrt{kRT}$, a equação da continuidade $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ pode ser expressa como:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{Ma}_2\sqrt{kRT_2}}{\text{Ma}_1\sqrt{kRT_1}} = \frac{\text{Ma}_2\sqrt{T_2}}{\text{Ma}_1\sqrt{T_1}} \tag{12–59}$$

Em seguida, a relação do gás ideal (Equação 12–56) torna-se:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2\,\rho_1}{P_1\,\rho_2} = \left(\frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2}\right)\left(\frac{\text{Ma}_2\sqrt{T_2}}{\text{Ma}_1\sqrt{T_1}}\right) \tag{12–60}$$

Resolvendo a Equação 12–60 para a relação da temperatura T_2/T_1, temos:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\text{Ma}_2(1 + k\text{Ma}_1^2)}{\text{Ma}_1(1 + k\text{Ma}_2^2)}\right)^2 \tag{12–61}$$

Substituindo essa relação na Equação 12–59, temos a relação da densidade ou velocidade como:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{Ma}_1^2(1 + k\text{Ma}_2^2)}{\text{Ma}_2^2(1 + k\text{Ma}_1^2)} \tag{12–62}$$

As propriedades de escoamento a condições sônicas em geral são fáceis de determinar e, portanto, o estado crítico correspondente a Ma = 1 serve como um ponto de referência conveniente no escoamento compressível. Tomando o estado 2 como o estado sônico ($\text{Ma}_2 = 1$ e o subscrito * é usado) e o estado 1 como qualquer estado (sem subscrito), as relações de propriedades das Equações 12–58, 12–61 e 12–62 se reduzem a (Figura 12–56):

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1 + k}{1 + k\text{Ma}^2} \qquad \frac{T}{T^*} = \left(\frac{\text{Ma}(1 + k)}{1 + k\text{Ma}^2}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1 + k)\text{Ma}^2}{1 + k\text{Ma}^2} \tag{12–63}$$

Relações semelhantes podem ser obtidas para a temperatura de estagnação adimensional e para a pressão de estagnação da seguinte maneira:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{T_0}{T}\frac{T}{T^*}\frac{T^*}{T_0^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)\left(\frac{\text{Ma}(1+k)}{1+k\text{Ma}^2}\right)^2\left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{-1} \tag{12–64}$$

que pode ser simplificado como:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\text{Ma}^2[2 + (k-1)\text{Ma}^2]}{(1 + k\text{Ma}^2)^2} \tag{12–65}$$

Da mesma forma:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{P_0}{P}\frac{P}{P^*}\frac{P^*}{P_0^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)^{k/(k-1)}\left(\frac{1+k}{1+k\text{Ma}^2}\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{-k/(k-1)} \tag{12–66}$$

que pode ser simplificado como:

$$\frac{P_0}{P^*} = \frac{k+1}{1+k\text{Ma}^2}\left(\frac{2 + (k-1)\text{Ma}^2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \tag{12–67}$$

As cinco relações das Equações 12–63, 12–65 e 12–67 permitem calcular a pressão adimensional, a temperatura, a densidade, a velocidade, a temperatura e a pressão de estagnação do escoamento de Rayleigh de um gás ideal com um k especificado para determinado número de Mach. Resultados representativos são dados na forma tabular na Tabela A–15 para $k = 1{,}4$.

Escoamento Estrangulado de Rayleigh

Fica claro nas discussões anteriores que o escoamento subsônico de Rayleigh em um duto pode acelerar até a velocidade sônica (Ma = 1) com o aquecimento. O que acontece se continuarmos aquecendo o fluido? O fluido continua acelerando até velocidades supersônicas? Um exame da linha de Rayleigh indica que o fluido no estado crítico de Ma = 1 não pode ser acelerado até velocidades supersônicas pelo aquecimento. Portanto, o escoamento é *estrangulado*. Isso é análogo a não conseguir acelerar um fluido até velocidades supersônicas em um bocal convergente estendendo a seção do escoamento convergente. Se mantivermos o aquecimento do fluido, simplesmente movemos o estado crítico mais a jusante e reduzimos a vazão, uma vez que a massa específica do fluido no estado crítico agora será mais baixa. Assim, para determinado estado de entrada, o estado crítico correspondente fixa a transferência de calor máxima possível para o escoamento permanente (Figura 12–57). Ou seja:

$$q_{máx} = h_0^* - h_{01} = c_p(T_0^* - T_{01}) \qquad \textbf{(12–68)}$$

Uma transferência maior de calor causa estrangulamento e, portanto, o estado de entrada varia (por exemplo, a velocidade de entrada diminui) e o escoamento não segue mais a mesma linha de Rayleigh. O resfriamento do escoamento subsônico de Rayleigh e o número de Mach se aproximam do zero à medida que a temperatura se aproxima do zero absoluto. Observe que a temperatura de estagnação T_0 é máxima no estado crítico de Ma = 1.

No escoamento supersônico de Rayleigh o aquecimento diminui a velocidade do escoamento. Um aquecimento maior simplesmente aumenta a temperatura e move o estado crítico mais ainda a jusante, resultando em uma redução da vazão mássica do fluido. Pode parecer que o escoamento supersônico de Rayleigh pode ser resfriado indefinidamente, mas existe um limite. Tomar o limite da Equação 12–65 à medida que o número de Mach se aproxima do infinito resulta:

$$\text{Lim}_{\text{Ma}\to\infty} \frac{T_0}{T_0^*} = 1 - \frac{1}{k^2} \qquad \textbf{(12–69)}$$

que resulta em $T_0/T_0^* = 0{,}49$ para $k = 1.4$. Assim, se a temperatura de estagnação crítica é 1000 K, o ar não pode ser resfriado abaixo de 490 K no escoamento de Rayleigh. Fisicamente isso significa que a velocidade do escoamento atinge o infinito no momento em que a temperatura atinge 490 K — uma impossibilidade física. Quando o escoamento supersônico não pode ser sustentado, o escoamento passa por uma onda de choque normal e torna-se subsônica.

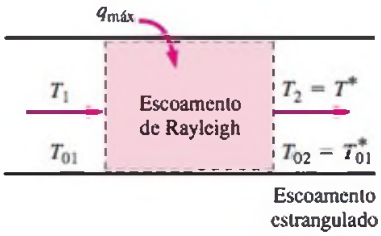


FIGURA 12–57
Para determinado estado de entrada, a transferência de calor máxima possível ocorre quando as condições sônicas são atingidas no estado de saída.

EXEMPLO 12–15 Escoamento de Rayleigh em um Combustor Tubular

Uma câmara de combustão consiste em combustores tubulares de 15 cm de diâmetro. O ar comprimido entra nos tubos a 550 K, 480 kPa e 80 m/s (Figura 12–58). Combustível com um valor de aquecimento de 42.000 kJ/kg é injetado no ar e queimado com uma relação entre a massa do ar e do combustível de 40. Aproximando a combustão como um processo de transferência de calor para o ar, determine a temperatura, pressão, velocidade e o número de Mach na saída da câmara de combustão.

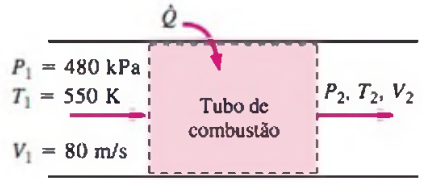


FIGURA 12–58
Esquema do tubo do combustor analisado no Exemplo 12–15.

SOLUÇÃO O combustível é queimado em uma câmara de combustão tubular com ar comprimido. A temperatura de saída, pressão, velocidade e o número de Mach devem ser determinados.

Hipóteses **1** As hipóteses associadas ao escoamento de Rayleigh (ou seja, escoamento unidimensional permanente de um gás ideal com propriedades constantes através de um duto com área transversal constante e efeitos de atrito desprezíveis) são válidas. **2** A combustão está completa e é tratada como um processo de adição de calor, sem que haja variação na composição química do escoamento. **3** O aumento na vazão mássica devido à injeção de combustível é desprezado.

Propriedades Consideramos as propriedades do ar como $k = 1{,}4$, $c_p = 1{,}005$ kJ/kg · K e $R = 0{,}287$ kJ/kg · K (Tabela A–2a).

Análise A densidade de entrada e a vazão em massa do ar são:

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{480 \text{ kPa}}{(0{,}287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(550 \text{ K})} = 3{,}041 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{ar} = \rho_1 A_1 V_1 = (3{,}041 \text{ kg/m}^3)[\pi(0{,}15 \text{ m})^2/4](80 \text{ m/s}) = 4{,}299 \text{ kg/s}$$

A vazão em massa do combustível e a taxa de transferência de calor são:

$$\dot{m}_{\text{combustível}} = \frac{\dot{m}_{ar}}{\text{AF}} = \frac{4{,}299 \text{ kg/s}}{40} = 0{,}1075 \text{ kg/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\text{combustível}} \text{ HV} = (0{,}1075 \text{ kg/s})(42.000 \text{ kJ/kg}) = 4514 \text{ kW}$$

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_{ar}} = \frac{4514 \text{ kJ/s}}{4{,}299 \text{ kg/s}} = 1050 \text{ kJ/kg}$$

A temperatura de estagnação e o número de Mach na entrada são:

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 550 \text{ K} + \frac{(80 \text{ m/s})^2}{2(1{,}005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})}\left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}\right) = 553{,}2 \text{ K}$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1{,}4)(0{,}287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(550 \text{ K})\left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} = 470{,}1 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{80 \text{ m/s}}{470{,}1 \text{ m/s}} = 0{,}1702$$

A temperatura de estagnação de saída é, da equação da energia, $q = c_p(T_{02} - T_{01})$:

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 553.2 \text{ K} + \frac{1050 \text{ kJ/kg}}{1{,}005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}} = 1598 \text{ K}$$

O valor máximo da temperatura de estagnação T_0^* ocorre a Ma = 1 e seu valor pode ser determinado pela Tabela A–15 ou pela Equação 12–65. A $\text{Ma}_1 = 0{,}1702$ lemos que $T_0/T_0^* = 0{,}1291$. Portanto:

$$T_0^* = \frac{T_{01}}{0{,}1291} = \frac{553{,}2 \text{ K}}{0{,}1291} = 4284 \text{ K}$$

Da Tabela A-15, temos que a razão da temperatura de estagnação no estado de saída e o número de Mach correspondente são:

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{1598 \text{ K}}{4284 \text{ K}} = 0{,}3730 \rightarrow \text{Ma}_2 = \mathbf{0{,}3142}$$

As relações do escoamento de Rayleigh correspondentes aos números de Mach de entrada e saída são (Tabela A–15):

$$\text{Ma}_1 = 0{,}1702: \quad \frac{T_1}{T^*} = 0{,}1541 \quad \frac{P_1}{P^*} = 2{,}3065 \quad \frac{V_1}{V^*} = 0{,}0668$$

$$\text{Ma}_2 = 0{,}3142: \quad \frac{T_2}{T^*} = 0{,}4389 \quad \frac{P_2}{P^*} = 2{,}1086 \quad \frac{V_2}{V^*} = 0{,}2082$$

A temperatura de saída, pressão e velocidade são determinadas como:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0{,}4389}{0{,}1541} = 2{,}848 \rightarrow T_2 = 2{,}848T_1 = 2{,}848(550\text{ K}) = \mathbf{1566\text{ K}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P^*}{P_1/P^*} = \frac{2{,}1086}{2{,}3065} = 0{,}9142 \rightarrow P_2 = 0{,}9142P_1 = 0{,}9142(480\text{ kPa}) = \mathbf{439\text{ kPa}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{0{,}2082}{0{,}0668} = 3{,}117 \rightarrow V_2 = 3{,}117V_1 = 3{,}117(80\text{ m/s}) = \mathbf{249\text{ m/s}}$$

Discussão Observe que a temperatura e a velocidade aumentam e a pressão diminui durante esse escoamento subsônico de Rayleigh, como já era esperado. Este problema pode ser resolvido usando-se relações apropriadas em vez de valores tabulados, os quais também podem ser codificados para a obtenção de soluções convenientes com o auxílio do computador.

12–7 • ESCOAMENTO EM DUTO ADIABÁTICO COM ATRITO (ESCOAMENTO DE FANNO)

O atrito da parede associado ao escoamento de alta velocidade através de dispositivos curtos com grandes áreas de seção transversal, como os bocais grandes, quase sempre é desprezível, e o escoamento através de tais dispositivos pode ser aproximado como sem atrito. Mas o atrito da parede é significativo e deve ser considerado quando se estudam os escoamentos através das seções de escoamento, como dutos longos, particularmente quando a área de seção transversal é pequena. Nesta seção consideramos o escoamento compressível com atrito de parede significativo, mas transferência de calor desprezível em dutos de área de seção transversal constante.

Considere o escoamento unidimensional permanente de um gás ideal com calores específicos constantes através de um duto com área constante e efeitos de atrito significativos. Esses escoamentos são chamados de **escoamentos de Fanno**. A conservação de massa, a quantidade de movimento e as equações da energia do volume de controle (mostrado na Figura 12–59) podem ser escritas da seguinte maneira:

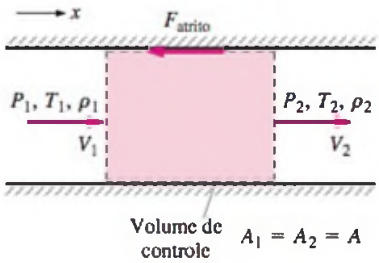


FIGURA 12–59
Volume de controle para o escoamento adiabático em um duto de área constante com atrito.

Equação de continuidade Observando que a área de seção transversal A do duto é constante e, portanto $A_1 = A_2 = A_c$, a relação $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ ou $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$ se reduz a:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \rightarrow \rho V = \text{constante} \qquad \textbf{(12–70)}$$

Equação de momento x Indicando a força de atrito exercida sobre o fluido pela superfície interna do duto como F_{atrito} e considerando que não há outra força externa e de volume, a equação de momento

$\sum \vec{F} = \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_e \beta \dot{m} \vec{V}$ na direção do escoamento pode ser expressa como:

$$P_1 A - P_2 A - F_{atrito} = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 \rightarrow P_1 - P_2 - \frac{F_{atrito}}{A} = (\rho_2 V_2)V_2 - (\rho_1 V_1)V_1$$

no qual, embora haja atrito nas paredes e os perfis de velocidade não sejam uniformes, aproximamos o fator de correção de escoamento de quantidade de movimento β como 1 por questões de simplicidade, uma vez que o escoamento em geral é turbulento. A equação pode ser escrita novamente como:

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 + \frac{F_{\text{atrito}}}{A} \qquad \textbf{(12–71)}$$

Equação da energia O volume de controle não envolve interações de calor ou trabalho, e a variação da energia potencial é desprezível. Em seguida, o balanço da energia de escoamento constante $\dot{E}_e = \dot{E}_s$ torna-se:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad h_{01} = h_{02} \quad \rightarrow \quad h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{constante} \qquad \textbf{(12–72)}$$

Para um gás ideal com calores específicos constantes, $\Delta h = c_p \Delta T$ e, portanto:

$$T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} \quad \rightarrow \quad T_{01} = T_{02} \quad \rightarrow \quad T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = \text{constante} \qquad \textbf{(12–73)}$$

Assim, a entalpia de estagnação h_0 e a temperatura de estagnação T_0 permanecem constantes durante o escoamento de Fanno.

Variação da entropia Na ausência de transferência de calor, a entropia de um sistema pode variar apenas por irreversibilidades como atrito, cujo efeito sempre é aumentar a entropia. Assim, a entropia do fluido deve aumentar durante o escoamento de Fanno. A variação da entropia nesse caso é equivalente ao aumento ou geração da entropia, e para um gás ideal com calores específicos constantes ela é expressa como:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} > 0 \qquad \textbf{(12–74)}$$

Equação de estado Observando que $P = \rho RT$, as propriedades P, ρ e T de um gás ideal nos estados 1 e 2 estão relacionadas entre si por:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \qquad \textbf{(12–75)}$$

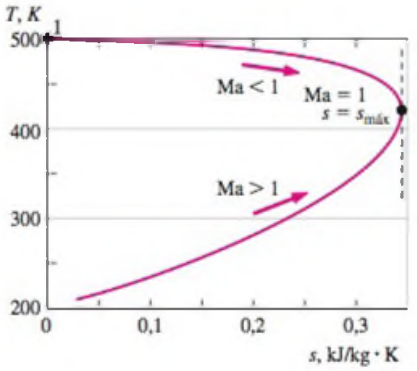


FIGURA 12–60
Diagrama *T*-*s* para o escoamento de atrito adiabático em um duto com área constante (escoamento de Fanno). Os valores numéricos são para $k = 1{,}4$ e condições de entrada $T_1 = 500$ K, $P_1 = 600$ kPa, $V_1 = 80$ m/s e um valor atribuído de $s_1 = 0$.

Considere um gás com propriedades conhecidas R, k e c_p que escoa em um duto com área de seção transversal A. Para um estado de entrada especificado 1, as propriedades de entrada P_1, T_1, ρ_1, V_1 e s_1 são conhecidas. As cinco propriedades de saída P_2, T_2, ρ_2, V_2 e s_2 podem ser determinadas com as Equações 12–70 a 12–75 para qualquer valor especificado da força de atrito F_{atrito}. Conhecendo a velocidade e a temperatura, também podemos determinar o número de Mach na entrada e na saída com a relação $\text{Ma} = V/c = V/\sqrt{kRT}$.

Obviamente existe um número infinito de estados 2 a jusante possíveis que correspondem a determinado estado 1 a montante. Uma forma prática de determinar esses estados a jusante é considerar diversos valores para T_2, e calcular todas as outras propriedades, bem como a força de atrito para cada T_2 considerado das Equações 12–50 até 12–56. O gráfico dos resultados em um diagrama *T*-*s* permite uma curva que passa através do estado de entrada especificado, como mostra a Figura 12–60. O gráfico do escoamento de Fanno em um diagrama *T*-*s* é chamado de **linha de Fanno**, e várias observações importantes podem ser feitas com base nesse gráfico e nos resultados dos cálculos:

1. Todos os estados que atendem às equações de conservação de massa, momento e energia, bem como às relações de propriedades, estão na linha de Fanno. Assim, para determinado estado inicial, o fluido não pode existir em nenhum

estado a jusante fora da linha de Fanno em um diagrama *T*-*s*. Na verdade, a linha de Fanno é o local de todos os estados a jusante possíveis correspondentes a um estado inicial. Observe que se não houvesse atrito, as propriedades de escoamento permaneceriam constantes ao longo do duto durante o escoamento de Fanno.

2. O atrito faz com que a entropia aumente e, portanto, um processo sempre continue à direita ao longo da linha de Fanno. No ponto de entropia máxima, o número de Mach é Ma = 1. Todos os estados da parte superior da linha de Fanno são subsônicos, e todos os estados da parte inferior são supersônicos.
3. O atrito aumenta o número de Mach para o escoamento subsônico de Fanno, mas o diminui para o escoamento supersônico de Fanno. O número de Mach se aproxima da unidade (Ma = 1) em ambos os casos.
4. O balanço de energia exige que a temperatura de estagnação $T_0 = T + V^2/2c_p$ permaneça constante durante o escoamento de Fanno. Mas a temperatura real pode variar. A velocidade aumenta e, portanto, a temperatura diminui durante o escoamento subsônico, mas o contrário ocorre durante o escoamento supersônico (Figura 12–61).
5. A equação da continuidade ρV = constante indica que a densidade e a velocidade são inversamente proporcionais. Assim, o efeito do atrito diminui a densidade no escoamento subsônico (uma vez que a velocidade e o número de Mach aumentam), mas o aumenta no escoamento supersônico (uma vez que a velocidade e o número de Mach diminuem).

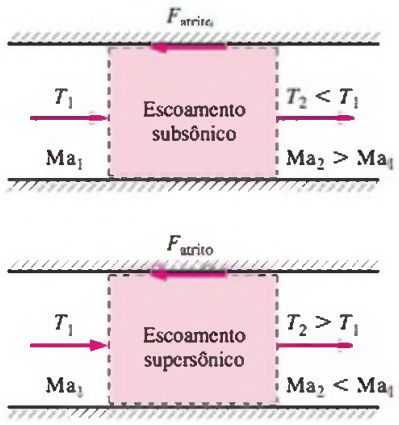


FIGURA 12–61
O atrito faz com que o número de Mach aumente e a temperatura diminua no escoamento de Fanno subsônico, mas faz o contrário no escoamento supersônico de Fanno.

Os efeitos do atrito sobre as propriedades do escoamento de Fanno estão listados na Tabela 12–4. Observe que os efeitos do atrito sobre a maioria das propriedades do escoamento subsônico são opostos àqueles do escoamento supersônico. Entretanto, o efeito do atrito é sempre diminuir a pressão de estagnação, independentemente do escoamento ser subsônico ou supersônico. Mas o atrito não tem nenhum efeito sobre a temperatura, uma vez que ele simplesmente faz com que a energia mecânica seja convertida em uma quantidade equivalente de energia térmica.

Relações de Propriedades para o Escoamento de Fanno

No escoamento compressível, é conveniente expressar a variação das propriedades em termos do número de Mach, e o escoamento de Fanno não é exceção. Entretanto, o escoamento de Fanno envolve a força de atrito que é proporcional ao quadrado da velocidade, mesmo quando o fator de atrito é constante. Mas no escoamento compressível, a velocidade varia de modo significativo ao longo do escoamento e, portanto, é preciso realizar uma análise diferencial para levar em conta adequadamente a variação da força de atrito. Começamos obtendo as formas diferenciais das equações de conservação e as relações de propriedade.

TABELA 12–4
Os efeitos do atrito sobre as propriedades do escoamento de Fanno

Propriedade	Subsônico	Supersônico
Velocidade, V	Aumenta	Diminui
Número de Mach, Ma	Aumenta	Diminui
Temperatura de estagnação, T_0	Constante	Constante
Temperatura, T	Diminui	Aumenta
Densidade, ρ	Diminui	Aumenta
Pressão de estagnação, P_0	Diminui	Diminui
Pressão, P	Diminui	Aumenta
Entropia, s	Aumenta	Aumenta

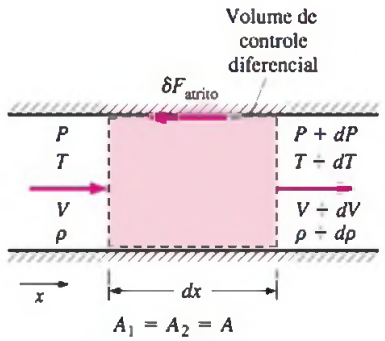


FIGURA 12–62
Volume de controle diferencial para o escoamento adiabático em um duto de área constante com atrito.

Equação da continuidade A forma diferencial da equação da continuidade é obtida diferenciando-se a relação de continuidade pV = constante e reorganizando:

$$\rho\, dV + V\, d\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \tag{12–76}$$

Equação de momento *x* Observando que $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \rho AV$ e $A_1 = A_2 = A$, aplicando a equação de momento

$\sum \vec{F} = \sum_s \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_e \beta \dot{m}\vec{V}$ ao volume de controle diferencial da Figura 12–62 temos:

$$PA_c - (P + dP)A - \delta F_{atrito} = \dot{m}(V + dV) - \dot{m}V$$

onde novamente aproximamos o fator de correção do fluxo de quantidade de movimento (β) como 1. Essa equação pode ser simplificada como:

$$-dPA - \delta F_{atrito} = \rho AV\, dV \qquad \text{ou} \qquad dP + \frac{\delta F_{atrito}}{A} + \rho V\, dV = 0 \tag{12–77}$$

A força de atrito está relacionada à tensão de cisalhamento da parede τ_w e ao fator de atrito local f_x por:

$$\delta F_{atrito} = \tau_w\, dA_s = \tau_w p\, dx = \left(\frac{f_x}{8}\rho V^2\right)\frac{4A}{D_h}dx = \frac{f_x}{2}\frac{A\,dx}{D_h}\rho V^2 \tag{12–78}$$

onde dx é o comprimento da seção de escoamento, p é o perímetro e $D_h = 4A/p$ é o diâmetro hidráulico do duto (observe que D_h se reduz ao diâmetro comum D de um duto com seção transversal circular). Substituindo:

$$dP + \frac{\rho V^2 f_x}{2D_h}dx + \rho V\, dV = 0 \tag{12–79}$$

Observando que $V = \text{Ma}\sqrt{kRT}$ e $P = \rho RT$, temos $\rho V^2 = \rho kRT\text{Ma}^2 = kP\text{Ma}^2$ e $\rho V = kP\text{Ma}^2/V$. Substituindo na Equação 12–79:

$$\frac{1}{k\text{Ma}^2}\frac{dP}{P} + \frac{f_x}{2D_h}dx + \frac{dV}{V} = 0 \tag{12–80}$$

Equação da energia Observando que $c_p = kR/(k-1)$ e $V^2 = \text{Ma}^2 kRT$, a equação da energia T_0 = constante ou $T + V^2/2c_p$ = constante pode ser expressa como:

$$T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right) = \text{constante} \tag{12–81}$$

Diferenciando e reorganizando temos:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2(k-1)\text{Ma}^2}{2 + (k-1)\text{Ma}^2}\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \tag{12–82}$$

que é uma expressão para a variação diferencial da temperatura em termos de uma variação diferencial do número de Mach.

Número de Mach A relação do número de Mach para os gases ideais pode ser expressa como $V^2 = \text{Ma}^2 kRT$. Diferenciando e reorganizando temos:

$$2V\, dV = 2\text{Ma}kRT\, d\text{Ma} + kR\text{Ma}^2\, dT \quad \rightarrow \tag{12–83}$$

$$2V\, dV = 2\frac{V^2}{\text{Ma}}d\text{Ma} + \frac{V^2}{T}dT$$

Dividindo cada termo por $2V^2$ e reorganizando:

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T} \tag{12–84}$$

Combinando a Equação 12–84 com a Equação 12–82, temos a variação da velocidade em termos do número de Mach como:

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} - \frac{(k-1)\text{Ma}^2}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{V} = \frac{2}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \tag{12–85}$$

Gás ideal A forma diferencial da equação do gás ideal é obtida pela diferenciação da equação $P = \rho RT$:

$$dP = \rho R\,dT + RT\,d\rho \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \tag{12–86}$$

Combinando com a equação de continuidade (Equação 12–76) temos:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \tag{12–87}$$

Agora combinando com as Equações 12–82 e 12–84 temos:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{2+2(k-1)\text{Ma}^2}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \tag{12–88}$$

que é uma expressão para as variações diferenciais de P com Ma.

Substituindo as Equações 12–85 e 12–88 na Equação 12–80 e simplificando, temos a equação diferencial para a variação do número de Mach com x como:

$$\frac{f_x}{D_h}dx = \frac{4(1-\text{Ma}^2)}{k\text{Ma}^3[2+(k-1)\text{Ma}^2]}\,d\text{Ma} \tag{12–89}$$

Considerando que todos os escoamentos de Fanno tendem a Ma = 1, mais uma vez é conveniente usar o ponto crítico (ou seja, o estado sônico) como o ponto de referência e expressar as propriedades de escoamento em relação às propriedades do ponto crítico, mesmo que o escoamento real nunca atinja o ponto crítico. Integrando a Equação 12–89 de qualquer estado (Ma = Ma and $x = x$) ao estado crítico (Ma = 1 e $x = x_{cr}$), temos:

$$\frac{fL^*}{D_h} = \frac{1-\text{Ma}^2}{k\text{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)\text{Ma}^2}{2+(k-1)\text{Ma}^2} \tag{12–90}$$

onde f é o fator de atrito médio entre x e x_{cr}, que é assumido como constante, e $L^* = x_{cr} - x$ é o comprimento do canal necessário para que o número de Mach atinja a unidade sob a influência do atrito da parede. Assim, L^* representa a distância entre determinada seção na qual o número de Mach é Ma e uma seção (uma seção imaginária se o duto não é suficientemente longo para atingir Ma = 1) na qual ocorrem as condições sônicas (Figura 12–63).

Observe que o valor de fL^*/D_h é fixo para determinado número de Mach e, portanto, os valores de fL^*/D_h podem ser tabulados em relação a Ma para um k especificado. Da mesma forma, o valor do comprimento do duto L^* necessário para atingir as condições sônicas (ou o "comprimento sônico") é inversamente proporcional ao fator de atrito. Assim, para determinado número de Mach, L^* é grande para dutos com superfícies uniformes e pequeno para dutos com superfícies rugosas.

O comprimento de duto real L entre duas seções nas quais os números de Mach são Ma_1 e Ma_2 pode ser determinado com:

$$\frac{fL}{D_h} = \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_1 - \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_2 \tag{12–91}$$

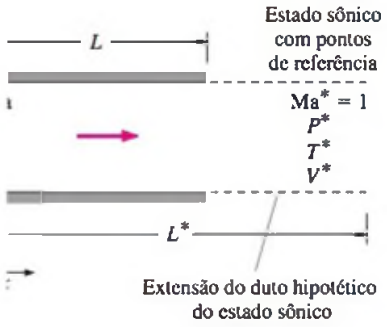


FIGURA 12–63
O comprimento L^* representa a distância entre determinada seção na qual o número de Mach é Ma e uma seção real ou imaginária na qual Ma* = 1.

Em geral o fator de atrito médio f é diferente nas diferentes partes do duto. Se f for assumido como constante para todo o duto (incluindo a parte da extensão hipotética do estado sônico) então a Equação 12–91 pode ser simplificada como:

$$L = L_1^* - L_2^* \quad (f = \text{constante}) \tag{12–92}$$

Portanto, a Equação 12–90 pode ser usada para dutos curtos que nunca atingem Ma = 1, bem como para os longos com Ma = 1 na saída.

O fator de atrito depende do número de Reynolds $\text{Re} = \rho V D_h/\mu$, que varia ao longo do duto e da razão de rugosidade ε/D_h da superfície. Entretanto, a variação de Re é suave, uma vez que ρV = constante (da continuidade) e toda variação de Re é devida à variação da viscosidade com a temperatura. Assim, é razoável avaliar f com o gráfico de Moody ou com a equação de Colebrook discutidos no Capítulo 8 para o número de Reynolds médio e tratá-lo como uma constante. Esse é o caso do escoamento subsônico, uma vez que as variações de temperatura envolvidas são relativamente pequenas. O tratamento do fator de atrito para o escoamento supersônico vai além do escopo deste texto. A equação de Colebrook está implícita em f e, portanto, é mais conveniente usar a relação de Haaland expressa como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1{,}8 \log\left[\frac{6{,}9}{\text{Re}} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right] \tag{12–93}$$

Os números de Reynolds encontrados no escoamento compressível geralmente são altos, e a números de Reynolds muito altos (escoamento turbulento totalmente rugoso) o fator de atrito não depende do número de Reynolds. Para $\text{Re} \to \infty$, a equação de Colebrook se reduz a $1/\sqrt{f} = -2{,}0 \log[(\varepsilon/D_h)/3{,}7]$.

As relações para outras propriedades de escoamento podem ser determinadas pela integração das relações dP/P, dT/T e dV/V das Equações 12–79, 12–82 e 12–85, respectivamente, de qualquer estado (sem subscrito e número de Mach Ma) até o estado sônico (com um asterisco sobrescrito e Ma = 1) com os seguintes resultados (Figura 12–64):

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\right)^{1/2} \tag{12–94}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2} \tag{12–95}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \text{Ma}\left(\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\right)^{1/2} \tag{12–96}$$

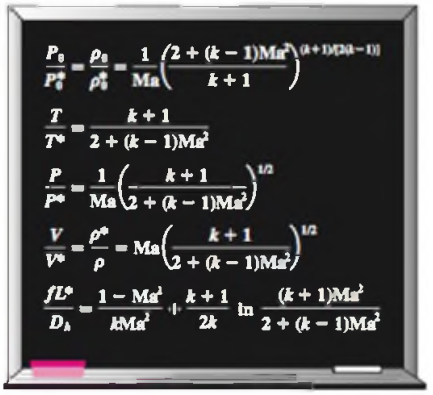


FIGURA 12–64
Resumo das relações do escoamento de Fanno.

Uma relação semelhante pode ser obtida para a pressão de estagnação adimensional da seguinte maneira:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{P_0}{P}\frac{P}{P^*}\frac{P^*}{P_0^*} = \left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)^{k/(k-1)} \frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{k-1}{2}\right)^{-k/(k-1)}$$

O que pode ser simplificado como:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{2+(k-1)\text{Ma}^2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]} \tag{12–97}$$

Observe que a temperatura de estagnação T_0 é constante para o escoamento de Fanno e, portanto, $T_0/T_0^* = 1$ em toda a parte ao longo do duto.

As Equações 12–90 a 12-97 permitem calcular a pressão adimensional, a temperatura, a massa específica, a velocidade, a pressão de estagnação e o fL^*/D_h do escoamento de Fanno de um gás ideal com um k especificado para determinado número de Mach. Resultados representativos são dados na forma tabular na Tabela A–16 para $k = 1{,}4$.

Escoamento de Fanno Estrangulado

As discussões anteriores deixam claro que o atrito faz com que o escoamento subsônico de Fanno em um duto de área constante se acelere na direção da velocidade sônica, e que o número de Mach torna-se exatamente a unidade na saída para determinado comprimento de duto. Esse comprimento de duto é chamado de **comprimento máximo**, **comprimento sônico** ou **comprimento crítico**, e é indicado por L^*. Você deve estar curioso para saber o que acontece quando estendemos o comprimento do duto além de L^*. Em particular, o escoamento é acelerado até velocidades supersônicas? A resposta para essa pergunta é um *não* definitivo, uma vez que a Ma = 1 o escoamento está no ponto de máxima entropia, e a continuidade ao longo da linha de Fanno até a região supersônica exigiria que a entropia do fluido diminuísse — o que seria uma violação da segunda lei da termodinâmica. (Observe que o estado de saída deve permanecer na linha de Fanno para atender a todos os requisitos de conservação.) Portanto, o escoamento é *estrangulado*. Mais uma vez isso é análogo a não conseguir acelerar um gás até velocidades supersônicas em um bocal convergente simplesmente estendendo a seção do escoamento convergente. Se estendermos o comprimento do duto além de L^* de qualquer forma, estaremos simplesmente movendo o estado crítico mais além a jusante e reduzindo a vazão. Isso faz com que o estado de entrada se altere (por exemplo, a velocidade de entrada diminui), e o escoamento mude para uma linha de Fanno diferente. Um aumento maior no comprimento do duto diminui a velocidade de entrada e, portanto, a vazão em massa.

O atrito faz com que o escoamento de Fanno supersônico de um duto com área constante se desacelere e o número de Mach diminua na direção da unidade. Assim, mais uma vez, o número de saída de Mach torna-se Ma = 1 se o comprimento do duto for L^*, como no escoamento subsônico. Mas, ao contrário do escoamento subsônico, o aumento do comprimento do duto além de L^* não pode estrangular o escoamento, uma vez que ele já está estrangulado. Em vez disso, ele faz com que ocorra um choque normal em tal local para que o escoamento subsônico torne-se novamente sônico exatamente na saída do duto (Figura 12–65). À medida que o comprimento do duto aumenta, o local do choque normal se movimenta mais a montante. Por fim o choque ocorre na entrada do duto. Um aumento maior no comprimento do duto movimenta o choque para a seção divergente do bocal convergente-divergente que originalmente gera o escoamento supersônico, mas a vazão mássica ainda permanece inalterada, uma vez que a taxa de massa é fixa pelas condições sônicas na garganta do bocal, e não se altera a menos que as condições da garganta mudem.

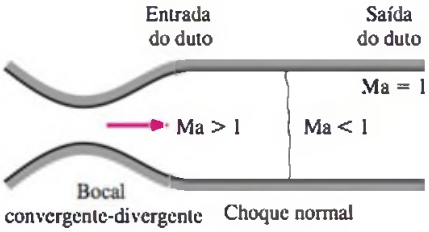


FIGURA 12–65
O escoamento supersônico de Fanno sempre é sônico na saída do duto. A extensão do duto apenas moverá o local do choque normal mais a montante.

EXEMPLO 12–16 Escoamento de Fanno Estrangulado em um Duto

Ar entra em um duto adiabático uniforme com 3 cm de diâmetro a $Ma_1 = 0{,}4$, $T_1 = 300$ K e $P_1 = 150$ kPa (Figura 12–66). Se o número de Mach na saída do duto for 1, determine o comprimento do duto e a temperatura, pressão e velocidade na saída do duto. Determine também a porcentagem da pressão de estagnação perdida no duto.

SOLUÇÃO Ar entra em um duto adiabático como área constante a um estado especificado e sai no estado sônico. O comprimento do duto, a temperatura de saída, pressão, velocidade e porcentagem da pressão de estagnação perdida no duto devem ser determinados.

Hipóteses 1 As hipóteses associadas ao escoamento de Fanno (ou seja, escoamento com atrito e permanente de um gás ideal com propriedades constantes através de um duto adiabático com área transversal constante) são válidas. **2** O fator de atrito é constante ao longo do duto.

Propriedades Consideremos as propriedades do ar como $k = 1{,}4$, $c_p = 1{,}005$ kJ/kg · K, $R = 0{,}287$ kJ/kg · K, e $\nu = 1{,}58 \times 10^{-5}$ m²/s.

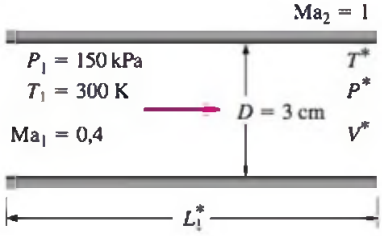


FIGURA 12–66
Esquema do Exemplo 12–16.

Análise Primeiramente determinamos a velocidade de entrada e o número de Reynolds:

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1{,}4)(0{,}287\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K})(300\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)} = 347\ \text{m/s}$$

$$V_1 = \text{Ma}_1 c_1 = 0{,}4(347\ \text{m/s}) = 139\ \text{m/s}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{V_1 D}{\nu} = \frac{(139\ \text{m/s})(0{,}03\ \text{m})}{1{,}58 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}} = 2{,}637 \times 10^5$$

O fator de atrito é determinado com a equação de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{0}{3{,}7} + \frac{2.51}{2{,}637 \times 10^5 \sqrt{f}}\right)$$

Sua solução é:

$$f = 0{,}0148$$

As funções do escoamento de Fanno correspondentes aos números de Mach de entrada de 0,4 são (Tabela A–16):

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = 1{,}5901 \quad \frac{T_1}{T^*} = 1{,}1628 \quad \frac{P_1}{P^*} = 2{,}6958 \quad \frac{V_1}{V^*} = 0{,}4313 \quad \frac{fL_1^*}{D} = 2{,}3085$$

Observando que * indica condições sônicas que existem no estado de saída, o comprimento do duto e a temperatura de saída, pressão e velocidade são determinados como:

$$L_1^* = \frac{2{,}3085D}{f} = \frac{2{,}3085(0{,}03\ \text{m})}{0{,}0148} = \mathbf{4{,}68\ m}$$

$$T^* = \frac{T_1}{1{,}1628} = \frac{300\ \text{K}}{1{,}1628} = \mathbf{258\ K}$$

$$P^* = \frac{P_1}{2{,}6958} = \frac{150\ \text{kPa}}{2{,}6958} = \mathbf{55{,}6\ kPa}$$

$$V^* = \frac{V_1}{0{,}4313} = \frac{139\ \text{m/s}}{0{,}4313} = \mathbf{322\ m/s}$$

Assim, para determinado fator de atrito, o comprimento do duto deve ser de 4,68 m para que o número de Mach chegue a Ma = 1 na saída do duto. A fração da pressão de estagnação de entrada P_{01} perdida no duto devida ao atrito é:

$$\frac{P_{01} - P_0^*}{P_{01}} = 1 - \frac{P_0^*}{P_{01}} = 1 - \frac{1}{1{,}5901} = 0{,}371 \quad \text{ou} \quad \mathbf{37{,}1\%}$$

Discussão Este problema também pode ser resolvido usando-se relações apropriadas em vez dos valores tabulados das funções de Fanno. Da mesma forma, determinamos o fator de atrito às condições de entrada e consideramos que ele permanece constante ao longo do duto. Para verificar a validade dessa hipótese, calculamos o fator de atrito às condições de saída. Também é possível mostrar que o fator de atrito na saída do duto é 0,0121 — uma queda de 18%. Esse é um valor grande. Assim, devemos repetir o cálculo usando o valor médio do fator de atrito (0,0148 + 0,0121)/2 = 0,0135. Isso daria um comprimento de duto de L_1^* = 2,3085(0,03m)/0,0135 = **5,13 m**, e consideraríamos esse como o comprimento necessário do duto.

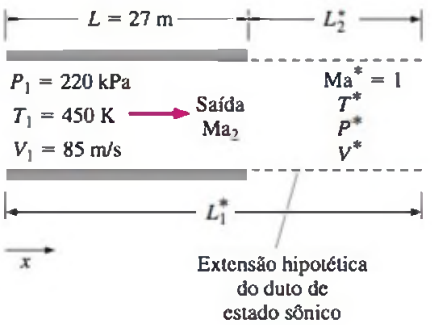


FIGURA 12–67
Esquema do Exemplo 12–17.

EXEMPLO 12–17 Condições de Saída do Escoamento de Fanno em um Duto

Ar entra em um duto adiabático uniforme de 27 m de comprimento e 5 cm de diâmetro a W_1 = 85 m/s, T_1 = 450 K e P_1 = 220 kPa (Figura 12–67). O fator médio de atrito do duto é estimado como 0,023. Determine o número de Mach na saída do duto e a vazão em massa do ar.

SOLUÇÃO Ar entra em um duto adiabático com área constante e comprimento determinado a um estado especificado. O número de saída de Mach e a vazão em massa devem ser determinados.

Hipóteses **1** As hipóteses associadas ao escoamento de Fanno (ou seja, escoamento com atrito e permanente de um gás ideal com propriedades constantes através de um duto adiabático com área transversal constante) são válidas. **2** O fator de atrito é constante ao longo do duto.

Propriedades Consideramos as propriedades do ar como $k = 1{,}4$, $c_p = 1{,}005$ kJ/kg · K e $R = 0{,}287$ kJ/kg · K, e $\nu = 1{,}58 \times 10^{-5}$ m²/s.

Análise A primeira coisa que precisamos saber é se o escoamento é estrangulado na saída ou não. Assim, primeiro determinamos o número de entrada de Mach e o valor correspondente da função fL^*/D_h:

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1{,}4)(0{,}287\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K})(450\ \text{K})\left(\frac{1000\ \text{m}^2/\text{s}^2}{1\ \text{kJ/kg}}\right)} = 425\ \text{m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{85\ \text{m/s}}{425\ \text{m/s}} = 0{,}200$$

Correspondendo a esse número de Mach nós lemos na Tabela A–16, $(fL^*/D_h)_1 = 14{,}5333$. Da mesma maneira, usando o comprimento real do duto L, temos:

$$\frac{fL}{D_h} = \frac{(0{,}023)(27\ \text{m})}{0{,}05\ \text{m}} = 12{,}42 < 14{,}5333$$

Portanto, o escoamento *não* é estrangulado e o número de saída de Mach é menor do que 1. A função fL^*/D_h no estado de saída é calculada com a Equação 12–91:

$$\left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_2 = \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_1 - \frac{fL}{D_h} = 14{,}5333 - 12{,}42 = 2{,}1133$$

O número de Mach correspondente a esse valor de fL^*/D é 0,42, obtido da Tabela A–16. Assim, o número de Mach na saída do duto é:

$$\text{Ma}_2 = \mathbf{0{,}42}$$

A vazão em massa do ar é determinada com as condições de entrada como:

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{220\ \text{kPa}}{(0{,}287\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K})(450\ \text{K})}\left(\frac{1\ \text{kJ}}{1\ \text{kPa} \cdot \text{m}^3}\right) = 1{,}703\ \text{kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{ar} = \rho_1 A_1 V_1 = (1{,}703\ \text{kg/m}^3)\,[\pi(0{,}05\ \text{m})^2/4]\,(85\ \text{m/s}) = \mathbf{0{,}284\ kg/s}$$

Discussão Observe que é necessário um comprimento de duto de 27 m para que o número de Mach aumente de 0,20 até 0,42, mas apenas 4,6 m para aumentar de 0,42 para 1. Assim, o número de Mach se eleva a uma taxa muito mais alta à medida que as condições sônicas são atingidas.

Para termos uma idéia, vamos determinar os comprimentos correspondentes aos valores fL^*/D_h dos estados de entrada e saída. Observando que f é considerado constante para todo o duto, os comprimentos máximos (ou sônicos) do duto nos estados de entrada e saída são:

$$L_{\text{máx. 1}} = L_1^* = 14{,}5333\,\frac{D_h}{f} = 14{,}5333\,\frac{0{,}05\ \text{m}}{0{,}023} = 31{,}6\ \text{m}$$

$$L_{\text{máx. 2}} = L_2^* = 2{,}1133\,\frac{D_h}{f} = 2{,}1133\,\frac{0{,}05\ \text{m}}{0{,}023} = 4{,}59\ \text{m}$$

(ou $L_{\text{máx. 2}} = L_{\text{máx. 1}} - L = 31{,}6 - 27 = 4{,}6$ m). Assim, o escoamento atingiria as condições sônicas se uma seção com 4,6 m de comprimento fosse adicionada ao duto existente.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Interações de Onda de Choque/Camada Limite

Autor Convidado: Gary S. Settles, Universidade do Estado da Pensilvânia

FIGURA 12–68
A onda de choque normal acima da asa de um avião a jato comercial L-1011 em vôo transônico, visível pela distorção traseira de nuvens baixas sobre o Oceano Pacífico.
Foto do governo dos EUA, por Carla Thomas, Centro de Pesquisa da NASA em Dryden.

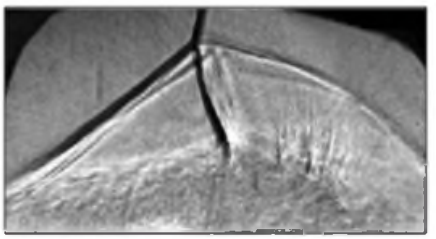


FIGURA 12–69
Gráfico por sombras da interação de varredura gerada por uma aleta montada em uma placa plana ao número de Mach 3,5. A onda de choque oblíqua gerada pela aleta (na parte superior da imagem) se bifurca em um pé em "λ" abaixo do qual a camada limite se separa e se enrola. O escoamento de ar através do pé em λ acima da zona de separação forma um "jato" supersônico que se curva para baixo e colide com a parede. Essa interação tridimensional exigiu uma técnica ótica especial conhecida como gráfico por sombras cônico para que o escoamento fosse visualizado.
Foto de F. S. Alvi e G. S. Settles.

As ondas de choque e as camadas limite estão entre os fenômenos mais incompatíveis da natureza. As camadas limite, como descreve o Capítulo 10, são suscetíveis à separação das superfícies aerodinâmicas sempre que ocorrem gradientes de pressão adversos fortes. As ondas de choque, por outro lado, produzem gradientes de pressão muito fortes, uma vez que uma elevação finita da pressão estática ocorre através de uma onda de choque em uma distância na direção da corrente curta e desprezível. Assim, quando uma camada limite encontra uma onda de choque, um complicado padrão de escoamento se desenvolve e a camada limite quase sempre se separa da superfície na qual está colada.

Existem casos importantes em vôos a alta velocidade e testes em túnel de vento nos quais tal choque é inevitável. Por exemplo, um avião de carga a jato comercial viaja na margem inferior do regime de escoamento transônico, onde o escoamento de ar sobre as asas na verdade fica supersônico e depois retorna ao escoamento subsônico por meio de uma onda de choque normal (Figura 12–68). Se tal avião voar de modo significativamente mais rápido do que seu número de Mach de cruzeiro projetado, sérias perturbações aerodinâmicas surgem devido às interações onda de choque/camada limite causando a separação do escoamento nas asas. Esse fenômeno, portanto, limita a velocidade dos aviões de passageiros ao redor do mundo. Alguns aviões militares foram projetados para evitar esse limite e voar supersônicamente, mas as interações onda de choque/camada limite ainda são fatores restritivos nas entradas de ar de seus motores.

A interação entre uma onda de choque e uma camada limite é um tipo de *interação viscosa/não viscosa* na qual o escoamento viscoso da camada limite encontra a onda de choque essencialmente não viscosa gerada na corrente livre. A camada limite é retardada e torna-se mais espessa pelo choque e pode se separar. O choque, por outro lado, bifurca-se quando ocorre a separação do escoamento (Figura 12–69). As variações mútuas do choque e da camada limite continuam até que seja atingida uma condição de equilíbrio. Dependendo das condições de fronteira, a interação pode variar em duas ou três dimensões e pode ser permanente ou temporária.

É difícil analisar um escoamento com interação tão forte e não existem soluções simples. Além disso, na maioria dos problemas de interesse prático, a camada limite em questão é turbulenta. Os métodos modernos de cálculo conseguem prever muitas características desses escoamentos com soluções de supercomputadores para as equações médias de Navier-Stokes ou RANS (*Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*). As experiências em túneis de vento têm um papel importante na orientação e validação de tais cálculos. Além de tudo, a interação entre a onda de choque e a camada limite tornou-se um dos problemas de vanguarda da pesquisa moderna em Dinâmica dos Fluidos.

Referências

Knight, D. D., et al. "Advances in CFD Prediction of Shock Wave Turbulent Boundary Layer Interactions", *Progress in Aerospace Sciences* 39(2-3), p. 121–184, 2003.

Alvi, F. S. e Settles, G. S. "Physical Model of the Swept Shock Wave/Boundary-Layer Interaction Flowfield", *AIAA Journal* 30, p. 2252–2258, set. 1992.

RESUMO

Este capítulo examinou os efeitos da compressibilidade sobre o escoamento do gás. Ao lidar com o escoamento compressível, é conveniente combinar a entalpia e a energia cinética do fluido em um único termo chamado de *entalpia de estagnação* (ou *total*) h_0, definida como:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

As propriedades de um fluido no estado de estagnação são chamadas de *propriedades de estagnação* e indicadas pelo subscrito zero. A *temperatura de estagnação* de um gás ideal com calores específicos constantes é:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

que representa a temperatura que um gás ideal atingiria se fosse levado ao repouso de forma adiabática. As propriedades de estagnação de um gás estão relacionadas às propriedades estáticas do fluido por:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{k/(k-1)} \quad \text{e} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(k-1)}$$

A velocidade com a qual uma onda de pressão infinitesimalmente pequena viaja através de um meio é a *velocidade do som*. Para um gás ideal ela é expressa como:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{kRT}$$

O *número de Mach* é a razão entre a velocidade real do fluido e a velocidade do som no mesmo estado:

$$\text{Ma} = \frac{V}{c}$$

O escoamento é chamado de *sônico* quando Ma = 1, *subsônico* quando Ma < 1, *supersônico* quando Ma > 1, *hipersônico* quando Ma $\gg$ 1 e *transônico* quando Ma $\cong$ 1.

Os bocais cuja área de escoamento diminui na direção do escoamento são chamados de *bocais convergentes*. Os bocais cuja área de escoamento diminui primeiro e, em seguida, aumenta são chamados de *bocais convergentes-divergentes*. O local da menor área de escoamento de um bocal é chamado de *garganta*. A mais alta velocidade com a qual um fluido pode ser acelerado em um bocal convergente é a velocidade sônica. A aceleração de um fluido até velocidades supersônicas só é possível nos bocais convergentes-divergentes. Em todos os bocais supersônicos convergentes-divergentes, a velocidade de escoamento na garganta é a velocidade do som.

As relações entre as propriedades de estagnação e estáticas dos gases ideais com calores específicos constantes podem ser expressas em termos do número de Mach como:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2\right]^{k/(k-1)}$$

e

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2\right]^{1/(k-1)}$$

Quando Ma = 1, as relações resultantes entre as propriedades estática e de estagnação para a temperatura, pressão e massa específica são chamadas de *relações críticas* e indicadas pelo asterisco sobrescrito:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \qquad \frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

e

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)}$$

A pressão fora do plano de saída de um bocal é chamada de *contrapressão*. Em todas as contrapressões abaixo de P^*, a pressão no plano de saída do bocal convergente é igual a P^*, o número de Mach no plano de saída é unidade e a vazão em massa é a vazão máxima (ou estrangulada).

Em alguns intervalos da contrapressão, o fluido que atingiu uma velocidade sônica na garganta de um bocal convergente-divergente e é acelerado a velocidades supersônicas na seção divergente experimenta um *choque normal*. Esse choque normal causa uma elevação repentina da pressão e da temperatura e uma queda repentina da velocidade até níveis subsônicos. O escoamento através do choque é altamente irreversível e, portanto, ele não pode ser aproximado como isentrópico. As propriedades de um gás ideal com calores específicos constantes antes (subscrito 1) e depois (subscrito 2) de um choque estão relacionadas por:

$$T_{01} = T_{02} \qquad \text{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\text{Ma}_1^2 + 2}{2k\text{Ma}_1^2 - k + 1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + \text{Ma}_1^2(k-1)}{2 + \text{Ma}_2^2(k-1)}$$

e

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} = \frac{2k\text{Ma}_1^2 - k + 1}{k+1}$$

Essas equações também se mantêm através de um choque oblíquo, desde que o componente do número de Mach *normal* ao choque oblíquo seja usado no lugar do número de Mach.

O escoamento unidimensional permanente de um gás ideal com calores específicos constantes através de um duto com área constante e transferência de calor, mas com atrito desprezível, é chamado de *escoamento de Rayleigh*. As relações entre propriedades e as curvas para o escoamento de Rayleigh são dadas na Tabela A–15. A transferência de calor durante o escoamento de Rayleigh pode ser determinada com:

$$q = c_p(T_{02} - T_{01}) = c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$

O escoamento permanente, adiabático e com atrito de um gás ideal com calores específicos constantes através de um duto de área constante é chamado de *escoamento de Fanno*. O comprimento de canal necessário para que o número de Mach atinja a unidade sob influência do atrito da parede é indicado por L^* e expresso como:

$$\frac{fL^*}{D_h} = \frac{1 - \text{Ma}^2}{k\text{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\text{Ma}^2}{2 + (k-1)\text{Ma}^2}$$

onde f é o fator de atrito médio. O comprimento de duto entre duas seções nas quais os números de Mach são Ma_1 e Ma_2 é determinado com:

$$\frac{fL}{D_h} = \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_1 - \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_2$$

Durante o escoamento de Fanno, a temperatura de estagnação T_0 permanece constante. As outras relações de propriedade e curvas do escoamento de Fanno são dadas na Tabela A– 16.

Este capítulo oferece uma visão geral do escoamento compressível e destina-se a motivar o aluno interessado em empreender um estudo mais aprofundado sobre esse interessante assunto. Alguns escoamentos compressíveis são analisados no Capítulo 15 Usando a Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD).

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. J. D. Anderson. *Modern Compressible Flow with Historical Perspective.* McGraw-Hill, 2003.
2. Y. A. Çengel e M. A. Boles. *Termodinâmica.* 5. edição, São Paulo: McGraw-Hill Interamericana do Brasil, 2006.
3. H. Cohen, G. F. C. Rogers e H. I. H. Saravanamuttoo. *Gas Turbine Theory.* Wiley, 1987.
4. W. J. Devenport. Compressible Aerodynamic Calculator, http://www.aoe.vt.edu/~devenpor/aoe3114/ calc.html.
5. R. W. Fox e A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: Wiley, 1999.
6. H. Liepmann e A. Roshko. *Elements of Gas Dynamics,* Dover Publications, Mineola, NY, 2001.
7. C. E. Mackey, executivo responsável e curador da NACA. *Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow.* Relatório NACA 1135, http://naca.larc.nasa.gov/reports/1953/naca-report-1135/.
8. A. H. Shapiro. *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow.* v. 1. Nova Iorque: Ronald Press Company, 1953.
9. P. A. Thompson. *Compressible-Fluid Dynamics.* McGraw-Hill, 1972.
10. United Technologies Corporation. The Aircraft Gas Turbine Engine and Its Operation.
11. Van Dyke, 1982.
12. F. M. White. *Mecânica dos Fluidos*, 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill Interamericana do Brasil, 2003.

PROBLEMAS*

Propriedades de Estagnação

12–1C Um avião de alta velocidade cruza o ar. Como a temperatura do ar no nariz do avião difere da temperatura do ar que está a uma certa distância do avião?

12–2C Como e por que a entalpia da estagnação h_0 é definida? Em que ela é diferente da entalpia normal (estática)?

12–3C O que é temperatura dinâmica?

12–4 Nas aplicações de ar condicionado, a temperatura do ar é medida pela inserção de uma sonda na corrente de escoamento. Assim, na verdade, a sonda mede a temperatura de estagnação. Isso causa um erro significativo?

12–5 Determine a temperatura e a pressão de estagnação do ar que escoa a 44 kPa, 245,9 K, e 470 m/s. *Respostas:* 355,8 K, 160,3 kPa

12–6 Ar a 300 K escoa em um duto à velocidade de (*a*) 1, (*b*) 10, (*c*) 100 e (*d*) 1000 m/s. Determine a temperatura acusada por uma sonda fixa inserida no duto em cada caso.

12–7 Calcule a temperatura e a pressão de estagnação das seguintes substâncias que escoam através de um duto: (*a*) hélio a 0,25 MPa, 50°C e 240 m/s; (*b*) nitrogênio a 0,15 MPa, 50°C e 300 m/s e (*c*) vapor a 0,1 MPa, 350°C e 480 m/s.

12–8 Ar entra em um compressor com uma pressão de estagnação de 100 kPa e temperatura de estagnação de 27°C e é comprimido até uma pressão de estagnação de 900 kPa. Considerando que o processo de compressão seja isentrópico, determine a entrada de potência no compressor para uma vazão mássica de 0,02 kg/s.
Resposta: 5,27 kW

12–9 Produtos da combustão entram em uma turbina a gás com uma pressão de estagnação de 1,0 MPa, temperatura de estagnação de 750°C e se expandem até uma pressão de estagnação de 100 kPa. Considerando $k = 1{,}33$ e $R = 0{,}287$ kJ/kg · K para os produtos da combustão e assumindo que o processo de expansão seja isentrópico, determine a saída de potência da turbina por unidade de escoamento de massa.

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

12–10 Ar escoa através de um dispositivo de forma que a pressão de estagnação seja de 0,6 MPa, a temperatura de estagnação seja 400°C e a velocidade seja 570 m/s. Determine a pressão e a temperatura estáticas do ar nesse estado.
Respostas: 518,6 K, 0,23 MPa

Velocidade do Som e Número de Mach

112–11C O que é o som? Como ele é gerado? Como viaja? As ondas de som podem viajar no vácuo?

12–12C É realista considerar que a propagação das ondas de som é um processo isentrópico? Explique.

12–13C A velocidade sônica em um meio especificado é uma quantidade fixa, ou ela varia à medida que as propriedades do meio variam? Explique.

12–14C Em qual meio uma onda de som viaja mais rápido: no ar frio ou no ar quente?

12–15C Em qual meio o som viaja mais rápido para determinada temperatura: ar, hélio ou argônio?

12–16C Em qual meio uma onda de som viaja mais rápido: no ar a 20°C e 1 atm ou no ar a 20°C e 5 atm?

12–17C O número de Mach de um gás que escoa a velocidade constante permanece constante? Explique.

12–18 Determine a velocidade do som no ar a (*a*) 300 K e (*b*) 1000 K. Determine também o número de Mach de um avião que se movimenta no ar à velocidade de 240 m/s em ambos os casos.

12–19 Dióxido de carbono entra em um bocal adiabático a 1.200 K com uma velocidade de 50 m/s e sai a 400 K. Considerando calores específicos constantes à temperatura ambiente, determine o número de Mach (*a*) na entrada e (*b*) na saída do bocal. Avalie a exatidão da hipótese do calor específico constante. *Respostas:* (*a*) 0,0925, (*b*) 3,73

12–20 Nitrogênio entra em um trocador de calor com escoamento constante a 150 kPa, 10°C e 100 m/s, e recebe calor na quantidade de 120 kJ/kg à medida que escoa através dele. O nitrogênio sai do trocador de calor a 100 kPa com uma velocidade de 200 m/s. Determine o número de Mach do nitrogênio na entrada e na saída do trocador de calor.

12–21 Considerando comportamento de gás ideal, determine a velocidade do som em um refrigerante 134a a 0,1 MPa e 60°C.

12–22 O avião de passageiros Airbus A-340 tem um peso de decolagem máximo de cerca de 260.000 kg, comprimento de 64 m, envergadura de asa de 60 m, velocidade máxima de cruzeiro de 945 km/h, capacidade para 271 passageiros, altitude máxima de cruzeiro de 14.000 m e autonomia máxima de 12.000 km. A temperatura do ar a altitude de cruzeiro é de cerca de –60°C. Determine o número de Mach desse avião para as condições limites declaradas.

12–23 O processo isentrópico de um gás ideal é expresso como Pv^k = constante. Usando essa equação de processo e a definição da velocidade do som (Equação 12–9), obtenha a expressão da velocidade do som para um gás ideal (Equação 12–11).

12–24 Ar se expande isentropicamente de 1,5 MPa e 60°C até 0,4 MPa. Calcule a relação entre as velocidades inicial e final do som. *Resposta:* 1,21

12–25 Repita o Problema 12–24 para o gás hélio.

Escoamento Isentrópico Unidimensional

12–26C Considere um bocal convergente com velocidade sônica no plano de saída. Agora a área da saída do bocal é reduzida e as condições de entrada do bocal são mantidas constantes. O que acontecerá à (*a*) velocidade de saída e (*b*) à vazão em massa através do bocal?

12–27C Inicialmente um gás a uma velocidade supersônica entra em um duto convergente adiabático. Discuta o modo como isso afeta (*a*) a velocidade, (*b*) a temperatura, (*c*) a pressão e (*d*) a massa específica do fluido.

12–28C Inicialmente um gás a uma velocidade supersônica entra em um duto divergente adiabático. Discuta o modo como isso afeta (*a*) a velocidade, (*b*) a temperatura, (*c*) a pressão e (*d*) a massa específica do fluido.

12–29C Inicialmente um gás a uma velocidade subsônica entra em um duto convergente adiabático. Discuta o modo como isso afeta (*a*) a velocidade, (*b*) a temperatura, (*c*) a pressão e (*d*) a massa específica do fluido.

12–30C Inicialmente um gás a uma velocidade subsônica entra em um duto divergente adiabático. Discuta o modo como isso afeta (*a*) a velocidade, (*b*) a temperatura, (*c*) a pressão e (*d*) a massa específica do fluido.

12–31C Um gás a temperatura e pressão de estagnação especificadas é acelerado até Ma = 2 em um bocal convergente-divergente e a Ma = 3 em outro bocal. O que é possível dizer sobre as pressões nas gargantas desses dois bocais?

12–32C É possível acelerar um gás até uma velocidade supersônica em um bocal convergente?

12–33 Ar entra em um bocal convergente-divergente a uma pressão de 1,2 MPa com velocidade desprezível. Qual é a pressão mais baixa que pode ser obtida na garganta do bocal? *Resposta:* 634 kPa

12–34 Hélio entra em um bocal convergente-divergente a 0,7 MPa, 800 K e 100 m/s. Quais são a temperatura e pressão mais baixas que podem ser obtidas na garganta do bocal?

12–35 Calcule a temperatura, pressão e massa específica críticas do (*a*) ar a 200 kPa, 100°C e 250 m/s e (*b*) hélio a 200 kPa, 40°C e 300 m/s.

12–36 Dióxido de carbono imóvel a 800 kPa e 400 K é acelerado de forma isentrópica até um número de Mach de 0,6. Determine a temperatura e pressão do dióxido de carbono após a aceleração. *Respostas:* 380 K, 636 kPa

12–37 Ar a 200 kPa, 100°C e número de Mach Ma = 0,8 escoa através de um duto. Calcule a velocidade e a pressão de estagnação, temperatura e massa específica do ar.

12–38 Reconsidere o Problema 12–37. Usando o EES (ou outro software), estude o efeito dos números de Mach no intervalo entre 0,1 e 2 sobre velocidade, pressão de estagnação, temperatura e massa específica do ar. Faça um gráfico de cada parâmetro como função do número de Mach.

12–39 Um avião foi projetado para cruzar a um número de Mach Ma = 1,4 a 8.000 m, onde a temperatura atmosférica é de 236,15 K. Determine a temperatura de estagnação sobre a borda de ataque da asa.

Escoamento Isentrópico através de Bocais

12–40C Considere o escoamento subsônico em um bocal convergente com condições de entrada fixas. Qual é o efeito da queda da contrapressão até a pressão crítica sobre (*a*) a velocidade de saída, (*b*) a pressão de saída e (*c*) a vazão em massa através do bocal?

12–41C Considere o escoamento subsônico em um bocal convergente com condições especificadas na entrada do bocal e pressão crítica na saída do bocal. Qual é o efeito da queda da contrapressão bem abaixo da pressão crítica sobre (*a*) a velocidade de saída, (*b*) a pressão de saída e (*c*) a vazão em massa através do bocal?

12–42C Considere um bocal convergente e um bocal convergente-divergente com as mesmas áreas de garganta. Para as mesmas condições de entrada, como você compararia as vazões em massa através desses dois bocais?

12–43C Considere o escoamento de gás através de um bocal convergente com condições de entrada especificadas. Sabemos que a velocidade mais alta que o fluido pode atingir na saída do bocal é a velocidade sônica, ponto em que a vazão em massa através do bocal é máxima. Se fosse possível atingir velocidades hipersônicas na saída do bocal, como isso afetaria a vazão em massa através do bocal?

12–44C Como o parâmetro Ma* difere do número de Mach Ma?

12–45C O que aconteceria se tentássemos desacelerar um fluido supersônico com um difusor divergente?

12–46C O que aconteceria se tentássemos desacelerar um fluido supersônico com um difusor divergente?

12–47C Considere o escoamento isentrópico de um fluido através de um bocal convergente-divergente e velocidade subsônica na garganta. Como a seção divergente afeta (*a*) a velocidade, (*b*) a pressão e (*c*) a vazão em massa do fluido?

12–48C É possível acelerar um fluido até velocidades supersônicas com uma velocidade diferente da velocidade sônica na garganta? Explique.

12–49 Explique por que a taxa máxima de escoamento por unidade de área de determinado gás depende apenas de $P_0/\sqrt{T_0}$. Para um gás ideal com $k = 1{,}4$ e $R = 0{,}287$ kJ/kg · K, encontre a constante a de forma que $\dot{m}/A^* = aP_0/\sqrt{T_0}$.

12–50 Para que um gás ideal obtenha uma expressão para a relação entre a velocidade do som, na qual Ma = 1, e a velocidade do som com base na temperatura de estagnação c^*/c_0.

12–51 Um gás ideal escoa através de uma passagem que primeiro converge e, em seguida, diverge durante um processo de escoamento adiabático, reversível e estacionário. Para o escoamento subsônico na entrada, represente a variação da pressão, velocidade e o número de Mach, juntamente com o comprimento do bocal quando o número de Mach na área de escoamento mínimo for igual à unidade.

12–52 Repita o Problema 12–51 para o escoamento supersônico na entrada.

12–53 Ar entra em um bocal a 0,2 MPa, 350 K e a uma velocidade de 150 m/s. Considerando o escoamento isentrópico, determine a pressão e a temperatura do ar em um local onde a velocidade do ar é igual à velocidade do som. Qual é a relação entre a área desse local e a área da entrada?
Respostas: 301,0 K, 0,118 MPa, 0,629

12–54 Repita o Problema 12–53 considerando que a velocidade de entrada é desprezível.

12–55 Ar entra em um bocal a 30 psia, 630 R e a uma velocidade de 450 pés/s. Considerando o escoamento isentrópico, determine a pressão e a temperatura do ar em um local onde a velocidade do ar é igual à velocidade do som. Qual é a relação entre a área desse local e a área da entrada?
Respostas: 539 R, 17,4 psia, 0,574

12–56 Ar entra em um bocal convergente-divergente a 0,8 MPa com velocidade desprezível. Considerando o escoamento isentrópico, determine a contrapressão que resultará em um número de Mach de saída de 1,8.
Resposta: 0,139 MPa

12–57 Nitrogênio entra em um bocal convergente-divergente a 700 kPa e 400 K com velocidade desprezível. Determine a velocidade crítica, a pressão, temperatura e massa específica no bocal.

12–58 Um gás ideal com $k = 1{,}4$ escoa através de um bocal de forma que o número de Mach seja 2,4 e a área de escoamento, 25 cm^2. Considerando o escoamento isentrópico, determine a área de escoamento no local onde o número de Mach é 1,2.

12–59 Repita o Problema 12–58 para um gás ideal com $k = 1{,}33$.

12–60 Ar a 900 kPa e 400 K entra em um bocal convergente com velocidade desprezível. A área de garganta do bocal é de 10 cm^2. Considerando o escoamento isentrópico, calcule e faça um gráfico da pressão de saída, a velocidade de saída e a vazão em massa versus a contrapressão P_b for $0{,}9 \geq P_b \geq 0{,}1$ MPa.

12–61 Reconsidere o Problema 12–60. Usando o EES (ou outro software), solucione o problema para as condições de entrada a 1 MPa e 1.000 K

Ondas de Choque e Ondas de Expansão

12–62C Uma onda de choque pode se desenvolver na seção convergente de um bocal convergente-divergente? Explique.

12–63C O que representam os estados da linha de Fanno e de Rayleigh? O que representam os pontos de intersecção dessas duas curvas?

12–64C O número de Mach de um fluido pode ser maior do que 1 após uma onda de choque normal? Explique.

12–65C Como o choque normal afeta (*a*) a velocidade do fluido, (*b*) a temperatura estática, (*c*) a temperatura de estagnação, (*d*) a pressão estática e (*e*) a pressão de estagnação?

12–66C Como ocorre o choque oblíquo? Em que os choques oblíquos são diferentes dos choques normais?

12–67C Para que um choque oblíquo ocorra, o escoamento a montante precisa ser supersônico? O escoamento a jusante de um choque oblíquo precisa ser subsônico?

12–68C É possível analisar um choque oblíquo como um choque normal, desde que o componente normal da velocidade (normal à superfície do choque) seja utilizado na análise. Você concorda com essa alegação?

12–69C Considere o escoamento de ar supersônico que se aproxima do nariz de uma cunha bidimensional e experimenta um choque oblíquo. Sob quais condições um choque oblíquo se destaca do nariz da cunha e forma uma onda de proa? Qual é o valor numérico do ângulo de choque do choque destacado no nariz?

12–70C Considere o escoamento supersônico imposto ao nariz arredondado de um avião. O choque oblíquo que se forma na frente do nariz será do tipo colado ou destacado? Explique.

12–71C As relações isentrópicas dos gases ideais se aplicarão aos escoamentos através de (*a*) ondas de choque normais, (*b*) ondas de choque oblíquas e (*c*) ondas de expansão de Prandtl–Meyer?

12–72 Para um gás ideal que escoa através de um choque normal, desenvolva uma relação para V_2/V_1 em termos de k, Ma_1 e Ma_2.

12–73 Ar entra em um bocal convergente-divergente de um túnel de vento supersônico a 1 MPa e 300 K com velocidade baixa. Se uma onda de choque normal ocorrer no plano de saída do bocal a Ma = 2, determine a pressão, temperatura, o número de Mach, a velocidade e a pressão de estagnação após a onda de choque.

Respostas: 0,575 MPa, 281 K, 0,577, 194 m/s, 0,721 MPa

12–74 Ar entra em um bocal convergente-divergente com velocidade baixa a 2,0 MPa e 100°C. Se a saída de área do bocal for 3,5 vezes a área de garganta, qual é a contrapressão necessária para produzir um choque normal no plano de saída do bocal?

Resposta: 0,661 MPa

12–75 Qual deve ser a contrapressão do Problema 12–74 para que um choque normal ocorra em um local onde a área de seção transversal seja o dobro da área da garganta?

12–76 Ar que escoa de forma permanente em um bocal passa por um choque normal a um número de Mach Ma = 2,5. Se a pressão e a temperatura do ar são 61,64 kPa e 262,15 K, respectivamente, a montante do choque, calcule a pressão, temperatura, velocidade, o número de Mach e a pressão de estagnação a jusante do choque. Compare esses resultados com aqueles para o hélio que passa por um choque normal nas mesmas condições.

12–77 Calcule a variação da entropia do ar através da onda de choque normal no Problema 12–76.

12–78 Ar entra em um choque normal a 22,6 kPa, 217 K e 680 m/s. Calcule a pressão de estagnação e o número de Mach a montante do choque, bem como a pressão, temperatura, velocidade, número de Mach e pressão de estagnação a jusante do choque.

12–79 Calcule a variação da entropia do ar através da onda de choque normal no Problema 12–78.

Resposta: 0,155 kJ/kg · K

12–80 Usando o EES (ou outro software), calcule e represente graficamente a variação da entropia do ar através do choque normal para números de Mach a montante entre 0,5 e 1,5 em incrementos de 0,1. Explique por que as ondas de choque normais só podem ocorrer para números de Mach a montante maiores do que Ma = 1.

12–81 Considere o escoamento de ar supersônico que se aproxima do nariz de uma cunha bidimensional ao número de Mach 5. Usando a Figura 12–41, determine o ângulo de choque mínimo e o ângulo de deflexão máximo que um choque oblíquo direto pode ter.

12–82 Ar que escoa a 60 kPa, 240 K e ao número de Mach 3,4 é imposto a uma cunha bidimensional de semi-ângulo 12°. Determine os dois ângulos de choque oblíquo possíveis, β_{fraco} e β_{forte}, que poderiam ser formados por essa cunha. Para cada caso, calcule a pressão, temperatura e o número de Mach a jusante do choque oblíquo, compare e discuta.

12–83 Considere o escoamento supersônico às condições a montante de 70 kPa, 260 K e ao número de Mach 2,4 sobre uma cunha bidimensional de semi-ângulo 10°. Se o eixo da cunha for inclinado em 25° com relação ao escoamento de ar a montante, determine o número de Mach a jusante, a pressão e temperatura acima da cunha.

Respostas: 3,105, 23,8 kPa, 191 K

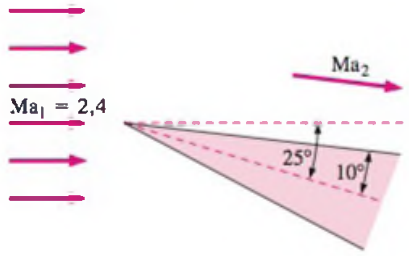


FIGURA P12-83

12–84 Reconsidere o Problema 12–83. Determine o número de Mach a jusante, a pressão e temperatura abaixo da cunha para um choque oblíquo forte e número de Mach a montante de 5.

12–85 Ar que escoa a P_1 = 40 kPa, T_1 = 280 K e Ma_1 = 3,6 é forçado a passar por uma curva de expansão de 15°. Determine o número de Mach, a pressão e temperatura do ar após a expansão.

Respostas: 4,81, 8,31 kPa, 179 K

Escoamento em Duto com Transferência de Calor e Atrito Desprezível (Escoamento de Rayleigh)

12–86C Qual é o aspecto característico do escoamento de Rayleigh? Quais são as principais hipóteses associadas ao escoamento de Rayleigh?

12-87C Em um diagrama *T-s* do escoamento de Rayleigh, o que representam os pontos na linha de Rayleigh?

12–88C Qual é o efeito do ganho de aquecimento e perda de calor sobre a entropia do fluido durante o escoamento de Rayleigh?

12–89C Considere o escoamento subsônico de Rayleigh do ar com um número de Mach de 0,92. Agora o calor é transferido para o fluido e o número de Mach aumenta para 0,95. A temperatura T do fluido aumenta, diminui ou permanece constante durante esse processo. E a temperatura de estagnação T_0?

12–90C Qual é o feito do aquecimento do fluido sobre a velocidade do escoamento no escoamento subsônico de Rayleigh? Responda a mesma pergunta para o escoamento supersônico de Rayleigh.

12–91C Considere o escoamento subsônico de Rayleigh que é acelerado até a velocidade sônica (Ma = 1) na saída do duto pelo aquecimento. Se o fluido continuar sendo aquecido, o escoamento na saída do duto será supersônico, subsônico ou permanecerá sônico?

12–92 Considere uma câmara de combustão tubular com 12 cm de diâmetro. O ar entra no tubo a 500 K, 400 kPa e 70 m/s. Combustível com valor de aquecimento de 39.000 kJ/kg é queimado quando é aspergido no ar. Se o número de saída de Mach é 0,8, determine a taxa com a qual o combustível é queimado e a temperatura de saída. Considere a combustão completa e despreze o aumento da vazão em massa devido à massa do combustível.

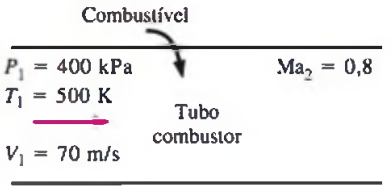


FIGURA P12-92

12–93 Ar entra em um duto retangular a T_1 = 300 K, P_1 = 420 kPa e Ma_1 = 2. Calor é transferido para o ar na quantidade de 55 kJ/kg, à medida que escoa através do duto. Desprezando as perdas por atrito, determine a temperatura e o número de Mach na saída do duto.
Respostas: 386 K, 1,64

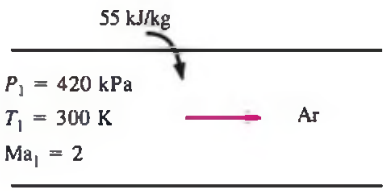


FIGURA P12–93

12–94 Repita o Problema 12–92 considerando que o ar é resfriado na quantidade de 55 kJ/kg.

12–95 Ar é aquecido à medida que escoa de modo subsônico através de um duto. Quando a quantidade de transferência de calor atinge 60 kJ/kg, observa-se que o escoamento é estrangulado, e que a velocidade e pressão estática medidas são 620 m/s e 270 kPa. Desprezando as perdas por atrito, determine a velocidade, a temperatura estática e a pressão estática na entrada do duto.

12–96 Ar entra em um duto sem atrito com V_1 = 70 m/s, T_1 = 600 K e P_1 = 350 kPa. Deixando a temperatura de saída T_2 variar de 600 a 5.000 K, avalie a variação da entropia a intervalos de 200 K, e faça um gráfico da linha de Rayleigh em um diagrama *T-s*.

12–97 Ar comprimido do compressor de uma turbina de gás entra na câmara de compressão a T_1 = 550 K, P_1 = 600 kPa e Ma_1 = 0,2 a uma taxa de 0,3 kg/s. Por meio da combustão, o calor é transferido para o ar a uma taxa de 200 kJ/s à medida que escoa através do duto com atrito desprezível. Determine o número de Mach na saída do duto e a queda da pressão de estagnação $P_{01} - P_{02}$ durante esse processo.
Respostas: 0,319, 21,8 kPa

12–98 Repita o Problema 12–97 para uma taxa de transferência de calor de 300 kJ/s.

12–99 Gás argônio entra em um duto com área de seção transversal constante a Ma_1 = 0,2, P_1 = 320 kPa e T_1 = 400 K a uma taxa de 0,8 kg/s. Desprezando as perdas por atrito, determine a mais alta taxa de transferência de calor para o argônio sem reduzir a vazão em massa.

12–100 Considere o escoamento supersônico do ar através de um duto com 6 cm de diâmetro e atrito desprezível. O ar entra no duto a Ma_1 = 1,8, P_{01} = 210 kPa e T_{01} = 600 K, e é desacelerado pelo aquecimento. Determine a mais alta temperatura com a qual o ar possa ser aquecido pela adição de calor, enquanto a vazão em massa permanece constante.

Escoamento em Duto Adiabático com Atrito (Escoamento de Fanno)

12–101C Qual é o aspecto característico do escoamento de Fanno? Quais são as principais hipóteses associadas ao escoamento de Fanno?

12–102C Em um diagrama *T-s* do escoamento de Fanno, o que representam os pontos na linha de Fanno?

12–103C Qual é o efeito do atrito sobre a entropia do fluido durante o escoamento de Fanno?

12–104C Considere o escoamento subsônico de Fanno do ar com número de entrada de Mach 0,70. Se o número de Mach aumentar para 0,90 na saída do duto como resultado do atrito, a (*a*) temperatura de estagnação T_0, (*b*) a pressão de estagnação P_0 e (*c*) a entropia *s* do fluido aumentam, diminuem ou permanecem constantes durante esse processo?

12–105C Considere o escoamento subsônico de Fanno do ar com número de entrada de Mach 1,8. Se o número de Mach aumentar para 1,2 na saída do duto como resultado do atrito, a (*a*) temperatura de estagnação T_0, (*b*) a pressão de estagnação P_0 e (*c*) a entropia *s* do fluido aumentam, diminuem ou permanecem constantes durante esse processo?

12–106C Qual é o efeito do atrito sobre a velocidade do escoamento no escoamento subsônico de Fanno? Responda a mesma pergunta para o escoamento supersônico de Fanno.

12–107C Considere o escoamento subsônico de Fanno acelerado até a velocidade sônica (Ma = 1) na saída do duto como resultado dos efeitos do atrito. Se o comprimento do duto aumentasse mais, o escoamento na saída do duto seria supersônico, subsônico ou permaneceria sônico? A vazão em massa do fluido aumentaria, diminuiria ou permaneceria constante como resultado do aumento do comprimento do duto?

12–108C Considere o escoamento subsônico de Fanno que é desacelerado até a velocidade sônica (Ma = 1) na saída do duto como resultado dos efeitos do atrito. Se o comprimento do duto aumentasse mais, o escoamento na saída do duto seria supersônico, subsônico ou permaneceria sônico? A vazão em massa do

fluido aumentaria, diminuiria ou permaneceria constante como resultado do aumento do comprimento do duto?

12–109 Ar entra em um duto adiabático com 5 cm de diâmetro a $Ma_1 = 0{,}2$, $T_1 = 400$ K e $P_1 = 200$ kPa. O fator médio de atrito do duto é estimado como 0,016. Se o número de Mach na saída do duto for 0,8, determine o comprimento do duto, a temperatura, a pressão e a velocidade na saída do duto.

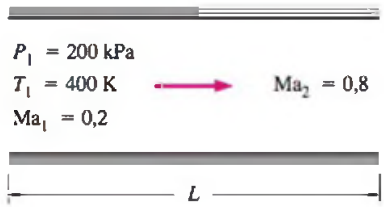


FIGURA P12–109

12–110 Ar entra em um duto adiabático com 15 m de comprimento, 4 cm de diâmetro a $V_1 = 70$ m/s, $T_1 = 500$ K e $P_1 = 300$ kPa. O fator médio de atrito do duto é estimado como 0,023. Determine o número de Mach na saída do duto e a vazão em massa do ar.

12–111 Ar de uma sala a $T_0 = 290$ K e $P_0 = 95$ kPa é retirado de forma constante por uma bomba a vácuo através de um tubo adiabático com 1 cm de diâmetro, 50 cm de comprimento e um bocal convergente na entrada. O escoamento na seção do bocal pode ser considerado isentrópico, e o fator de atrito médio do duto pode ser considerado 0,018. Determine a taxa máxima de escoamento de massa do ar que pode ser sugado através desse tubo e o número de Mach na entrada do tubo.

Respostas: 0,0136 kg/s, 0,523

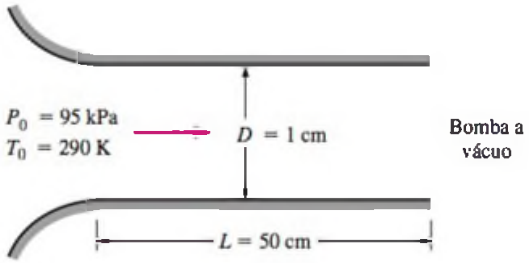


FIGURA P12–111

12–112 Repita o Problema 12–111 para um fator de atrito de 0,025 e comprimento de tubo de 1 m.

12–113 Ar entra em um duto adiabático com 5 cm de diâmetro, 4 m de comprimento e condições de entrada de $Ma_1 = 2{,}8$, $T_1 = 380$ K e $P_1 = 80$ kPa. Observa-se que um choque normal ocorre em um local que está a 3 m da entrada. Tomando o fator médio de atrito como 0,007, determine a velocidade, temperatura e pressão na saída do duto.

Respostas: 572 m/s, 813 K, 328 kPa

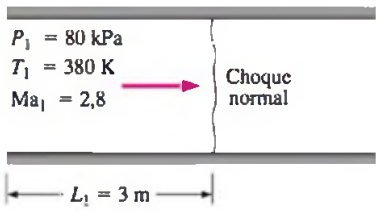


FIGURA P12–113

12–114 Ar entra em um duto adiabático com 20 cm de diâmetro a condições de entrada $V_1 = 150$ m/s, $T_1 = 500$ K e $P_1 = 200$ kPa. Para um fator de atrito médio de 0,014, determine o comprimento de duto na entrada na qual a velocidade de entrada é o dobro. Determine também a queda de pressão ao longo daquela seção do duto.

12–115 Considere o escoamento de ar subsônico através de um duto adiabático com 10 cm de diâmetro a condições de entrada $T_1 = 330$ K, $P_1 = 180$ kPa e $Ma_1 = 0{,}1$. Considerando o fator de atrito médio como 0,02, determine o comprimento do duto necessário para acelerar o escoamento até um número de Mach de unidade. Calcule também o comprimento do duto a intervalos do número de Mach de 0,1, e faça um gráfico do comprimento do duto em relação ao número de Mach para $0{,}1 \le Ma \le 1$. Discuta os resultados.

12–116 Gás argônio com $k = 1{,}667$, $c_p = 0{,}5203$ kJ/kg · K e $R = 0{,}2081$ kJ/kg · K entra em um duto adiabático com 8 cm de diâmetro com $V_1 = 70$ m/s, $T_1 = 520$ K e $P_1 = 350$ kPa. Considerando o fator de atrito médio como 0,005 e deixando a temperatura de saída T_2 variar de 540 K a 400 K, avalie a variação da entropia a intervalos de 10 K, e represente graficamente a linha de Fanno em um diagrama *T-s*.

Problemas de Revisão

12–117 Ar em um pneu de automóvel é mantido à pressão de 220 kPa (manométrica) em um ambiente no qual a pressão atmosférica é 94 kPa. O ar do pneu está à temperatura ambiente de 25°C. Após um acidente surge um vazamento de 4 mm de diâmetro no pneu. Considerando o escoamento isentrópico, determine a vazão em massa inicial do ar através do vazamento.

Resposta: 0,554 kg/min

12–118 O empuxo desenvolvido pelo motor de um Boeing 777 é de cerca de 380 kN. Considerando o escoamento estrangulado nos bocais, determine a vazão em massa do ar através do bocal. Considere as condições ambientais 295 K e 95 kPa.

12–119 Uma sonda de temperatura fixa inserida em um duto no qual o ar escoa a 250 m/s dá a leitura de 85°C. Qual é a temperatura real do ar?

Resposta: 53,9°C

12–120 Nitrogênio entra em um trocador de calor com escoamento permanente a 150 kPa, 10°C e 100 m/s, e recebe calor na quantidade de 150 kJ/kg à medida que escoa através dele. O nitrogênio sai do trocador de calor a 100 kPa com uma velocidade de 200 m/s. Determine a pressão de estagnação e a temperatura do nitrogênio nos estados de entrada e saída.

12–121 Derive uma expressão para a velocidade do som com base na equação de estado de van der Waals $P = RT(v - b) - a/v^2$. Usando essa relação, determine a velocidade do som no dióxido de carbono a 50°C e 200 kPa, e compare o resultado com aquele obtido quando se considera o comportamento de gás ideal. As constantes de van der Waals do dióxido de carbono são $a = 364{,}3$ kPa · m^6/kmol^2 e $b = 0{,}0427$ m^3/kmol.

17–122 Obtenha a Equação 12-10 começando pela Equação 12–9 e usando a regra cíclica e as relações entre as propriedades termodinâmicas.

$$\frac{c_p}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \quad \text{e} \quad \frac{c_v}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v.$$

12–123 Nos gases ideais que passam por escoamentos isentrópicos, obtenha as expressões para P/P^*, T/T^* e ρ/ρ^* como funções de k e Ma.

12–124 Usando as Equações 12–4, 12–13 e 12–14, verifique isso para o escoamento permanente dos gases ideais $dT_0/T = dA/A + (1 - \text{Ma}^2)\, dV/V$. Explique o efeito do aquecimento e as variações de área sobre a velocidade de um gás ideal no escoamento permanente (*a*) para escoamento subsônico e (*b*) para escoamento supersônico.

12–125 Um avião subsônico voa a 3.000 m de altitude, na qual as condições atmosféricas são 70,109 kPa e 268,65 K. Uma sonda estática de Pitot mede a diferença entre as pressões estática e de estagnação como 22 kPa. Calcule a velocidade do avião e o número de Mach de vôo.

Respostas: 209 m/s, 0,637

12–126 Faça um gráfico $\dot{m}\sqrt{RT_0}/(AP_0)$ do parâmetro do escoamento de massa em função do número de Mach para $k = 1{,}2$, 1,4 e 1,6 no intervalo $0 \le \text{Ma} \le 1$.

12–127 Hélio entra em um bocal a 0,8 MPa, 500 K e a uma velocidade de 120 m/s. Considerando o escoamento isentrópico, determine a pressão e a temperatura do hélio em um local onde a velocidade do ar é igual à velocidade do som. Qual é a relação entre a área desse local e a área da entrada?

12–128 Repita o Problema 12–127 considerando que a velocidade de entrada é desprezível.

12–129 Ar a 0,9 MPa e 400 K entra em um bocal convergente com uma velocidade de 180 m/s. A área de garganta é 10 cm^2. Considerando o escoamento isentrópico, calcule e faça um gráfico da vazão em massa através do bocal, a velocidade de saída, o número de Mach de saída e a relação entre a pressão de saída e de estagnação versus a relação entre a contrapressão e a pressão de estagnação para o intervalo de contrapressão $0{,}9 \ge P_b \ge 0{,}1$ MPa.

12–130 Vapor a 6,0 MPa e 700 K entra em um bocal convergente com velocidade desprezível. A área de garganta do bocal é de 8 cm^2. Considerando o escoamento isentrópico, faça um gráfico da pressão de saída, a velocidade de saída e a vazão em massa através do bocal versus a contrapressão P_b para $6{,}0 \ge P_b \ge 3{,}0$ MPa. Trate o vapor como um gás ideal com $k = 1{,}3$, $c_p = 1{,}872$ kJ/kg · K, e $R = 0{,}462$ kJ/kg · K.

12–131 Encontre a expressão da relação entre a pressão de estagnação após uma onda de choque e a pressão estática antes da onda de choque como função de k e do número de Mach a montante da onda de choque Ma_1.

12–132 Nitrogênio entra em um bocal convergente-divergente a 700 kPa e 300 K com uma velocidade desprezível e passa por um choque normal em um local no qual o número de Mach é Ma = 3,0. Calcule pressão, temperatura, velocidade, número de Mach e pressão de estagnação a jusante do choque. Compare esses resultados com aqueles para o ar que passa por um choque normal nas mesmas condições.

12–133 Um avião voa com um número de Mach $\text{Ma}_1 = 0{,}8$ a uma altitude de 7.000 m, na qual a pressão é 41,1 kPa e a temperatura é 242,7 K. O difusor na entrada do motor tem um número de saída de Mach de $\text{Ma}_2 = 0{,}3$. Para uma vazão em massa de 65 kg/s, determine a elevação da pressão estática através do difusor e a área de saída.

12–134 Hélio se expande em um bocal de 1 MPa, 500 K e velocidade desprezível até 0,1 MPa. Calcule as áreas da garganta e da saída para uma vazão em massa de 0,25 kg/s, assumindo que o bocal é isentrópico. Por que esse bocal deve ser convergente-divergente?

Respostas: 3,51 cm^2, 5,84 cm^2

12–135 Usando o software EES e as relações da Tabela A–13, calcule as funções de escoamento compressível unidimensional de um gás ideal com $k = 1{,}667$ e apresente os resultados duplicando a Tabela A–13.

12–136 Usando o software EES e as relações da Tabela A–14, calcule as funções de choque normal unidimensional de um gás ideal com $k = 1{,}667$ e apresente os resultados duplicando a Tabela A–14.

12–137 Considere uma mistura equimolar de oxigênio e nitrogênio. Determine a temperatura crítica, a pressão e a massa específica para a temperatura de estagnação e pressão de 800 K e 500 kPa, respectivamente.

12–138 Usando o EES (ou outro software), determine a forma de um bocal convergente-divergente para o ar com vazão em massa de 3 kg/s e condições de estagnação de entrada de 1.400 kPa e 200°C. Considere que o escoamento seja isentrópico. Repita os cálculos para incrementos de 50 kPa de quedas de pressão para uma pressão de saída de 100 kPa. Faça um gráfico do bocal em escala. Também calcule e faça um gráfico do número de Mach ao longo do bocal.

12–139 Usando o EES (ou outro software) e as relações dadas na Tabela A–13, calcule as funções de escoamento compressível isentrópico unidimensional, variando o número de Mach a montante de 1 a 10 em incrementos de 0,5 para o ar com $k = 1{,}4$.

12–140 Repita o Problema 12–139 para o metano com $k = 1{,}3$.

12–141 Usando o EES (ou outro software) e as relações dadas na Tabela A–14, gere as funções de choque normal unidimensional, variando o número de Mach a montante de 1 a 10 em incrementos de 0,5 para o ar com $k = 1{,}4$.

12–142 Repita o Problema 12–141 para o metano com $k = 1{,}3$.

12–143 Ar de uma sala a $T_0 = 300$ K e $P_0 = 100$ kPa é retirado de forma constante por uma bomba a vácuo através de um tubo adiabático com 3 cm de diâmetro, 2 m de comprimento e um bocal convergente na entrada. O escoamento na seção do bocal pode ser considerado isentrópico. A pressão estática medida é 97 kPa na entrada do tubo e 55 kPa na saída do tubo. Determine a vazão de ar através do duto, a velocidade do ar na saída do duto e o fator de atrito médio do duto.

12–144 Ar entra em um duto adiabático de 4 cm de diâmetro a condições de entrada de $Ma_1 = 2{,}2$, $T_1 = 250$ K e $P_1 = 80$ kPa, e sai a um número de Mach de $Ma_2 = 1{,}8$. Assumindo o fator médio de atrito de 0,03, determine velocidade, temperatura e pressão na saída do duto.

12–145 Ar é resfriado à medida que escoa através de um duto com 20 cm de diâmetro. As condições de entrada são $Ma_1 = 1{,}2$, $T_{01} = 350$ K e $P_{01} = 240$ kPa e o número de Mach de saída é $Ma_2 = 2{,}0$. Desprezando os efeitos do atrito determine a taxa de resfriamento do ar.

12–146 Ar é aquecido à medida que escoa de modo subsônico através de um duto quadrado de 10 cm × 10 cm. As propriedades do ar na entrada são mantidas a $Ma_1 = 0{,}4$, $P_1 = 400$ kPa e $T_1 = 360$ K durante todo o tempo. Desprezando as perdas por atrito, determine a mais alta taxa de transferência de calor para o ar no duto, sem afetar as condições de entrada.

Resposta: 1958 kW

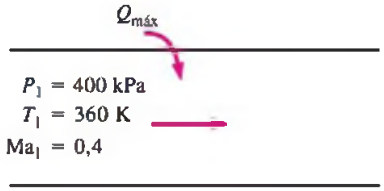


FIGURA P12–146

12–147 Repita o Problema 12–146 para o hélio.

12–148 Ar é acelerado à medida que é aquecido em um duto com atrito desprezível. O ar entra a $V_1 = 100$ m/s, $T_1 = 400$ K e $P_1 = 35$ kPa e, em seguida, sai a um número de Mach de $Ma_2 = 0{,}8$. Determine a transferência de calor para o ar em kJ/kg. Determine também a quantidade máxima de transferência de calor sem reduzir a vazão em massa do ar.

12–149 Ar a condições sônicas, temperatura e pressão estáticas de 500 K e 420 kPa, respectivamente, deve ser acelerado até um número de Mach de 1,6 resfriando à medida que escoa através de um canal com área de seção transversal constante. Desprezando os efeitos do atrito, determine a transferência de calor do ar necessária em kJ/kg.

Resposta: 69,8 kJ/kg

12–150 Gases de combustão com razão de calor específico média de $k = 1{,}33$ e constante de gás de $R = 0{,}280$ kJ/kg · K entram em um duto adiabático com 10 cm de diâmetro com condições de entrada de $Ma_1 = 2$, $T_1 = 510$ K e $P_1 = 180$ kPa. Se ocorrer um choque normal em um local a 2 m da entrada, determine a velocidade, a temperatura e a pressão na saída do duto. Considere o fator de atrito médio do duto de 0,010.

12–151 Considere o escoamento de ar supersônico através de um duto adiabático com 18 cm de diâmetro a condições de entrada de $T_1 = 530$ K, $P_1 = 80$ kPa e $Ma_1 = 3$. Considerando o fator médio de atrito como 0,03, determine o comprimento do duto necessário para desacelerar o escoamento até um número de Mach de unidade. Calcule também o comprimento do duto a intervalos do número de Mach de 0,25, e faça um gráfico do comprimento do duto em função do número de Mach para $1 \leq Ma \leq 3$. Discuta os resultados.

12–152 Ar escoa através de um duto adiabático com 6 cm de diâmetro e condições de entrada de $V_1 = 120$ m/s, $T_1 = 400$ K e $P_1 = 100$ kPa e número de Mach de saída de $Ma_2 = 1$. Para estudar o efeito do comprimento do duto sobre a vazão em massa e a velocidade de entrada, o duto agora é estendido até seu comprimento duplicar, enquanto P_1 e T_1 são mantidos constantes. Considerando o fator de atrito médio da 0,02, calcule a vazão em massa e a velocidade de entrada para os diversos comprimentos de extensão, e represente graficamente contra o comprimento da extensão. Discuta os resultados.

12–153 Em um escoamento compressível as medidas de velocidade com uma sonda de Pitot podem apresentar erros grandes caso sejam usadas as relações desenvolvidas para o escoamento incompressível. Assim, é essencial que as relações de escoamento compressível sejam usadas na avaliação da velocidade de escoamento com as medições da sonda de Pitot. Considere o escoamento supersônico do ar através de um canal. Uma sonda inserida no escoamento faz com que uma onda de choque ocorra a montante da sonda, e mede a pressão e a temperatura de estagnação como 620 kPa e 340 K, respectivamente. Se a pressão estática a montante for 110 kPa, determine a velocidade de escoamento.

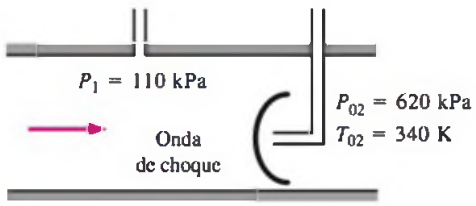


FIGURA P12–153

Problemas de Projeto e Ensaio

12–154 Descubra se existe um túnel de vento supersônico em sua universidade. Se houver, consiga as dimensões do túnel de vento, as temperaturas e pressões, bem como o número de Mach em diversos locais durante a operação. Para quais experimentos típicos o túnel de vento é usado?

12–155 Considerando que você tem um termômetro e um dispositivo de medição da velocidade do som em um gás, explique como é possível determinar a fração molar do hélio em uma mistura de gás hélio e ar.

12–156 Projete um túnel de vento cilíndrico com 1 m de comprimento, cujo diâmetro é de 25 cm e que opera a um número de Mach de 1,8. O ar atmosférico entra no túnel de vento através de um bocal convergente-divergente no qual ele é acelerado a velocidades supersônicas. O ar sai do túnel através de um difusor convergente-divergente, no qual é desacelerado até uma velocidade muito baixa antes de entrar na seção do ventilador. Despreze todas as irreversibilidades. Especifique as temperaturas e pressões em diversos locais, bem como a vazão em massa do ar a condições de escoamento permanente. Por que às vezes é preciso desumidificar o ar antes dele entrar no túnel de vento?

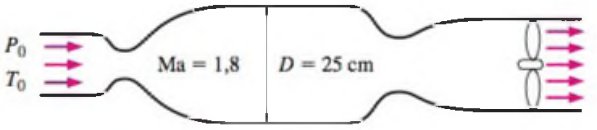


FIGURA P12–156

CAPÍTULO

13

ESCOAMENTO EM CANAL ABERTO

O *escoamento em canal aberto* implica ocorrer em um canal aberto para a atmosfera, mas o escoamento em um conduíte também é em canal aberto se o líquido não preencher completamente o conduíte e, portanto, há uma superfície livre. O escoamento em tubos discutido no Capítulo 8 envolve conduites fechados preenchidos com um líquido ou gás. Um escoamento em canal aberto, porém, envolve apenas líquidos (em geral água ou água servida) expostos a um gás (em geral ar a pressão atmosférica).

O escoamento em tubos é induzido por uma diferença de pressão, enquanto que o escoamento em um canal é induzido naturalmente pela gravidade. O escoamento da água em um rio, por exemplo, é induzido pela diferença de elevação a montante e a jusante. A taxa de escoamento em um canal aberto é estabelecida pelo balanço dinâmico entre a gravidade e o atrito. A inércia do líquido que escoa também se torna importante no escoamento não permanente. A superfície livre coincide com a linha piezométrica (HGL) e a pressão é constante ao longo da superfície livre. Mas a altura da superfície livre em relação ao fundo do canal e, portanto, todas as dimensões da seção transversal do escoamento ao longo do canal não são conhecidas *a priori* — elas variam juntamente com a velocidade média do escoamento. A pressão em um canal varia hidrostaticamente na direção vertical quando o escoamento é constante e completamente desenvolvido.

Neste capítulo apresentamos os princípios básicos dos escoamentos em canal aberto e as correlações associadas ao escoamento unidimensional e permanente em canais com seções transversais comuns. Vários livros sobre o assunto trazem informações detalhadas, e alguns deles estão listados na seção de referências.

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura este capítulo você deve ser capaz de:

- Entender como o escoamento em canais abertos difere do escoamento em tubos
- Aprender os diferentes regimes de escoamento em canais abertos e suas características
- Prever se devem ocorrer saltos hidráulicos durante o escoamento e calcular a fração de energia dissipada durante os saltos hidráulicos
- Aprender como as vazões em canais abertos são medidas usando comportas basculantes e barragens

FIGURA 13–1
Os escoamentos de canal aberto naturais e feitos pelo homem caracterizam-se por uma superfície livre aberta para a atmosfera.
© Vol. 16/PhotoDisc

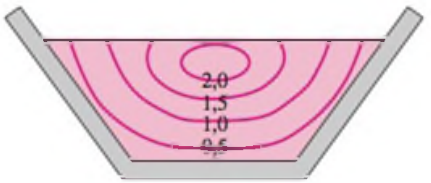


FIGURA 13–2
As curvas de velocidade relativas constantes típicas de um canal aberto de seção transversal trapezoidal.

13–1 • CLASSIFICAÇÃO DOS ESCOAMENTOS EM CANAL ABERTO

O *escoamento em canal aberto* se refere ao escoamento de líquidos em canais abertos para a atmosfera ou em conduítes parcialmente preenchidos e é caracterizado pela presença de uma interface líquido/gás chamada de *superfície livre* (Figura 13–1). A maioria dos escoamentos naturais encontrados, como o da água em córregos, rios e enchentes, bem como a drenagem da água da chuva nas estradas, estacionamentos e telhados, são em canal aberto. Os sistemas de escoamento em canal aberto feitos pelo homem incluem sistemas de irrigação, linhas de esgoto, valas de drenagem e calhas, e o projeto desses sistemas é uma área de aplicação importante da engenharia.

Em um canal aberto, a velocidade de escoamento é zero nas superfícies lateral no fundo por causa da condição de não-escorregamento, e máxima no plano médio da superfície livre (quando existem escoamentos secundários significativos, como nas curvas de canais não circulares, a velocidade máxima ocorre abaixo da superfície livre em algum lugar dentro dos 25% superiores da coluna de água, como mostra a Figura 13–2). Além disso, a velocidade de escoamento também varia na direção do escoamento na maioria dos casos. Assim, a distribuição da velocidade (e, portanto, do escoamento) nos canais abertos em geral é tridimensional. Na prática da engenharia, porém, as equações são escritas em termos da velocidade média em uma seção transversal do canal. Como a velocidade média varia apenas com a distância na direção da corrente x, V é uma variável **unidimensional**. A unidimensionalidade possibilita a solução de problemas significativos do mundo real de maneira simples por meio de cálculos à mão e restringimos nossas considerações neste capítulo aos escoamentos com velocidade média unidimensional. Apesar de sua simplicidade, as equações unidimensionais oferecem resultados excepcionalmente exatos em geral são usados na prática.

A condição de não-escorregamento nas paredes do canal dá origem a gradientes de velocidade, e a tensão de cisalhamento de parede τ_w se desenvolve ao longo das superfícies molhadas. A tensão de cisalhamento da parede varia ao longo do perímetro molhado em determinada seção transversal e oferece resistência ao escoamento. A intensidade dessa resistência depende da viscosidade do fluido e também dos gradientes de velocidade na superfície da parede.

Os escoamentos em canal aberto também são classificados como permanentes ou não-permanentes. Um escoamento é **permanente** se não houver variação com o tempo em determinado local. A quantidade representativa nos escoamentos em canal aberto é a **profundidade do escoamento** (ou alternativamente, a velocidade média) que pode variar ao longo do canal. O escoamento é *permanente* se a profundidade não variar com o tempo em nenhuma posição ao longo do canal (embora ela possa variar de um local para outro). Caso contrário, o escoamento é *não permanentes*. Neste capítulo, lidamos apenas com o escoamento permanente.

Escoamentos Uniformes e Variados

O escoamento em canais abertos também é classificado como *uniforme* ou *não uniforme* (também chamado de *variado*), dependendo de como a profundidade de escoamento y (a distância da parte inferior do canal até a superfície livre medida na direção vertical) varia ao longo do canal. O escoamento em um canal é **uniforme** se a profundidade de escoamento (e, portanto, a velocidade média) permanece constante. Caso contrário, é **não uniforme** ou **variado**, indicando que sua profundidade do escoamento varia com a distância na direção do escoamento. As condições de escoamento uniforme normalmente são encontradas na prática em seções longas e retas de canais com inclinação e seção transversal constante.

Em canais abertos de inclinação constante e seção transversal, o líquido acelera até que a perda de carga devida aos efeitos do atrito seja igual à queda da elevação. Nesse ponto o líquido atinge sua velocidade terminal e o escoamento uni-

forme é estabelecido. O escoamento permanece uniforme enquanto a inclinação, a seção transversal e a rugosidade da superfície do canal permanecem inalteradas. A profundidade do escoamento uniforme é chamada de **profundidade normal** y_n, que é um parâmetro de característica importante para os escoamentos em canal aberto (Figura 13–3).

A presença de uma obstrução do canal, como uma comporta ou uma variação na inclinação ou na seção transversal, faz com que a profundidade de escoamento varie e, portanto, o escoamento torna-se **variado** ou **não uniforme**. Tais escoamentos variados são comuns tanto nos canais abertos naturais quanto nos feitos pelo homem como rios, sistemas de irrigação e linhas de esgoto. O escoamento variado é chamado de **escoamento rapidamente variado (RVF)** se a profundidade de escoamento varia notadamente em uma distância relativamente curta (como o escoamento da água através de uma comporta parcialmente aberta ou sobre uma queda), e **escoamento gradualmente variado (GVF)** se a profundidade do escoamento variar gradualmente por uma distância grande ao longo do canal. Uma região de escoamento gradualmente variado em geral ocorre entre regiões de escoamento rapidamente variado e uniforme, como mostra a Figura 13–4.

Em escoamentos gradualmente variados, podemos trabalhar com a velocidade média unidimensional, assim como nos escoamentos uniformes. Entretanto, a velocidade média nem sempre é o parâmetro mais útil ou apropriado para escoamentos com variação rápida. A análise de escoamentos rapidamente variáveis é bastante complicada, particularmente quando ele não é permanente (como a quebra das ondas do mar na praia). Para uma taxa de descarga desconhecida, a altura do escoamento em uma região de escoamento gradualmente variada (ou seja, o perfil da superfície livre) em um canal aberto específico pode ser determinada passo a passo iniciando a análise em uma seção transversal na qual as condições de escoamento são conhecidas e avaliando a perda de carga, a queda de elevação e, então, a velocidade média de cada passo.

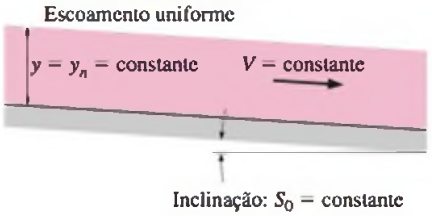


FIGURA 13–3
Para o escoamento uniforme em um canal aberto, a profundidade do escoamento y e a velocidade media do escoamento V permanecem constantes.

Escoamentos Laminar e Turbulento em Canais

Assim como o escoamento em tubos, o escoamento em canal aberto pode ser laminar, transicional ou turbulento dependendo do valor do **número de Reynolds**, expresso por

$$\text{Re} = \frac{\rho V R_h}{\mu} = \frac{V R_h}{\nu} \qquad (13\text{–}1)$$

Aqui V é a velocidade média do líquido, ν é a viscosidade cinemática e R_h é o **raio hidráulico** definido como a razão entre a área da seção transversal do escoamento A_c e o perímetro molhado p,

Raio hidráulico:
$$R_h = \frac{A_c}{p} \quad \text{(m)} \qquad (13\text{–}2)$$

Considerando que os canais abertos vêm com seções transversais bastante irregulares, o raio hidráulico serve como a dimensão característica e traz uniformidade ao

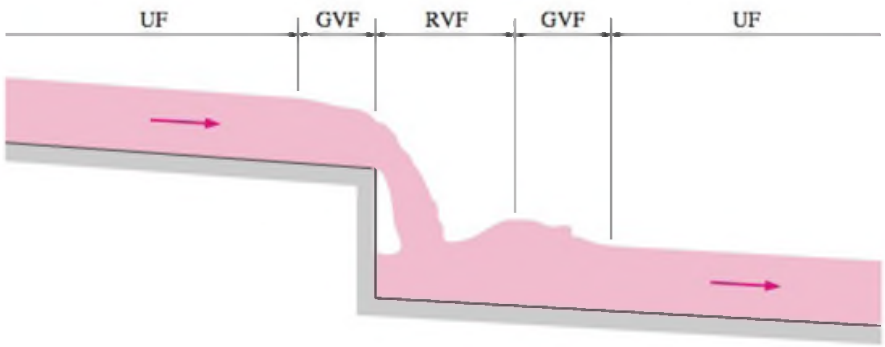


FIGURA 13–4
Escoamento uniforme (UF), escoamento gradualmente variado (GVF) e escoamento rapidamente variado (RVF) em um canal aberto.

FIGURA 13–5
A relação entre o raio hidráulico e o diâmetro hidráulico não é o que você imagina.

tratamento dos canais abertos. Além disso, o número de Reynolds é constante em toda a seção de escoamento uniforme de um canal aberto.

Você poderia esperar que o raio hidráulico fosse definido como metade do diâmetro hidráulico, mas infelizmente esse não é o caso. Lembre-se de que o diâmetro hidráulico D_h do escoamento em tubo é definido como $D_h = 4A_c/p$, de modo que o diâmetro hidráulico se reduz ao diâmetro do tubo para tubos circulares. Então, a relação entre o raio hidráulico e o diâmetro hidráulico torna-se

Diâmetro hidráulico:
$$D_h = \frac{4A_c}{p} = 4R_h \tag{13–3}$$

Assim, vemos que o raio hidráulico na verdade é *um quarto,* e não metade, do diâmetro hidráulico (Figura 13–5).

Portanto, um número de Reynolds com base no raio hidráulico é um quarto o número de Reynolds com base no diâmetro hidráulico como dimensão característica. Assim, não é surpresa que o escoamento seja laminar para $\mathrm{Re} \lesssim 2.000$ no escoamento em tubos, mas para $\mathrm{Re} \lesssim 500$ em escoamento em canal aberto. Além disso, o escoamento em canal aberto geralmente é turbulento para $\mathrm{Re} \gtrsim 2.500$ e para $500 \lesssim \mathrm{Re} \gtrsim 2.500$. O escoamento laminar é encontrado quando uma camada fina de água (como a água da chuva drenada para fora de uma estrada ou estacionamento) escoa com velocidade baixa.

A viscosidade cinemática da água a 20°C é de $1{,}00 \times 10^{-6}$ m²/s, e a velocidade de escoamento média em canais abertos em geral está acima de 0,5 m/s. Da mesma forma, o raio hidráulico em geral é maior do que 0,1 m. Assim, o número de Reynolds associado ao escoamento da água em canais abertos geralmente está acima de 50.000 e, portanto, o escoamento é quase sempre turbulento.

Observe que o perímetro molhado inclui as laterais e o fundo do canal em contato com o líquido — ele não inclui a superfície livre e as partes das laterais expostas ao ar. Por exemplo, o perímetro molhado e a área de escoamento transversal de um canal retangular de altura h e largura b contendo água com profundidade y são $p = b + 2y$ and $A_c = yb$, respectivamente. Assim

Canal retangular:
$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} = \frac{y}{1 + 2y/b} \tag{13–4}$$

Como outro exemplo, o raio hidráulico da drenagem da água com profundidade y para fora de um estacionamento de largura b é (Figura 13–6).

Camada de líquido de espessura y:
$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} \cong \frac{yb}{b} \cong y \tag{13–5}$$

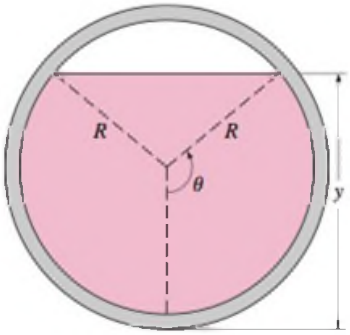
uma vez que $b \gg y$. Então, o raio hidráulico do escoamento de um filme líquido sobre uma grande superfície é simplesmente a espessura da camada de líquido.

13–2 • NÚMERO DE FROUDE E VELOCIDADE DE ONDA

O escoamento em canal aberto também é classificado como *tranqüilo, crítico* ou *rápido*, dependendo do valor do número de Froude adimensional discutido no Capítulo 7 e definido como

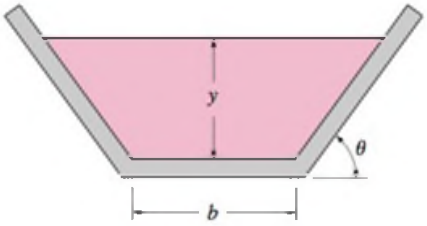
Número de Froude:
$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL_c}} = \frac{V}{\sqrt{gy}} \tag{13–6}$$

onde g é a aceleração da gravidade, V é a velocidade média do líquido em uma seção transversal e L_c é o comprimento característico, considerado a profundidade do escoamento y para canais retangulares largos. O número de Froude é um



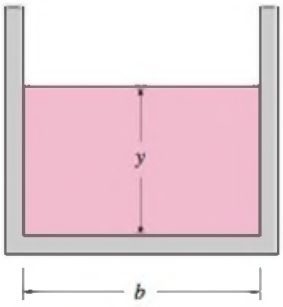
$$A_c = R^2(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$
$$p = 2R\theta$$
$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\theta}R$$

(*a*) Canal circular (θ em rad)



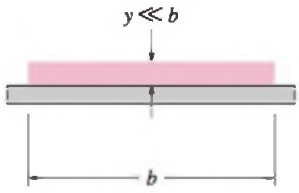
$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{y(b + y/\operatorname{tg}\theta)}{b + 2y/\operatorname{sen}\theta}$$

(*b*) Canal trapezoidal



$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} = \frac{y}{1 + 2y/b}$$

(*c*) Canal retangular



$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} \cong \frac{yb}{b} \cong y$$

(*d*) Filme líquido de espessura y

FIGURA 13–6
Relações de raio hidráulico para diversas geometrias de canal aberto.

parâmetro importante que rege o caráter do escoamento nos canais abertos. O escoamento é classificado como

$\mathrm{Fr} < 1$	Subcrítico ou tranqüilo	
$\mathrm{Fr} = 1$	Crítico	(13–7)
$\mathrm{Fr} > 1$	Supercrítico ou rápido	

Isso se parece com a classificação do escoamento compressível com relação ao número de Mach: subsônico para $\mathrm{Ma} < 1$, sônico para $\mathrm{Ma} = 1$ e supersônico para $\mathrm{Ma} > 1$ (Figura 13–7). Sem dúvida, o denominador do número de Froude tem as dimensões da velocidade e representa a velocidade c_0 na qual um pequeno distúrbio viaja em líquido parado, como será mostrado nesta seção. Portanto, em analogia com o número de Mach, o número de Froude é expresso como a *razão entre a velocidade de escoamento e a velocidade de onda*, $\mathrm{Fr} = V/c_0$, assim como o número de Mach é expresso como a razão entre a velocidade de escoamento e a velocidade do som $\mathrm{Ma} = V/c$.

O número de Froude também pode ser visto como a raiz quadrada da razão entre a força de inércia (ou dinâmica) e a força da gravidade (ou peso). Isso pode ser demonstrado multiplicando o numerador e o denominador do quadrado do número de Froude V^2/gL_c por ρA, onde ρ é a densidade e A é uma área representativa que resulta em

$$\mathrm{Fr}^2 = \frac{V^2}{gL_c}\frac{\rho A}{\rho A} = \frac{2(\frac{1}{2}\rho V^2 A)}{mg} \propto \frac{\text{Força de inércia}}{\text{Força da gravidade}} \qquad (13\text{–}8)$$

Escoamento compressível	Escoamento em canal aberto
$Ma = V/c$	$Fr = V/c_0$
$Ma < 1$ Subsônico	$Fr < 1$ Subcrítico
$Ma = 1$ Sônico	$Fr = 1$ Crítico
$Ma > 1$ Supersônico	$Fr > 1$ Supercrítico

V = velocidade do escoamento
$c = \sqrt{kRT}$ = velocidade do som (gás ideal)
$c_0 = \sqrt{gy}$ = velocidade de onda (líquido)

FIGURA 13–7
Analogia entre o número de Mach no escoamento compressível e o número de Froude no escoamento em canal aberto.

Aqui L_cA representa o volume, ρV^2A é a massa deste volume de fluido e mg é o peso. O numerador é o dobro da força inercial $\frac{1}{2}\rho V^2$, que pode ser visto como a pressão dinâmica $\frac{1}{2}\rho V^2$ multiplicada pela área transversal A.

Assim, o escoamento em um canal aberto é dominado pelas forças inerciais no escoamento rápido e pelas forças gravitacionais no escoamento tranqüilo.

Assim, para *velocidades de escoamento baixas* (Fr < 1), um pequeno distúrbio viaja a montante (com uma velocidade $c_0 - V$ relativa a um observador fixo) e afeta as condições a montante. Isso é chamado de escoamento **tranqüilo** ou **subcrítico**. Mas para *altas velocidades de escoamento* (Fr > 1), um pequeno distúrbio não pode viajar a montante (na verdade, a onda é varrida a jusante a uma velocidade $V - c_0$ com relação a um observador fixo) e, portanto, as condições a montante não podem ser influenciadas pelas condições a jusante. Isso é chamado de escoamento **rápido** ou **supercrítico** e o escoamento neste caso é controlado pelas condições a montante. Assim, uma onda de superfície viaja a montante quando Fr < 1, é varrida a jusante quando Fr > 1, e parece estar fixada na superfície quando Fr = 1. Da mesma forma, a velocidade da onda de superfície aumenta com a profundidade do escoamento y e, portanto, um distúrbio de superfície se propaga muito mais rapidamente em canais profundos do que em canais rasos.

Considere o escoamento de um líquido em um canal retangular aberto com área de seção transversal A_c com uma vazão em volume $\dot{V}$. Quando o escoamento for crítico, Fr = 1 e a velocidade de escoamento média é $V = \sqrt{gy_c}$, e y_c é a **profundidade crítica**. Observando que, $\dot{V} = A_cV = A_c\sqrt{gy_c}$, a profundidade crítica pode ser expressa como

Profundidade crítica (geral):
$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} \qquad (13\text{–}9)$$

Para um canal retangular de largura b, temos $A_c = by_c$, e a relação de profundidade crítica se reduz a

Profundidade crítica (retangular):
$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3} \qquad (13\text{–}10)$$

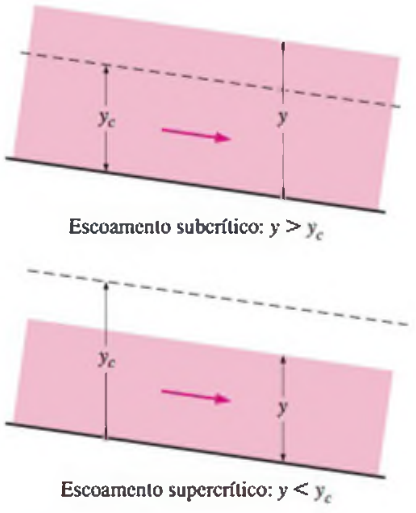


FIGURA 13–8
Definições de escoamento subcrítico e supercrítico em termos de profundidade crítica.

A profundidade do líquido é $y > y_c$ para o escoamento subcrítico e $y < y_c$ para o escoamento supercrítico (Figura 13–8).

Assim como no escoamento compressível, um líquido pode acelerar do escoamento subcrítico para o supercrítico. Obviamente, ele também pode desacelerar do escoamento supercrítico para o subcrítico, mas para fazer isso precisa sofrer um choque. O choque nesse caso é chamado de **salto hidráulico**, que corresponde a um *choque normal* no escoamento compressível. Portanto, a analogia entre escoamento em canal aberto e escoamento compressível é notável.

Velocidade das Ondas de Superfície

Todos estamos familiarizados com as ondas que se formam nas superfícies livres dos oceanos, lagos, rios e até mesmo piscinas. As ondas de superfície podem ser muito altas, como aquelas que vemos nos oceanos ou que podem passar quase desapercebidas. Algumas são suaves, outras quebram na superfície. Uma compreensão básica do movimento das ondas é necessária para o estudo de determinados aspectos do escoamento em canal aberto, e aqui fazemos uma breve descrição. Um tratamento detalhado do movimento das ondas pode ser encontrado em vários livros escritos sobre o assunto.

Um parâmetro importante no estudo do escoamento em canal aberto é a **velocidade de onda** c_0, que é a velocidade com a qual um distúrbio na superfície viaja através de um líquido. Considere um canal longo e largo que inicialmente contém um líquido parado de altura y. Uma extremidade do canal é movimentada com a velocidade δV, gerando uma onda de superfície de altura δy propagando-se com velocidade de c_0 no líquido parado, como mostra a Figura 13–9*a*.

Agora considere um volume de controle que inclua a frente da onda e se movimente com ela, como mostra a Figura 13–9*b*. Para um observador que viaja com a frente da onda, o líquido à direita parece estar se movendo na direção da frente da onda com velocidade c_0 e o líquido da esquerda parece estar se movendo para longe da frente da onda com velocidade $c_0 - \delta V$. Obviamente, o observador pensaria que o volume de controle que inclui a frente da onda (e ele mesmo) está fixo, e ele estaria testemunhando um processo de escoamento em regime permanente.

O balanço de massa do escoamento em regime permanente $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ (ou a relação de continuidade) desse volume de controle de largura b pode ser expresso como

$$\rho c_0 y b = \rho(c_0 - \delta V)(y + \delta y)b \quad \rightarrow \quad \delta V = c_0 \frac{\delta y}{y + \delta y} \tag{13–11}$$

Consideremos as seguintes hipóteses: (1) a velocidade é quase constante através do canal e, portanto, os fatores de correção do fluxo do momento (β_1 e β_2) são iguais a um, (2) a distância através da onda é curta e, portanto, o atrito na superfície do fundo e o arrasto do ar na parte superior são desprezíveis, (3) os efeitos dinâmicos são desprezíveis e, portanto, a pressão no líquido varia hidrostaticamente. Em termos da pressão manométrica $P_{1,\text{méd}} = \rho g h_{1,\text{méd}} = \rho g(y/2)$ e $P_{2,\text{méd}} = \rho g h_{2,\text{méd}} = \rho g(y + \delta y)/2$, (4) a vazão em massa é constante com $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho c_0 y b$ e (5) não há forças externas ou forças de volume e, portanto, as únicas forças que agem sobre o volume de controle na direção x horizontal são as forças de pressão. Em seguida, a equação do momento $\sum \vec{F} = \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_e \beta \dot{m} \vec{V}$ na direção x torna-se um balanço entre as forças de pressão hidrostática e a transferência de momento

$$P_{2,\text{méd}} A_2 - P_{1,\text{méd}} A_1 = \dot{m}(-V_2) - \dot{m}(-V_1) \tag{13–12}$$

Observe que as velocidades médias de entrada e saída são negativas, uma vez que estão na direção negativa de x. Substituindo

$$\frac{\rho g(y + \delta y)^2 b}{2} - \frac{\rho g y^2 b}{2} = \rho c_0 y b(-c_0 + \delta V) - \rho c_0 y b(-c_0) \tag{13–13}$$

ou

$$g\left(1 + \frac{\delta y}{2y}\right)\delta y = c_0\, \delta V \tag{13–14}$$

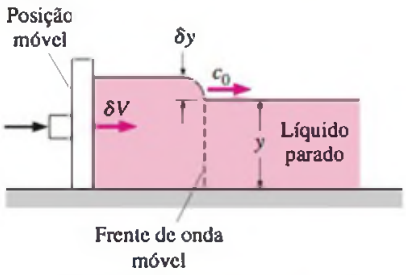
Combinando as relações de momento e continuidade e reorganizando, temos

$$c_0^2 = gy\left(1 + \frac{\delta y}{y}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{2y}\right) \tag{13–15}$$

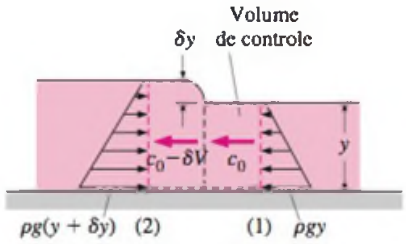
Desse modo, a velocidade de onda c_0 é proporcional à altura de onda δy. Para ondas de superfície infinitesimais, $\delta y \ll y$ e, portanto,

Ondas de superfície infinitesimais: $$c_0 = \sqrt{gy} \tag{13–16}$$

Assim, a velocidade das ondas de superfície infinitesimais é proporcional à raiz quadrada da profundidade do líquido. Observe mais uma vez que essa análise é válida apenas para corpos de água rasa, como aqueles encontrados em canais abertos. Caso contrário, a velocidade da onda não depende da profundidade do líquido para corpos de água profundos, como os oceanos. A velocidade da onda também pode ser determinada usando-se a relação de balanço de energia, em vez da equação de momento, juntamente com a relação de continuidade. Observe que as ondas acabam morrendo por causa dos efeitos viscosos desprezados na análise. Da mesma forma, para o escoamento em canais com seção transversal não retangular,



(*a*) Geração e propagação de uma onda



(*b*) Volume de controle relativo a um observador viajando com a onda, mostrando a distribuição de pressão manométrica

FIGURA 13–9
A geração e análise de uma onda em um canal aberto.

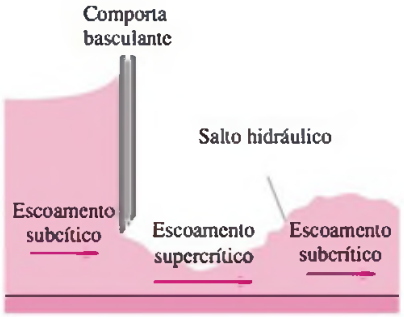
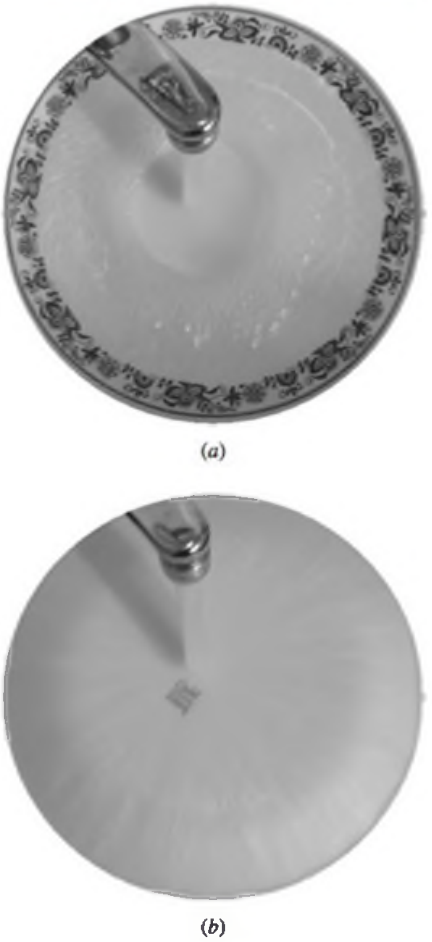


FIGURA 13–10
Escoamento supercrítico através de uma comporta basculante.



(*a*)

(*b*)

FIGURA13–11
Um salto hidráulico pode ser observado em um prato raso quando (*a*) ele está virado para cima, mas não quando (*b*) está virado para baixo.
Foto de Abel Po-Ya Chuang. Usada com permissão.

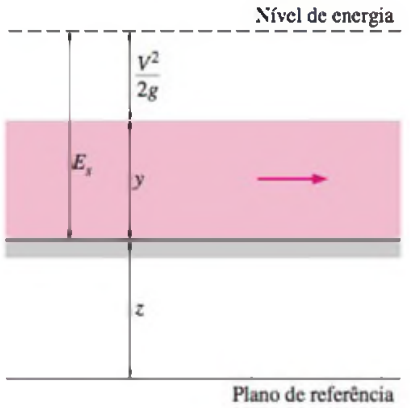


FIGURA13–12
A energia específica E_s de um líquido em um canal aberto é a energia mecânica total (expressa como uma carga) com relação ao fundo do canal.

a **profundidade hidráulica** definida como $y_h = A_t/L_t$, onde L_t é a *largura superior* da seção de escoamento, deve ser usada no cálculo do número de Froude no lugar da profundidade do escoamento y. Para um canal circular cheio até a metade, por exemplo, a profundidade hidráulica é $y_h = (\pi R^2/2)/2R = \pi R/4$.

Sabemos que quando um pedra é jogada em um lago, as ondas concêntricas que são formadas se propagam de modo uniforme em todas as direções e desaparecem após uma certa distância. Mas quando a pedra é jogada em um rio, o lado a montante da onda se move a montante se o escoamento é tranqüilo ou subcrítico ($V < c_0$), se move a jusante se o escoamento é rápido ou supercrítico ($V > c_0$) e permanece fixo no local onde ele é formado se o escoamento é crítico ($V = c_0$).

Você deve estar se perguntando por que prestamos tanta atenção ao fato do escoamento ser subcrítico ou supercrítico. O motivo é que o caráter do escoamento é fortemente influenciado por esse fenômeno. Por exemplo, uma pedra no leito do rio pode fazer com que o nível da água naquele local se eleve ou caia, dependendo do escoamento ser subcrítico ou supercrítico. Da mesma forma, o nível do líquido cai gradualmente na direção do escoamento no escoamento subcrítico, mas uma elevação repentina no nível de líquido, chamada de salto hidráulico, pode ocorrer no escoamento supercrítico (Fr > 1) quando o escoamento desacelera até velocidades subcríticas (Fr < 1).

Esse fenômeno pode ocorrer a jusante de uma comporta basculante como mostra a Figura 13–10. O líquido se aproxima da comporta com uma velocidade subcrítica, mas o nível do líquido a montante é suficientemente alto para acelerar o líquido até um nível supercrítico quando ele passa através da comporta (assim como um gás que escoa em um bocal convergente/divergente). Mas se a seção a jusante do canal não for suficientemente inclinada para baixo, ela não pode manter essa velocidade supercrítica e o líquido salta para cima até um nível mais alto com uma área transversal maior e, portanto, para uma velocidade subcrítica mais baixa. Por fim, o escoamento em rios, canais e sistemas de irrigação em geral é subcrítico. Mas o escoamento após as comportas basculantes e vertedouros em geral é supercrítico.

Você pode criar um lindo salto hidráulico da próxima vez que lavar os pratos (Figura 13–11). Deixe a água da torneira atingir o meio de um prato raso. À medida que a água se espalhar radialmente, sua profundidade diminuirá e o escoamento será supercrítico. Eventualmente, ocorrerá um salto hidráulico, que pode ser visto como um aumento repentino da profundidade da água. Experimente fazer isso!

13–3 • ENERGIA ESPECÍFICA

Considere o escoamento de um líquido em um canal em uma seção transversal na qual a profundidade do escoamento seja y, a velocidade média do escoamento seja V e a elevação do fundo do canal naquela posição com relação a algum plano de referência seja z. Por simplicidade, ignoramos a variação da velocidade do líquido na seção transversal e consideramos a velocidade como V em todos os seus pontos. A energia mecânica total desse líquido no canal em termos de cargas é expressa por (Figura 13–12)

$$H = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = z + y + \frac{V^2}{2g} \qquad \textbf{(13–17)}$$

onde z é a *carga de elevação*, $P/\rho g = y$ é a *carga da pressão manométrica* e $V^2/2g$ é a *velocidade* ou *carga dinâmica*. A energia total expressa na Equação 13–17 não é uma representação realista da verdadeira energia de um fluido escoando, uma vez que a escolha do plano de referência e, portanto, o valor da carga de elevação z é bastante arbitrária. A energia intrínseca de um fluido em uma seção transversal pode ser representada de forma mais realista se o plano de referência for considerado a parte do fundo do canal de modo que $z = 0$ lá. Em seguida, a energia mecânica total de um fluido em termos de cargas torna-se a soma das cargas de pressão e

dinâmica. A soma das cargas de pressão e dinâmica de um líquido em um canal aberto é chamada de **energia específica** E_s e é expressa por (Bakhmeteff, 1932)

$$E_s = y + \frac{V^2}{2g} \tag{13–18}$$

como mostra a Figura 13–12.

Considere o escoamento em um canal aberto de largura constante b. Observando que a vazão em volume é $\dot{V} = A_c V = ybV$, a velocidade média do escoamento pode ser expressa por

$$V = \frac{\dot{V}}{yb} \tag{13–19}$$

Substituindo na Equação 13–18, a energia específica pode ser expressa como

$$E_s = y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2} \tag{13–20}$$

Essa equação é muito instrutiva, uma vez que mostra a variação da energia específica com a profundidade de escoamento. Durante o escoamento permanente em um canal aberto, a vazão é constante e uma representação gráfica de E_s *versus* y para $\dot{V}$ e b constantes é dada na Figura 13–13. Observamos o seguinte nessa figura:

- A distância entre um ponto no eixo vertical y e a curva representa a energia específica naquele valor y. A parte entre a reta $E_s = y$ e a curva corresponde à carga dinâmica (ou energia cinética) do líquido, e a parte restante corresponde à carga de pressão (ou energia de escoamento).
- A energia específica tende a infinito quando $y \to 0$ (devido à velocidade se aproximar do infinito), e torna-se igual à profundidade de escoamento y para valores grandes de y (porque a velocidade e, portanto, a energia cinética tornam-se muito pequenas). A energia específica atinge um valor mínimo $E_{s,\,mín}$ em algum ponto intermediário, chamado de **ponto crítico**, caracterizado pela **profundidade crítica** y_c e pela **velocidade crítica** V_c. A energia específica mínima também é chamada de **energia crítica**.
- Existe uma energia específica mínima $E_{s,\,mín}$ necessária para suportar a vazão especificada $\dot{V}$. Assim, E_s não pode ficar abaixo de $E_{s,\,mín}$ para determinada $\dot{V}$.
- Uma reta intercepta a curva de energia específica apenas em um ponto e, portanto, um valor fixo de profundidade de escoamento corresponde a um valor fixo de energia específica. Isso é esperado, uma vez que a velocidade tem um valor fixo quando $\dot{V}$, b, e y são especificados. Entretanto, para $E_s > E_{s,\,mín}$, uma reta vertical intercepta a curva em *dois* pontos, indicando que um escoamento pode ter duas profundidades diferentes (e, portanto, duas velocidades diferentes) correspondentes a um valor fixo de energia específica. Essas duas profundidades são chamadas de **profundidades alternativas**. Para o escoamento através de uma comporta basculante com perdas por atrito desprezíveis (e, portanto, com E_s = constante), a profundidade superior corresponde ao escoamento a montante e a profundidade inferior ao escoamento a jusante.
- Uma pequena variação na energia específica próximo ao ponto crítico causa uma grande diferença entre as profundidades alternativas e pode causar flutuações violentas no nível do escoamento. Portanto, o projeto de canais abertos deve evitar a operação próxima ao ponto crítico.

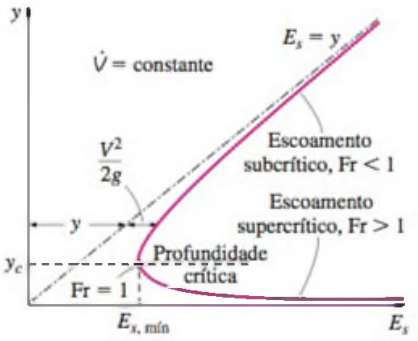


FIGURA 13–13
Variação da energia específica E_s com a profundidade y para uma taxa de escoamento especificada.

O valor da energia mínima específica e a profundidade crítica na qual ela ocorre podem ser determinados diferenciando-se E_s na Equação 13–20 com relação a y para b e $\dot{V}$ constantes, e fazendo a derivativa igual a zero:

$$\frac{dE_s}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2}\right) = 1 - \frac{\dot{V}^2}{gb^2y^3} = 0 \tag{13–21}$$

Isolando y, que é a profundidade de escoamento crítica y_c, temos

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3} \tag{13–22}$$

A vazão no ponto crítico pode ser expressa como $\dot{V} = y_c b V_c$. Substituindo, a velocidade crítica é determinada por

$$V_c = \sqrt{gy_c} \tag{13–23}$$

que é a velocidade da onda. O número de Froude nesse ponto é

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \tag{13–24}$$

indicando que *o ponto de energia mínima específica é, sem dúvida, o ponto crítico, e o escoamento torna-se crítico quando a energia específica atinge seu valor mínimo.*

Como conseqüência, temos o escoamento subcrítico para velocidades de escoamento mais baixas e, portanto, maiores profundidades de escoamento (o braço superior da curva), supercrítico para velocidades mais altas e, portanto, menores profundidades de escoamento (o braço inferior da curva) e crítico no ponto crítico (o ponto da energia específica mínima).

Observando que $V_c = \sqrt{gy_c}$, a energia específica mínima (ou crítica) pode ser expressa em termos apenas da profundidade crítica como

$$E_{s,\,\text{min}} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{gy_c}{2g} = \frac{3}{2}y_c \tag{13–25}$$

No escoamento uniforme, a profundidade e a velocidade do escoamento e, portanto, a energia específica permanecem constantes uma vez que $E_s = y + V^2/2g$. A perda de carga é causada pela diminuição da elevação (o canal é inclinado para baixo na direção do escoamento). No escoamento não uniforme, porém, a energia específica pode aumentar ou diminuir, dependendo da inclinação do canal e das perdas por atrito. Se a diminuição da elevação através de uma seção de escoamento for maior do que a perda de carga naquela seção, por exemplo, a energia específica aumenta em uma quantidade igual à diferença entre a queda de elevação e a perda de carga. O conceito da energia específica torna-se uma ferramenta particularmente útil quando se estudam os escoamentos variados.

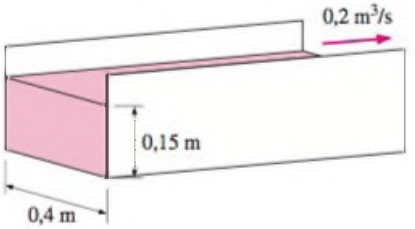


FIGURA13–14
Esquema do Exemplo 13–1.

EXEMPLO 13–1 **Caráter do Escoamento e Profundidade Alternativa**

A água escoa em regime permanente em um canal aberto retangular com 0,4 m de largura a uma vazão de 0,2 m³/s (Figura 13–14). Se a profundidade do escoamento for de 0,15 m, determine a velocidade do escoamento e se o escoamento é subcrítico ou supercrítico. Determine também a profundidade alternativa do escoamento se o caráter do escoamento fosse mudar.

SOLUÇÃO O escoamento da água em um canal aberto retangular é considerado. O caráter do escoamento, a velocidade do escoamento e a profundidade alternativa devem ser determinados.

Hipóteses A energia específica é constante.

Análise A velocidade de escoamento média é determinada por

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{yb} = \frac{0{,}2\ \text{m}^3/\text{s}}{(0{,}15\ \text{m})(0{,}4\ \text{m})} = 3{,}33\ \text{m/s}$$

A profundidade crítica deste escoamento é

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(0{,}2\ \text{m}^3/\text{s})^2}{(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}4\ \text{m})^2}\right)^{1/3} = 0{,}294\ \text{m}$$

Assim, o escoamento é **supercrítico**, já que a profundidade do escoamento real é $y = 0{,}15$ m e $y < y_c$. Outra forma de determinar o caráter do escoamento é calcular o número de Froude

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{3{,}33 \text{ m/s}}{\sqrt{(9{,}81 \text{ m/s}^2)(0{,}15 \text{ m})}} = 2{,}75$$

Novamente o escoamento é supercrítico porque Fr > 1. A energia específica para as condições dadas é

$$E_{s1} = y_1 + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y_1^2} = (0{,}15 \text{ m}) + \frac{(0{,}2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{2(9{,}81 \text{ m/s}^2)(0{,}4 \text{ m})^2(0{,}15 \text{ m})^2} = 0{,}7163 \text{ m}$$

Então, a profundidade alternativa é determinada por $E_{s1} = E_{s2}$ como

$$E_{s2} = y_2 + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y_2^2} \quad \rightarrow \quad 0{,}7163 \text{ m} = y_2 + \frac{(0{,}2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{2(9{,}81 \text{ m/s}^2)(0{,}4 \text{ m})^2y_2^2}$$

Determinando y_2 temos a profundidade alternativa $y_2 = 0{,}69$ m. Portanto, se o caráter do escoamento precisasse mudar de supercrítico para subcrítico, mantendo a energia específica constante, a profundidade do escoamento se elevaria de 0,15 para 0,69 m.

Discussão Observe que se a água passasse por um salto hidráulico a uma energia específica constante (com as perdas por atrito iguais à queda da elevação), a profundidade de escoamento subiria para 0,69 m, considerando é claro que as paredes laterais do canal sejam suficientemente altas.

13–4 • EQUAÇÕES DE CONTINUIDADE E ENERGIA

Os escoamentos em canal aberto envolvem líquidos cujas densidades são quase constantes e, portanto, equação da conservação da massa no escoamento permanente e unidimensional ou de continuidade pode ser expressa como

$$\dot{V} = A_c V = \text{constante} \qquad \textbf{(13–26)}$$

Ou seja, o produto entre a seção transversal de escoamento e a velocidade de escoamento média permanece constante em todo o canal. A equação da continuidade entre duas seções ao longo do canal é expressa como

Equação da continuidade: $$A_{c1}V_1 = A_{c2}V_2 \qquad \textbf{(13–27)}$$

que é idêntica à equação da continuidade para o escoamento permanente de líquido em um tubo. Observe que a seção transversal do escoamento e a velocidade média de escoamento podem variar durante o escoamento, mas como foi dito, seu produto permanece constante.

Para determinar a energia total de um líquido que escoa em um canal aberto com relação a um plano de referência, como mostra a Figura 13–15, considere um ponto A do líquido a uma distância a da superfície livre (e, portanto, uma distância $y - a$ do fundo do canal). Observando que a elevação, pressão (pressão hidrostática relativa à superfície livre) e velocidade no ponto A são $z_A = z + (y - a)$, $P_A = \rho g a$, e $V_A = V$ respectivamente, a energia total do líquido em termos de cargas é

$$H_A = z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = z + (y - a) + \frac{\rho g a}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = z + y + \frac{V^2}{2g} \qquad \textbf{(13–28)}$$

que independe da posição do ponto A na seção transversal. Assim, a energia mecânica total de um líquido em qualquer seção transversal de um canal aberto pode ser expressa em termos de cargas como

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \qquad \textbf{(13–29)}$$

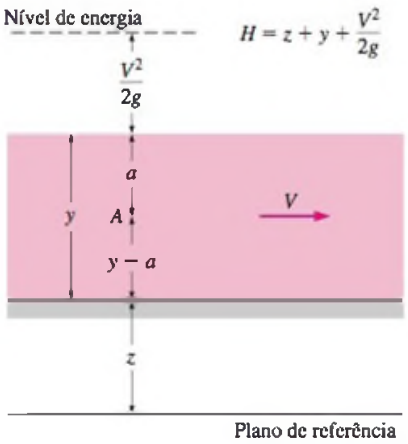


FIGURA13–15
A energia total de um líquido que escoa em um canal aberto.

onde y é a profundidade de escoamento, z é a elevação do fundo do canal e V é a velocidade média do escoamento. Assim, a equação da energia unidimensional para o escoamento em canal aberto entre uma seção a montante 1 e uma seção a jusante 2 pode ser escrita como

Equação da energia:
$$z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \qquad \textbf{(13–30)}$$

A perda de carga h_L devido aos efeitos do atrito é expressa, assim como no escoamento em tubos, por

$$h_L = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} = f\frac{L}{R_h}\frac{V^2}{8g} \qquad \textbf{(13–31)}$$

onde f é o fator médio de atrito e L é o comprimento do canal entre as seções 1 e 2. A relação $D_h = 4R_h$ deve ser observada ao usar o raio hidráulico, em vez do diâmetro hidráulico.

O escoamento em canais abertos é induzido pela gravidade e, portanto, um canal típico é ligeiramente inclinado para baixo. A inclinação do fundo do canal é expressa como

$$S_0 = \text{tg}\,\alpha = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} \cong \frac{z_1 - z_2}{L} \qquad \textbf{(13–32)}$$

onde α é o ângulo que o fundo do canal faz com a horizontal. Em geral, a inclinação do fundo S_0 é muito pequena e, portanto, o fundo do canal é quase horizontal. Assim, $L \cong x_2 - x_1$, onde x é a distância na direção horizontal. Da mesma forma, a profundidade de escoamento y, que é medida na direção vertical, pode ser considerada normal ao fundo do canal com erro desprezível.

Se o fundo do canal for reta, de modo que a inclinação da parte inferior seja constante, a queda vertical entre as seções 1 e 2 pode ser expressa como $z_1 - z_2 = S_0L$. Assim a equação da energia (Equação 13-30) torna-se

Equação de energia:
$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + S_0L = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \qquad \textbf{(13–33)}$$

Essa equação tem a vantagem de ser dependente do plano de referência para a elevação.

No projeto de sistemas de canal aberto, a inclinação do fundo é selecionada para oferecer uma queda de elevação adequada para superar a carga por atrito e, portanto, manter o escoamento na vazão desejada. Assim, existe uma conexão próxima entre a perda de carga e a inclinação do fundo, e faz sentido expressar a perda de carga como uma inclinação (ou como tangente de um ângulo). Isso é feito definindo uma **inclinação de atrito** por

Inclinação de atrito:
$$S_f = \frac{h_L}{L} \qquad \textbf{(13–34)}$$

Assim, a equação da energia pode ser escrita como

Equção de energia:
$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + (S_f - S_0)L \qquad \textbf{(13–35)}$$

Observe que a inclinação por atrito é igual à inclinação do fundo quando a perda de carga é igual à queda de elevação. Ou seja, $S_f = S_0$ quando $h_L = z_1 - z_2$.

A Figura 13–16 também mostra o nível de energia, que está a uma distância $z + y + V^2/2g$ (energia mecânica total do líquido expressa como carga) acima do plano de referência horizontal. O nível de energia em geral é inclinada para baixo como o próprio canal como resultado de perdas por atrito, e a queda vertical é igual à perda de carga h_L. Observe que se *não* houvesse perda de carga, o nível de energia seria horizontal mesmo quando o canal não fosse. Nesse caso, a elevação e as cargas de velocidade ($z + y$ e $V^2/2g$) poderiam ser convertidas umas nas outras durante o escoamento, mas sua soma permaneceria constante.

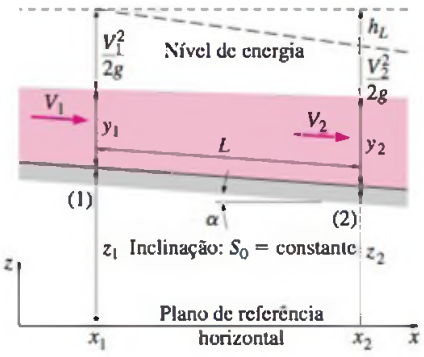


FIGURA13–16
A energia total de um líquido em duas seções de um canal aberto.

13–5 • ESCOAMENTO UNIFORME EM CANAIS

Mencionamos na Seção 13–1 que o escoamento em um canal é chamado de *escoamento uniforme* se a profundidade de escoamento (e, portanto, a velocidade de escoamento média, uma vez que $\dot{V} = A_c V$ = constante no escoamento em regime permanente) permanecer constante. As condições de escoamento uniforme normalmente são encontradas na prática em seções longas e retas de canais com inclinação, seção transversal e alinhamento de superfície constantes. No projeto de canais abertos, é muito desejável ter escoamento uniforme na maioria do sistema, uma vez que isso significa ter um canal com altura constante, que é mais fácil de projetar e construir.

A profundidade de escoamento no escoamento uniforme é chamada de **profundidade normal** y_n e a velocidade de escoamento média é chamada de **velocidade de escoamento uniforme** V_0. O escoamento permanece uniforme enquanto a inclinação, a seção transversal e a rugosidade da superfície do canal permanecerem inalteradas (Figura 13–17). Quando a inclinação do fundo aumenta, a velocidade do escoamento aumenta e a profundidade do escoamento diminui. Assim, um novo escoamento uniforme será estabelecido com uma nova profundidade de escoamento (inferior). O oposto ocorre quando a inclinação do fundo diminui.

Durante o escoamento em canais abertos com inclinação constante S_0, seção transversal constante A_c e fator de atrito de superfície constante f, a velocidade de terminal é atingida e, portanto, o escoamento uniforme é estabelecido quando a perda de carga é igual à queda de elevação. Portanto,

$$h_L = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} \quad \text{ou} \quad S_0 L = f\frac{L}{R_h}\frac{V_0^2}{8g} \tag{13–36}$$

uma vez que $h_L = S_0 L$ no escoamento uniforme e $D_h = 4R_h$. Resolvendo a segunda relação para V_0, a velocidade de escoamento uniforme e a vazão são determinadas por

$$V_0 = C\sqrt{S_0 R_h} \quad \text{e} \quad \dot{V} = CA_c\sqrt{S_0 R_h} \tag{13–37}$$

onde

$$C = \sqrt{8g/f} \tag{13–38}$$

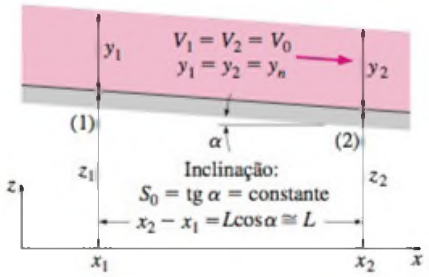
é chamado de **coeficiente de Chezy**. A Equação 13–37 e o coeficiente C são uma homenagem ao engenheiro francês Antoine Chezy (1718–1798), que foi o primeiro a propor uma relação semelhante em 1769. O coeficiente Chezy é uma quantidade dimensional, e seu valor varia de cerca de 30 $m^{1/2}/s$ para canais pequenos com superfícies rugosas até 90 $m^{1/2}/s$ para canais grandes com superfícies lisas (ou 60 $pés^{1/2}/s$ a 160 $pés^{1/2}/s$ em unidades inglesas).

O coeficiente Chezy pode ser determinado de modo direto com a Equação 13–38 determinando primeiro o fator de atrito f como foi feito para o escoamento em tubos no Capítulo 8 por meio do diagrama de Moody ou da equação de Colebrook para o limite turbulento completamente rugoso (Re $\to \infty$),

$$f = [2{,}0\log(14{,}8R_h/\varepsilon)]^{-2} \tag{13–39}$$

Aqui ε é a rugosidade média da superfície. Observe que o escoamento em canal aberto geralmente é turbulento, e o escoamento é *completamente desenvolvido* no momento em que o escoamento uniforme é estabelecido. Assim, é razoável usar a relação do fator de atrito para o escoamento turbulento completamente desenvolvido. Com números de Reynolds muito altos, as curvas do fator de atrito correspondentes à rugosidade relativa especificada são quase horizontais e, portanto, o fator de atrito não depende do número de Reynolds. O escoamento naquela região é chamado de *escoamento turbulento completamente rugoso.*

Desde a introdução das equações de Chezy, muito esforço foi dedicado por inúmeros investigadores para o desenvolvimento de relações empíricas mais simples para a velocidade média e a vazão. A equação mais usada foi desenvolvida independentemente pelo francês Philippe-Gaspard Gauckler (1826–1905) em 1868 e pelo irlandês Robert Manning (1816–1897) em 1889.



Perda de carga = queda de elevação
$h_L = z_1 - z_2 = S_0 L$

FIGURA 13–17
No escoamento uniforme, a profundidade de escoamento y, a velocidade de escoamento média V, e a inclinação inferior S_0 permanecem constantes, e a queda de carga é igual à queda de elevação $h_L = z_1 - z_2 = S_f L = S_0 L$.

TABELA 13–1

Valores médios do coeficiente de Manning n para o escoamento da água em canais abertos*

De Chow (1959).

Material de parede	n
A. Canais alinhados artificialmente	
Vidro	0,010
Latão	0,011
Aço, liso	0,012
Aço, pintado	0,014
Aço, rebitado	0,015
Ferro fundido	0,013
Concreto, polido	0,012
Concreto, não polido	0,014
Madeira, aplainada	0,012
Madeira, não aplainada	0,013
Telha de barro	0,014
Alvenaria	0,015
Asfalto	0,016
Metal corrugado	0,022
Alvenaria de borracha	0,025
B. Canais escavados na terra	
Limpo	0,022
Coberto por cascalhos	0,025
Coberto de vegetação rasteira	0,030
Coberto com pedras	0,035
C. Canais naturais	
Limpos e retos	0,030
Lamacento com poças profundas	0,040
Rios principais	0,035
Riachos de montanha	0,050
D. Zonas sujeitas a inundações	
Pastos, fazendas	0,035
Arbustos rasteiros	0,050
Arbustos grandes	0,075
Árvores	0,150

* A incerteza de n pode ser de ± 20% ou mais.

Tanto Gauckler quanto Manning fizeram recomendações para que a constante da equação de Chezy fosse expressa como

$$C = \frac{a}{n} R_h^{1/6} \tag{13–40}$$

onde n é chamado de **coeficiente de Manning**, cujo valor depende da rugosidade das superfícies do canal. Substituindo na Equação 13–37, temos as seguintes relações empíricas conhecidas como **equações de Manning** (também chamadas de **equações de Gauckler–Manning**, uma vez que foram propostas primeiro por Philippe-Gaspard Gauckler) para velocidade e vazão do escoamento uniforme

$$\textit{Escoamento uniforme:} \qquad V_0 = \frac{a}{n} R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \text{e} \quad \dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \tag{13–41}$$

O fator a é uma constante dimensional cujo valor em unidades SI é $a = 1\ \text{m}^{1/3}/\text{s}$. Observando que 1 m = 3,2808 pés, seu valor em unidades inglesas é

$$a = 1\ \text{m}^{1/3}/\text{s} = (3{,}2808\ \text{pés})^{1/3}/\text{s} = 1{,}486\ \text{pés}^{1/3}/\text{s} \tag{13–42}$$

Observe que a inclinação inferior S_0 e o coeficiente de Manning n são quantidades sem dimensão e as Equações 13–41 dão a velocidade em m/s e a vazão em m^3/s em unidades SI quando R_h é expresso em m. (As unidades correspondentes em unidades inglesas são pé/s e $\text{pé}^3/\text{s}$ quando R_h é expresso em pés.)

Os valores determinados experimentalmente para n são dados na Tabela 13–1 para inúmeros canais naturais e artificiais. A literatura dispõe de tabelas mais extensas. Observe que o valor de n varia de 0,010 para um canal de vidro a 0,150 para uma zona sujeita a inundações cheia de árvores (15 vezes o valor de um canal de vidro). Como seria de esperar, existe uma incerteza considerável sobre o valor de n, particularmente em canais naturais, uma vez que não existem dois canais exatamente iguais. A variação pode ser de 20% ou mais. Da mesma forma, o coeficiente n depende do tamanho e forma do canal, bem como da rugosidade da superfície.

Escoamento Crítico Uniforme

O escoamento através de um canal aberto torna-se escoamento crítico quando o número de Froude Fr = 1 e, portanto, a velocidade do escoamento é igual à velocidade da onda $V_c = \sqrt{gy_c}$, onde y_c é a profundidade de escoamento crítica definida anteriormente (Equação 13–9). Quando a vazão em volume $\dot{V}$, a inclinação do canal S_0 e o coeficiente de Manning n são conhecidos, a profundidade normal do escoamento y_n pode ser determinada com a equação de Manning (Equação 13–41). Entretanto, como A_c e R_h são funções de y_n, a equação quase sempre acaba sendo implícita em y_n e sua solução exige uma abordagem numérica (ou por tentativa e erro). Se $y_n = y_c$, o escoamento é *crítico uniforme*, e a inclinação inferior S_0 é igual à inclinação crítica S_c neste caso. Quando a profundidade de escoamento y_n é conhecida em vez da vazão $\dot{V}$, a vazão pode ser determinada pela equação de Manning e a profundidade do escoamento crítico pela Equação 13–9. O escoamento é crítico apenas se $y_n = y_c$.

Durante o escoamento crítico uniforme $S_0 = S_c$ e $y_n = y_c$. Substituindo $\dot{V}$ e S_0 na equação de Manning por $\dot{V} = A_c\sqrt{gy_c}$ e S_c, respectivamente, e isolando S_c, temos a seguinte relação geral para a inclinação crítica

$$\textit{Inclinação crítica (geral):} \qquad S_c = \frac{gn^2 y_c}{a^2 R_h^{4/3}} \tag{13–43}$$

Para o escoamento de filme ou para o escoamento em um canal retangular amplo com $b >> y_c$, a Equação 13–43 pode ser simplificada como

$$\textit{Inclinação crítica } (b >> y_c)\textit{:} \qquad S_c = \frac{gn^2}{a^2 y_c^{1/3}} \tag{13–44}$$

Essa equação fornece a inclinação necessária para manter um escoamento crítico de profundidade y_c em um canal retangular amplo com um coeficiente de Manning n.

Método da Superposição para Perímetros Não Uniformes

A rugosidade da superfície e, portanto, o coeficiente de Manning para a maioria dos canais naturais e feitos pelo homem variam ao longo do perímetro molhado e até mesmo ao longo do canal. Um rio, por exemplo, pode ser pedregoso no leito regular, mas ter uma superfície coberta com arbustos na zona sujeita a inundações. Existem vários métodos para resolver esses problemas, tanto encontrando um coeficiente de Manning efetivo n para toda a seção transversal do canal, quanto considerando o canal em subseções e aplicando o princípio da superposição. Por exemplo, uma seção transversal de canal pode ser dividida em N subseções, cada uma com seu próprio coeficiente de Manning uniforme e vazão. Ao determinar o perímetro de uma seção, apenas a parte molhada da fronteira daquela seção é considerada e as fronteiras imaginárias são ignoradas. A vazão através do canal é a soma das vazões através de todas as seções.

EXEMPLO 13–2 Vazão em um Canal Aberto com Escoamento Uniforme

A água escoa em um canal escavado na terra coberto de vegetação rasteira com seção transversal trapezoidal e largura do fundo de 0,8 m, ângulo trapezoidal de 60° e ângulo de inclinação do fundo de 0,3°, como mostra a Figura 13–18. Se a profundidade do escoamento medida for de 0,52 m, determine a vazão da água através do canal. O que você responderia se o ângulo do fundo fosse de 1°?

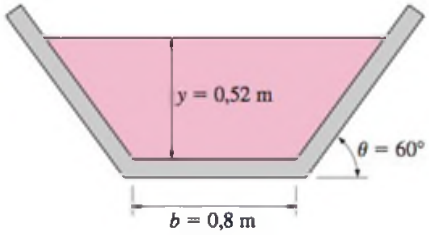


FIGURA 13–18
Esquema do Exemplo 13–2.

SOLUÇÃO A água escoa em um canal trapezoidal com vegetação rasteira e dimensões dadas. A vazão correspondente a um valor medido de profundidade de escoamento deve ser determinada.

Hipóteses 1 O escoamento é permanente e uniforme. **2** A inclinação do fundo é constante. **3** A rugosidade da superfície molhada do canal e, portanto, o coeficiente de atrito são constantes.

Propriedades O coeficiente de Manning para um canal aberto com superfícies com vegetação rasteira é $n = 0{,}030$.

Análise A área transversal, o perímetro e o raio hidráulico do canal são

$$A_c = y\left(b + \frac{y}{\text{tg}\,\theta}\right) = (0{,}52\text{ m})\left(0{,}8\text{ m} + \frac{0{,}52\text{ m}}{\text{tg }60^\circ}\right) = 0{,}5721\text{ m}^2$$

$$p = b + \frac{2y}{\text{sen}\,\theta} = 0{,}8\text{ m} + \frac{2 \times 0{,}52\text{ m}}{\text{sen }60^\circ} = 2{,}001\text{ m}$$

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{0{,}5721\text{ m}^2}{2{,}991\text{ m}} = 0{,}2859\text{ m}$$

A inclinação do fundo do canal é

$$S_0 = \text{tg}\,\alpha = \text{tg }0{,}3^\circ = 0{,}005236$$

Assim, a vazão através do canal é determinada com a equação de Manning como

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1\text{ m}^{1/3}/\text{s}}{0{,}030}(0{,}5721\text{ m}^2)(0{,}2859\text{ m})^{2/3}(0{,}005236)^{1/2} = \mathbf{0{,}60\text{ m}^3/\text{s}}$$

A vazão para um ângulo do fundo de 1° pode ser determinada usando $S_0 = \text{tg}\,\alpha = \text{tg }1^\circ = 0{,}01746$ na última relação. Isso resulta em $\dot{V} = \mathbf{1.1\text{ m}^3/\text{s}}$.

Discussão Observe que a vazão é uma função que depende fortemente do ângulo do fundo. Além disso, existe uma incerteza considerável no valor do coeficiente de Manning e, portanto, na vazão calculada. Uma incerteza de 10% em n resulta em uma incerteza de 10% na vazão. Assim, as respostas finais são dadas com apenas até dois algarismos significativos.

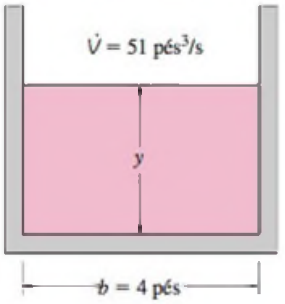


FIGURA 13–19
Esquema do Exemplo 13–3.

EXEMPLO 13–3 A Altura de um Canal Retangular

A água deve ser transportada em um canal retangular de concreto não polido com uma largura da parte inferior de 4 pés a uma taxa de 51 pés^3/s. O terreno é tal que o fundo do canal cai 2 pés a cada 1.000 pés lineares. Determine a altura mínima do canal em condições de escoamento uniforme (Figura 13–19). Qual seria sua resposta se a queda do fundo fosse de apenas 1 pé em 1.000 pés lineares?

SOLUÇÃO A água escoa em um canal retangular de concreto não polido com largura do fundo especificada. A altura mínima do canal correspondente a uma vazão especificada deve ser determinada.

Hipóteses 1 O escoamento é permanente e uniforme. **2** A inclinação do fundo é constante. **3** A rugosidade da superfície molhada do canal e, portanto, o coeficiente de atrito são constantes.

Propriedades O coeficiente de Manning para um canal aberto com superfícies de concreto não polido é $n = 0{,}014$.

Análise A área transversal, o perímetro e o raio hidráulico do canal são

$$A_c = by = (4 \text{ pés})y \qquad p = b + 2y = (4 \text{ pés}) + 2y \qquad R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{4y}{4 + 2y}$$

A inclinação do fundo do canal é $S_0 = 2/1.000 = 0{,}002$. Usando a equação de Manning, a vazão através do canal pode ser expressa como

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$51 \text{ pés}^3/\text{s} = \frac{1{,}486 \text{ pés}^{1/3}/\text{s}}{0{,}014} (4y \text{ pés}^2)\left(\frac{4y}{4 + 2y} \text{ pés}\right)^{2/3} (0{,}002)^{1/2}$$

que é uma equação não linear em y. Usando um aplicativo para resolver equações como o EES ou uma abordagem interativa, a profundidade de escoamento é determinada como

$$y = 2{,}5 \text{ pés}$$

Se a queda do fundo fosse de apenas 1 pé em 1.000 pés lineares, a inclinação do fundo seria de $S_0 = 0{,}001$, e a profundidade de escoamento seria de $y = 3{,}3$ pés.

Discussão Observe que y é a profundidade de escoamento e, portanto, esse é o valor mínimo para a altura do canal. Além disso, existe uma incerteza considerável no valor do coeficiente de Manning n, e isso deve ser levado em conta ao decidir-se a altura do canal a ser construído.

EXEMPLO 13–4 Canais com Rugosidade Não Uniforme

A água escoa em um canal cuja inclinação do fundo é de 0,003 e cuja seção transversal é mostrada na Figura 13–20. As dimensões dos coeficientes de Manning para as superfícies de subseções diferentes também são dadas na figura. Determine a vazão através do canal e o coeficiente de Manning efetivo para o canal.

SOLUÇÃO Água escoa através de um canal com propriedades de superfície não uniformes. A vazão e o coeficiente de Manning efetivo devem ser determinados.

Hipóteses 1 O escoamento é permanente e uniforme. **2** A inclinação do fundo é constante. **3** Os coeficientes de Manning não variam ao longo do canal.

Análise O canal envolve duas partes com rugosidades diferentes e, portanto, é apropriado dividir o canal nas duas subseções indicadas na Figura 13–20. A vazão de cada subseção pode ser determinada com a equação de Manning e a vazão total pode ser determinada somando-as.

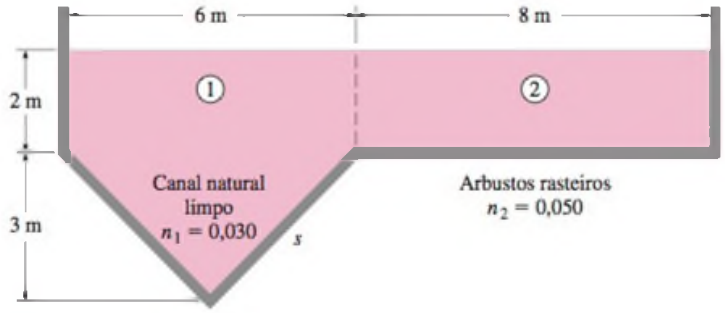


FIGURA 13–20
Esquema do Exemplo 13–4.

O comprimento da lateral do canal triangular é $s = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4{,}243$ m. Assim, a área de escoamento, o perímetro e o raio hidráulico de cada subseção e de todo o canal tornam-se

Subseção 1: $A_{c1} = 21\ \text{m}^2 \quad p_1 = 10{,}486\ \text{m} \quad R_{h1} = \dfrac{A_{c1}}{p_1} = \dfrac{21\ \text{m}^2}{10{,}486\ \text{m}} = 2{,}00\ \text{m}$

Subseção 2: $A_{c2} = 16\ \text{m}^2 \quad p_2 = 10\ \text{m} \quad R_{h2} = \dfrac{A_{c2}}{p_2} = \dfrac{16\ \text{m}^2}{10\ \text{m}} = 1{,}60\ \text{m}$

Todo o canal: $A_c = 37\ \text{m}^2 \quad p = 20{,}486\ \text{m} \quad R_h = \dfrac{A_c}{p} = \dfrac{37\ \text{m}^2}{20{,}486\ \text{m}} = 1{,}806\ \text{m}$

Usando a equação de Manning para cada subseção, a taxa de escoamento total através do canal é determinada como

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \frac{a}{n_1} A_{c1} R_{h1}^{2/3} S_0^{1/2} + \frac{a}{n_2} A_{c2} R_{h2}^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$= (1\ \text{m}^{1/3}/\text{s}) \left[\frac{(21\ \text{m}^2)(2\ \text{m})^{2/3}}{0{,}030} + \frac{(16\ \text{m}^2)(1{,}60\ \text{m})^{2/3}}{0{,}050} \right] (0{,}003)^{1/2}$$

$$= 84{,}8\ \text{m}^3/\text{s} \cong \mathbf{85\ m^3/s}$$

Conhecendo a vazão total, o coeficiente de Manning efetivo de todo o canal pode ser determinado com a equação de Manning como

$$n_{\text{coef}} = \frac{a A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}}{\dot{V}} = \frac{(1\ \text{m}^{1/3}/\text{s})(37\ \text{m}^2)(1{,}806\ \text{m})^{2/3}(0{,}003)^{1/2}}{84{,}8\ \text{m}^3/\text{s}} = \mathbf{0{,}035}$$

Discussão O coeficiente de Manning efetivo n_{coef} do canal está entre os dois valores de n, como era previsto. A média ponderada do coeficiente de Manning do canal é $n_{\text{méd}} = (n_1 p_1 + n_2 p_2)/p = 0{,}040$, que é bastante diferente de nef. Assim, usar uma média ponderada do coeficiente de Manning para todo o canal pode ser algo tentador, mas não seria tão exato.

13–6 • MELHORES SEÇÕES TRANSVERSAIS HIDRÁULICAS

Os sistemas de canais abertos em geral foram criados para transportar um líquido até uma posição com elevação menor, com uma vazão especificada sob a influência da gravidade e ao menor custo possível. Observando que nenhuma entrada de energia é necessária, o custo de um sistema de canais abertos consiste primariamente no custo inicial da construção, que é proporcional ao tamanho físico do sistema. Portanto, para determinado comprimento de canal, o perímetro seu é representativo para o custo do sistema, e deve ser mantido no nível mínimo para minimizar o tamanho e, portanto, o custo do sistema.

Sob outra perspectiva, a resistência ao escoamento é docorrente da tensão de cisalhamento na parede τ_w e à área da parede, que é equivalente ao perímetro mo-

lhado por unidade de comprimento do canal. Assim, para determinada área transversal A_c do escoamento, quanto menor o perímetro molhado p, menor será a força de resistência e, portanto, maior será a velocidade média e a vazão.

Sob outra perspectiva ainda, para uma geometria de canal especificada com uma inclinação do fundo S_0 e alinhamento de superfície (e, portanto, coeficiente de rugosidade n) especificados, a velocidade de escoamento é dada pela fórmula de Manning como $V = aR_h^{2/3}S_0^{1/2}/n$. Assim, a velocidade de escoamento é proporcional ao raio hidráulico e o raio hidráulico deve ser maximizado (e, portanto, o perímetro deve ser minimizado uma vez que $R_h = A_c/p$) para maximizar a velocidade média de escoamento ou a vazão por unidade de área da seção transversal. Dessa forma, concluímos o seguinte:

> A melhor seção transversal hidráulica para um canal aberto é aquela com o raio hidráulico máximo ou, de modo equivalente, aquela com o mínimo perímetro molhado para uma seção transversal especificada.

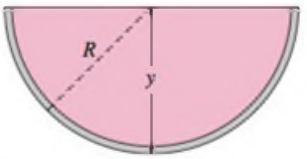


FIGURA 13–21
A melhor seção transversal hidráulica para um canal aberto é um semicírculo, uma vez que ele tem o perímetro molhado mínimo para uma seção transversal especificada e, portanto, a resistência mínima ao escoamento.

A forma com o perímetro mínimo por unidade de área é um círculo. Portanto, com base na resistência mínima ao escoamento, a melhor seção transversal para um canal aberto é um semicírculo (Figura 13–21). Entretanto, geralmente é mais econômico construir um canal aberto com laterais retas (como os canais com seções transversais trapezoidais ou retangulares), em vez de semicirculares, e a forma geral do canal pode ser especificada a *priori*. Portanto, faz sentido analisar cada forma geométrica separadamente para obter a melhor seção transversal.

Como um exemplo motivacional, considere um canal retangular de concreto polido ($n = 0{,}012$) de largura b e profundidade de escoamento y com inclinação do fundo de 1° (Figura 13–22). Para determinar os efeitos da razão de aspecto y/b sobre o raio hidráulico R_h e a vazão $\dot{V}$ por unidade de seção transversal ($A_c = 1\ \text{m}^2$), R_h e $\dot{V}$ são calculados com a fórmula de Manning. Os resultados estão tabulados na Tabela 13–2 e representados graficamente na Figura 13–23 para vazão de 0,1 a 5. Observamos nessa tabela e na representação gráfica que a vazão $\dot{V}$ aumenta à medida que a razão de aspecto do escoamento y/b aumenta, atinge o máximo em $y/b = 0{,}5$ e, em seguida, começa a diminuir (os valores numéricos de $\dot{V}$ também podem ser interpretados como as velocidades de escoamento em m/s, uma vez que $A_c = 1\ \text{m}^2$). Vemos a mesma tendência para o raio hidráulico, mas a tendência oposta para o perímetro molhado p.

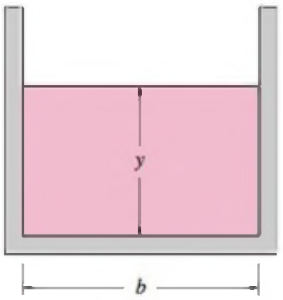


FIGURA 13–22
Um canal retangular aberto de largura b e profundidade de escoamento y. Para determinada área transversal, a mais alta vazão ocorre quando $y = b/2$.

TABELA 13–2

A variação do raio hidráulico R_h e da vazão $\dot{V}$ com a razão de aspecto y/b para um canal retangular com $A_c = 1\ \text{m}^2$, $S_0 = \tan 1°$, e $n = 0{,}012$

Razão de Aspecto y/b	Largura de Canal b, m	Profundidade de Escoamento y, m	Perímetro p, m	Raio Hidráulico R_h, m	Vazão $\dot{V}$, m³/s
0,1	3,162	0,316	3,795	0,264	4,53
0,2	2,236	0,447	3,130	0,319	5,14
0,3	1,826	0,548	2,921	0,342	5,39
0,4	1,581	0,632	2,846	0,351	5,48
0,5	1,414	0,707	2,828	0,354	5,50
0,6	1,291	0,775	2,840	0,352	5,49
0,7	1,195	0,837	2,869	0,349	5,45
0,8	1,118	0,894	2,907	0,344	5,41
0,9	1,054	0,949	2,951	0,339	5,35
1,0	1,000	1,000	3,000	0,333	5,29
1,5	0,816	1,225	3,266	0,306	5,00
2,0	0,707	1,414	3,536	0,283	4,74
3,0	0,577	1,732	4,041	0,247	4,34
4,0	0,500	2,000	4,500	0,222	4,04
5,0	0,447	2,236	4,919	0,203	3,81

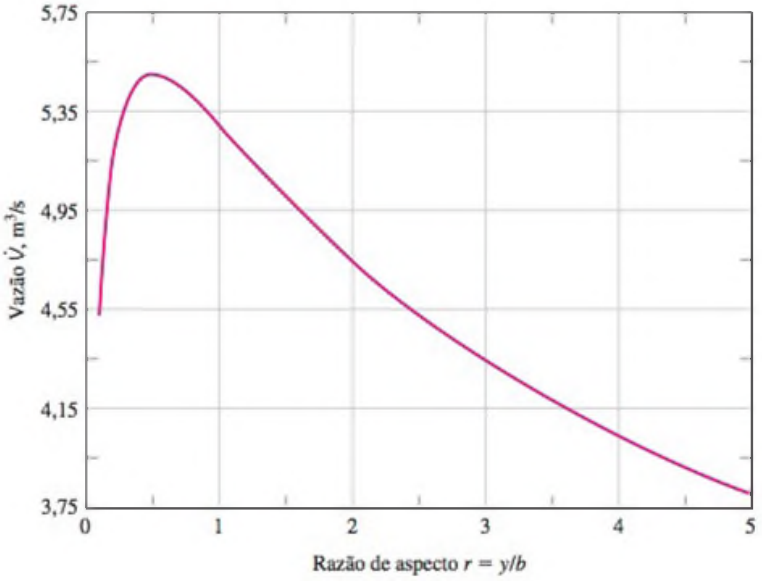


FIGURA 13–23
Variação da vazão em um canal retangular com razão de aspecto $r = y/b$ para $A_c = 1\ m^2$ e $S_0 = tg\ 1°$.

Esses resultados confirmam que a melhor seção transversal para determinada forma é aquela com o raio hidráulico máximo, ou de forma equivalente, aquela com o perímetro mínimo.

Canais Retangulares

Considere o escoamento de líquido em um canal aberto com seção transversal retangular de largura b e profundidade de escoamento y. A seção transversal e o perímetro molhado em uma seção de escoamento são

$$A_c = yb \quad \text{e} \quad p = b + 2y \tag{13–45}$$

Isolando b na primeira relação da Equação 13–45 e substituindo-a na segunda relação temos

$$p = \frac{A_c}{y} + 2y \tag{13–46}$$

Agora aplicamos o critério que afirma que a melhor seção transversal hidráulica para um canal aberto é aquela com o perímetro molhado mínimo para determinada seção transversal. Considerando a derivativa de p com relação a y e mantendo A_c constante, temos

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{A_c}{y^2} + 2 = -\frac{by}{y^2} + 2 = -\frac{b}{y} + 2 \tag{13–47}$$

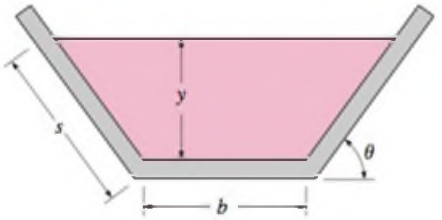
Definindo $dp/dy = 0$ e isolando y, o critério da melhor seção transversal hidráulica é determinado como

Melhor seção transversal hidráulica (canal retangular): $$y = \frac{b}{2} \tag{13–48}$$

Portanto, um canal aberto retangular deve ser projetado de forma que a altura do líquido seja metade da largura do canal para minimizar a resistência ao escoamento ou para maximizar a vazão para determinada seção transversal. Isso também minimiza o perímetro e, portanto, os custos de construção. Esse resultado confirma a constatação da Tabela 13–2 de que $y = b/2$ oferece a melhor seção transversal.

Canais Trapezoidais

Agora considere o escoamento líquido em um canal aberto de seção transversal trapezoidal com largura no fundo b, profundidade de escoamento y e ângulo



$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{y(b + y/\text{tg}\,\theta)}{b + 2y/\text{sen}\,\theta}$$

FIGURA 13–24
Parâmetros de um canal trapezoidal.

trapezoidal θ medido da horizontal, como mostra a Figura 13–24. A área transversal e o perímetro molhado de uma seção de escoamento são

$$A_c = \left(b + \frac{y}{\text{tg}\,\theta}\right)y \quad \text{e} \quad p = b + \frac{2y}{\text{sen}\,\theta} \tag{13–49}$$

Isolando b na primeira relação da Equação 13–49 e substituindo-a na segunda relação temos

$$p = \frac{A_c}{y} - \frac{y}{\text{tg}\,\theta} + \frac{2y}{\text{sen}\,\theta} \tag{13–50}$$

Considerando a derivativa de p com relação a y e mantendo A_c e θ constantes, temos

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{A_c}{y^2} - \frac{1}{\text{tg}\,\theta} + \frac{2}{\text{sen}\,\theta} = -\frac{b + y/\text{tg}\,\theta}{y} - \frac{1}{\text{tg}\,\theta} + \frac{2}{\text{sen}\,\theta} \tag{13–51}$$

Fazendo $dp/dy = 0$ e isolando y, o critério da melhor seção transversal hidráulica para qualquer ângulo trapezoidal θ é determinado como

Melhor seção transversal hidráulica (canal trapezoidal): $$y = \frac{b\,\text{sen}\,\theta}{2(1 - \cos\theta)} \tag{13–52}$$

Para o caso especial de $\theta = 90°$ (um canal retangular), essa relação se reduz a $y = b/2$, como era esperado.

O raio hidráulico R_h de um canal trapezoidal pode ser expresso como

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{y(b + y/\text{tg}\,\theta)}{b + 2y/\text{sen}\,\theta} = \frac{y(b\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)}{b\,\text{sen}\,\theta + 2y} \tag{13–53}$$

Reorganizando a Equação 13–52 como $b\text{sen}\theta = 2y(1 - \cos\theta)$, substituindo na Equação 13–53 e simplificando, temos que o raio hidráulico para um canal trapezoidal com a melhor seção transversal torna-se

Raio hidráulico para a melhor seção transversal: $$R_h = \frac{y}{2} \tag{13–54}$$

Portanto, o raio hidráulico é metade da profundidade do escoamento para os canais trapezoidais com a melhor seção transversal, independentemente do ângulo trapezoidal θ.

Da mesma forma, o ângulo trapezoidal para a melhor seção transversal hidráulica é determinado considerando a derivativa de p (Equação 13–50) com relação a θ, mantendo A_c e y constantes, impondo $dp/d\theta = 0$ e resolvendo a equação resultante para θ. Isso resulta em

Melhor ângulo trapezoidal: $$\theta = 60° \tag{13–55}$$

Substituindo o melhor ângulo trapezoidal $\theta = 60°$ na relação da melhor seção transversal hidráulica $y = b\,\text{sen}\,\theta/(2 - 2\cos\theta)$ temos

Melhor profundidade de escoamento para $\theta = 60°$: $$y = \frac{\sqrt{3}}{2}b \tag{13–56}$$

Assim, o comprimento das arestas da seção de escoamento e a área de escoamento tornam-se

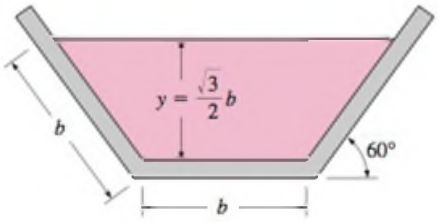
$$s = \frac{y}{\text{sen}\,60°} = \frac{b\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} = b \tag{13–57}$$

$$p = 3b \tag{13–58}$$

$$A_c = \left(b + \frac{y}{\text{tg}\,\theta}\right)y = \left(b + \frac{b\sqrt{3}/2}{\text{tg}\,60°}\right)(b\sqrt{3}/2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2 \tag{13–59}$$

uma vez que $\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$. Portanto, a melhor seção transversal para os canais trapezoidais é a *metade de um hexágono* (Figura 13–25). Isso não é surpresa, uma vez que um hexágono se aproxima bastante de um círculo, e meio hexágono tem o menor perímetro por área transversal entre todos os canais trapezoidais.

As melhores seções transversais hidráulicas par outras formas de canal podem ser determinadas de modo semelhante. Por exemplo, pode ser mostrado que a melhor seção transversal para um canal circular de diâmetro D é aquele com $y = D/2$.



$$R_h = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b \qquad A_c = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2$$

FIGURA 13–25
A melhor seção transversal para os canais trapezoidais é a *metade de um hexágono*.

EXEMPLO 13–5 Melhor Seção Transversal de um Canal Aberto

A água deve ser transportada a uma vazão de 2 m³/s no escoamento uniforme em um canal aberto cujas superfícies são asfaltadas. A inclinação do fundo é 0,001. Determine as dimensões da melhor seção transversal se a forma do canal for (*a*) retangular e (*b*) trapezoidal (Figura 13–26).

SOLUÇÃO A água deve ser transportada em um canal aberto a uma vazão especificada. As dimensões do melhor canal devem ser determinadas para formas retangulares e trapezoidais.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente e uniforme. **2** A inclinação do fundo inferior é constante. **3** A rugosidade da superfície molhada do canal e, portanto, o coeficiente de atrito são constantes.

Propriedades O coeficiente de Manning para um canal aberto com asfalto é $n = 0{,}016$.

Análise (*a*) A melhor seção transversal de um canal retangular ocorre quando a altura do escoamento é metade da largura do canal, $y = b/2$. Então, a área da seção transversal, o perímetro e o raio hidráulico do canal são

$$A_c = by = \frac{b^2}{2} \qquad p = b + 2y = 2b \qquad R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{b}{4}$$

Substituindo na equação de Manning

$$\dot{V} = \frac{a}{n}A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \rightarrow \quad b = \left(\frac{2n\dot{V}4^{2/3}}{a\sqrt{S_0}}\right)^{3/8} = \left(\frac{2(0{,}016)(2\ \text{m}^3/\text{s})4^{2/3}}{(1\ \text{m}^{1/3}/\text{s})\sqrt{0{,}001}}\right)^{3/8}$$

que resulta em $b = 1{,}84$ m. Assim, $A_c = 1{,}70$ m², $p = 3{,}68$ m e as dimensões do melhor canal retangular são

$$b = \mathbf{1{,}84\ m} \qquad \text{e} \qquad y = \mathbf{0{,}92\ m}$$

(*b*) A melhor seção transversal de um canal trapezoidal ocorre quando o ângulo trapezoidal for de 60° e a altura do escoamento for $y = b\sqrt{3}/2$. Assim

$$A_c = y(b + b\cos\theta) = 0{,}5\sqrt{3}b^2(1 + \cos 60°) = 0{,}75\sqrt{3}b^2$$

$$p = 3b \qquad R_h = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b$$

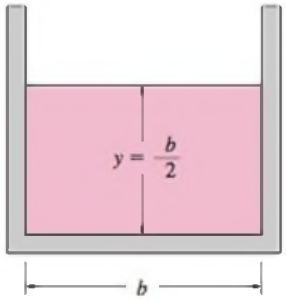
Substituindo na equação de Manning

$$\dot{V} = \frac{a}{n}A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \rightarrow \quad b = \left(\frac{(0{,}016)(2\ \text{m}^3/\text{s})}{0{,}75\sqrt{3}\left(\sqrt{3}/4\right)^{2/3}(1\ \text{m}^{1/3}/\text{s})\sqrt{0{,}001}}\right)^{3/8}$$

que resulta em $b = 1{,}12$ m. Assim, $A_c = 1{,}64$ m², $p = 3{,}37$ m e as dimensões do melhor canal trapezoidal são

$$b = \mathbf{1{,}12\ m} \qquad y = \mathbf{0{,}973\ m} \qquad \text{e} \qquad \theta = \mathbf{60°}$$

Discussão Observe que a seção transversal trapezoidal é melhor, uma vez que ela tem um perímetro menor (3,37 *versus* 3,68 m) e, portanto, menor custo de construção.



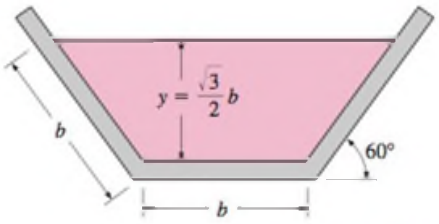


FIGURA 13–26
Esquema do Exemplo 13–5.

13–7 • ESCOAMENTO GRADUALMENTE VARIADO

Até este ponto consideramos o *escoamento uniforme* durante o qual a profundidade de escoamento y e a velocidade do escoamento V permanecem constantes. Nesta seção consideramos o *escoamento gradualmente variado* (GVF), que é uma forma de escoamento não uniforme permanente caracterizado pelas variações graduais da profundidade de escoamento e velocidade (pequenas inclinações e nenhuma variação abrupta) e uma superfície livre que sempre permanece lisa (sem descontinuidades ou ziguezagues). Os escoamentos que envolvem variações rápidas na profundidade e na velocidade de escoamento, chamados *escoamentos rapidamente variados* (RVF) serão considerados na Seção 13–8. Uma variação na inclinação do fundo ou na seção transversal de um canal ou uma obstrução no caminho do escoamento podem fazer com que o escoamento uniforme de um canal torne-se um escoamento gradual ou rapidamente variado.

Os escoamentos rapidamente variados ocorrem em uma seção curta do canal com área de superfície relativamente pequena e, portanto, as perdas por atrito associadas ao cisalhamento na parede são desprezíveis. As perdas de carga do RVF são altamente localizadas e decorrentes da agitação intensa e turbulência. Por outro lado, as perdas do GVF devem-se primariamente aos efeitos do atrito ao longo do canal e podem ser determinadas pela fórmula de Manning.

No escoamento gradualmente variado, a profundidade e velocidade do escoamento variam lentamente e a superfície livre é estável. Isso possibilita a formulação da variação da profundidade do escoamento ao longo do canal com base nos princípios de conservação da massa e da energia e a obtenção de relações para o perfil da superfície livre.

No escoamento uniforme, a inclinação do nível de energia é igual à inclinação da superfície do fundo. Assim, a inclinação do atrito é igual à inclinação do fundo $S_f = S_0$. No escoamento gradualmente variado, porém, essas inclinações são diferentes.

Considere o escoamento permanente em um canal aberto retangular de largura b e considere qualquer variação na inclinação do fundo e na profundidade da água como bastante gradual. Escrevemos novamente as equações em termos da velocidade média V e assumimos a distribuição da pressão como hidrostática. Na Equação 13–17, a carga total do líquido em qualquer seção transversal é $H = z_b + y + V^2/2g$, onde z_b é a distância vertical entre a superfície do fundo e o plano de referência. Diferenciando H com relação a x temos

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left(z_b + y + \frac{V^2}{2g}\right) = \frac{dz_b}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{V}{g}\frac{dV}{dx} \qquad \textbf{(13–60)}$$

Mas H é a energia total do líquido e, portanto, dH/dx é a inclinação do nível de energia (quantidade negativa), que é igual ao oposto da inclinação de atrito, como mostra a Figura 13–27. Além disso, dz_b/dx é o oposto da inclinação do fundo. Portanto,

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{dh_L}{dx} = -S_f \quad \text{e} \quad \frac{dz_b}{dx} = -S_0 \qquad \textbf{(13–61)}$$

Substituir a Equação 13–61 na Equação 13–60 resulta em

$$S_0 - S_f = \frac{dy}{dx} + \frac{V}{g}\frac{dV}{dx} \qquad \textbf{(13–62)}$$

A equação de continuidade para o escoamento permanente em um canal retangular é $\dot{V} = ybV$ = constante. Diferenciando com relação a x temos

$$0 = bV\frac{dy}{dx} + yb\frac{dV}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{y}\frac{dy}{dx} \qquad \textbf{(13–63)}$$

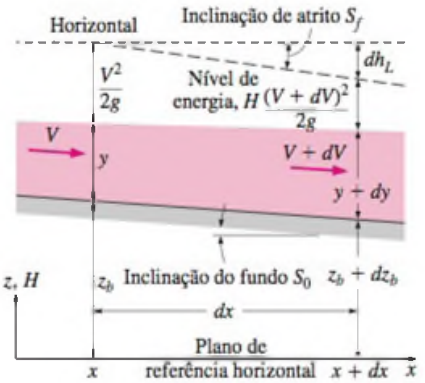


FIGURA 13–27
Variação das propriedades com relação a uma seção de escoamento diferencial em um canal aberto sob condições de escoamento gradualmente variado (GVF).

Substituindo a Equação 13-63 na Equação 13–62 e observando que $V/\sqrt{gy}$ é o número de Froude,

$$S_0 - S_f = \frac{dy}{dx} - \frac{V^2}{gy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} - \mathrm{Fr}^2\frac{dy}{dx} \tag{13–64}$$

Isolando *dy/dx*, temos a relação desejada para a taxa de variação da profundidade de escoamento (ou o perfil de superfície) no escoamento gradualmente variado em um canal aberto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \mathrm{Fr}^2} \tag{13–65}$$

que é análogo à variação da área de escoamento como função do número de Mach no escoamento compressível. Essa relação foi deduzida para um canal retangular, mas também é válida para canais com outras seções transversais constantes, desde que o número de Froude seja expresso adequadamente. Uma solução analítica ou numérica dessa equação diferencial resulta na profundidade de escoamento y como função de x para determinado conjunto de parâmetros e a função $y(x)$ é o *perfil de superfície*.

A tendência geral da profundidade de escoamento — seja aumentando, diminuindo ou permanecendo constante ao longo do canal — depende do sinal de *dy/dx*, que depende dos sinais do numerador e do denominador da Equação 13–65. O número de Froude é sempre positivo e, portanto, é a inclinação do atrito S_f (exceto para o caso idealizado do escoamento com efeitos de atrito desprezíveis para o qual tanto h_L quanto S_f são nulos). A inclinação do fundo S_0 é positiva para as seções inclinadas para baixo (o que em geral é o caso), zero para seções horizontais e negativa para seções inclinadas para cima (escoamento adverso) em um canal. A profundidade de escoamento aumenta quando $dy/dx > 0$, diminui quando $dy/dx < 0$ e permanece constante (e, portanto, a superfície livre é paralela ao fundo do canal como no escoamento uniforme) quando $dy/dx = 0$ e, assim, $S_0 = S_f$. Para valores especificados para $S_0 = S_f$, o termo dy/dx pode ser positivo ou negativo, dependendo do número de Froude ser menor do que ou maior do que 1. Assim, o comportamento no escoamento subcrítico é oposto ao comportamento no escoamento supercrítico. Para $S_0 - S_f > 0$, por exemplo, a profundidade de escoamento aumenta na direção do escoamento no escoamento subcrítico, mas diminui no escoamento supercrítico.

A determinação do sinal do denominador $1 - \mathrm{Fr}^2$ é fácil: ele é positivo para o escoamento subcrítico ($\mathrm{Fr} < 1$) e negativo para o escoamento supercrítico ($\mathrm{Fr} > 1$). Mas o sinal do numerador depende dos valores relativos de S_0 e S_f. Observe que a inclinação por atrito S_f é sempre positiva, e seu valor é igual à inclinação do canal S_0 no escoamento uniforme, $y = y_n$. Observe que a perda de carga aumenta com o aumento da velocidade, e que a velocidade é inversamente proporcional à profundidade do escoamento para determinada vazão, $S_f > S_0$ e, portanto, $S_0 - S_f < 0$ quando $y < y_n$ e $S_f < S_0$ e, assim, $S_0 - S_f > 0$ quando $y > y_n$. O numerador $S_0 - S_f$ sempre é negativo para os canais horizontais ($S_0 = 0$) e para os com inclinação para cima ($S_0 < 0$) e, portanto, a profundidade de escoamento diminui na direção do escoamento durante os escoamentos subcríticos em tais canais.

Perfis de Superfície Líquida em Canais Abertos, $y(x)$

Os sistemas de canais abertos são planejados e construídos com base nas profundidades de escoamento projetadas ao longo do canal. Assim, é importante poder prever a profundidade do escoamento para uma vazão e uma geometria de canal especificadas. Uma representacão gráfica das profundidades de escoamento resulta no **perfil de superfície** do escoamento. As características gerais dos perfis de superfície para o escoamento gradualmente variado dependem da inclinação do fundo e da profundidade de escoamento com relação às profundidades críticas e normais.

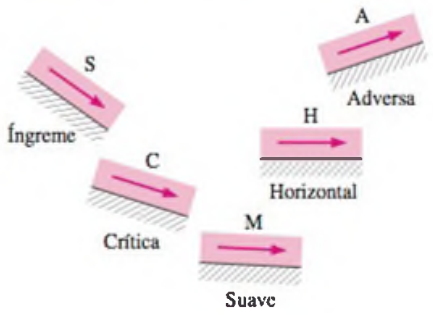


FIGURA 13–28
Designação das letras S, C, M, H e A para os perfis de superfície do líquido para diferentes tipos de inclinações.

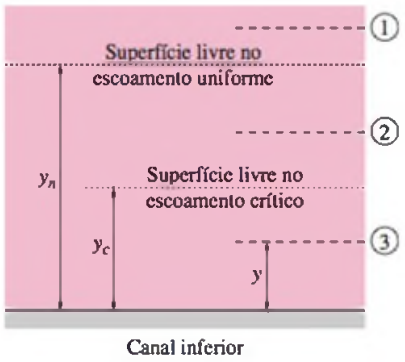


FIGURA 13–29
Designação dos números 1, 2 e 3 para os perfis de superfície líquida com base no valor da profundidade do escoamento com relação às profundidades normal e crítica.

Um canal aberto típico envolve diversas seções com inclinações do fundo S_0 diferentes e diferentes regimes de escoamento e, portanto, diversas seções dos diferentes perfis de superfície. Por exemplo, a forma geral do perfil de superfície em uma seção de inclinação para baixo de um canal é diferente daquela de uma seção com inclinação para cima. Da mesma forma, o perfil do escoamento subcrítico é diferente daquele do escoamento supercrítico. Ao contrário do escoamento uniforme, que não envolve as forças de inércia, o escoamento gradualmente variado envolve a aceleração e desaceleração do líquido, e o perfil de superfície reflete o balanço dinâmico entre o peso do líquido, a força de cisalhamento e os efeitos inerciais.

Cada perfil de superfície é identificado por uma letra que indica a inclinação do canal e por um número que indica a profundidade do escoamento com relação à profundidade crítica y_c e à profundidade normal y_n. A inclinação do canal pode ser suave (M), crítica (C), íngreme (S), horizontal (H) ou adversa (A). A inclinação do canal é suave se $y_n > y_c$, íngreme se $y_n < y_c$, crítica se $y_n = y_c$, horizontal se $S_0 = 0$ (inclinação do fundo zero) e adversa se $S_0 < 0$ (inclinação negativa). Observe que um líquido escoa para cima em um canal que tem uma inclinação adversa (Figura 13–28).

A classificação de uma seção de canal depende da vazão e da seção transversal do canal, bem como da inclinação do fundo do canal. Uma seção de canal classificada com uma inclinação suave para um escoamento pode ter uma inclinação íngreme para outro escoamento e mesmo uma inclinação crítica para um terceiro escoamento. Portanto, precisamos calcular a profundidade crítica y_c e a profundidade normal y_n antes de podermos avaliar a inclinação.

A designação numérica indica a posição inicial da superfície do líquido para determinada inclinação de canal com relação aos níveis da superfície nos escoamentos crítico e uniforme, como mostra a Figura 13–29. Um perfil de superfície é designado por 1 se a profundidade do escoamento está acima das profundidades crítica quanto da normal ($y > y_c$ e $y > y_n$), por 2 se a profundidade de escoamento está entre os dois ($y_n > y > y_c$ ou $y_n < y < y_c$) e por 3 se a profundidade de escoamento estiver abaixo das profundidades crítica quanto da normal ($y < y_c$ e $y < y_n$).

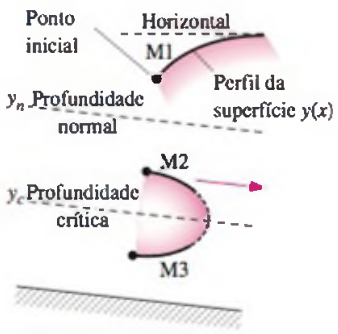
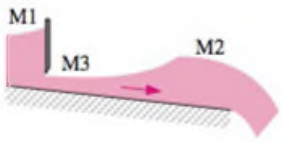
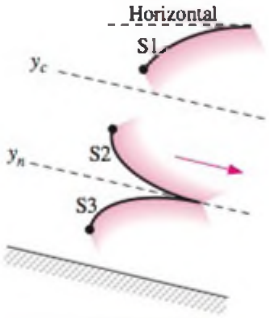
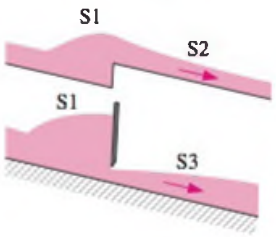
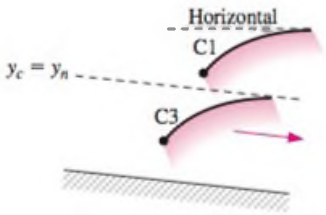
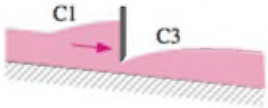
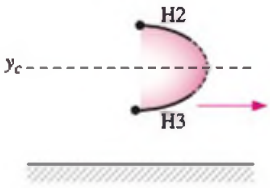
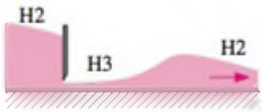
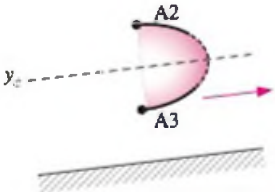
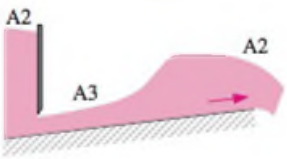
Portanto, três perfis diferentes são possíveis para um tipo especificado de inclinação de canal. Mas para os canais com inclinações zero ou adversas, o escoamento do tipo 1 não pode existir, uma vez que o escoamento nunca pode ser uniforme nos canais horizontal e com inclinação para cima e, portanto, a profundidade normal não é definida. Da mesma forma, o escoamento do tipo 2 não existe para os canais com inclinação crítica, uma vez que as profundidades normal e crítica são idênticas neste caso.

As cinco classes de inclinação e os três tipos de posições iniciais discutidos permitem um total de 12 configurações distintas para os perfis de superfície na GVF, todos tabulados e representados na Tabela 13–3. O número de Froude também é dado para cada caso, com Fr > 1 para $y < y_c$, bem como o sinal da inclinação dy/dx do perfil de superfície determinado com a Equação 13–65, $dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - \text{Fr}^2)$. Observe que $dy/dx > 0$ e, portanto, a profundidade do escoamento aumenta na direção do escoamento quando $S_0 - S_f$ e $1 - \text{Fr}^2$ são positivos ou negativos. Caso contrário, $dy/dx < 0$ e a profundidade do escoamento diminui. Nos escoamentos do tipo 1, a profundidade do escoamento aumenta na direção do escoamento e o perfil da superfície se aproxima do plano horizontal assintoticamente. Nos escoamentos do tipo 2, a profundidade do escoamento diminui e o perfil de superfície se aproxima do mais baixo entre y_c e y_n. Nos escoamentos do tipo 3, a profundidade do escoamento diminui e o perfil de superfície se aproxima do mais baixo entre y_c e y_n. Essas tendências dos perfis de superfície continuam enquanto não houver variações na inclinação no fundo ou na rugosidade.

Considere o primeiro caso da Tabela 13–3 designado por M1 (inclinação suave de canal e $y > y_n > y_c$). O escoamento é subcrítico, uma vez que $y > y_c$ e, portanto, Fr < 1 e $1 - \text{Fr}^2 > 0$. Da mesma forma, $S_f < S_0$ e, portanto, $S_0 - S_f > 0$, já que $y > y_n$, e, assim, a velocidade do escoamento é menor do que a velocidade no escoamento normal. Portanto, a inclinação do perfil de superfície $dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - \text{Fr}^2) > 0$ e a profundidade de escoamento y aumenta na direção do escoamento.

TABELA 13–3

Classificação dos perfis de superfície no escoamento gradualmente variado

Inclinação do canal	Notação para o perfil	Profundidade do Escoamento	Número de Froude	Inclinação do Perfil	Perfil de Superfície
Suave (M) $y_c < y_n$, $S_0 < S_c$	M1	$y > y_n$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
	M2	$y_c < y < y_n$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	M3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	Fundo do canal, $S_0 < S_c$
Íngreme (S) $y_c > y_n$, $S_0 < S_c$	S1	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
	S2	$y_n < y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	S3	$y < y_n$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	Fundo do canal, $S_0 > S_c$
Crítico (C) $y_c = y_n$, $S_0 < S_c$	C1	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
	C3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
					Fundo do canal, $S_0 = S_c$
Horizontal (H) $y_n \to \infty$, $S_0 = 0$	H2	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	H3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
					Fundo do canal, $S_0 = 0$
Adverso (A) $S_0 < 0$, y_n: não existe	A2	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	A3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$	
					Fundo do canal, $S_0 < 0$

Mas à medida em que y aumenta, a velocidade de escoamento diminui e, portanto, S_f e Fr se aproximam de zero. Conseqüentemente, dy/dx se aproxima de S_0 e a taxa de aumento da profundidade de escoamento torna-se igual à inclinação do canal. Isso exige que o perfil de superfície torne-se horizontal quando y é grande. Então, concluímos que o perfil de superfície M1 primeiro se eleva na direção do escoamento e depois tende a uma assíntota horizontal.

Quando $y \to y_c$ no escoamento subcrítico (como em M2, H2 e A2), temos $\text{Fr} \to 1$ e $1 - \text{Fr}^2 \to 0$ e, portanto, a inclinação dy/dx tende a menos infinito. Mas quando $y \to y_c$ no escoamento supercrítico (como em M3, H3 e A3), temos $\text{Fr} \to 1$ e $1 - \text{Fr}^2 \to 0$ e, portanto, a inclinação dy/dx é uma quantidade positiva, tendendo ao infinito. Ou seja, a superfície livre se levanta quase verticalmente e a profundidade de escoamento aumenta com muita rapidez. Isso não pode ser fisicamente sustentado, e a superfície livre se quebra. O resultado é um salto hidráulico. A hipótese unidimensional não se aplica mais quando isso acontece.

Alguns Perfis de Superfície Representativos

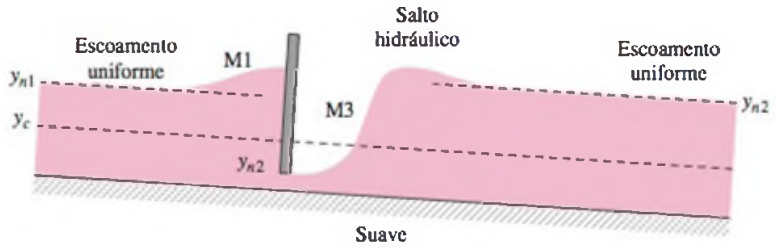
Um sistema típico de canal aberto envolve várias seções com diferentes inclinações, com conexões chamadas de *transições* e, portanto, o perfil de superfície geral do escoamento é um perfil contínuo formado pelos perfis individuais descritos anteriormente. Alguns perfis de superfície representativos normalmente encontrados nos canais abertos, incluindo perfis compostos, são dados na Figura 13–30. Para cada caso, a variação no perfil de superfície é causada por uma variação na geometria do canal, como uma variação abrupta na inclinação ou uma obstrução no escoamento como uma comporta basculante. Outros perfis compostos podem ser encontrados nos livros especializados relacionados nas referências. Um ponto em um perfil de superfície representa a altura do escoamento naquele ponto que satisfaz as relações da massa, do momento e da energia. Observe que $dy/dx << 1$ e $S_0 << 1$ no escoamento gradualmente variado, e as inclinações tanto dos canais e quanto dos perfis de superfície nessas representações são muito exagerados para facilitar a visualização. Muitos canais e perfis de superfície apareceriam quase horizontais se fossem desenhados em escala.

A Figura 13–30*a* mostra o perfil de superfície para o escoamento gradualmente variado em um canal com inclinação suave e uma comporta basculante. O escoamento subcrítico para cima (observe que o escoamento é subcrítico uma vez que a inclinação é suave) fica mais lento à medida que se aproxima da comporta (como um rio que se aproxima de uma represa) e o nível do líquido se eleva. O escoamento após a comporta é supercrítico (uma vez que a altura da abertura é menor do que a profundidade crítica). Assim, o perfil de superfície é M1 antes da comporta e M3 após a comporta e antes do salto hidráulico.

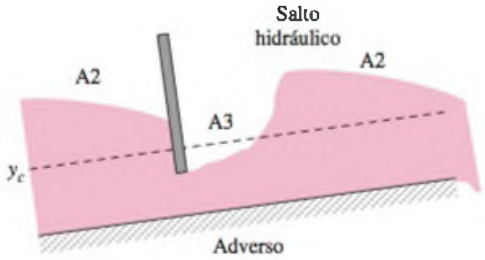
Uma seção de um canal aberto pode ter uma inclinação negativa e envolver o escoamento para cima, como mostra a Figura 13–30*b*. O escoamento com uma inclinação adversa não pode ser mantido, a menos que as forças inerciais superem as forças de gravidade e viscosas que se opõem ao movimento do fluido. Assim, uma seção de canal para cima deve ser acompanhada por uma seção para baixo ou por uma queda livre. Para o escoamento subcrítico com uma inclinação adversa que se aproxima de uma comporta basculante, a profundidade do escoamento diminui à medida que a comporta se aproxima, resultando em um perfil A2. O escoamento após a comporta em geral é supercrítico, resultando em um perfil A3 antes do salto hidráulico.

A seção de canal aberto da Figura 13–30*c* envolve uma variação da inclinação de íngreme para menos íngreme. A velocidade de escoamento na parte menos íngreme é mais baixa (uma queda menor da elevação para mover o escoamento) e, portanto, a profundidade do escoamento é mais alta quando o escoamento uniforme é restabelecido. Observando que o escoamento uniforme com inclinação íngreme deve ser supercrítico ($y < y_c$), a profundidade do escoamento aumenta da inicial para o novo nível uniforme suavemente através de um perfil S3.

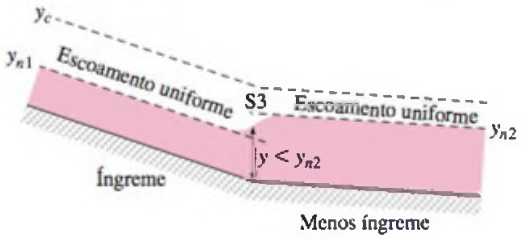
A Figura 13–30*d* mostra um perfil de superfície composta para um canal aberto que envolve diversas seções de escoamento. Inicialmente a inclinação é suave e o



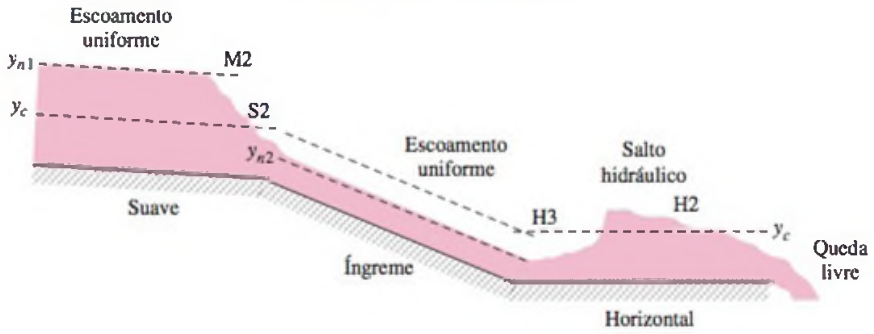
(*a*) Escoamento através de uma comporta basculante em um canal aberto com inclinação suave



(*b*) Escoamento através de uma comporta basculante em um canal aberto com inclinação adversa seguida de queda livre



(*c*) Escoamento supercrítico uniforme variando de uma inclinação íngreme para uma menos íngreme



(*d*) Escoamento subcrítico uniforme variando de uma inclinação suave para íngreme para horizontal seguido de queda livre

FIGURA 13–30
Alguns perfis de superfície comuns encontrados no escoamento em canal aberto. Todos os escoamentos são da esquerda para a direita.

escoamento é uniforme e subcrítico. Em seguida, a inclinação muda para íngreme, e o escoamento torna-se supercrítico quando o escoamento uniforme é estabelecido. A profundidade crítica ocorre na descontinuidade da inclinação. A variação da inclinação é acompanhada por uma diminuição uniforme da profundidade do escoamento através de um perfil M2 no final da seção suave, e através de um perfil S2 no início da seção íngreme. Na seção horizontal, a profundidade de escoamento aumenta primeiro suavemente em um perfil H3 e, em seguida, rapidamente durante um salto hidráulico. Em seguida, a profundidade de escoamento diminui através do perfil H2 à medida que o líquido acelera na direção do final do canal até uma queda livre. O escoamento torna-se crítico antes de atingir o final do canal, e a queda controla o escoamento a montante após o salto hidráulico. A corrente do escoamento em queda é supercrítica. Observe que o escoamento uniforme não pode ser estabelecido em um canal horizontal, uma vez que a força gravitacional não tem componente na direção do escoamento e o escoamento é induzido pela inércia.

Solução Numérica para o Perfil de Superfície

A previsão do perfil de superfície $y(x)$ é parte importante do projeto dos sistemas canal aberto. Um bom ponto de partida para a determinação do perfil de superfície é a identificação dos pontos ao longo do canal, chamados de **pontos de controle**, nos quais a profundidade de escoamento pode ser calculada com base na vazão. Por exemplo, a profundidade de escoamento em uma seção de um canal retangular onde ocorre o escoamento crítico, chamado de *ponto crítico*, pode ser determinada com $y_c = (\dot{V}^2/gb^2)^{1/3}$. A *profundidade normal* y_n, que é a profundidade de escoamento atingida quando o escoamento uniforme é estabelecido também serve como ponto de controle. Depois que as profundidades de escoamento dos pontos de controle estão disponíveis, o perfil de superfície a montante ou a jusante geralmente pode ser determinado pela integração numérica da equação diferencial não-linear

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \mathrm{Fr}^2} \tag{13–66}$$

A inclinação de atrito S_f é determinada por meio das condições do escoamento uniforme, e o número de Froude pela relação apropriada para a seção transversal do canal.

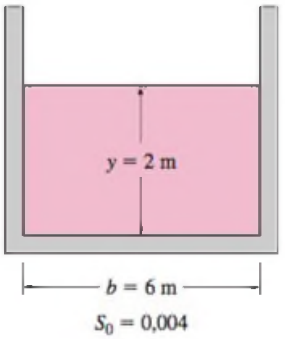


FIGURA13–31
Esquema do Exemplo 13–6.

EXEMPLO 13–6 Classificação da Inclinação do Canal

A água escoa de modo uniforme em um canal aberto retangular com superfícies de concreto não polido. A largura do canal é 6 m, a profundidade do canal é 2 m e a inclinação do fundo é 0,004. Determine se o canal deve ser classificado como suave, crítico ou íngreme para este escoamento (Figura 13–31).

SOLUÇÃO A água escoa em um canal aberto de modo uniforme. É preciso determinar se a inclinação do canal é suave, crítica ou íngreme para esse escoamento.

Hipóteses 1 O escoamento é permanente e uniforme. **2** A inclinação da parte inferior é constante. **3** A rugosidade da superfície molhada do canal e, portanto, o coeficiente de atrito são constantes.

Propriedades O coeficiente de Manning para um canal aberto com superfícies de concreto não polido é $n = 0{,}014$.

Análise A área transversal, o perímetro e o raio hidráulico do canal são

$$A_c = yb = (2\ \mathrm{m})(6\ \mathrm{m}) = 12\ \mathrm{m}^2$$

$$p = b + 2y = 6\ \mathrm{m} + 2(2\ \mathrm{m}) = 10\ \mathrm{m}$$

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{12\ \mathrm{m}^2}{10\ \mathrm{m}} = 1{,}2\ \mathrm{m}$$

A vazão é determinada pela equação de Manning como

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1\ \mathrm{m}^{1/3}/\mathrm{s}}{0{,}014} (12\ \mathrm{m}^2)(1{,}2\ \mathrm{m})^{2/3}(0{,}004)^{1/2} = \mathbf{61{,}2\ m^3/s}$$

Observando que o escoamento é uniforme, a vazão especificada é a profundidade normal e, portanto, $y = y_n = 2$ m. A profundidade crítica desse escoamento é

$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} = \frac{(61{,}2\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s})^2}{(9{,}81\ \mathrm{m/s}^2)(12\ \mathrm{m}^2)} = 2{,}2\ \mathrm{m}$$

Esse canal nessas condições de escoamento é classificado como íngreme, uma vez que $y_n < y_c$, e o escoamento é supercrítico.

Discussão Se a profundidade de escoamento fosse maior do que 2,2 m, a inclinação do canal seria suave. Assim, a inclinação do fundo apenas não é suficiente para classificar um canal descendente como suave, crítico ou íngreme.

13–8 • ESCOAMENTO RAPIDAMENTE VARIADO E SALTO HIDRÁULICO

Lembre-se de que o escoamento nos canais abertos é chamado de **escoamento rapidamente variado (RVF)** se a profundidade do escoamento variar de forma acentuada ao longo de uma distância relativamente curta na direção do escoamento (Figura 13–32). Tais escoamentos ocorrem em comportas basculantes, vertedouros amplos ou de soleira espessa, quedas d'água e nas seções de transição dos canais para expansão e contração. Uma variação na seção transversal do canal é um motivo importante para a ocorrência de escoamento rapidamente variado. Mas alguns escoamentos rapidamente variáveis, como o o que ocorre através de uma comporta basculante, acontecem mesmo em regiões nas quais a seção transversal do canal é constante.

FIGURA 13–32
O escoamento rapidamente variado ocorre quando existe uma variação súbita no escoamento, como uma mudança abrupta na seção transversal.

Os escoamentos rapidamente variados geralmente são complicados pelo fato de que podem envolver efeitos multidimensionais e não permanentes, escoamento invertido e separação de escoamento. Assim, os escoamentos rapidamente variados em geral são estudados experimental ou numericamente. Mas, apesar dessas complexidades, ainda é possível analisar alguns escoamentos rapidamente variados usando-se a aproximação do escoamento unidimensional com exatidão razoável.

O escoamento em canais íngremes pode ser supercrítico, e o escoamento pode mudar para subcrítico se o canal não puder mais sustentar o escoamento supercrítico devido a uma inclinação reduzida do canal ou a efeitos de atrito maiores. Toda variação do escoamento supercrítico para o subcrítico ocorrem através de um *salto hidráulico*. Um salto hidráulico envolve mistura e agitação consideráveis e, portanto, uma quantidade significativa de dissipação de energia mecânica.

Considere o escoamento permanente através de um volume de controle que inclui o salto hidráulico, como mostra a Figura 13–33. Para possibilitarmos uma análise simples, fazemos as seguintes hipóteses:

1. A velocidade é quase constante em todo o canal nas seções 1 e 2 e, portanto, os fatores de correção de fluxo de momento são $\beta_1 = \beta_2 \cong 1$.
2. A pressão do líquido varia hidrostaticamente, e consideramos apenas a pressão manométrica, uma vez que a pressão atmosférica age em todas as superfícies e seu efeito é cancelado.
3. A tensão de cisalhamento da parede e as perdas associadas são desprezíveis em relação às perdas que ocorrem durante o salto hidráulico devido à agitação intensa.
4. O canal é largo e horizontal.
5. Não há forças externas ou de volume além da gravidade.

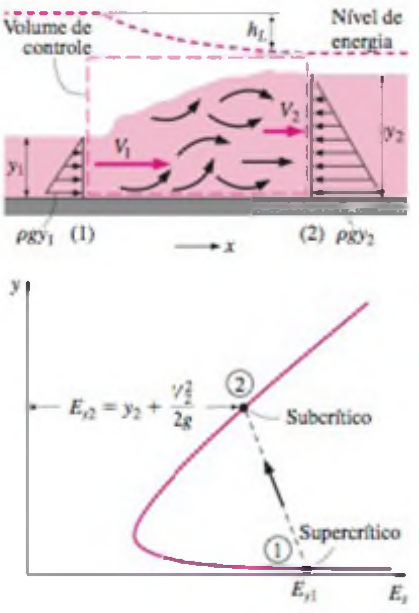


FIGURA 13–33
Esquema e diagrama da energia de profundidade específica do escoamento em um salto hidráulico (a energia específica diminui).

Para um canal de largura b, a conservação de massa ou equação da continuidade $\dot{m}_2 = \dot{m}_1$ pode ser expressa como $\rho y_1 b V_1 = \rho y_2 b V_2$ ou

$$y_1 V_1 = y_2 V_2 \qquad \textbf{(13–67)}$$

Observando que apenas as forças que agem sobre o volume de controle na direção horizontal x são forças de pressão, a equação de momento $\sum \vec{F} = \sum_s \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_c \beta \dot{m} \vec{V}$ na direção x torna-se um balanço entre as forças de pressão hidrostática e a transferência de momento

$$P_{1,\,\text{méd}} A_1 - P_{2,\,\text{méd}} A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \qquad \textbf{(13–68)}$$

onde $P_{1,\,\text{méd}} = \rho g y_1 / 2$ e $P_{2,\,\text{méd}} = \rho g y_2 / 2$. Para uma largura de canal b, temos $A_1 = y_1 b$, $A_2 = y_2 b$, e $\dot{m} = \dot{m}_2 = \dot{m}_1 = \rho A_1 V_1 = \rho y_1 b V_1$. Substituindo e simplificando, a equação de momento se reduz a

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2 y_1 V_1}{g} (V_2 - V_1) \qquad \textbf{(13–69)}$$

Eliminando V_2 da equação de continuidade usando $V_2 = (y_1/y_2)V_1$, temos

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2y_1V_1^2}{gy_2}(y_1 - y_2) \tag{13–70}$$

Cancelando o fator comum $y_1 - y_2$ de ambos os lados e reorganizando, temos

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2\text{Fr}_1^2 = 0 \tag{13–71}$$

onde $\text{Fr}_1 = V_1/\sqrt{gy_1}$. Essa é uma equação quadrática para y_2/y_1 e ela tem duas raízes — uma negativa e outra positiva. Observando que y_2/y_1 não pode ser negativo, uma vez que y_2 e y_1 são quantidades positivas, a razão de profundidade y_2/y_1 é determinada por

Razão de profundidade:
$$\frac{y_2}{y_1} = 0.5\left(-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2}\right) \tag{13–72}$$

A equação da energia para esta seção de escoamento horizontal pode ser expressa como

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \tag{13–73}$$

Observando que $V_2 = (y_1/y_2)V_1$ e que $\text{Fr}_1 = V_1/\sqrt{gy_1}$, a perda de carga associada ao salto hidráulico é expressa como

$$h_L = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = y_1 - y_2 + \frac{y_1\text{Fr}_1^2}{2}\left(1 - \frac{y_1^2}{y_2^2}\right) \tag{13–74}$$

O nível de energia de um salto hidráulico é mostrada na Figura 13–33. A queda do nível de energia em todo o salto representa a perda de carga h_L associada ao salto.

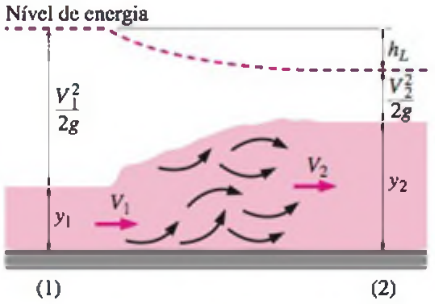
Para determinado Fr_1 e y_1, a profundidade do escoamento a jusante y_2 e a perda de carga h_L podem ser calculadas com as Equações 13–72 e 13–74, respectivamente. Representando graficamente h_L com relação a Fr_1, h_L torna-se negativo para $\text{Fr}_1 < 1$, o que é impossível (isso corresponderia a uma geração de entropia negativa, que seria uma violação da segunda lei da termodinâmica). Assim, concluímos que o escoamento a montante deve ser supercrítico ($\text{Fr}_1 > 1$) para que ocorra um salto hidráulico. Em outras palavras, é impossível o escoamento subcrítico dar origem a um salto hidráulico. Isso é análogo ao escoamento de gases tivesse que ser supersônico (número de Mach maior do que 1) para passar por uma onda de choque.

A perda de carga é uma medida da energia mecânica dissipada pelo atrito interno do fluido, e geralmente ela não é desejável uma vez que representa desperdício da energia mecânica. Mas, às vezes, os saltos hidráulicos são projetados juntamente com as bacias de sedimentação e os vertedouros das represas, e é desejável desperdiçar o máximo de energia mecânica possível para minimizar a energia mecânica da água e, portanto, seu potencial de causar danos. Isso é feito produzindo-se primeiro escoamento supercrítico através da conversão da alta pressão em alta velocidade linear e, em seguida, permitindo que o escoamento agite e dissipe parte de sua energia cinética à medida que desacelera até uma velocidade subcrítica. Assim, uma medida do desempenho de um salto hidráulico é sua fração de energia dissipada.

A energia específica do líquido antes do salto hidráulico é $E_{s1} = y_1 + V_1^2/2g$. Em seguida, a **taxa de dissipação de energia** (Figura 13–34) pode ser expressa como

$$\text{Taxa de dissipação} = \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{h_L}{y_1 + V_1^2/2g} = \frac{h_L}{y_1(1 + \text{Fr}_1^2/2)} \tag{13–75}$$

A fração da dissipação de energia varia de apenas alguns por centos para os saltos hidráulicos fracos ($\text{Fr}_1 < 2$) até 85% para saltos fortes ($\text{Fr}_1 > 9$).



Taxa de dissipação $= \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{h_L}{y_1 + V_1^2/2g}$

FIGURA 13–34
A taxa de dissipação de energia representa a fração da energia mecânica dissipada durante um salto hidráulico.

Ao contrário de um choque normal em um escoamento de gás, que ocorre em uma seção transversal e, portanto, tem espessura desprezível, o salto hidráulico ocorre em um comprimento de canal considerável. No intervalo do número de Froude de interesse prático, o comprimento do salto hidráulico é observado como sendo de 4 a 7 vezes a profundidade do escoamento a jusante y_2.

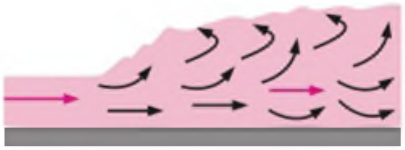
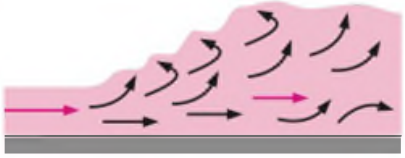
Estudos experimentais indicam que os saltos hidráulicos podem ser considerados em cinco categorias, como mostra a Tabela 13–4, dependendo principalmente do valor do número de Froude a montante Fr_1. Para Fr_1 um pouco mais alto do que 1, o líquido se eleva ligeiramente durante o salto hidráulico produzindo ondas fixas. Com um Fr_1 maior ocorrem ondas oscilantes altamente danosas. A variação desejável dos números de Froude é $4{,}5 < Fr_1 < 9$, que produz ondas estáveis e permanentes bem balanceadas com altos níveis de dissipação de energia dentro do salto. O saltos hidráulicos com $Fr_1 > 9$ produzem ondas bastante abruptas. A razão de profundidade y_2/y_1 varia de ligeiramente acima de 1 para *saltos ondulares*, que são suaves e envolvem pequenas elevações no nível da superfície, até mais de 12 para *saltos fortes*, que são abruptos e envolvem altas elevações no nível da superfície.

Nesta seção limitamos nossa consideração aos canais retangulares horizontais para que os efeitos de bordo e da gravidade sejam desprezíveis. Os saltos hidráulicos em canais não retangulares e inclinados comportam-se de modo semelhante, mas as características do escoamento e, portanto, as relações para a razão de profundidade, perda de carga e taxa de dissipação são diferentes.

TABELA 13–4

Classificação dos saltos hidráulicos

Fonte: U.S. Bureau of Reclamation (1955).

Profundidade Fr_1	Taxa de Profundidade y_2/y_1	Fração de Dissipação Energia	Descrição	Perfil da Superfície
<1	1	0	*Salto impossível.* Violaria a Segunda Lei da Termodinâmica.	
1–1,7	1–2	<5%	*Salto ondular* (ou onda estacionária). Elevação pequena do nível da superfície. Baixa dissipação de energia. As ondas de superfície se desenvolvem próximo a Fr = 1.7.	
1,7–2,5	2–3,1	5–15%	*Salto fraco.* Superfície elevando-se suavemente, com ondas pequenas. Baixa dissipação de energia.	
2,5–4,5	3,1–5,9	15–45%	*Salto oscilante.* As pulsações causadas pela entrada dos jatos no fundo geram grandes ondas que podem viajar por milhas e danificar os bancos de terra. Deve ser evitado no projeto das bacias sedimentares.	
4,5–9	5,9–12	45–70%	*Salto estável.* Estável, bem balanceado e insensível às condições a jusante. Intensa geração de turbilhões e alto nível de dissipação de energia dentro do salto. Intervalo recomendado para o projeto.	
>9	>12	70–85%	*Salto forte.* Abrupto e não permanente. Bastante efetivo na dissipação de energia, mas pode ser pouco econômico quando comparado a outros projetos.	

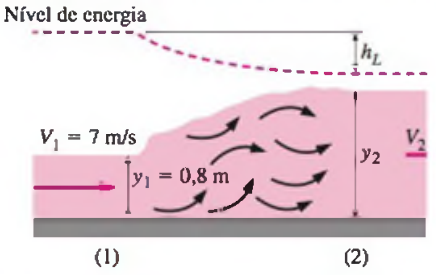


FIGURA 13–35
Representação esquemática do Exemplo 13–7.

EXEMPLO 13–7 Salto Hidráulico

Observa-se que água descarregada em um canal horizontal retangular com 10 m de largura de uma comporta basculante passou por um salto hidráulico. A profundidade de escoamento e a velocidade antes do salto são de 0,8 m e 7 m/s, respectivamente. Determine (*a*) a profundidade de escoamento e o número de Froude após o salto, (*b*) a perda de carga e a taxa de dissipação e (*c*) o potencial de produção de potência desperdiçado devido ao salto hidráulico (Figura 13–35).

SOLUÇÃO A água a uma profundidade e velocidade especificadas sofre um salto hidráulico em um canal horizontal. A profundidade e o número de Froude após o salto, a perda de carga e a taxa de dissipação e o potencial de potência desperdiçada devem ser determinados.

Hipóteses 1 O escoamento é constante ou quase constante. **2** O canal é suficientemente amplo para que os efeitos finais sejam desprezíveis.

Propriedades A densidade da água é de 1.000 kg/m^3.

Análise (*a*) O número de Froude antes do salto hidráulico é

$$\mathrm{Fr}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{7\ \text{m/s}}{\sqrt{(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}8\ \text{m})}} = 2{,}50$$

que é maior do que 1. Assim, o escoamento sem dúvida é supercrítico antes do salto. A profundidade do escoamento, a velocidade e o número de Froude após o salto são

$$y_2 = 0{,}5y_1\left(-1 + \sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2}\right) = 0{,}5(0{,}8\ \text{m})\left(-1 + \sqrt{1 + 8 \times 2{,}50^2}\right) = \mathbf{2{,}46\ m}$$

$$V_2 = \frac{y_1}{y_2}V_1 = \frac{0{,}8\ \text{m}}{2{,}46\ \text{m}}(7\ \text{m/s}) = 2{,}28\ \text{m/s}$$

$$\mathrm{Fr}_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}} = \frac{2{,}28\ \text{m/s}}{\sqrt{(9{,}81\ \text{m/s}^2)(2{,}46\ \text{m})}} = \mathbf{0{,}464}$$

Observe que a profundidade de escoamento triplica e o número de Froude é reduzido até cerca de um quinto após o salto.

(*b*) A perda de carga é determinada pela equação de energia como

$$h_L = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = (0{,}8\ \text{m}) - (2{,}46\ \text{m}) + \frac{(7\ \text{m/s})^2 - (2{,}28\ \text{m/s})^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)}$$

$$= \mathbf{0{,}572\ m}$$

A energia específica da água antes do salto e a taxa de dissipação é

$$E_{s1} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = (0{,}8\ \text{m}) + \frac{(7\ \text{m/s})^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = 3{,}30\ \text{m}$$

$$\text{Taxa de dissipação} = \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{0{,}572\ \text{m}}{3{,}30\ \text{m}} = \mathbf{0{,}173}$$

Assim, 17,3% da carga disponível (ou energia mecânica) do líquido é desperdiçada (convertida em energia térmica) como resultado dos efeitos do atrito durante esse salto hidráulico.

(*c*) A vazão em massa da água é

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = \rho b y_1 V_1 = (1000\ \text{kg/m}^3)(0{,}8\ \text{m})(10\ \text{m})(7\ \text{m/s}) = 56.000\ \text{kg/s}$$

Então, a dissipação de potência correspondente a uma perda de carga de 0,572 m torna-se

$$\dot{E}_{\text{dissipada}} = \dot{m}gh_L = (56.000\ \text{kg/s})(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}572\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= 314.000\ \text{N} \cdot \text{m/s} = \mathbf{314\ kW}$$

Discussão Os resultados mostram que o salto hidráulico é um processo altamente dissipativo, desperdiçando 314 kW de potencial de produção de potência neste caso. Ou seja, se a água fosse direcionada para uma turbina hidráulica, em vez de ser liberada da comporta basculante, até 314 kW de potência poderiam ser gerados. Mas esse potencial é convertido em energia térmica inútil, em vez de potência útil, causando uma elevação de temperatura de

$$\Delta T = \frac{\dot{E}_{\text{dissipada}}}{\dot{m}c_p} = \frac{314 \text{ kJ/s}}{(56.000 \text{ kg/s})(4{,}18 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C})} = 0{,}0013^\circ\text{C}$$

para a água. Observe que um aquecedor elétrico de 314 kW causaria a mesma elevação de temperatura na água escoando a uma vazão de 56.000 kg/s.

13–9 ▪ CONTROLE E MEDIÇÃO DO ESCOAMENTO

A vazão nos tubos e dutos é controlada por diversos tipos de válvulas. O escoamento líquido em canais abertos, porém, não é confinado e, portanto, a vazão é controlada bloqueando-se parcialmente o canal. Isso é feito permitindo que o líquido escoe ou sobre a obstrução ou abaixo dela. Uma obstrução que permite ao líquido escoar sobre ela é chamada de **vertedouro**, e uma obstrução com uma abertura ajustável na parte inferior que permite ao líquido escoar abaixo dela é chamada de **comporta de escoamento**. Tais dispositivos podem ser usados para controlar a taxa de escoamento através do canal, bem como para medi-la.

Comporta de Escoamento

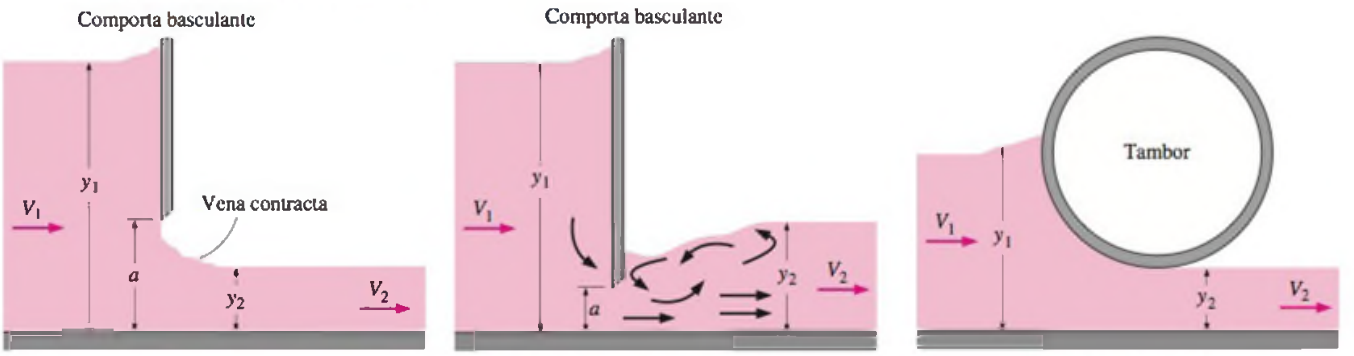
Existem inúmeros tipos de comporta de escoamento para controlar a vazão, cada um com determinadas vantagens e desvantagens. As comportas de escoamentos estão localizadas no fundo de uma parede, dique ou canal aberto. Dois tipos comuns são a *comporta basculante* e a *comporta de tambor*, são mostrados na Figura 13–36. Uma comporta basculante em geral é vertical e tem uma superfície plana, enquanto a de tambor tem uma seção transversal circular com uma superfície aerodinâmica.

Quando a comporta se abre, o líquido a montante acelera à medida que se aproxima dela, atinge a velocidade crítica na comporta e acelera mais ainda até velocidades supercríticas depois que sai dela. Assim, uma comporta de escoamento é análoga a um bocal convergente/divergente na dinâmica de gases. A descarga de uma comporta de escoamento é chamada de *saída de escoamento livre* se o jato de líquido que sai da comporta está aberto para a atmosfera, e é chamado de *escoamento afogado* (ou *submerso*) se o líquido descarregado retornar e submergir o jato, como mostra a Figura 13–36. No escoamento afogado, o jato de líquido passa por um salto hidráulico e, portanto, o escoamento a jusante é subcrítico. Além disso, o escoamento afogado envolve um alto nível de turbulência e escoamento reverso e, portanto, uma grande perda de carga h_L.

O diagrama de energia específica da profundidade do escoamento através das comportas com saída de escoamento livre e afogado é dado na Figura 13–37. Observe que a energia específica permanece constante para as comportas idealizadas que têm efeitos de atrito desprezíveis (do ponto 1 ao ponto 2*a*), mas diminui para as comportas reais. O escoamento a jusante é supercrítico para uma comporta com escoamento livre (ponto 2*b*), mas é subcrítico para uma comporta com escoamento afogado (ponto 2*c*), uma vez que o escoamento afogado também envolve um salto hidráulico para o escoamento subcrítico, que, por sua vez, envolve turbulência e dissipação de energia consideráveis.

Considerando que os efeitos do atrito são desprezíveis e que a velocidade a montante (ou reservatório) é baixa, é possível mostrar usando a equação de Bernoulli que a velocidade de descarga de um jato livre é (consulte o Capítulo 5 para obter os detalhes)

$$V = \sqrt{2gy_1} \qquad \textbf{(13–76)}$$



(*a*) Comporta basculante com saída livre (*b*) Comporta basculante com saída submersa (*c*) Comporta de tambor

FIGURA13–36
Tipos comuns de comportas de escoamentos para controlar a vazão.

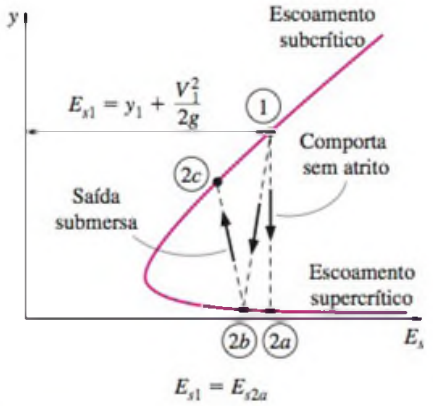


FIGURA13–37
Diagrama esquemático da profundidade *versus* energia específica para o escoamento através de comportas de escoamentos.

Os efeitos do atrito podem ser calculados modificando-se essa relação com um **coeficiente de descarga** C_d. Em seguida, a velocidade de descarga da comporta e a taxa de escoamento tornam-se

$$V = C_d\sqrt{2gy_1} \quad \text{e} \quad \dot{V} = C_d ba\sqrt{2gy_1} \tag{13–77}$$

onde b e a são a largura e a altura de abertura da comporta, respectivamente.

O coeficiente de descarga é $C_d = 1$ para o escoamento idealizado, mas é $C_d < 1$ para o escoamento real através das comportas. Os valores de C_d determinados experimentalmente para as comportas de escoamentos são representados graficamente na Figura 13–38 como funções do coeficiente de contração y_2/a e a taxa de profundidade y_1/a. Observe que a maioria dos valores de C_d para o escoamento livre de uma comporta basculante vertical varia entre 0,5 e 0,6. Os valores para C_d caem bruscamente para a saída submersa, como era de esperar, e a vazão de escoamento diminui para as mesmas condições a montante. Para determinado valor de y_1/a, o valor de C_d diminui com o aumento de y_2/a.

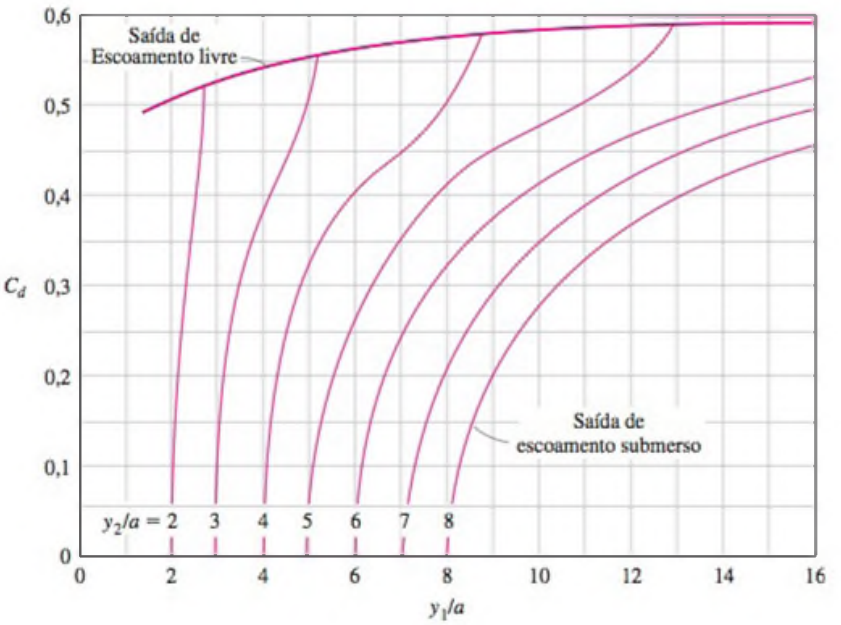


FIGURA13–38
Coeficientes de descarga submersa e livre das comportas de escoamentos.
De Henderson, Open Channel Flow, 1a. Edição, © 1966. Reimpresso com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

EXEMPLO 13–8 Comporta Basculante com Escoamento Submerso

A água é liberada de um reservatório com 3 m de profundidade em um canal aberto com 6 m de largura através de uma comporta basculante com uma abertura de 0,25 m de altura no fundo do canal. A profundidade de escoamento após toda a turbulência desaparecer é medida como 1,5 m. Determine a taxa de descarga (Figura 13–39).

SOLUÇÃO A água é liberada de um reservatório através de uma comporta basculante para um canal aberto. Para as profundidades de escoamento especificadas, a taxa de descarga deve ser determinada.

Hipóteses 1 O escoamento é constante ou quase constante. **2** O canal é suficientemente amplo para que os efeitos das laterais sejam desprezíveis.

Análise A razão de profundidade y_1/a e o coeficiente de contração y_2/a são

$$\frac{y_1}{a} = \frac{3\text{ m}}{0{,}25\text{ m}} = 12 \quad \text{e} \quad \frac{y_2}{a} = \frac{1{,}5\text{ m}}{0{,}25\text{ m}} = 6$$

O coeficiente de descarga correspondente é determinado na Figura 13–38 como $C_d = 0{,}47$. Em seguida, a taxa de descarga torna-se

$$\dot{V} = C_d ba\sqrt{2gy_1} = 0{,}47(6\text{ m})(0{,}25\text{ m})\sqrt{2(9{,}81\text{ m/s}^2)(3\text{ m})} = \mathbf{5{,}41\ m^3/s}$$

Discussão No caso do escoamento livre, o coeficiente de descarga seria $C_d = 0{,}59$, com uma vazão correspondente de 6,78 m³/s. Assim, a vazão diminui consideravelmente quando o escoamento é afogado.

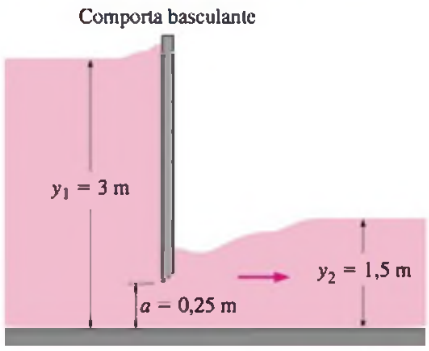


FIGURA 13–39
Esquema do Exemplo 13–8.

Escoamento em Canal

Lembre-se de que a energia mecânica total de um líquido em qualquer seção transversal de um canal aberto pode ser expressa em termos de cargas como $H = z_b + y + V^2/2g$, onde y é a profundidade de escoamento, z_b é a elevação do fundo do canal e V é a velocidade de escoamento média. Durante o escoamento com efeitos de atrito desprezíveis (perda de carga $h_L = 0$), a energia mecânica total permanece constante, e a equação da energia unidimensional para o escoamento em canal aberto entre a seção a montante 1 e a seção a jusante 2 pode ser escrita como

$$z_{b1} + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_{b2} + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{ou} \quad E_{s1} = \Delta z_b + E_{s2} \qquad \textbf{(13–78)}$$

onde $E_s = y + V^2/2g$ é a energia específica e $\Delta z_b = z_{b2} - z_{b1}$ é a elevação do fundo do escoamento na seção 2 com relação àquele no fundo da seção 1. Assim, a energia específica de uma corrente líquida aumenta em $|\Delta z_b|$ durante o escoamento a jusante (observe que Δz_b é negativo para os canais inclinados para baixo), diminui em Δz_b durante o escoamento a montante e permanece constante durante o escoamento horizontal. (A energia específica também diminui em h_L para todos os casos se os efeitos do atrito não forem desprezíveis.)

Para um canal com largura constante b, $\dot{V} = A_c V = byV$ = constante no escoamento permanente e $V = \dot{V}/A_c$. Assim, a energia específica pode ser expressa como

$$E_s = y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2} \qquad \textbf{(13–79)}$$

A variação da energia específica E_s com profundidade de escoamento y para o escoamento permanente em um canal de largura constante b é representada graficamente na Figura 13–40. Esse diagrama é muito valioso, uma vez que mostra os estados permitidos durante o escoamento. Depois que as condições a montante de uma seção de escoamento 1 são especificadas, o estado do líquido em qualquer seção 2 de um diagrama E_s-y deve cair em um ponto da curva de energia específica que passa através do ponto 1.

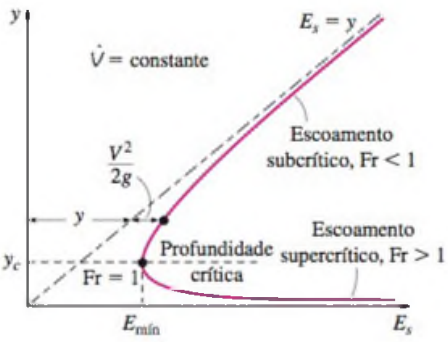


FIGURA 13–40
Variação da energia específica E_s com a profundidade y para uma vazão especificada.

Escoamento sobre uma Saliência com Atrito Desprezível

Agora considere o escoamento constante com atrito desprezível sobre uma saliência de altura Δz_b em um canal horizontal com largura constante b, como mostra a Figura 13–41. A equação da energia neste caso pela Equação 13–78,

$$E_{s2} = E_{s1} - \Delta z_b \tag{13–80}$$

Assim, a energia específica do líquido diminui em Δz_b à medida que escoa sobre a saliência, e o estado do líquido no diagrama E_s-y muda para a esquerda em Δz_b, como mostra a Figura 13–41. A equação de continuidade de um canal com largura grande é $y_2V_2 = y_1V_1$ e, portanto, $V_2 = (y_1/y_2)V_1$. Então, a energia específica do líquido sobre a saliência pode ser expressa como

$$E_{s2} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \rightarrow \quad E_{s1} - \Delta z_b = y_2 + \frac{V_1^2}{2g}\frac{y_1^2}{y_2^2} \tag{13–81}$$

Reorganizando,

$$y_2^3 - (E_{s1} - \Delta z_b)y_2^2 + \frac{V_1^2}{2g}y_1^2 = 0 \tag{13–82}$$

que é uma equação polinomial de terceiro grau em y_2 e, portanto, tem três soluções. Desprezando a solução negativa, parece que a profundidade de escoamento sobre a saliência pode ter dois valores.

Agora a pergunta interessante é se o nível do líquido se eleva ou decresce na saliência? Nossa intuição diz que todo o corpo de líquido acompanhará a saliência e, portanto, a superfície do líquido aumentará sobre a saliência, mas isso não precisa ser necessariamente verdadeiro. Observando que a energia específica é a soma da profundidade de escoamento e da carga dinâmica, qualquer cenário é possível dependendo da variação da velocidade. O diagrama E_s-y da Figura 13–41 nos dá a resposta definitiva: se o escoamento antes da saliência é *subcrítico* (estado 1*a*), a profundidade do escoamento y_2 diminui (estado 2*a*). Se a diminuição da profundidade de escoamento for maior do que a altura da saliência (ou seja, i.e., $y_1 - y_2 > \Delta z_b$) a superfície livre será rebaixada. Mas se o escoamento é *supercrítico* quando se aproxima da saliência (estado 1*b*), a profundidade do escoamento aumentará sobre a saliência (estado 2*b*), criando uma saliência maior na superfície livre.

A situação é inversa se o canal tiver uma depressão de profundidade Δz_b em vez de uma saliência: a energia específica neste caso aumenta (de modo que o estado 2 está à direita do estado 1 no diagrama E_s-y), uma vez que Δz_b é negativo. Assim, a profundidade de escoamento aumenta se o escoamento de aproximação é subcrítico e diminui se ele for supercrítico.

Agora consideremos o escoamento sobre uma saliência com atrito desprezível, como já foi discutido anteriormente. À medida que a altura da saliência Δz_b aumenta, o ponto 2 (seja 2*a* ou 2*b* para o escoamento sub ou supercrítico) continua mudando para a esquerda no diagrama E_s-y, até finalmente atingir o ponto crítico.

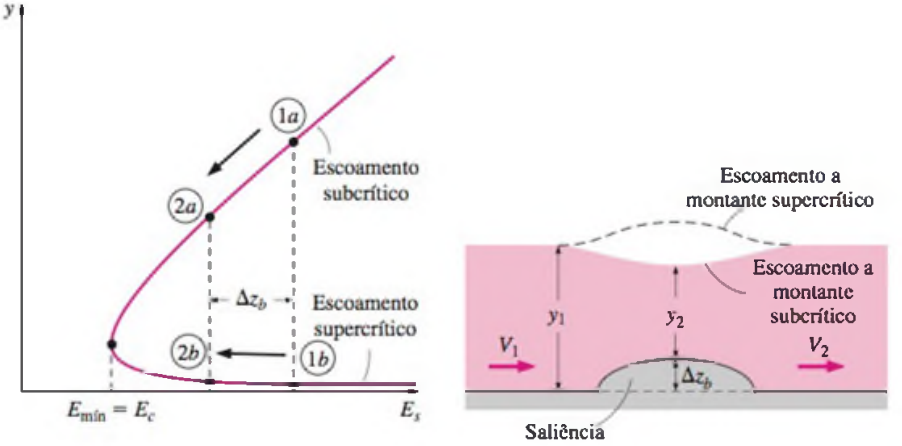


FIGURA13–41
Diagrama esquemático e energia específica da profundidade do escoamento sobre uma saliência para os escoamentos a montante subcríticos e supercríticos.

Ou seja, o escoamento sobre a saliência é *crítico* quando a altura da saliência é $\Delta z_c = E_{s1} - E_{sc} = E_{s1} - E_{\text{mín}}$, e a energia específica do líquido atinge seu nível mínimo.

A pergunta que nos vem à mente é, o que acontece se a altura da saliência aumentar ainda mais? A energia específica do líquido continua diminuindo? A resposta para essa pergunta é um *sonoro* não, uma vez que o líquido já está no seu nível mínimo de energia e sua energia não pode diminuir mais. Em outras palavras, o líquido já está no ponto mais à esquerda do diagrama E_s-y e nenhum ponto mais à esquerda pode atender a conservação de massa, momento e energia. Assim, o escoamento deve permanecer crítico. Diz-se que o escoamento nesse estado é **estrangulado**. Na dinâmica dos gases, isso é análogo ao escoamento de um bocal convergente que acelera à medida que a contrapressão diminui, e atinge a velocidade do som na saída do bocal quando a contrapressão atinge a pressão crítica. Mas a velocidade de saída do bocal permanece no nível sônico independentemente de quanto a contrapressão diminua. Aqui novamente o escoamento é estrangulado.

Reservatório de Soleira Espessa

As discussões sobre o escoamento sobre uma saliência alta podem ser resumidas da seguinte maneira: *o escoamento sobre uma obstrução suficientemente alta em um canal aberto sempre é crítico*. Tais obstruções colocadas intencionalmente em um canal aberto para medir a vazão são chamadas de *reservatórios*. Assim, a velocidade de escoamento sobre um reservatório suficientemente amplo é a velocidade crítica, que é expressa como $V = \sqrt{gy_c}$, onde y_c é a profundidade crítica. Assim, a vazão sobre um reservatório de largura b pode ser expressa como

$$\dot{V} = A_c V = y_c b\sqrt{gy_c} = bg^{1/2}y_c^{3/2} \tag{13–83}$$

Um **reservatório de soleira espessa** é um bloco retangular com altura P_w e comprimento L_w que tem um topo horizontal sobre o qual ocorre o escoamento (Figura 13–42). A carga a montante acima da superfície superior do reservatório é chamada de **cabeça do reservatório** e é indicada por H. Para obter uma relação para a profundidade crítica y_c em termos da carga do reservatório H, escrevemos a equação da energia entre uma seção a montante e uma seção sobre o reservatório para o escoamento com atrito desprezível como

$$H + P_w + \frac{V_1^2}{2g} = y_c + P_w + \frac{V_c^2}{2g} \tag{13–84}$$

Cancelando P_w em ambos os lados e substituindo $V_c = \sqrt{gy_c}$, temos

$$y_c = \frac{2}{3}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right) \tag{13–85}$$

Substituindo na Equação 13–83, a vazão deste caso de escoamento idealizado com atrito desprezível é determinada por

$$\dot{V}_{\text{ideal}} = b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2} \tag{13–86}$$

Essa relação mostra a dependência funcional da vazão com os parâmetros do escoamento, mas superestima a vazão em vários pontos percentuais, porque não leva em conta os efeitos do atrito. Esses efeitos são adequadamente considerados pela modificação da relação teórica (Equação 13–86) por um *coeficiente de descarga do reservatório* determinado experimentalmente C_{wd} como

Vertedouro de soleira espessa: $$\dot{V} = C_{\text{wd, delgada}}\, b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2} \tag{13–87}$$

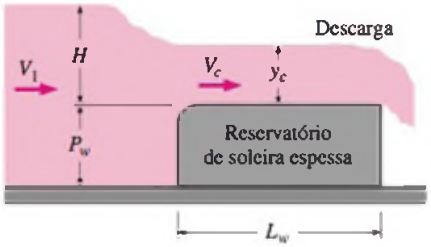


FIGURA 13–42
Escoamento sobre um reservatório de soleira espessa.

onde valores relativamente exatos de coeficientes de descarga para reservatórios de soleira espessa podem ser obtidos de (Chow, 1959)

$$C_{\text{wd, espessa}} = \frac{0{,}65}{\sqrt{1 + H/P_w}} \tag{13–88}$$

Relações mais exatas, porém mais complicadas para $C_{\text{wd,espessa}}$ também estão disponíveis na literatura (por exemplo, Ackers, 1978). Além disso, a velocidade a montante V_1 em geral é muito baixa e pode ser desprezada. Isso é particularmente válido para os reservatórios altos. Assim, a vazão pode ser aproximada por

Reservatório de soleira espessa com V_1 baixa:
$$\dot{V} \cong C_{\text{wd, espessa}} b \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} H^{3/2} \tag{13–89}$$

É preciso não esquecer que o requisito básico para o uso das Equações 13–87 a 13–89 é o estabelecimento do escoamento crítico acima do reservatório, e isso impõe algumas limitações para o comprimento do reservatório L_w. Se o reservatório for muito longo ($L_w > 12H$), os efeitos de cisalhamento da parede dominam e fazem com que o escoamento sobre o reservatório seja subcrítico. Se o reservatório for curto demais ($L_w < 2H$), o líquido pode não conseguir acelerar até a velocidade crítica. Com base em observações, o comprimento apropriado do reservatório de soleira delgada é $2H < L_w < 12H$. Observe que um reservatório muito longo para um escoamento pode ser muito curto para outro escoamento, dependendo do valor da cabeça do reservatório H. Assim, o intervalo de vazões deve ser conhecido antes que se possa um reservatório.

Reservatório de Soleira Aguda

Um vertedouro ou reservatório de soleira aguda é uma placa vertical colocada em um canal para forçar o líquido a escoar através de uma abertura para medir a vazão. O tipo de vertedouro é caracterizado pela forma da abertura. Uma placa fina vertical com uma lateral superior reta é chamada de vertedouro retangular, uma vez que a seção transversal do escoamento sobre ele é retangular; um vertedouro com uma abertura triangular é chamado de vertedouro triangular e assim por diante.

O escoamento a montante é subcrítico e torna-se crítico à medida que se aproxima do vertedouro. O líquido continua acelerando e é descarregado como uma corrente de escoamento supercrítico que se parece com um jato livre. O motivo da aceleração é o declínio constante na elevação da superfície livre, e a conversão dessa carga de elevação em carga de velocidade. As correlações da vazão dadas a seguir se baseiam na queda d'água livre da descarga do líquido depois do reservatório, chamada de **manto de carregamento**, que está afastado do reservatório. Talvez seja preciso ventilar o espaço abaixo do manto de carregamento para garantir a pressão atmosférica na parte de baixo. As relações empíricas para os reservatórios inundados também estão disponíveis.

Considere o escoamento de um líquido sobre um reservatório de soleira delgado colocado em um canal horizontal, como mostra a Figura 13–43. Por questões de simplicidade, a velocidade a montante do reservatório é aproximada como quase constante através da seção transversal vertical 1. A energia total do líquido a montante. expressa como carga com relação ao fundo do canal, é a energia específica, que é a soma da profundidade de escoamento e da carga de velocidade. Ou seja, $y_1 + V_1^2/2g$, onde $y_1 = H + P_w$. O escoamento sobre o reservatório não é unidimensional, uma vez que o líquido sofre grandes variações de velocidade e direção sobre o reservatório. Mas a pressão dentro do manto de carregamento é atmosférica.

Uma relação simples para a variação da velocidade do líquido sobre o reservatório pode ser obtida considerando atrito desprezível e escrevendo a equação de Bernoulli entre um ponto do escoamento a montante (ponto 1) e um ponto sobre o reservatório a uma distância h do nível do líquido a montante como:

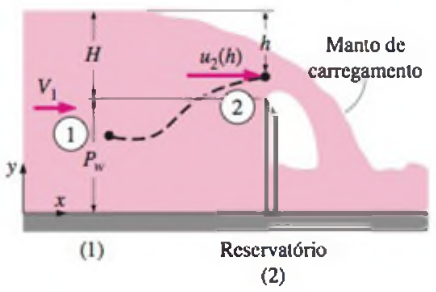


FIGURA 13–43
Escoamento sobre um reservatório de soleira aguda.

$$H + P_w + \frac{V_1^2}{2g} = (H + P_w - h) + \frac{u_2^2}{2g} \tag{13–90}$$

Cancelando os termos comuns e isolando u_2, a distribuição idealizada da velocidade no reservatório é determinada como

$$u_2 = \sqrt{2gh + V_1^2} \tag{13–91}$$

Na verdade, o nível da superfície da água um pouco acima do reservatório à medida que a água começa sua queda livre (o efeito de abaixamento na parte de cima) e a separação do escoamento na parte superior do reservatório estreita ainda mais o manto de carregamento (o efeito de contração do fundo). Como resultado, a altura do escoamento acima do reservatório é consideravelmente menor do que H. Quando os efeitos de abaixamento de nível e contração são desprezados por questão de simplicidade, a vazão é obtida pela integração do produto entre a velocidade do escoamento e a diferencial da área de escoamento ao longo de toda a área de escoamento,

$$\dot{V} = \int_{A_c} u_2 \, dA_{c2} = \int_{h=0}^{H} \sqrt{2gh + V_1^2}\, w \, dh \tag{13–92}$$

onde w é a largura da área de escoamento à distância h da superfície livre a montante.

Em geral, w é uma função de h. Mas para um reservatório retangular, $w = b$, que é constante. Então, a integração pode ser executada facilmente e a vazão de um reservatório retangular para o escoamento idealizado com atrito desprezível e efeitos de abaixamento e contração desprezíveis é determinada como

$$\dot{V}_{\text{ideal}} = \frac{2}{3} b\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \tag{13–93}$$

Quando o peso do reservatório é grande com relação à carga do reservatório ($P_w >> H$), a velocidade a montante V_1 é baixa e a carga da velocidade a montante pode ser desprezada. Ou seja, $V_1^2/2g << H$. Então,

$$\dot{V}_{\text{ideal. ret}} \cong \frac{2}{3} b\sqrt{2g}H^{3/2} \tag{13–94}$$

Assim, a vazão pode ser determinada com o conhecimento de duas quantidades geométricas: a largura do topo b e a carga do reservatório H, que é a distância vertical entre o topo do reservatório e a superfície livre a montante.

Essa análise simplificada resulta na forma geral da relação para a vazão, mas precisa ser modificada para levar em conta os efeitos do atrito e da tensão superficial, que têm papel secundário, bem como os efeitos do abaixamento de nível e da contração. Isso é feito multiplicando-se as relações ideais para a vazão por um coeficiente de descarga de reservatório C_{wd} determinado experimentalmente. Em seguida, a vazão de um reservatório retangular de soleira aguda é expressa como

Reservatório retangular de soleira aguda:

$$\dot{V}_{\text{ret}} = C_{\text{wd. ret}} \frac{2}{3} b\sqrt{2g}H^{3/2} \tag{13–95}$$

onde de Ref. 1 (Ackers, 1978),

$$C_{\text{wd. ret}} = 0{,}598 + 0{,}0897\frac{H}{P_w} \quad \text{para} \quad \frac{H}{P_w} \leq 2 \tag{13–96}$$

Essa fórmula se aplica ao longo de um amplo intervalo de números de Reynolds a montante definidos como $\text{Re} = V_1 H/\nu$. A literatura traz correlações mais exatas, mas também mais complexas. Observe que a Equação 13–95 é válida para reser-

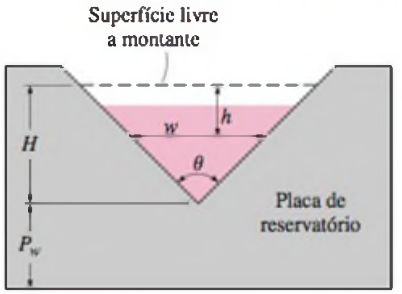


FIGURA13–44
Geometria de uma placa de reservatório aguda (ou de entalhe) de soleira aguda. A ilustração é a partir da jusante olhando para montante.

vatórios retangulares de *largura total*. Se a largura do reservatório for menor do que a do canal de modo que o escoamento seja forçado a se contrair, um coeficiente adicional de correção da contração deve ser incorporado para levar esse efeito em conta adequadamente.

Outro tipo de reservatório de soleira aguda muito usado para medição do escoamento é o *reservatório triangular* (também chamado de *reservatório de entalhe*) mostrado na Figura 13–44. O reservatório triangular tem a vantagem de manter uma alta carga de reservatório H mesmo para pequenas vazões, porque quando a área de escoamento diminui o H também diminui e, portanto, ele pode ser usado para medir um amplo intervalo de vazões com exatidão.

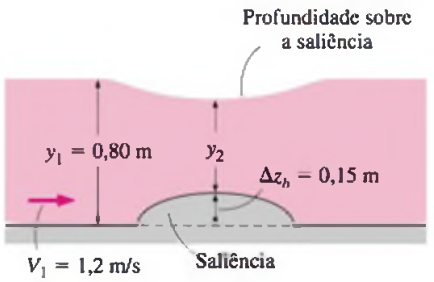
Sob o ponto de vista geométrico, a largura do entalhe pode ser expressa como $w = 2(H - h)\tan(\theta/2)$, onde θ é o ângulo do entalhe. Substituindo na Equação 13–92 e executando a integração, a vazão ideal de um reservatório triangular é

$$\dot{V}_{\text{ideal, tri}} = \frac{8}{15}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}H^{5/2} \qquad \textbf{(13–97)}$$

onde novamente desprezamos a carga da velocidade a montante. Os efeitos do atrito e outros efeitos dissipativos são considerados multiplicando-se a vazão ideal por um coeficiente de descarga do reservatório. Em seguida, a vazão de um reservatório triangular de soleira aguda torna-se

Reservatório triangular de soleira aguda:
$$\dot{V} = C_{\text{wd, tri}}\frac{8}{15}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}H^{5/2} \qquad \textbf{(13–98)}$$

onde os valores de C_{wd} em geral variam entre 0,58 e 0,62. Assim, o atrito do fluido, a constrição da área de escoamento e outros efeitos dissipativos fazem com que a vazão através do entalhe diminua em cerca de 40% em comparação com o caso ideal. Na maioria dos casos práticos ($H > 0{,}2$ m e $45° < \theta < 120°$), o valor do coeficiente de descarga do reservatório é de cerca de $C_{\text{wd}} = 0{,}58$. A literatura traz valores mais exatos.



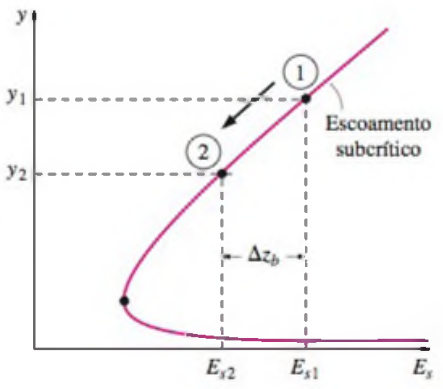


FIGURA13–45
Diagrama *versus* a energia específica da profundidade do escoamento para o Exemplo 13–9.

EXEMPLO 13–9 Escoamento Subcrítico sobre uma Saliência

A água que escoa em um canal aberto horizontal largo encontra uma saliência de 15 cm de altura no fundo do canal. Se a profundidade de escoamento for de 0,80 m e a velocidade de 1,2 m/s antes da saliência, determine se a superfície da água é deprimida sobre a saliência (Figura 13–45).

SOLUÇÃO A água que escoa em um canal aberto horizontal encontra uma saliência. Será determinado se a superfície da água é deprimida sobre a saliência.

Hipóteses **1** O escoamento é estável. **2** Os efeitos do atrito são desprezíveis e não há dissipação da energia mecânica. **3** O canal é suficientemente amplo para que os efeitos das extremidades sejam desprezíveis.

Análise O número de Froude a montante e a profundidade crítica são

$$\text{Fr}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{1{,}2\text{ m/s}}{\sqrt{(9{,}81\text{ m}^2/\text{s})(0{,}80\text{ m})}} = 0{,}428$$

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(by_1V_1)^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{y_1^2V_1^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{(0{,}8\text{ m})^2(1{,}2\text{ m/s})^2}{9{,}81\text{ m/s}^2}\right)^{1/3} = 0{,}455\text{ m}$$

O escoamento é subcrítico uma vez que $\text{Fr} < 1$ e, portanto, a profundidade de escoamento diminui sobre a saliência. A energia específica a montante é

$$E_{s1} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = (0{,}80\text{ m}) + \frac{(1{,}2\text{ m/s})^2}{2(9{,}81\text{ m/s}^2)} = 0{,}873\text{ m}$$

A profundidade do escoamento sobre a saliência pode ser determinada com

$$y_2^3 - (E_{s1} - \Delta z_b)y_2^2 + \frac{V_1^2}{2g}y_1^2 = 0$$

Substituindo,

$$y_2^3 - (0{,}873 - 0{,}15\ \text{m})y_2^2 + \frac{(1{,}2\ \text{m/s})^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)}(0{,}80\ \text{m})^2 = 0$$

ou

$$y_2^3 - 0{,}723y_2^2 + 0{,}0470 = 0$$

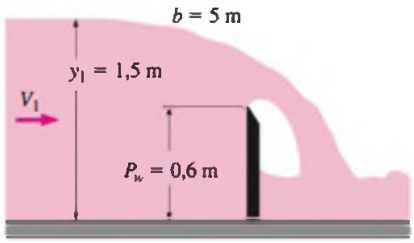
Usando o aplicativo para resolver equações, as três raízes dessa equação são determinadas como 0,59 m, 0,36 m e –0,22 m. Descartamos a solução negativa como fisicamente impossível. Também eliminamos a solução 0,36 m, uma vez que ela é menor do que a profundidade crítica e só pode ocorrer no escoamento supercrítico. Assim, a única solução significativa para a profundidade do escoamento sobre a saliência é $y_2 = 0{,}59$ m. A distância da superfície da água acima da saliência até a parte inferior do canal é $\Delta z_b + y_2 = 0{,}15 + 0{,}59 = 0{,}74$ m, que é menor do que $y_1 = 0{,}80$ m. Portanto a superfície da água é achatada sobre a saliência na quantidade de

$$\text{Profundidade} = y_1 - (y_2 + \Delta z_b) = 0{,}80 - (0{,}59 + 0{,}15) = \mathbf{0{,}06\ m}$$

Discussão Observe que $y_2 < y_1$ não indica necessariamente que a superfície da água é deprimida (ela pode subir sobre a saliência). A superfície é deprimida sobre a saliência apenas quando a diferença $y_1 - y_2$ é maior do que a altura da saliência Δz_b. Além disso, o valor real da depressão pode ser diferente de 0,06 m por conta dos efeitos do atrito que são desprezados na análise.

EXEMPLO 13–10 Medição da Vazão com um Reservatório

A vazão da água em um canal aberto horizontal com 5 m de largura está sendo medida com um reservatório retangular de soleira espessa de 0,6 m de altura com a mesma largura. Se a profundidade da água a montante for de 1,5 m, determine a vazão da água (Figura 13–46).



Reservatório retangular de soleira espessa

FIGURA 13–46
Esquema do Exemplo 13–10.

SOLUÇÃO A profundidade da água a montante de um canal aberto horizontal com um reservatório retangular de soleira espessa deve ser medida. A vazão deve ser determinada.

Hipóteses 1 O escoamento é permanente. **2** A carga da velocidade a montante é desprezível. **3** O canal é suficientemente amplo para que os efeitos das extremidades sejam desprezíveis.

Análise A carga do reservatório é

$$H = y_1 - P_w = 1{,}5 - 0{,}60 = 0{,}90\ \text{m}$$

O coeficiente de descarga do reservatório é

$$C_{\text{wd, ret}} = 0{,}598 + 0{,}0897\frac{H}{P_w} = 0{,}598 + 0{,}0897\frac{0{,}90}{0{,}60} = 0{,}733$$

A condição $H/P_w < 2$ é satisfeita, uma vez que 0,9/0,6 = 1,5. Então, a vazão da água através do canal torna-se

$$\dot{V}_{\text{ret}} = C_{\text{wd, ret}}\frac{2}{3}b\sqrt{2g}H^{3/2}$$

$$= (0{,}733)\frac{2}{3}(5\ \text{m})\sqrt{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)}(0{,}90\ \text{m})^{3/2}$$

$$= \mathbf{9{,}24\ m^3/s}$$

Discussão A velocidade a montante e a carga da velocidade a montante são

$$V_1 = \frac{\dot{V}}{by_1} = \frac{9{,}24\ \text{m}^3/\text{s}}{(5\ \text{m})(1{,}5\ \text{m})} = 1{,}23\ \text{m/s} \qquad \text{e} \qquad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{(1{,}23\ \text{m/s})^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = 0{,}077\ \text{m}$$

Isso significa 8,6% da carga do reservatório, o que é significativo. Quando a carga da velocidade a montante é considerada, a vazão torna-se 10,2 m^3/s, que é cerca de 10% mais alta do que o valor determinado. Portanto, é uma boa prática considerar a carga da velocidade a montante, a menos que a altura do reservatório P_w seja muito grande com relação à carga do reservatório H.

RESUMO

O *escoamento em canal aberto* se refere ao escoamento de líquidos em canais abertos para a atmosfera ou em condutes parcialmente cheios. O escoamento em um canal é *uniforme* quando a profundidade do escoamento (e, portanto, a velocidade média) permanece constante. Caso contrário, o escoamento é *não uniforme* ou *variado*. O *raio hidráulico* é definido como $R_h = A_c/p$. O número de Froude adimensional é definido por

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL_c}} = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

O escoamento é classificado como subcrítico para $\text{Fr} < 1$, crítico para $\text{Fr} = 1$ e supercrítico para $\text{Fr} > 1$. A profundidade no escoamento crítico é chamada de *profundidade crítica* e é expressa por

$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} \qquad \text{ou} \qquad y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3}$$

onde b é a largura do canal para os canais largos.

A velocidade na qual um distúrbio da superfície viaja através de um líquido de profundidade y é a *velocidade de onda* c_0, que é expressa como $c_0 = \sqrt{gy}$. A energia mecânica total de um líquido em um canal é expressa em termos de cargas como

$$H = z_b + y + \frac{V^2}{2g}$$

onde z_b é a carga de elevação, $P/\rho g = y$ é a carga de pressão e $V^2/2g$ é a carga de velocidade. A soma da pressão e das cargas dinâmicas é chamada de *energia específica* E_s,

$$E_s = y + \frac{V^2}{2g}$$

A equação da continuidade é $A_{c1}V_1 = A_{c2}V_2$. A equação da energia é expressa como

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + S_0L = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

Aqui h_L é a perda da carga e $S_0 = \text{tg}\,\theta$ é a inclinação do fundo do canal. A *inclinação por atrito* é definida como $S_f = h_L/L$.

A profundidade do escoamento no escoamento uniforme é chamada de *profundidade normal* y_n e a velocidade do escoamento médio é chamada de *velocidade de escoamento uniforme* V_0. A velocidade e a vazão uniforme são dadas por

$$V_0 = \frac{a}{n}R_h^{2/3}S_0^{1/2} \qquad \text{e} \qquad \dot{V} = \frac{a}{n}A_cR_h^{2/3}S_0^{1/2}$$

onde n é o *coeficiente de Manning* cujo valor depende da rugosidade das superfícies do canal, e $a = 1\ \text{m}^{1/3}/\text{s} = (3{,}2808\ \text{pés})^{1/3}/\text{s} = 1{,}486\ \text{pés}^{1/3}/\text{s}$. Se $y_n = y_c$, o escoamento é crítico uniforme, e a inclinação do fundo S_0 é igual à inclinação crítica S_c expressa por

$$S_c = \frac{gn^2y_c}{a^2R_h^{4/3}} \qquad \text{que se simplifica para} \qquad S_c = \frac{gn^2}{a^2y_c^{1/3}}$$

no escoamento de filme ou no escoamento em um canal retangular largo com $b >> y_c$.

A melhor seção transversal hidráulica de um canal aberto é aquela com o raio hidráulico máximo ou, de modo equivalente, aquela com o perímetro molhado mínimo para uma seção transversal especificada. O critério para a melhor seção transversal hidráulica de um canal retangular é $y = b/2$. A melhor seção transversal dos canais trapezoidais é *metade de um hexágono*.

No *escoamento rapidamente variado* (RVF), a profundidade do escoamento varia acentuadamente ao longo de uma distância relativamente curta na direção do escoamento. Qualquer variação do escoamento supercrítico para o escoamento subcrítico ocorre através de um *salto hidráulico*, que é um processo altamente dissipativo. A razão de profundidade y_2/y_1, a perda de carga e a taxa de dissipação de energia durante o salto hidráulico são expressas como

$$\frac{y_2}{y_1} = 0{,}5\left(-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2}\right)$$

$$h_L = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

$$= y_1 - y_2 + \frac{y_1\text{Fr}_1^2}{2}\left(1 - \frac{y_1^2}{y_2^2}\right)$$

$$\text{Taxa de dissipação} = \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{h_L}{y_1 + V_1^2/2g}$$

$$= \frac{h_L}{y_1(1 + \text{Fr}_1^2/2)}$$

Uma obstrução sobre a qual o líquido pode escoar é chamada de *reservatório*, e uma obstrução com uma abertura ajustável no fundo que permite ao líquido escoar abaixo dela é chamada de *comporta submersa*. A vazão através de uma *comporta basculante* é dada por

$$\dot{V} = C_dba\sqrt{2gy_1}$$

onde b e a são a largura e a altura da abertura da comporta, respectivamente e C_d é o *coeficiente de descarga*, que representa para os efeitos de atrito.

Um *reservatório de soleira espessa* é um bloco retangular que tem um topo horizontal sobre o qual ocorre o escoamento crítico. A carga a montante acima da superfície superior do reservatório é chamada de *carga do reservatório*, H. A vazão é expressa como

$$\dot{V} = C_{\text{wd, espessa}} b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2}$$

onde o coeficiente de descarga é

$$C_{\text{wd, espessa}} = \frac{0.65}{\sqrt{1 + H/P_w}}$$

A vazão de um reservatório retangular de soleira espessa é expressa como

$$\dot{V}_{\text{ret}} = C_{\text{wd. ret}} \frac{2}{3} b\sqrt{2g}H^{3/2}$$

onde

$$C_{\text{wd. ret}} = 0{,}598 + 0{,}0897\frac{H}{P_w} \qquad \text{para} \qquad \frac{H}{P_w} \leq 2$$

Para um reservatório triangular de soleira espessa a vazão é dada por

$$\dot{V} = C_{\text{wd. tri}} \frac{8}{15} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}H^{5/2}$$

onde os valores de $C_{\text{wd. tri}}$ em geral variam entre 0,58 e 0,62.

A análise do canal aberto normalmente é usada no projeto de sistemas de esgoto, sistemas de irrigação, caminhos das cheias e diques. Alguns escoamentos em canal aberto são analisados no Capítulo 15 usando-se a dinâmica dos fluidos computacional (CFD).

REFERÊNCIAS E LEITURAS SUGERIDAS

1. P. Ackers et al. *Weirs and Flumes for Flow Measurement*. Nova Iorque: Wiley, 1978.
2. B. A. Bakhmeteff. *Hydraulics of Open Channels*. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1932.
3. M. H. Chaudhry. *Open Channel Flow*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993.
4. V. T. Chow. *Open Channel Hydraulics*. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1959.
5. C. T. Crowe, J. A. Roberson e D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*, 7. ed. Nova Iorque: Wiley, 2001.
6. R. H. French. *Open Channel Hydraulics*. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1985.
7. F. M. Henderson. *Open Channel Flow*. Nova Iorque: Macmillan, 1966.
8. C. C. Mei. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Nova Iorque: Wiley, 1983.
9. B. R. Munson, D. F. Young e T. H. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4. ed. Nova Iorque: Wiley, 2002.
10. M. C. Potter e D. C. Wiggert. *Mechanics of Fluids*, 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997).
11. F. M. White. *Fluid Mechanics*, 5. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2003.
12. U. S. Bureau of Reclamation. "Research Studies on Stilling Basins, Energy Dissipaters, and Associated Appurtenances", Hydraulic Lab Report Hyd.-399, 1° de jun. 1955.

PROBLEMAS*

Classificação, Número de Froude e Velocidade de Onda

13–1C Em que o escoamento de canal aberto difere do escoamento interno?

13–2C Qual é a força motriz do escoamento em um canal aberto? Como é estabelecida a vazão em um canal aberto?

13–3C Como a variação da pressão muda ao longo da superfície livre em um escoamento em canal aberto?

13–4C Considere o escoamento permanente completamente desenvolvido em um canal aberto de seção transversal retangular com uma inclinação constante de 5° na superfície do fundo. A inclinação da superfície livre também será de 5°? Explique.

13–5C Em que o escoamento uniforme difere do escoamento não uniforme nos canais abertos? Em quais tipos de canais o escoamento uniforme é observado?

13–6C O que é a profundidade normal? Explique como ela é estabelecida em canais abertos.

13–7C O que faz com que o escoamento em um canal aberto seja variado (ou não uniforme)? Em que o escoamento rapidamente variado difere do escoamento gradualmente variado?

13–8C Em canais abertos, como é definido o raio hidráulico? Conhecendo o raio hidráulico, como o diâmetro hidráulico do canal pode ser determinado?

13–9C Dada a velocidade média e a profundidade do escoamento, explique como você determinaria se o escoamento em canais abertos é tranquilo, crítico ou rápido.

13–10C O que é o número de Froude? Como ele é definido? Qual é o seu significado físico?

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

13–11C Qual é a profundidade crítica no escoamento em canal aberto? Para determinada velocidade média de escoamento como ela é determinada?

13–12C Observa-se que o escoamento em um canal aberto sofreu um salto hidráulico. O escoamento a montante do salto é necessariamente supercrítico? O escoamento a jusante do salto é necessariamente subcrítico?

13–13 Considere o escoamento da água em um canal largo. Determine a velocidade de um pequeno distúrbio no escoamento se a profundidade de escoamento for (*a*) 10 cm e (*b*) 80 cm. Qual seria sua resposta se o fluido fosse óleo?

13–14 Água a 20°C escoa de modo uniforme em um canal largo e retangular a uma velocidade de 2 m/s. Se a profundidade da água for 0,2 m, determine (*a*) se o escoamento é laminar ou turbulento e (*b*) se o escoamento é subcrítico ou supercrítico.

13–15 Água a 20°C escoa em um canal circular parcialmente cheio de 2 m de diâmetro a uma velocidade média de 2 m/s. Se a profundidade máxima da água for 0,5 m, determine o raio hidráulico, o número de Reynolds e o regime do escoamento.

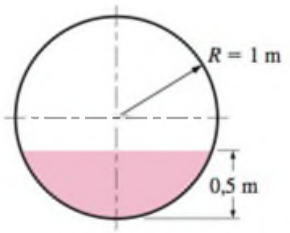


FIGURA P13–15

13–16 Água a 15°C escoa de modo uniforme em um canal retangular com 2 m de largura a uma velocidade média de 4 m/s. Se a profundidade da água for 8 cm, determine se o escoamento será subcrítico ou supercrítico. *Resposta:* supercrítico

13–17 Após chuva forte, a água escoa em uma superfície de concreto a uma velocidade média de 1,3 m/s. Se a profundidade da água for 2 cm, determine se o escoamento será subcrítico ou supercrítico.

13–18 Água a 10°C escoa em um canal circular com 3 m de diâmetro cheio até a metade a uma velocidade média de 2,5 m/s. Determine o raio hidráulico, o número de Reynolds e o regime de escoamento (laminar ou turbulento).

13–19 Uma única onda é iniciada no mar por forte solavanco durante um terremoto. Considerando a profundidade média da água de 2 km e a densidade da água do mar de 1,030 kg/m^3, determine a velocidade de propagação dessa onda.

Energia Específica e a Equação da Energia

13–20C Como a energia específica de um fluido que escoa em um canal aberto é definida em termos de cargas?

13–21C Considere o escoamento permanente da água através de dois canais retangulares abertos idênticos, com vazões idênticas. Se o escoamento em um canal é subcrítico e no outro é supercrítico, é possível que as energias específicas da água desses dois canais sejam idênticas? Explique.

13–22C Para determinada vazão através de um canal aberto, a variação da energia específica com a profundidade do escoamento é estudada. Uma pessoa diz que a energia específica do fluido será mínima quando o escoamento é crítico, mas outra diz que a energia específica será mínima quando o escoamento é subcrítico. Qual a sua opinião?

13–23C Considere o escoamento permanente supercrítico da água através de um canal retangular aberto com uma vazão constante. Alguém diz que quanto maior for a profundidade de escoamento, maior será a energia específica da água. Você concorda? Explique.

13–24C Durante o escoamento permanente e uniforme através de um canal aberto de seção transversal retangular, uma pessoa diz que a energia específica do fluido permanece constante. Uma segunda pessoa diz que a energia específica diminui ao longo do escoamento por causa dos efeitos do atrito e, portanto, da perda de carga. Com qual pessoa você concorda? Explique.

13–25C Como a inclinação do atrito é definida? Sob quais condições ela é igual à inclinação de fundo de um canal aberto?

13–26C Considere o escoamento permanente de um líquido através de um canal retangular largo. Diz-se que a linha de energia do escoamento é paralela no fundo do canal quando as perdas por atrito são desprezíveis. Você concorda?

13–27C Considere o escoamento permanente unidimensional através de um canal retangular largo. Alguém diz que a energia mecânica total do fluido na superfície livre de uma seção transversal é igual àquela do fluido no fundo do canal na mesma seção transversal. Você concorda? Explique.

13–28C Como a energia mecânica total de um fluido durante o escoamento permanente unidimensional através de um canal retangular largo é expressa em termos de cargas? Como ela se relaciona com a energia específica do fluido?

13–29C Expresse a equação da energia unidimensional para o escoamento de canal aberto entre uma seção a montante 1 e uma seção a jusante 2 e explique como a perda de carga pode ser determinada.

13–30 Água escoa de modo permanente em um canal retangular de 0,8 m de largura a uma vazão de 0,7 m^3/s. Se a profundidade do escoamento for 0,25 m, determine a velocidade de escoamento e se o escoamento é subcrítico ou supercrítico. Determine também a profundidade alternativa de escoamento se o caráter do escoamento mudar.

13–31 Água a 15°C escoa a uma profundidade de 0,4 m com velocidade média de 6 m/s em um canal retangular. Determine a energia específica da água e se o escoamento é subcrítico ou supercrítico.

13–32 Água a 15°C escoa a uma profundidade de 0,4 m com velocidade média de 6 m/s em um canal retangular. Determine (*a*) a profundidade crítica, (*b*) a profundidade alternativa e (*c*) a energia mínima específica.

13–33 Água a 10°C escoa em um canal retangular com 6 m de largura a uma profundidade de 0,55 m e vazão de 12 m^3/s. Determine (*a*) a profundidade crítica (*b*) se o escoamento é sub-

crítico ou supercrítico e (*c*) a profundidade alternativa. *Respostas:* (a) 0,742 m, (b) supercrítico, (c) 1,03 m

13–34 Água escoa através de um canal retangular com 4 m de largura e velocidade média de 5 m/s. Se o escoamento é crítico, determine a vazão da água.
Resposta: 51,0 m³/s

13–35 Água escoa através de um canal de aço com 50 cm de diâmetro, cheia até a metade a uma velocidade média de 2,8 m/s. Determine a vazão em volume e se o escoamento é subcrítico ou supercrítico.

13–36 Água escoa a através de um canal hexagonal com largura do fundo de 2 m a uma vazão de 45 m³/s. Determine (*a*) a velocidade média e (*b*) se o escoamento é subcrítico e supercrítico.

13–37 Repita o Problema 13–36 para uma vazão de 30 m³/s.

Escoamento Uniforme e Melhores Seções Transversais Hidráulicas

13–38C Quando podemos dizer que o escoamento em um canal aberto é uniforme? Sob quais condições o escoamento em um canal aberto permanece uniforme?

13–39C Considere o escoamento uniforme através de um canal retangular largo. Se a inclinação do fundo aumentar, a profundidade do escoamento (*a*) aumentará, (*b*) diminuirá ou (*c*) permanecerá constante.

13–40C Durante o escoamento uniforme em um canal aberto, alguém diz que a perda de carga pode ser determinada simplesmente multiplicando a inclinação do fundo pelo comprimento do canal. Isso pode ser simples assim? Explique.

13–41C Durante o escoamento uniforme em canais abertos, a velocidade de escoamento e a vazão podem ser determinadas com as equações de Manning expressas como $V_0 = (a/n)R_h^{2/3}S_0^{1/2}$ e $\dot{V} = (a/n)A_cR_h^{2/3}S_0^{1/2}$. Qual é o valor e a dimensão da constante *a* nessas equações em unidades SI? Explique também como o coeficiente de Manning *n* pode ser determinado quando o fator de atrito *f* é conhecido.

13–42C Mostre que para o escoamento crítico uniforme, a relação geral de inclinação crítica $S_c = \dfrac{gn^2y_c}{a^2R_h^{4/3}}$ se reduz a $S_c = \dfrac{gn^2}{a^2y_c^{1/3}}$ para o escoamento de filme com $b >> yc$.

13–43C Qual é a melhor seção transversal hidráulica para um canal aberto: uma com raio hidráulico pequeno ou grande?

13–44C Qual é a melhor seção transversal hidráulica para um canal aberto: (*a*) circular, (*b*) retangular, (*c*) trapezoidal ou (*d*) triangular?

13–45C A melhor seção transversal hidráulica para um canal aberto retangular é aquela cuja altura do fluido é (*a*) metade, (*b*) o dobro, (*c*) igual a ou (*d*) um terço da largura do canal.

13–46C A melhor seção transversal hidraúlica para um canal trapezoidal com largura de base *b* é aquela para a qual o comprimento da lateral da seção de escoamento é (*a*) *b* (*b*) *b*/2 (*c*) 2*b* ou (*d*).

13–47C Considere o escoamento uniforme através de um canal aberto recoberto com tijolos e com coeficiente de Manning de $n = 0{,}015$. Se o coeficiente de Manning dobrar ($n = 0{,}030$) como resultado do crescimento de algas na superfície enquanto a seção transversal do escoamento permanece constante, a vazão (*a*) dobrará, (*b*) diminuirá por um fator de $\sqrt{2}$, (*c*) permanecerá inalterada, (*d*) diminuirá pela metade ou (*e*) diminuirá por um fator de $2^{1/3}$.

13–48 Água escoa de modo uniforme em um canal de concreto polido de seção transversal trapezoidal com largura do fundo de 0,6 m, ângulo trapezoidal de 50° e ângulo do fundo de 0,4°. Se a profundidade de escoamento for medida como 0,45 m, determine a vazão da água através do canal.

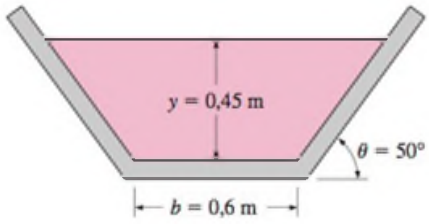


FIGURA P13–48

13–49 Água escoa de modo uniforme a meia carga em um canal circular com 2 m de diâmetro que é assentado com um declive de 1,5 m/km. Se o canal for feito de concreto polido, determine a vazão da água.

13–50 Um canal trapezoidal com uma largura do fundo de 5 m, largura de superfície livre de 10 m, e profundidade de escoamento de 2,2 m descarrega água a uma vazão de 120 m³/s. Se as superfícies do canal estiverem revestidas com asfalto ($n = 0{,}016$), determine a queda de elevação do canal por km.
Resposta: 8,52 m

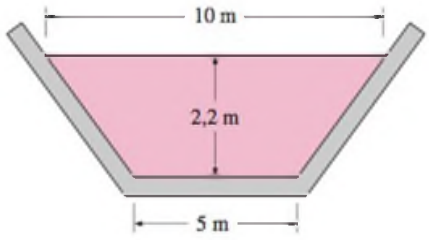


FIGURA P13–50

13–51 Reconsidere o Problema 13–50. Se a altura máxima de escoamento que o canal consegue acomodar é 2,4 m, determine a vazão máxima de escoamento através do canal.

13–52 Considere o escoamento de água através de dois canais idênticos com seções de escoamento quadradas de 3 m × 3 m. Agora os dois canais são combinados, formando um canal com 6 m de largura. A vazão é ajustada para que a profundidade do escoamento permaneça constante a 3 m. Determine o aumento percentual na vazão como resultado da combinação dos canais.

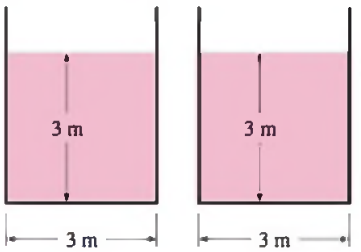


FIGURA P13–52

13–53 Um canal trapezoidal de concreto não polido tem uma inclinação no fundo de 1°, largura de base de 5 m e uma inclinação de superfície lateral de 1:1, como mostra a Figura P13–53. Para uma vazão de 25 m³/s, determine a profundidade normal *h*.

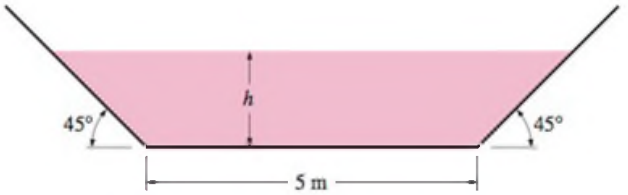


FIGURA P13–53

13–54 Repita o Problema 13–53 para um canal de terra escavado coberto de vegetação com $n = 0{,}030$.

13–55 Um canal de água de ferro fundido em forma de V mostrado na Figura P13–55 tem uma inclinação do fundo de 0,5°. Para uma profundidade de escoamento de 1 m no centro, determine a taxa de descarga no escoamento uniforme.

Resposta: 3,59 m³/s

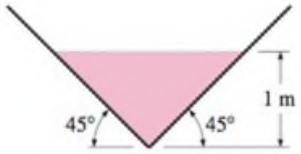


FIGURA P13–55

13–56 Água escoa em um canal cuja inclinação no fundo é de 0,002 e cuja seção transversal é aquela mostrada na Figura P13–61. As dimensões e os coeficientes de Manning para as superfícies de diferentes subseções também são dadas na figura. Determine a vazão através do canal e o coeficiente efetivo de Manning para o canal.

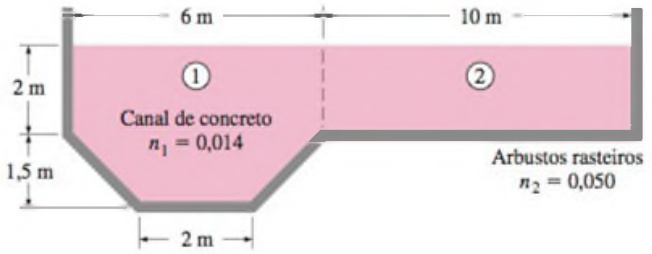


FIGURA P13–56

13–57 Considere um canal de água com diâmetro interno de 1 m feito de concreto polido ($n = 0{,}012$). A inclinação do canal é 0,002. Para uma profundidade de escoamento de 0,25 m no centro, determine a vazão da água através do canal.

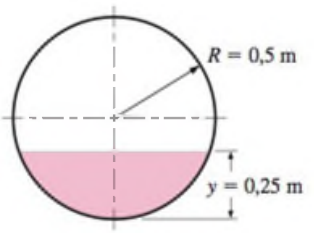


FIGURA P13–57

13–58 Reconsidere o Problema 13–57. Variando a razão entre a profundidade e o raio de escoamento *y*/*R* entre 0,1 e 1,9, mantendo a área de escoamento constante e calculando a vazão, mostre que a melhor seção transversal para o escoamento através de um canal circular ocorre quando o canal está cheio até a metade. Faça uma tabela e represente graficamente seus resultados.

13–59 Um canal trapezoidal de terra limpo com largura do fundo de 1,5 m e inclinação da superfície lateral de 1:1 deve drenar água de modo uniforme a uma vazão de 8 m³/s até uma distância de 1 km. Para que a profundidade do escoamento não exceda 1 m, determine a queda de elevação necessária.

13–60 Um sistema de drenagem de água com inclinação constante de 0,0015 deve ser construído com três canais circulares feitos de concreto polido. Dois dos canais têm diâmetro de 1,2 m e drenam para um terceiro canal. Se todos os canais devem correr a meia carga e as perdas na junção são desprezíveis, determine o diâmetro do terceiro canal. *Resposta:* 1,56 m

13–61 Água deve ser transportada em um canal aberto, cujas superfícies são revestidas com asfalto, a uma taxa de 4 m³/s no escoamento uniforme. A inclinação inferior é 0,0015. Determine as dimensões da melhor seção transversal se a forma do canal for (*a*) circular de diâmetro *D*, (*b*) retangular com largura inferior *b* e (*c*) trapezoidal com largura inferior *b*.

13–62 Considere o escoamento uniforme em um canal retangular revestido com asfalto com área de escoamento de 2 m² e inclinação do fundo de 0,0003. Variando a razão entre profundidade e largura *y*/*b* de 0,1 a 2,0, calcule e represente graficamente a vazão e confirme se a melhor seção transversal de escoamento ocorre quando a razão entre profundidade e largura do escoamento é 0,5.

Escoamentos Gradual e Rapidamente Variado e Salto Hidráulico

13–63C Como o escoamento não uniforme ou variado difere do escoamento uniforme?

13–64C Como o escoamento gradualmente variado (GVF) difere do escoamento rapidamente variado (RVF)?

13–65C Alguém diz que as perdas por atrito associadas ao cisalhamento de parede nas superfícies podem ser desprezadas

na análise do escoamento rapidamente variado, mas devem ser consideradas na análise do escoamento gradualmente variado. Você concorda com essa alegação? Justifique sua resposta.

13–66C Considere o escoamento permanente da água em um canal horizontal de seção transversal retangular. Se o escoamento é subcrítico, a profundidade do escoamento (*a*) aumentará, (*b*) permanecerá constante ou (*c*) diminuirá na direção do escoamento.

13–67C Considere o escoamento permanente da água em um canal inclinado para baixo de seção transversal retangular. Se o escoamento é subcrítico, a profundidade do escoamento será maior do que a profundidade normal ($y > y_n$), a profundidade do escoamento (*a*) aumentará, (*b*) permanecerá constante ou (*c*) diminuirá na direção do escoamento.

13–68C Considere o escoamento permanente da água em um canal horizontal de seção transversal retangular. Se o escoamento é supercrítico, a profundidade do escoamento (*a*) aumentará, (*b*) permanecerá constante ou (*c*) diminuirá na direção do escoamento.

13–69C Considere o escoamento permanente da água em um canal inclinado para baixo de seção transversal retangular. Se o escoamento é subcrítico e a profundidade do escoamento é menor do que a profundidade normal ($y < y_n$), a profundidade do escoamento (*a*) aumentará, (*b*) permanecerá constante ou (*c*) diminuirá na direção do escoamento.

13–70C Considere o escoamento permanente da água em um canal inclinado para cima de seção transversal retangular. Se o escoamento é supercrítico, a profundidade do escoamento (*a*) aumentará, (*b*) permanecerá constante ou (*c*) diminuirá na direção do escoamento.

13–71C É possível que o escoamento subcrítico sofra um salto hidráulico? Explique.

13–72C Por que o salto hidráulico às vezes é usado para dissipar a energia mecânica? Como é definida a taxa de dissipação de energia de um salto hidráulico?

13–73 Água escoa de modo uniforme em um canal retangular com superfícies de concreto polido. A largura do canal é 3 m, a profundidade do escoamento é 1,2 m e a inclinação do fundo é 0,002. Determine se o canal deve ser classificado como suave, crítico ou íngreme para esse escoamento.

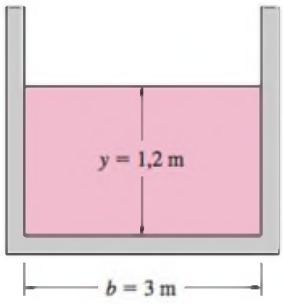


FIGURA P13–73

13–74 Considere o escoamento de água uniforme em um canal largo de tijolos com inclinação de 0,4°. Determine o intervalo da profundidade de escoamento no qual o canal é classificado como íngreme.

13–75 Água escoa em um canal de ferro fundido em forma de V com 90° de abertura e inclinação de fundo de 0,002 a uma vazão de 3 m³/s. Determine se a inclinação desse canal deve ser classificada como suave, crítica ou íngreme para esse escoamento. *Resposta:* suave

13–76 Observa-se que a água descarregada em um canal horizontal retangular com 8 m de largura de uma comporta basculante passou por um salto hidráulico. A profundidade de escoamento e a velocidade antes do salto são de 1,2 m e 9 m/s, respectivamente. Determine (*a*) a profundidade do escoamento e o número de Froude após o salto, (*b*) a perda de carga e a taxa de dissipação e (*c*) a energia mecânica dissipada pelo salto hidráulico.

13–77 Água escoando em um canal largo horizontal a uma profundidade de escoamento de 35 cm e uma velocidade média de 12 m/s sofre um salto hidráulico. Determine a perda de carga associada ao salto hidráulico.

13–78 Durante um salto hidráulico em um canal largo, a profundidade do escoamento aumenta de 0,6 até 3 m. Determine as velocidades e os números de Froude antes e após o salto e a taxa de dissipação de energia.

13–79 Considere o escoamento da água em um canal com 10 m de largura a uma vazão de 70 m³/s e uma profundidade de escoamento de 0,50 m. Agora a água sofre um salto hidráulico, e a profundidade de escoamento medida após o salto é 4 m. Determine a potência mecânica desperdiçada durante esse salto. *Resposta:* 4,35 MW

13–80 A profundidade do escoamento e a velocidade da água medidas após um salto hidráulico são 2 m e 3 m/s, respectivamente. Determine a profundidade e velocidade de escoamento antes do salto, e a fração de energia mecânica dissipada.

Controle de Escoamento e Medição em Canais

13–81C Desenhe um diagrama de energia específica de profundidade para o escoamento das comportas submersas, e indique o escoamento através da comporta para os seguintes casos: (*a*) comporta sem atrito, (*b*) comporta basculante com escoamento de saída livre e (*c*) comporta basculante com escoamento afogado (incluindo o salto hidráulico de volta ao escoamento subcrítico).

13–82C Como é definido o coeficiente de descarga C_d das comportas basculantes? Quais são os valores normais de C_d para as comportas basculantes com escoamento de saída livre? Qual é o valor de C_d para o escoamento idealizado sem atrito através da comporta?

13–83C Qual é o princípio básico da operação de um reservatório de soleira espessa utilizado para medir a vazão através de um canal aberto?

13–84C Considere o escoamento permanente sem atrito sobre uma saliência de altura Δz em um canal horizontal com largura constante b. A profundidade de escoamento y aumenta, diminui ou permanece constante à medida que o fluido escoa sobre a saliência? Considere o escoamento subcrítico.

13–85C Considere o escoamento de um líquido sobre uma saliência durante o escoamento subcrítico em um canal aberto. A energia específica e a profundidade do escoamento diminuem sobre a saliência à medida que a sua altura aumenta. Qual será o caráter do escoamento quando a energia específica atingir seu valor máximo? O escoamento se tornará supercrítico se a altura da saliência aumentar ainda mais?

13–86C O que é um reservatório de soleira espessa? Qual é a base de classificação dos reservatórios de soleira espessa?

13–87 A água é liberada de um reservatório com 14 m de profundidade em um canal aberto com 6 m de largura através de uma comporta basculante com uma abertura de 1 m de altura no fundo do canal. Se a profundidade do escoamento a jusante dessa comporta for medido como 3 m, determine a taxa de descarga através da comporta.

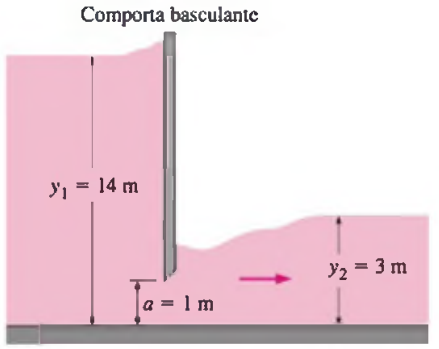


FIGURA P13–87

13–88 A água que escoa em um canal largo encontra uma saliência de 22 cm de altura no fundo do canal. Se a profundidade de escoamento for de 1,2 m e a velocidade de 2,5 m/s antes da saliência, determine se o escoamento é estrangulado sobre a saliência e discuta.

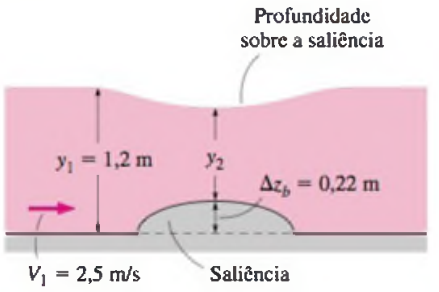
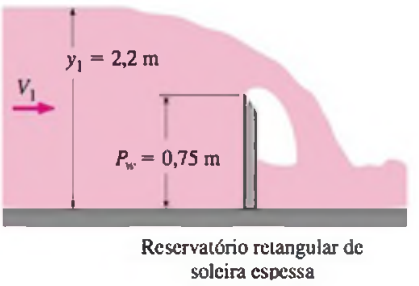


FIGURA P13–88

13–89 Considere o escoamento uniforme da água em um canal largo com uma velocidade de 8 m/s e profundidade de escoamento de 0,8 m. Agora a água escoa sobre uma saliência com 30 cm de altura. Determine a variação (aumento ou diminuição) no nível da superfície da água sobre a saliência. Determine também se o escoamento sobre a saliência é subcrítico ou supercrítico.

13–90 A vazão da água em um canal largo horizontal com 4 m de largura está sendo medida com um reservatório retangular de soleira espessa de 0,75 m de altura que abrange todo o canal. Se a profundidade da água a montante for de 2,2 m, determine a vazão da água.

Resposta: 15,9 m³/s



Reservatório retangular de soleira espessa

FIGURA P13–90

13–91 Repita o Problema 13–90 para o caso de um reservatório com 1 m de altura.

13–92 A água escoa sobre um reservatório retangular de soleira delgada com 2 m de altura. A profundidade do escoamento a montante do reservatório é 3 m e a água é descarregada do reservatório em um canal de concreto não polido com mesma largura, no qual são estabelecidas as condições de escoamento uniforme. Caso nenhum salto hidráulico ocorra no escoamento a jusante, determine a inclinação máxima do canal a jusante.

13–93 Considere um escoamento de água uniforme em um canal largo retangular com profundidade de 2 m e feito de concreto não polido com uma inclinação de 0,0022. Determine a vazão de escoamento da água por m de largura do canal. Agora a água escoa sobre uma saliência com 15 cm de altura. Se a superfície da água sobre a saliência permanecer plana (sem elevação ou queda), determine a variação da taxa de descarga da água por metro de largura do canal. Sugestão: Investigue se uma superfície plana sobre a saliência é fisicamente possível.

13–94 Considere o escoamento uniforme da água em um canal largo feito de concreto não polido assentado sobre uma inclinação de 0,0022. Agora a água escoa sobre uma saliência com 15 cm de altura. Se o escoamento sobre a saliência for exatamente crítico (Fr = 1), determine a vazão e a profundidade de escoamento sobre a saliência por m de largura. *Respostas:* 20,3 m³/s, 3,48 m

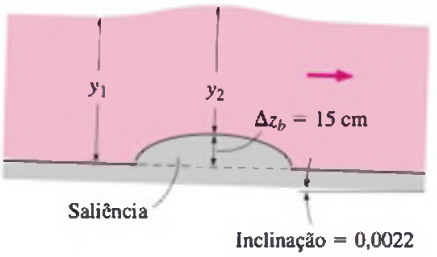


FIGURA P13–94

13–95 A vazão da água através de um canal com 5 m de largura (perpendicular ao papel) é controlada por uma comporta basculante. Se as profundidades de escoamento são medidas como 1,1 e 0,45 m a montante e jusante das comportas, respectivamente, determine a vazão e o número de Froude a jusante da comporta.

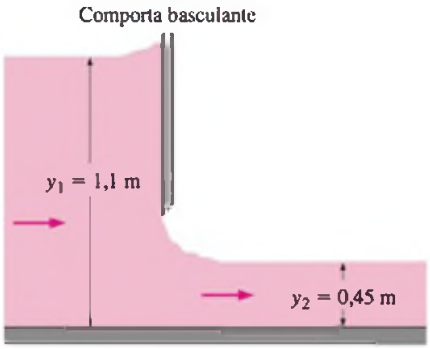


FIGURA P13–95

13–96 Água deve ser liberada de um lago com 6 m de profundidade em um canal através de uma comporta basculante com uma abertura de 5 m de largura e 0,6 m de altura no fundo. Se a profundidade do escoamento a jusante dessa comporta for medido como 3 m, determine a taxa de descarga através da comporta.

13–97 A vazão da água que escoa em um canal com 3 m de largura deve ser medida com um reservatório triangular de soleira espessa que está 0,5 m acima do fundo do canal com um ângulo de entalhe de 60°. Se a profundidade de escoamento a montante da água do reservatório for de 1,5 m, determine a vazão da água através do canal. Considere o coeficiente de descarga do reservatório de 0,60.

Resposta: 0,818 m³/s

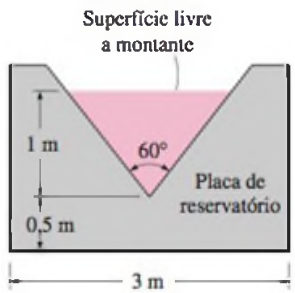


FIGURA P13–97

13–98 Repita o Problema 13–97 para uma profundidade de escoamento a montante de 1,2 m.

13–99 Um reservatório triangular com soleira espessa e ângulo de entalhe de 100° é usado para medir a taxa de descarga da água de um lago grande para um escoadouro. Se, em vez disso, for usado um reservatório com metade do ângulo de entalhe (θ = 50°), determine a redução percentual na taxa de escoamento. Considere que a profundidade da água no lago e o coeficiente de descarga do reservatório permanecem inalterados.

13–100 Um reservatório de soleira espessa com 1 m de altura é usado para medir a vazão da água em um canal retangular com 5 m de largura. A profundidade de escoamento bem a montante do reservatório é de 1,6 m. Determine a vazão através do canal e a profundidade de escoamento mínima acima do reservatório.

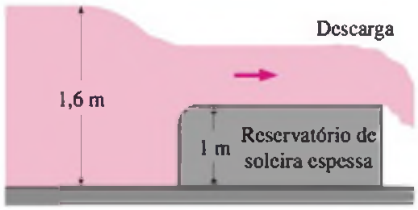


FIGURA P13–100

13-101 Repita o Problema 13-100 para uma profundidade de escoamento a montante de 2,2 m.

13–102 Considere o escoamento da água em um reservatório de soleira espessa com 0,80 m de altura e suficientemente longo. Se a profundidade mínima de escoamento acima do reservatório for medida como 0,50 m, determine a vazão por metro de largura no canal e a profundidade de escoamento a montante do reservatório.

Problemas de Revisão

13–103 Um canal trapezoidal com largura inferior de 4 m e inclinação lateral de 45° descarrega água a uma vazão de 18 m³/s. Se a profundidade do escoamento for 0,6 m, determine se o escoamento é subcrítico ou supercrítico.

13–104 Um canal retangular com largura do fundo de 2 m descarrega água a uma vazão de 8 m³/s. Determine a profundidade de escoamento abaixo da qual o escoamento é supercrítico.

13–105 Água escoa em um canal a uma velocidade média de 4 m/s. Determine se o escoamento é subcrítico ou supercrítico para profundidades de escoamento de (*a*) 0,2 m, (*b*) 2 m e (*c*) 1,63 m.

13–106 Água escoa através de um canal retangular com 1,5 m de largura com um coeficiente de Manning de n = 0,012. Se a profundidade da água for 0,9 m e a inclinação do fundo do canal for 0,6°, determine a taxa de descarga do canal no escoamento uniforme.

13–107 Um canal retangular com 5 m de largura revestido com concreto acabado deve ser projetado para transportar água até uma distância de 1 km a uma vazão de 12 m³/s. Usando o EES (ou outro software), investigue o efeito da inclinação no fundo sobre a profundidade de escoamento (e, portanto, sobre a altura necessária do canal). Faça o ângulo do fundo variar de 0,5° a 10° em incrementos e 0,5°. Faça uma tabela e represente graficamente a profundidade de escoamento com relação ao ângulo do fundo e discuta os resultados.

13–108 Repita o Problema 13–107 para um canal trapezoidal que tem uma largura de base de 5 m e um ângulo de superfície lateral de 45°.

13–109 Um canal trapezoidal com revestimento de tijolos tem uma inclinação do fundo de 0,001 e uma largura de base de 4 m, e as superfícies laterais têm ângulos de 30° da horizontal, como mostra a Figura P13–109. Se a profundidade normal for medida como 2 m, estime a vazão da água através do canal.

Resposta: 36,4 m³/s

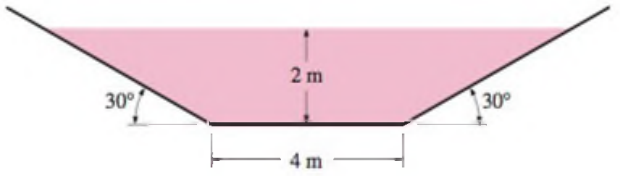


FIGURA P13–109

13–110 Um canal de drenagem de aço circular com 2 m de diâmetro interno (n = 0,012) deve descarregar água de modo uniforme a uma vazão de 12 m³/s até uma distância de 1 km. Se a profundidade máxima deve ser 1,5 m, determine a queda de elevação necessária.

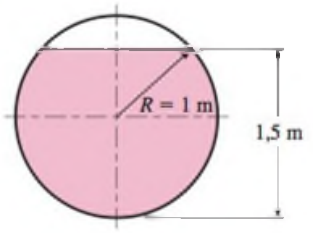


FIGURA P13–110

13–111 Considere o escoamento de água através de um canal em forma de V. Determine o ângulo θ que o canal faz com a horizontal para o qual o escoamento é mais eficiente.

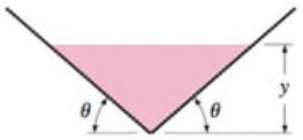


FIGURA P13–111

13–112 Água escoa em um canal cuja inclinação do fundo é de 0,5° e cuja seção transversal é aquela mostrada na Figura P13–126. As dimensões e os coeficientes de Manning para as superfícies de diferentes subseções também são dadas na figura. Determine a vazão de escoamento através do canal e o coeficiente de Manning efetivo do canal.

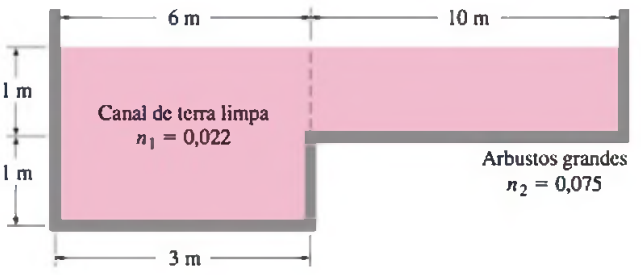


FIGURA P13–112

13–113 Considere dois canais idênticos, um retangular com largura de fundo b e outro circular com diâmetro D e vazões de escoamento, inclinações de fundo e revestimentos de superfície idênticos. Se a altura do escoamento no canal retangular também é b e o canal circular escoa a meia carga, determine a relação entre b e D.

13–114 Considere o escoamento da água através do entalhe parabólico mostrado na Figura P13–128. Deduza uma relação para a vazão e calcule seu valor numérico para o caso ideal no qual a velocidade de escoamento é dada pela equação de Toricelli $V = \sqrt{2g(H - y)}$.

Resposta: 0,246 m³/s

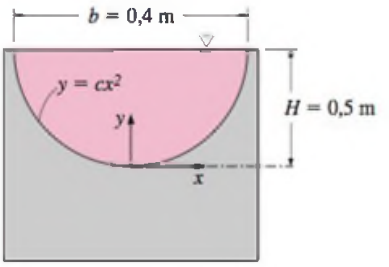


FIGURA P13–114

13–115 Na prática, o entalhe em V normalmente é usado para medir a vazão dos canais abertos. Usando a equação idealizada de Toricelli $V = \sqrt{2g(H - y)}$ para a velocidade, deduza uma relação para a vazão através do entalhe em V em termos do ângulo θ. Mostre também a variação da vazão com θ, calculando a vazão para θ = 25°, 40°, 60° e 75° e representando graficamente os resultados.

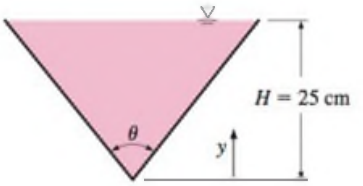


FIGURA P13–115

13–116 Água escoa de modo uniforme a meia carga em um canal circular com 1,2 m de diâmetro assentado com uma inclinação de 0,004. Se a vazão da água for medida como 1,25 m³/s, determine o coeficiente de Manning do canal e o número de Froude.

13–117 Água escoando em um canal horizontal largo se aproxima de uma saliência com 20 cm de altura a uma velocidade de 1,25 m/s e profundidade de escoamento de 1,8 m. Determine a velocidade, a profundidade de escoamento e o número de Froude sobre a saliência.

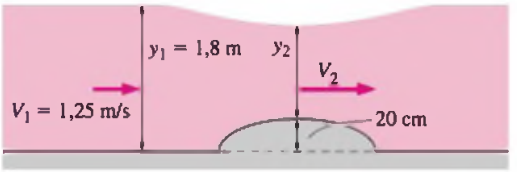


FIGURA P13–117

13–118 Reconsidere o Problema 13–117. Determine a altura da saliência para a qual o escoamento sobre ela é crítico (Fr = 1).

13–119 Considere o escoamento de água através de um canal retangular largo que sofre um salto hidráulico. Mostre que a razão entre os números de Froude antes e depois do salto pode ser expressa em termos das profundidades de escoamento y_1 e y_2 antes e depois do salto, respectivamente, como $Fr_1/Fr_2 = \sqrt{(y_2/y_1)^3}$.

13–120 Uma comporta basculante de saída livre é usada para controlar a taxa de descarga da água através de um canal. Determine a vazão por unidade de largura quando a comporta está levantada resultando em uma lacuna de 30 cm e quando a profundidade de escoamento a montante é medida como 1,8 m. Determine também a profundidade de escoamento e a velocidade a jusante.

13–121 Água escoando em um canal largo a uma profundidade de escoamento de 45 cm e uma velocidade média de 8 m/s sofre um salto hidráulico. Determine a fração de energia mecânica do fluido dissipada durante esse salto. *Resposta:* 36,8 %

13–122 Água escoando através de uma comporta basculante passa por um salto hidráulico, como mostra a Figura P13–124. A velocidade da água é 1,25 m/s antes de atingir a comporta e 4 m/s após o salto. Determine a vazão da água através da comporta por metro de largura, as profundidades de escoamento y_1 e y_2 e a taxa de dissipação de energia do salto.

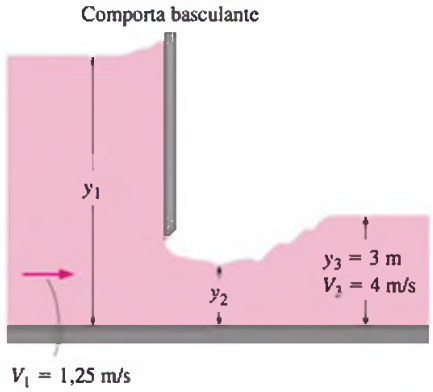


FIGURA P13–122

13–123 Repita o Problema 13–122 para uma velocidade de 2 m/s após o salto hidráulico.

13–124 Água é descarregada a partir de um lago com 5 m de profundidade em um canal de concreto polido com uma inclinação do fundo de 0,004 através de uma comporta basculante com uma abertura de 0,5 m de altura no fundo. Logo após o estabelecimento das condições de escoamento uniforme supercrítico, a água sofre um salto hidráulico. Determine a profundidade, a velocidade e o número de Froude do escoamento após o salto. Despreze a inclinação do fundo ao analisar o salto hidráulico.

13–125 Água é descarregada de um dique em um vertedouro largo para evitar o transbordamento e reduzir o risco de inundação. Uma grande fração da potência destrutiva da água é dissipada por um salto hidráulico durante o qual a profundidade da água sobe de 0,50 para 4 m. Determine as velocidades da água antes e depois do salto, e a potência mecânica dissipada por metro de largura do vertedouro.

13–126 A vazão da água em um canal retangular com 6 m de largura deve ser medida usando um reservatório de soleira espessa de 1,1 m de altura que abrange todo o canal. Se a carga acima da soleira do reservatório for de 0,60 m a montante do reservatório, determine a vazão da água.

Problemas de Projeto e Ensaio

13–127 Usando catálogos ou sites da Web obtenha informações de três fabricantes diferentes de reservatórios. Compare os projetos dos diferentes reservatórios e discuta as vantagens e desvantagens de cada um. Indique para quais aplicações cada projeto é mais adequado.

13–128 Considere a vazão da água no intervalo entre 10 m^3/s e 15 m^3/s através da seção horizontal de um canal retangular com 5 m de largura. Um reservatório retangular ou triangular com chapa fina deve ser instalado para medir a vazão. Para que a profundidade da água permaneça abaixo de 2 m em todos os momentos, especifique o tipo e as dimensões de um reservatório apropriado. Qual seria sua resposta se a vazão estivesse entre 0 e 15 m^3/s?

CAPÍTULO

14

TURBOMÁQUINAS

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura deste capítulo você deve ser capaz de:

- Identificar os diversos tipos de bombas e turbinas e entender como eles funcionam
- Aplicar a análise dimensional ao projeto de bombas ou turbinas novas que sejam geometricamente semelhantes às bombas e turbinas existentes
- Executar a análise vetorial básica no estudo do escoamento em bombas e turbinas
- Utilizar a velocidade específica para o projeto preliminar e seleção de bombas e turbinas

Neste capítulo discutimos os princípios básicos de um equipamento comum e importante da mecânica dos fluidos, a *turbomáquina*. Em primeiro lugar, classificamos as turbomáquinas em duas categorias amplas, *bombas* e *turbinas*. Em seguida, nos aprofundamos principalmente qualitativamente, explicando os princípios básicos de sua operação. Enfatizamos o projeto preliminar e o desempenho geral de turbomáquinas, em vez do projeto detalhado. Além disso, discutiremos como coincidir adequadamente os requisitos de um sistema de escoamento de fluido com as características de desempenho de uma turbomáquina. Uma parte significativa deste capítulo é dedicada às *leis de semelhança das turbomáquinas* — uma aplicação prática da análise dimensional. Mostramos como as leis de semelhança são usadas no projeto das novas turbomáquinas geometricamente semelhantes às existentes.

14–1 • CLASSIFICAÇÕES E TERMINOLOGIA

Existem duas categorias amplas de turbomáquinas, **bombas** e **turbinas**. A palavra *bomba* é um termo geral para qualquer máquina de fluido que *adiciona* energia a um fluido. Alguns autores chamam as bombas de **dispositivos que absorvem energia**, uma vez que a energia é fornecida *para* elas, e elas transferem a maior parte daquela energia para o fluido, em geral por meio de um eixo giratório (Figura 14–1*a*). O aumento da energia do fluido em geral é sentido como um aumento da pressão do fluido. As turbinas, por outro lado, são **dispositivos produtores de energia** — eles extraem energia *do* fluido e transferem a maior parte dessa energia para alguma forma de saída de energia mecânica, em geral na forma de um eixo giratório (Figura 14–1*b*). O fluido na saída de uma turbina sofre perda de energia, em geral na forma de perda de pressão.

Uma pessoa comum pode pensar que a energia fornecida para uma bomba aumenta a velocidade do fluido passando através da bomba, e que uma turbina extrai energia do fluido deixando-o mais lento. Entretanto, nem sempre é assim. Considere um volume de controle ao redor de uma bomba (Figura 14–2). Consideramos condições de regime permanente. Com isso queremos dizer que nem a vazão da massa nem a velocidade de rotação das pás giratórias se modificam com o tempo. (Obviamente, o campo de escoamento detalhado próximo às pás giratórias dentro da bomba *não* é permanente, mas a análise do volume de controle não diz respeito aos detalhes dentro do volume de controle.) Pela conservação de massa, sabemos que a vazão em massa na entrada da bomba deve ser igual à vazão em massa para fora da bomba. Se o escoamento é incompressível, as vazões volumétricas na entrada e na saída também devem ser iguais. Além disso, se o diâmetro da saída for igual àquele da entrada, a conservação de massa exige que a velocidade média através da saída deve ser idêntica à velocidade média através da entrada. Em outras palavras, a bomba não aumenta necessariamente a *velocidade* do fluido que passa através dele, mas aumenta a *pressão* do fluido. Obviamente, se a bomba fosse desligada, não haveria nenhum escoamento. Assim, a bomba *não* aumenta a velocidade do fluido comparada à situação de um sistema sem nenhuma bomba. Entretanto, em termos de variações entre entrada e saída *através* da bomba, a velocidade do fluido não aumenta necessariamente. (A velocidade de saída pode até mesmo ser *menor* do que a velocidade de entrada se o diâmetro da saída for maior do que aquela da entrada.)

A finalidade de uma bomba é adicionar energia a um fluido, resultando em um aumento da pressão do fluido, não necessariamente em um aumento da velocidade do fluido através da bomba.

Analogamente podemos dizer com relação à finalidade de uma turbina:

A finalidade de uma turbina é extrair energia de um fluido, resultando em uma diminuição da pressão do fluido, não necessariamente em uma diminuição da velocidade do fluido através da turbina.

As máquinas que movimentam líquidos são chamadas de **bombas**, mas existem vários outros nomes para as máquinas que movimentam gases (Figura 14–3). Um **ventilador** é uma bomba de gás com elevação de pressão relativamente baixa e vazão alta. Os exemplos incluem os ventiladores de teto, os ventiladores domésticos e as hélices. Um tipo de ventilador que também é chamado de **soprador** é uma bomba de gás com elevação de pressão de moderada à alta e vazão de moderada à alta. Os exemplos incluem os ventiladores centrífugos, e os ventiladores dos sistemas de ventilação automotivos e de fornos e as máquinas de soprar folhas. Um **compressor** é uma bomba de gás desenvolvida para fornecer uma elevação de pressão alta, em geral com vazões moderadas. Os exemplos incluem os compressores de ar que acionam as ferramentas pneumáticas e enchem pneus nos postos de gasolina, e os compressores utilizados nas bombas de aquecimento, nos refrigeradores e nos condicionadores de ar.

Bombas e turbinas nas quais a energia é fornecida ou extraída por um eixo giratório são chamadas adequadamente de **turbomáquinas**, uma vez que o prefixo latino *turbo* significa "giro". Entretanto, nem todas as bombas ou turbinas utilizam

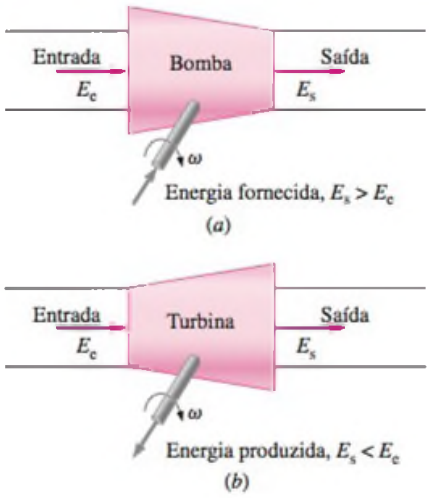


FIGURA 14–1
(*a*) Uma bomba fornece energia para um fluido enquanto (*b*) uma turbina extrai energia de um fluido.

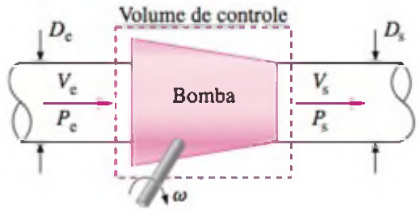


FIGURA 14–2
No caso do escoamento em regime permanente, a conservação de massa exige que a vazão em massa para fora de uma bomba seja igual à vazão em massa na entrada da bomba; para o escoamento incompressível com áreas de seção transversal de entrada e saída ($D_s = D_e$), concluímos que $V_s = V_e$, mas $P_s > P_e$.

	Ventilador	Soprador	Compressor
ΔP	Baixo	Médio	Alto
$\dot{V}$	Alto	Médio	Baixo

FIGURA 14–3
Quando utilizadas com gases,as bombas são chamadas de *ventiladores*, *sopradores* ou *compressores*, dependendo dos valores relativos da elevação de pressão e da vazão volumétrica.

(*a*) (*b*)

FIGURA 14–4
Nem todas as bombas têm um eixo giratório; (*a*) a energia é fornecida para essa bomba manual de pneus pelo movimento para cima e para baixo do braço de uma pessoa bombeando o ar; (*b*) um mecanismo similar é usado para bombear água com uma bomba de poço antiga.
(a) Foto de Andrew Cimbala, com permissão.
(b) © The McGraw-Hill Companies, Inc./Ellen Behrman, fotógrafa.

um eixo giratório. A bomba manual operada a ar que você usa para encher os pneus de sua bicicleta é um dos principais exemplos (Figura 14–4*a*). O movimento intermitente para cima e para baixo de um êmbolo substitui o eixo giratório desse tipo de bomba, e é mais adequado chamá-lo simplesmente de **máquina de fluidos**, em vez de turbomáquina. Uma bomba de poço antiga opera de modo similar para bombear a água, em vez do ar (Figura 14–4*b*). Entretanto, a palavra *turbomáquina* é muito usada na literatura para se referir a *todos* os tipos de bombas e turbinas, independentemente de utilizarem um eixo giratório ou não.

As máquinas de fluidos também podem ser classificadas de forma geral como máquinas de *deslocamento positivo* ou máquinas *dinâmicas*, com base no modo como ocorre a transferência de energia. Em **máquinas de deslocamento positivo**, o fluido é direcionado para um volume fechado. A transferência de energia para o fluido é realizada pelo movimento da fronteira do volume fechado, fazendo com que o volume expanda ou contraia, sugando fluido para dentro ou esguichando fluido para fora, respectivamente. Seu coração é um bom exemplo de **bomba de deslocamento positivo** (Figura 14–5*a*). Ela foi criada com válvulas de uma via que se abrem para deixar o sangue das câmaras do coração se expandir, e outras válvulas de uma via que se abrem à medida que o sangue é empurrado para fora dessas câmaras quando elas se contraem. Um exemplo de **turbina de deslocamento positivo** é o medidor comum da água de sua casa (Figura 14–5*b*), no qual a água se força para dentro de uma câmara fechada com volume em expansão conectada a um eixo de saída que gira à medida que a água entra na câmara. Em seguida, a fronteira do volume se recolhe, girando mais o eixo de saída e deixando que a água continue percorrendo seu caminho até a pia, chuveiro etc. O medidor de água registra cada rotação de 360° do eixo de saída e o medidor é ajustado precisamente com o volume conhecido do fluido na câmara.

Em **máquinas dinâmicas** não há volume fechado. Em vez disso, pás giratórias fornecem ou extraem energia de ou para o fluido. Nas bombas, essas pás giratórias são chamadas de **pás propulsoras**, enquanto nas turbinas as pás giratórias são chamadas de **pás de roda** ou **baldes**. Os exemplos de **bombas dinâmicas** incluem **bombas confinadas** e **bombas em duto** (aquelas com corpos ao redor das pás, como a bomba d´água do motor do carro), e **bombas abertas** (aquelas sem corpos,

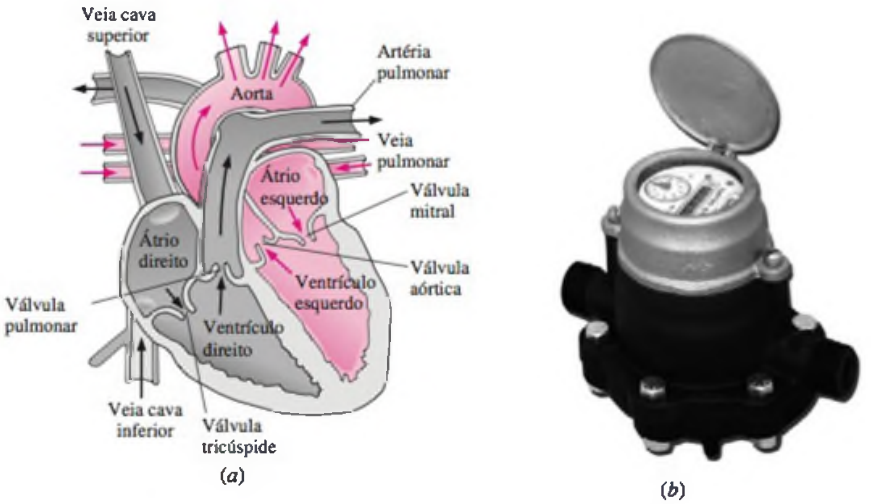


FIGURA 14–5
(*a*) O coração humano é um exemplo de *bomba de deslocamento positivo*; o sangue é bombeado por expansão e contração das câmaras do coração chamadas *ventrículos*. (*b*) O medidor comum da água de sua casa é um exemplo de *turbina de deslocamento positivo*; a água preenche e sai de uma câmara com volume conhecido a cada revolução do eixo de saída giratório.
Foto cortesia da Niagara Meters, Spartanburg, SC. Usada com permissão.

como o ventilador de teto de uma casa, o propulsor de um avião ou o rotor de um helicóptero). Os exemplos de **turbinas dinâmicas** incluem as **turbinas confinadas**, como a turbina hidráulica que extrai energia da água em uma represa hidroelétrica, e **turbinas abertas** como a turbina eólica que extrai energia do vento (Figura 14–6).

FIGURA 14–6
Uma turbina eólica é um bom exemplo de máquina dinâmica do tipo aberto; o ar gira as pás e o eixo de saída faz funcionar um gerador elétrico.
The Wind Turbine Company. Usada com permissão.

14–2 • BOMBAS

Alguns parâmetros fundamentais são utilizados na análise do desempenho de uma bomba. A **vazão em massa** do fluido através da bomba, $\dot{m}$*, é um parâmetro principal óbvio de desempenho de bomba. Para o escoamento incompressível, é mais comum usar a **vazão volumétrica** do que a vazão em massa. Na indústria da turbomáquina, a vazão volumétrica é chamada de **capacidade** e nada mais é do que a vazão em massa dividida pela densidade do fluido,

Vazão volumétrica (capacidade): $$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} \qquad (14\text{–}1)$$

O desempenho de uma bomba é caracterizado também pela sua **carga líquida** H, definida como a variação da **carga de Bernoulli** entre a entrada e a saída da bomba

Carga líquida: $$H = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_s - \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_e \qquad (14\text{–}2)$$

A dimensão da carga líquida é comprimento, e com freqüência é listada como uma altura de coluna de água equivalente, mesmo para uma bomba que não bombeia água.

No caso em que um *líquido* é bombeado, a carga de Bernoulli na entrada é equivalente à **linha piezométrica** na entrada, EGL_e, obtida pelo alinhamento de uma sonda de Pitot no centro do escoamento como ilustra a Figura 14–7. A linha piezométrica de energia na saída EGL_s é obtida do mesmo modo, como também ilustra a figura. No caso geral, a saída da bomba pode estar a uma elevação diferente da entrada, e seu diâmetro e velocidade média podem não ser iguais àqueles da entrada. Independentemente dessas diferenças, a carga líquida H é igual à diferença entre EGL_s e EGL_e

Carga líquida de uma bomba de líquido: $$H = EGL_s - EGL_e$$

Considere o caso especial do escoamento incompressível através de uma bomba no qual os diâmetros de entrada e saída são idênticos e que não há variação da elevação. A Equação 14–2 se reduz a

Caso especial com $D_s = D_e$ e $z_s = z_e$: $$H = \frac{P_s - P_e}{\rho g}$$

Neste caso simplificado, a carga líquida é simplesmente a elevação de pressão através da bomba expressa como uma carga (altura da coluna de fluido).

A carga líquida é proporcional à potência útil realmente fornecida ao fluido. Costuma-se chamá-la de **potência da água**, mesmo que o fluido que está sendo bombeado não seja água. Por raciocínio dimensional, devemos multiplicar a carga líquida da Equação 14–2 pela vazão em massa e aceleração gravitacional para obter as dimensões da potência. Assim

Potência da água: $$\dot{W}_{\text{potência da água}} = \dot{m}gH = \rho g\dot{V}H \qquad (14\text{–}3)$$

Todas as bombas sofrem perdas irreversíveis devido ao atrito, vazamento interno, separação de escoamento nas superfícies da pá, dissipação turbulenta etc. Assim, a energia mecânica fornecida à bomba deve ser maior do que a potência. Na terminologia das bombas, a potência externa fornecida à bomba é chamada de **potência no eixo**, que é abreviada como bhp. No caso típico de um eixo giratório que fornece a potência no eixo

Potência no eixo: $$\text{bhp} = \dot{W}_{\text{eixo}} = \omega T_{\text{eixo}} \qquad (14\text{–}4)$$

onde ω é a velocidade rotacional do eixo (rad/s) e T_{eixo} é o torque fornecido ao eixo. Definimos **eficiência da bomba** η_{bomba} como a relação entre a taxa de potência útil e a potência fornecida

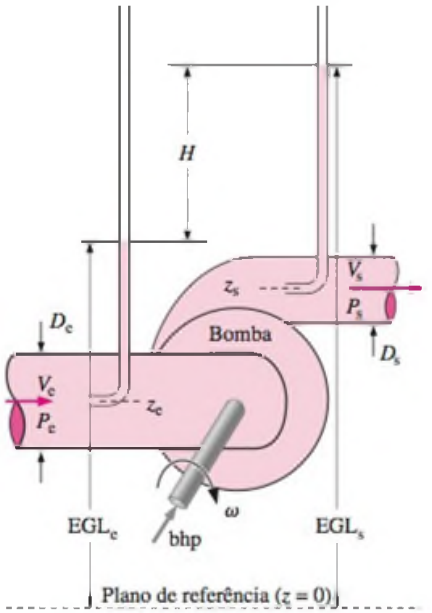


FIGURA 14–7
A *carga líquida* de uma bomba, H, é definida como a variação na carga de Bernoulli entre a entrada e a saída; para um líquido, isso equivale à variação da linha piezométrica da energia, $H = EGL_s - EGL_e$, com relação a algum plano de dados arbitrário; bhp é *a potência no eixo*, a potência externa fornecida para a bomba.

Eficiência da bomba:
$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\dot{W}_{\text{potência da água}}}{\dot{W}_{\text{eixo}}} = \frac{\dot{W}_{\text{potência da água}}}{\text{bhp}} = \frac{\rho g \dot{V} H}{\omega T_{\text{eixo}}} \qquad (14\text{–}5)$$

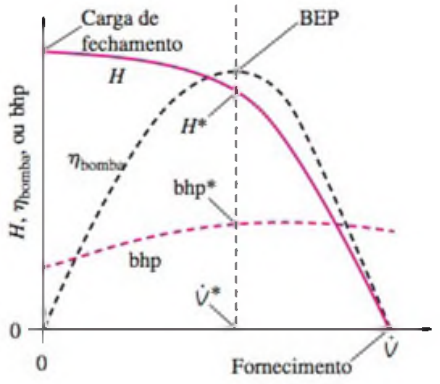


FIGURA 14–8
As *curvas de desempenho de bomba* características para uma bomba centrífuga com pás inclinadas invertidas; as formas curvas dos outros tipos de bombas podem diferir, e as curvas variam com a velocidade de rotação.

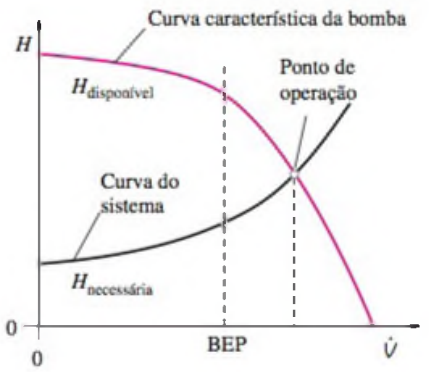


FIGURA 14–9
O *ponto operacional* de um sistema de tubos é estabelecido como a vazão em volume, na qual a curva do sistema e a curva do desempenho da bomba se cruzam.

FIGURA 14–10
As situações nas quais existe mais de um único ponto operacional devem ser evitadas. Em tais casos uma bomba diferente deve ser usada.

Curvas de Desempenho da Bomba e Escolha de uma Bomba para um Sistema de Tubulação

A taxa máxima de escoamento de volume através de uma bomba ocorre quando sua carga líquida é zero, $H = 0$; essa vazão é chamada de **fornecimento livre** da bomba. As condições de fornecimento livre são atingidas quando não há restrição de escoamento na entrada ou saída da bomba — em outras palavras quando não há **carga** na bomba. Neste ponto da operação, $\dot{V}$ é grande, mas H é zero; a eficiência da bomba é zero porque a bomba não está realizando trabalho útil, como fica claro na Equação 14–5. No outro extremo, a **carga de fechamento** é a carga líquida que ocorre quando a vazão em volume é zero, $\dot{V} = 0$, e é atingida quando a porta de saída da bomba é bloqueada. Nessas condições, H é grande, mas é zero; a eficiência da bomba (Equação 14–5) novamente é zero, porque a bomba não está realizando nenhum trabalho útil. Entre esses dois extremos, do fechamento até o fornecimento livre, a carga líquida da bomba pode aumentar um pouco com relação a seu valor de fechamento à medida que a vazão aumenta, mas H finalmente diminui até zero à medida que a vazão volumétrica aumenta até seu valor de fornecimento livre. A eficiência da bomba atinge seu valor máximo em algum ponto entre a condição de fechamento e a condição de fornecimento livre; esse ponto de operação de máxima eficiência é chamado adequadamente de **melhor ponto de eficiência** (BEP) e é indicado por um asterisco (H^*, $\dot{V}^*$, bhp*). As curvas de H, η_{bomba} e bhp como funções de $\dot{V}$ são chamadas de **curvas de desempenho de bomba** (ou *curvas características*, Capítulo 8); as curvas típicas em uma velocidade de rotação são plotadas na Figura 14–8. As curvas de desempenho da bomba mudam com a velocidade de rotação.

É importante entender que *para condições permanentes, uma bomba pode operar apenas ao longo de sua curva de desempenho.* Assim, o ponto operacional de um sistema de tubos é determinado quando os requisitos do sistema (a carga líquida *necessária*) coincidem com o desempenho da bomba (carga líquida *disponível*). Em uma aplicação típica, $H_{\text{necessária}}$ e $H_{\text{disponível}}$ coincidem em um valor exclusivo da vazão — esse é o **ponto operacional** ou **ponto de funcionamento** do sistema.

O ponto operacional constante de um sistema de tubos é estabelecido com a vazão volumétrica, na qual $H_{\text{necessária}} = H_{\text{disponível}}$.

Para determinado sistema de tubos com suas perdas maiores e menores, variações de elevação etc., a carga líquida necessária *aumenta* com a vazão em volume. Por outro lado, a carga líquida disponível da maioria das bombas *diminui* com a vazão, como na Figura 14–8, pelo menos na maioria de seu intervalo operacional recomendado. Assim, a curva de sistema e a curva de desempenho da bomba se cruzam como mostra a Figura 14–9, e isso estabelece o ponto operacional. Com sorte, o ponto operacional está em ou próximo do ponto de melhor eficiência da bomba. Na maioria dos casos, porém, como ilustra a Figura 14–9, a bomba não funciona com sua eficiência ideal. Se a eficiência é importante, a bomba deve ser selecionada com cuidado (ou então uma nova bomba deve ser projetada), para que o ponto operacional esteja o mais próximo possível do ponto de melhor eficiência. Em alguns casos pode ser possível alterar a velocidade de rotação do eixo, para que uma bomba existente possa operar muito próxima a seu ponto de projeto (o ponto de melhor eficiência).

Existem situações nas quais a curva do sistema e a curva do desempenho da bomba se cruzam em mais de um ponto operacional. Isso pode ocorrer quando uma bomba que tem uma inclinação em sua curva de desempenho da carga líquida é comparada a um sistema que tem uma curva de sistema relativamente plana, como ilustra a Figura 14–10. Embora raras, tais situações são possíveis e devem ser evitadas, porque o sistema pode "caçar" um ponto operacional, levando a uma situação de escoamento não permanente.

A adequação de um sistema de tubos a uma bomba é um processo relativamente direto, depois que percebemos que o termo para **carga de bomba útil** ($h_{\text{bomba, }u}$) que usamos na forma de carga da equação da energia (Capítulo 5) é igual à *carga líquida* (H) usada neste capítulo. Considere, por exemplo, um sistema geral de tubos com variação de elevação, perdas maiores e menores e aceleração de fluido (Figura 14–11). Começamos solucionando a equação da energia da **carga líquida necessária** $H_{\text{necessária}}$,

$$H_{\text{necessária}} = h_{\text{bomba, }u} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + \cancel{h_{\text{turbina}}} + h_{L,\text{ total}} \qquad (14\text{–}6)$$

na qual consideramos que não haja uma turbina no sistema, embora esse termo possa ser adicionado novamente se necessário. Também incluímos os fatores de correção da energia cinética na Equação 14–6 para aumentar a exatidão, embora seja comum na indústria das turbomáquinas ignorá-los (α_1 e α_2 são vistos como unidade, uma vez que o escoamento é turbulento).

A Equação 14–6 é avaliada da entrada do sistema de tubos (ponto 1 a montante da bomba) para a saída do sistema de tubos (ponto 2 a jusante da bomba). A Equação 14–6 confirma nossa intuição, porque ela nos diz que a carga útil da bomba fornecida ao fluido realiza quatro procedimentos:

- Aumenta a *pressão estática* do fluido do ponto 1 até o ponto 2 (primeiro termo da direita).
- Aumenta a *pressão dinâmica* (energia cinética) do fluido do ponto 1 até o ponto 2 (segundo termo da direita).
- Aumenta a *elevação* (energia potencial) do fluido do ponto 1 até o ponto 2 (terceiro termo da direita).
- Supera as *perdas irreversíveis de carga* no sistema de tubos (o último termo da direita).

Em um sistema geral, as variações da pressão estática, da pressão dinâmica e da elevação podem ser positivas ou negativas, enquanto as perdas de carga irreversíveis *sempre* são positivas. Em muitos problemas da engenharia mecânica e civil nos quais o fluido é um líquido, o termo da elevação é importante, mas quando o fluido é um gás, tal como nos problemas que envolvem ventilação e controle da poluição do ar, o termo da elevação quase sempre é desprezível.

Para encontrar uma bomba para um sistema, e para determinar o ponto operacional, equacionamos $H_{\text{necessária}}$ na Equação 14–6 como $H_{\text{disponível}}$, que é a carga líquida (em geral conhecida) da bomba como função da vazão volumétrica.

Ponto operacional: $$H_{\text{necessária}} = H_{\text{disponível}} \qquad (14\text{–}7)$$

A situação mais comum é aquela na qual um engenheiro seleciona uma bomba mais potente do que a realmente necessária. Assim, a vazão em volume através do sistema de tubulação é um pouco maior do que o requerido, e uma válvula ou abafador é instalada na linha para que a vazão possa ser diminuída se for preciso.

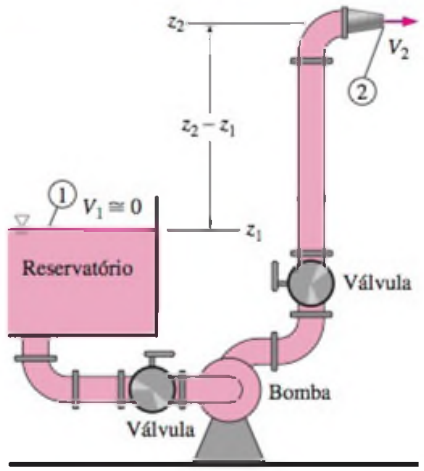


FIGURA 14–11
A Equação 14–6 enfatiza o papel de uma bomba em um sistema de tubos, ou seja, ela aumenta (ou diminui) a pressão estática, a pressão dinâmica e a elevação do fluido e supera as perdas irreversíveis.

EXEMPLO 14–1 Ponto Operacional de um Ventilador em um Sistema de Ventilação

Um *sistema de ventilação local* (tampa e duto de exaustão) é usado para remover o ar e os contaminantes produzidos por uma operação de limpeza a seco (Figura 14–12). O duto é circular e construído de aço galvanizado com costuras longitudinais e juntas a cada 30 pol (0,76 m). O diâmetro interno (ID) do duto é D = 9,06 pol (0,230 m), e seu comprimento total é L = 44,0 pés (13,4 m). Existem cinco cotovelos CD3-9 ao longo do duto. A altura da rugosidade equivalente desse duto é 0,15 mm, e cada cotovelo tem um coeficiente de perda (local) menor de $K_L = C_0 = 0{,}21$. Observe a notação C_0 para o coeficiente de perda menor, normalmente usada na indústria da ventilação (ASHRAE, 2001).

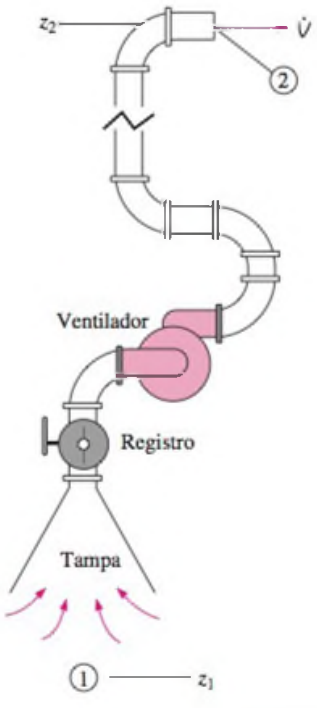


FIGURA 14–12
O sistema de ventilação local do Exemplo 14–1, mostrando o ventilador e todas as perdas menores.

TABELA 14–1

Os dados de desempenho do fabricante para o ventilador do Exemplo 14–1*

$\dot{V}$, cfm	$(\delta P)_{\text{ventilador}}$, polegadas H_2O
0	0,90
250	0,95
500	0,90
750	0,75
1000	0,40
1200	0,0

* Observe que os dados de elevação da pressão estão listados como polegadas de *água*, embora o *ar* seja o fluido. Essa é prática comum na indústria da ventilação.

Para garantir a ventilação adequada, a vazão em volume mínima necessária através do duto é $\dot{V} = 600$ cfm (pé cúbico por minuto) ou 0,283 m³/s a 25°C. Segundo o fabricante da tampa o coeficiente de perda na entrada da tampa 1,3 com base na velocidade do duto. Quando o abafador está totalmente aberto, seu coeficiente de perda é de 1,8. Um ventilador centrífugo com diâmetros de entrada e saída de 9,0 pol está disponível. Os dados de desempenho listados pelo fabricante são mostrados na Tabela 14–1. Preveja o ponto de operação desse sistema de ventilação local, e desenhe um gráfico da elevação de pressão do ventilador necessária e disponível como funções da vazão em volume. O ventilador selecionado é adequado?

SOLUÇÃO Devemos estimar o ponto operacional de determinado ventilador e do sistema de dutos e representar graficamente a elevação de pressão do ventilador necessária e disponível como funções da vazão em volume. Em seguida, devemos determinar se o ventilador selecionado é adequado.

Hipóteses **1** O escoamento é estável. **2** A concentração dos contaminantes do ar é baixa; as propriedades do fluido são apenas aquelas do ar. **3** O escoamento na saída é o escoamento de tubo turbulento completamente desenvolvido com $\alpha = 1{,}05$.

Propriedades Para o ar a 25°C, $\nu = 1{,}562 \times 10^{-5}$ m²/s e $\rho = 1{,}184$ kg/m³. A pressão atmosférica padrão é $P_{\text{atm}} = 101{,}3$ kPa.

Análise Aplicamos a equação da energia permanente na forma de carga (Equação 14–6) do ponto 1 na região do ar estagnado da sala até o ponto 2 da saída do duto,

$$H_{\text{necessária}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g} + \underbrace{(z_2 - z_1)}_{\text{desprezível para os gases}} + h_{L,\text{ total}} \qquad (1)$$

Na Equação 1 podemos ignorar a velocidade do ar no ponto 1, uma vez que ela foi selecionada (com critério) suficientemente longe da entrada da tampa, para que o ar seja quase estagnado. No ponto 1 P_1 é igual a P_{atm}, e no ponto 2 P_2 também é igual a P_{atm}, uma vez que o jato é descarregado para o ar exterior no telhado do prédio. Assim, os termos de pressão se cancelam e a Equação 1 se reduz a

Carga líquida necessária: $$H_{\text{necessária}} = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{L,\text{ total}} \qquad (2)$$

A perda de carga total da Equação 2 é uma combinação de perdas maiores e menores e depende da vazão volumétrica. Como o diâmetro do duto é constante

Perda de carga irreversível total: $$h_{L,\text{ total}} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} \qquad (3)$$

O fator de rugosidade adimensionais é $\varepsilon/D = (0{,}15\text{ mm})/(230\text{ mm}) = 6{,}52 \times 10^{-4}$. O número de Reynolds do ar que escoa através do duto é

Número de Reynolds: $$\text{Re} = \frac{DV}{\nu} = \frac{D}{\nu}\frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4\dot{V}}{\nu\pi D} \qquad (4)$$

O número de Reynolds varia com a vazão em volume. À vazão mínima necessária, a velocidade do ar através do duto é $V = V_2 = 6{,}81$ m/s e o número de Reynolds é

$$\text{Re} = \frac{4(0{,}283\text{ m}^3/\text{s})}{(1{,}562 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s})\pi(0{,}230\text{ m})} = 1{,}00 \times 10^5$$

No diagrama de Moody (ou na equação de Colebrook) desse número de Reynolds e fator de rugosidade, o fator de atrito é $f = 0{,}0209$. A soma de todos os coeficientes de perda menores é

Perdas menores: $$\sum K_L = 1{,}3 + 5(0{,}21) + 1{,}8 = 4{,}15 \qquad (5)$$

Substituindo esses valores à vazão mínima necessária na Equação 2, a carga líquida necessária do ventilador à vazão mínima é

$$H_{\text{necessária}} = \left(\alpha_2 + f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$= \left(1{,}05 + 0{,}0209\,\frac{13{,}4\text{ m}}{0{,}230\text{ m}} + 4{,}15\right)\frac{(6{,}81\text{ m/s})^2}{2(9{,}81\text{ m/s}^2)} = 15{,}2\text{ m de ar} \qquad (6)$$

Observe que a carga é expressa naturalmente em unidades de altura de coluna equivalente do fluido bombeado, que neste caso é o ar. Convertemos em uma altura de coluna equivalente de *água* multiplicando a relação entre a densidade do ar e a densidade da água

$$H_{\text{necessária, polegadas de água}} = H_{\text{necessária, ar}}\,\frac{\rho_{\text{ar}}}{\rho_{\text{água}}}$$

$$= (15{,}2\text{ m})\,\frac{1{,}184\text{ kg/m}^3}{998{,}0\text{ kg/m}^3}\left(\frac{1\text{ pol}}{0{,}0254\text{ m}}\right)$$

$$= 0{,}709\text{ polegada de água} \qquad (7)$$

Repetimos os cálculos com diversos valores de vazão em volume, e comparamos com a carga líquida disponível do ventilador da Figura 14–13. O ponto de operação está a uma vazão em volume de cerca de **650 cfm**, à qual a carga líquida necessária e disponível é igual a cerca de **0,83 polegada de água**. Concluímos que **o ventilador selecionado é mais do que adequado para o trabalho.**

Discussão O ventilador comprado é um pouco mais poderoso do que o necessário, resultando em uma vazão mais alta do que o necessário. A diferença é pequena e aceitável; a válvula de borboleta do abafador poderia ser parcialmente fechada para reduzir a vazão até 600 cfm se necessário. Por questões de segurança, sem dúvida é melhor superdimensionar do que subdimensionar um ventilador usado com um sistema de controle de poluição do ar.

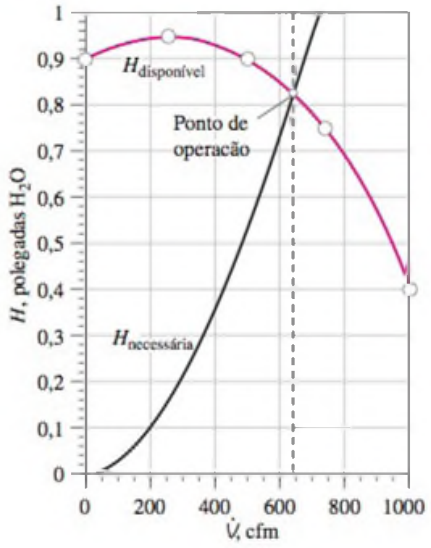


FIGURA 14–13
Carga líquida como função da vazão em volume para o sistema de ventilação do Exemplo 14–1. O ponto no qual os valores disponível e necessário de H se cruzam é o ponto de operação.

É prática comum na indústria das bombas oferecer várias opções de diâmetro do rotor para uma única carcaça de bomba. Existem vários motivos para isso: (1) para economizar custos de fabricação, (2) para permitir o aumento de capacidade pela simples substituição do rotor, (3) para padronizar as bases da instalação e (4) para permitir a reutilização do equipamento em uma aplicação diferente. Ao representarem graficamente o desempenho dessa "família" de bombas, os fabricantes de bombas não projetam curvas separadas de H, η_{bomba}, e o bhp de cada diâmetro de rotor na forma representada na Figura 14–8. Em vez disso, eles preferem combinar as curvas de desempenho de toda uma família de bombas com diâmetros de rotor diferente em um único gráfico (Figura 14–14). Especificamente, eles projetam uma curva de H como função de $\dot{V}$ para cada diâmetro de rotor da mesma forma que na Figura 14–8, mas criam *linhas de curvas* com eficiência constante, desenhando curvas suaves através dos pontos que têm o mesmo valor de η_{bomba} para as diversas opções de diâmetro do rotor. As linhas de curva de bhp constante geralmente são desenhadas no mesmo gráfico e de forma semelhante. A Figura 14–15 oferece um exemplo para uma família de bombas centrífugas fabricadas pela Taco, Inc. Neste caso, cinco diâmetros de rotor estão disponíveis, mas uma carcaça de bomba idêntica é usada para todas as cinco opções. Como foi visto na Figura 14–15, os fabricantes de bomba nem sempre projetam graficamente as curvas de desempenho de suas bombas totalmente até a entrega. Isso acontece porque as bombas em geral não são operadas nesse ponto devido aos baixos valores da carga líquida e da eficiência. Se são necessários valores mais altos da vazão e da carga líquida, o cliente deve usar o próximo maior tamanho de carcaça, ou considerar o uso de bombas adicionais em série ou em paralelo.

Fica claro pelo gráfico de desempenho da Figura 14–15 que, para determinada carcaça de bomba, quanto maior o rotor, mais alta a eficiência máxima. Por que

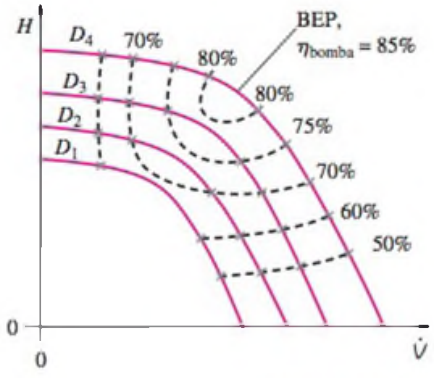


FIGURA 14–14
Curvas de desempenho de bombas normais para uma *família* de bombas centrífugas com mesmo diâmetro de carcaça, mas com diâmetros de rotor diferentes.

então alguém compraria uma bomba de rotor menor? Para respondermos a essa pergunta, devemos reconhecer que a aplicação do cliente exige determinada combinação entre vazão e carga líquida. Se os requisitos coincidem com o diâmetro de determinado rotor, talvez seja mais econômico sacrificar a eficiência da bomba para atender esses requisitos.

EXEMPLO 14–2 Seleção do Tamanho do Rotor da Bomba

Uma operação de lavagem em uma usina de energia exige 370 galões por minuto (gpm) de água. A carga líquida necessária é de cerca de 24 pés nessa vazão. Uma engenheira recém-contratada examina alguns catálogos e resolve comprar a opção de rotor de 8,25 pol da bomba centrífuga da Série FI, Modelo 4013 da Taco, mostrada na Figura 14–15. Ela calcula que se a bomba operar a 1.160 rpm, como especifica a representação gráfica de desempenho, a curva de desempenho cruzará os 370 gpm a H = 24 pés. O engenheiro-chefe, que é muito preocupado com a eficiência, examina as curvas de desempenho e nota que a eficiência dessa bomba em seu ponto operacional é de apenas 70%. Ele vê que a opção de rotor de 12,75 pol atinge uma eficiência mais alta (cerca de 76,5%) a mesma vazão. Ele observa que uma válvula de estrangulamento pode ser instalada a jusante da bomba para aumentar a carga líquida necessária, para que a bomba opere com sua eficiência mais alta. Ele pede que a engenheira júnior justifique sua opção pelo diâmetro do rotor. Ele pede que ela calcule qual opção de rotor (8,25 pol ou 12,75 pol) precisaria da menor quantidade de eletricidade para operar (Figura 14–16). Execute a comparação e discuta.

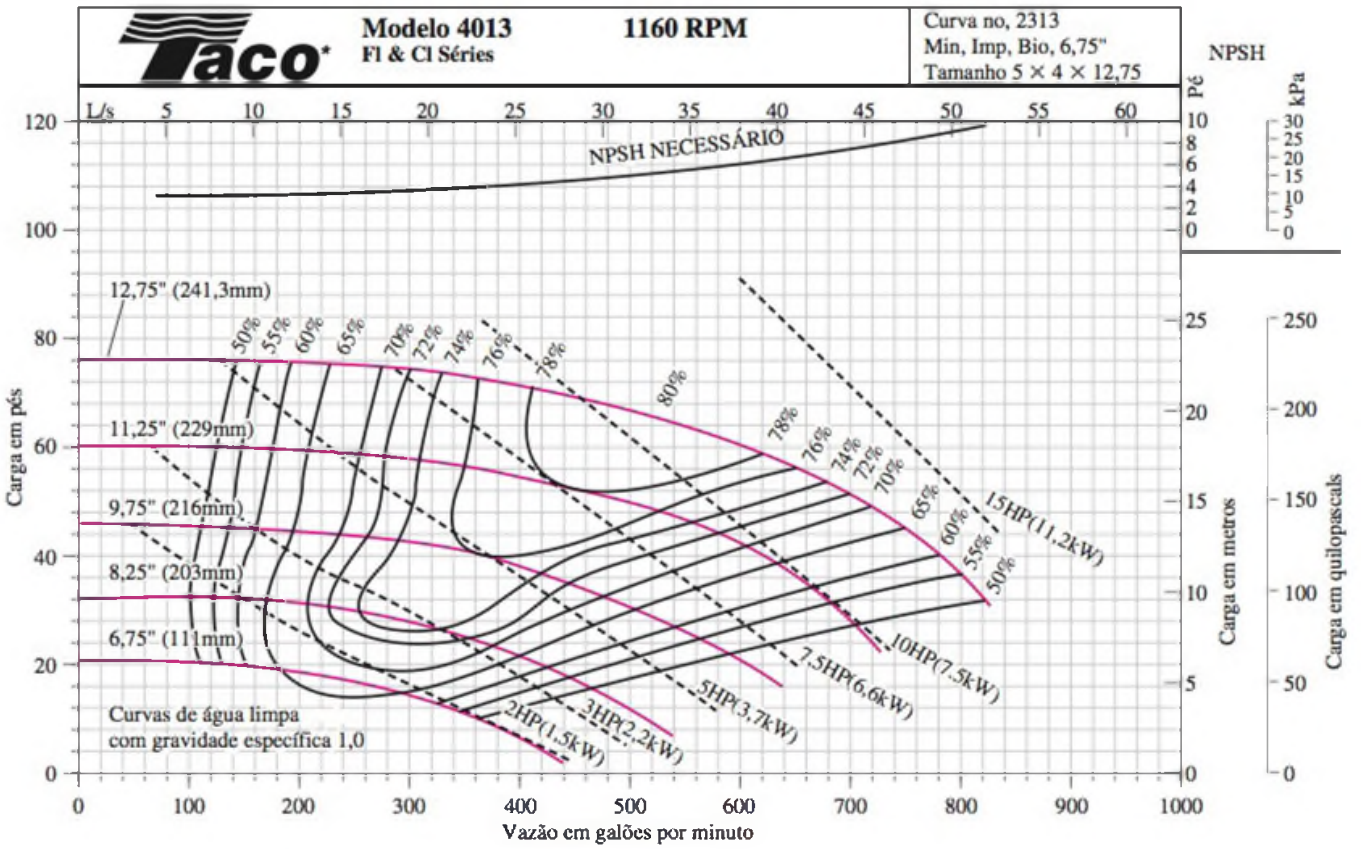


FIGURA 14–15
Representação gráfica de desempenho de um fabricante para uma família de bombas centrífugas. Cada bomba tem a mesma carcaça, mas um diâmetro de rotor diferente.

Cortesia da Taco, Inc., Cranston, RI. Usado com permissão.

SOLUÇÃO Para determinadas vazão e carga líquida, devemos calcular qual tamanho de rotor utiliza a menor quantidade de energia, e devemos discutir nossos resultados.

Hipóteses 1 A água está a 70°F. **2** Os requisitos de escoamento (vazão em volume e carga) são constantes.

Propriedades Para água a 70°F, $\rho = 62{,}30$ lbm/pé^3.

Análise Das curvas da potência no eixo mostradas na representação gráfica de desempenho da Figura 14–15, a engenheira júnior estima que a bomba com menor rotor exija cerca de 3,2 hp do motor. Ela verifica essa estimativa usando a Equação 14–5,

Bhp necessário para a opção de rotor de 8,25 pol:

$$\text{bhp} = \frac{\rho g \dot{V} H}{\eta_{\text{bomba}}} = \frac{(62{,}30\ \text{lbm/pés}^3)(32{,}2\ \text{pés/s}^2)(370\ \text{gal/min})(24\ \text{pés})}{0{,}70}$$

$$\times \left(\frac{0{,}1337\ \text{pé}^3}{\text{gal}}\right)\left(\frac{\text{lbf}}{32{,}2\ \text{lbm} \cdot \text{pés/s}^2}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right)\left(\frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550\ \text{pés} \cdot \text{lbf}}\right) = 3{,}20\ \text{hp}$$

Da mesma forma, a opção do rotor de diâmetro maior exige

Bhp necessário para a opção de rotor de 12,75 pol: bhp = 8,78 hp

usando o ponto de operação daquela bomba, a saber $\dot{V} = 370$ gpm, $H = 72{,}0$ pés e $\eta_{\text{bomba}} = 76{,}5\%$ (Figura 14–15). Sem dúvida, **a opção do rotor de menor diâmetro é a melhor, apesar de sua eficiência menor, porque ela utiliza menos de metade da energia.**

Discussão Embora a bomba com o rotor maior opere a um valor mais alto de eficiência, ela forneceria cerca de 72 pés de carga líquida à vazão necessária. Isso é um exagero, e a válvula de estrangulamento seria requerida para formar a diferença entre essa carga líquida e a carga de escoamento necessária de 24 pés de água. Entretanto, uma válvula de estrangulamento nada mais é do que energia mecânica desperdiçada. Assim, o ganho de eficiência da bomba é mais do que compensado pelas perdas através da válvula de estrangulamento. Se a carga de escoamento ou os requisitos de capacidade aumentarem em algum momento futuro, um rotor maior pode ser comprado para a mesma carcaça.

FIGURA 14–16
Em algumas aplicações, uma bomba menos eficiente da mesma família de bombas pode exigir menos energia para operar. Uma melhor opção ainda seria uma bomba cujo ponto de melhor eficiência ocorresse no ponto de operação necessário da bomba, mas tal bomba nem sempre seria encontrada comercialmente.

Cavitação de Bomba e Carga de Sucção Líquida Positiva

Ao bombear líquidos, é possível que a pressão local dentro da bomba caia abaixo da **pressão de vapor** do líquido, P_v. (P_v também é chamada de **pressão de saturação** P_{sat} e é listada nas tabelas de termodinâmica como uma função da temperatura de saturação.) Quando $P < P_v$, as bolhas cheias de vapor chamadas de **bolhas de cavitação** aparecem. Em outras palavras, o líquido *ferve* localmente, em geral no lado de sucção das pás do rotor giratório onde a pressão é mais baixa (Figura 14–17). Após as bolhas de cavitação se formarem, elas são transportadas através da bomba até regiões nas quais a pressão é mais alta, causando um rápido colapso das bolhas. É esse *colapso* das bolhas que é indesejável, uma vez que ele causa ruído, vibração, eficiência reduzida e, mais importante, danos às pás do rotor. O colapso repetido de bolhas próximo a uma superfície de pá leva à corrosão ou erosão da pá e finalmente a falha catastrófica da pá.

Para evitarmos a cavitação, devemos garantir que a pressão local em toda parte dentro da bomba permaneça *acima* da pressão de vapor. Como a pressão é medida (ou estimada) mais facilmente na entrada da bomba, os critérios de cavitação em geral são especificados na *entrada da bomba*. É útil empregar um parâmetro de escoamento chamado de **carga de sucção positiva líquida (NPSH)**,

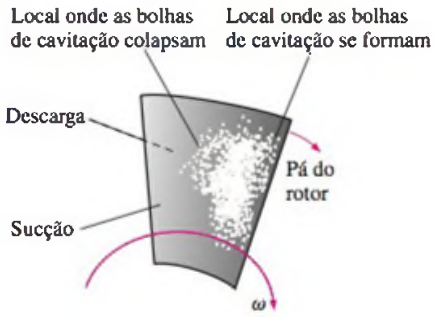


FIGURA 14–17
As bolhas de cavitação que se formam e o colapso no lado de sucção de uma pá de rotor.

definido como *a diferença entre a pressão de estagnação da entrada da bomba e a carga da pressão do vapor*,

Carga de sucção positiva líquida:
$$\text{NPSH} = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}\right)_{\text{entrada da bomba}} - \frac{P_v}{\rho g} \qquad (14\text{–}8)$$

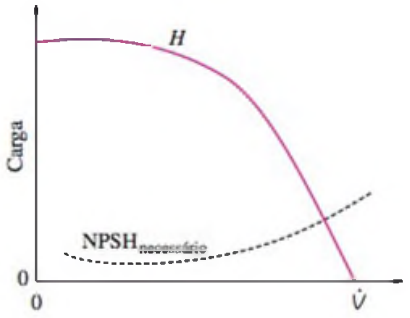


FIGURA 14–18
A curva de desempenho típica na qual a carga líquida e a sucção positiva líquida necessária são representadas graficamente com relação à vazão em volume.

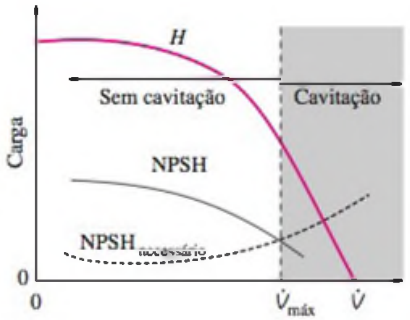


FIGURA 14–19
A vazão em volume com a qual o NPSH real e o NPSH necessário se cruzam representa a taxa máxima de escoamento que pode ser fornecida pela bomba sem a ocorrência de cavitação.

Os fabricantes de bombas avaliam a cavitação de suas bombas em uma instalação de testes, variando a vazão em volume e a pressão de entrada de modo controlado. Especificamente, em determinada vazão e temperatura de líquido, a pressão na entrada da bomba é diminuída lentamente até que a cavitação ocorra em alguma parte dentro da bomba. O valor de NPSH é calculado usando a Equação 14–8 e é registrado nessa condição operacional. O processo se repete a diversas outras vazões, e o fabricante da bomba publica um parâmetro de desempenho chamado de **carga de sucção positiva líquida necessária ($\text{NPSH}_{\text{necessário}}$)**, definido como o *NPSH mínimo necessário para evitar a cavitação na bomba*. O valor medido do $\text{NPSH}_{\text{necessário}}$ varia com a vazão em volume e, portanto, o $\text{NPSH}_{\text{necessário}}$ quase sempre é traçado na mesma curva de desempenho de bomba da carga líquida (Figura 14–18). Quando expresso adequadamente em unidades de carga do líquido que está sendo bombeado, o $\text{NPSH}_{\text{necessário}}$ não depende do tipo de líquido. Entretanto, se a carga de sucção positiva líquida necessária é expressa para determinado líquido em unidades de pressão como pascal ou psi, o engenheiro deve tomar cuidado e converter essa pressão para a altura de coluna equivalente do líquido real que está sendo bombeado. Observe que como o $\text{NPSH}_{\text{necessário}}$ em geral é muito menor do que H ao longo da maior parte da curva de desempenho, ela quase sempre é representada graficamente em um eixo vertical expandido por questões de clareza (consulte a Figura 14–15) ou como linhas de curvas quando mostradas para uma família de bombas. Em geral, o $\text{NPSH}_{\text{necessário}}$ aumenta com a vazão, embora para algumas bombas ela diminua com $\dot{V}$ a vazões baixas, nas quais a bomba não opera com muita eficiência, como está representado na Figura 14–18.

Para garantir que uma bomba não cavite, o NPSH real ou disponível deve ser maior do que o $\text{NPSH}_{\text{necessário}}$ É importante notar que o valor de NPSH varia não apenas com a vazão, mas também com a temperatura do líquido, uma vez que P_v é uma função da temperatura. O NPSH também depende do tipo de líquido que está sendo bombeado, uma vez que há um P_v exclusivo *versus* uma curva T para cada líquido. Como as perdas de carga irreversíveis através do sistema de tubos a montante da entrada *aumentam* com a vazão, a carga da pressão de estagnação na entrada da bomba *diminui* com a vazão. Assim, o valor de NPSH *diminui* com $\dot{V}$, como está representado na Figura 14–19. Identificando a vazão volumétrica na qual as curvas do NPSH e do $\text{NPSH}_{\text{necessário}}$ se cruzam, estimamos a taxa máxima do volume de escoamento que pode ser fornecida à bomba sem cavitação (Figura 14–19).

EXEMPLO 14–3 Vazão Máxima para Evitar Cavitação da Bomba

A opção do rotor de 11,25 pol da bomba centrífuga Série FI, Modelo 4013 da Taco da Figura 14–15 é usada para bombear água a 25°C de um reservatório cuja superfície está 4,0 pés acima da linha central da entrada da bomba (Figura 14–20). O sistema de tubos do reservatório até a bomba consiste em 10,5 pés de tubos de ferro fundido com ID de 4,0 pol e altura de rugosidade interna média de 0,02 pol. Existem várias perdas menores: uma entrada de aresta viva (K_L = 0,5), três cotovelos regulares e uniformes de 90° (K_L = 0,3 cada), e uma válvula de globo com flange totalmente aberta (K_L = 6,0). Estime a vazão em volume máxima (em unidades de gpm) que pode ser bombeada sem cavitação. Se a água fosse mais quente, essa vazão máxima aumentaria ou diminuiria? Por quê? Discuta como você aumentaria a taxa máxima de escoamento evitando a cavitação.

SOLUÇÃO Para determinada bomba e sistema de tubulação devemos estimar a vazão em volume máxima que pode ser bombeada sem cavitação. Também discutimos o efeito da temperatura da água e como podemos aumentar a vazão máxima.

Hipóteses 1 O escoamento é estável. **2** O líquido é incompressível. **3** O escoamento na entrada da bomba é turbulento e totalmente desenvolvido com $\alpha = 1{,}05$.
Propriedades Para a água a $T = 25°C$, $\rho = 997{,}0\ kg/m^3$, $\mu = 8{,}91 \times 10^{-4}\ kg/m \cdot s$ e $P_v = 3{,}169\ kPa$. A pressão atmosférica padrão é $P_{atm} = 101{,}3\ kPa$.
Análise Aplicamos a equação da energia permanente na forma de carga ao longo de uma linha de corrente do ponto 1 na superfície do reservatório até o ponto 2 na entrada da bomba

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, u}} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, e}} + h_{L,\text{ total}} \tag{1}$$

Na Equação 1 ignoramos a velocidade da água na superfície do reservatório ($V_1 \cong 0$). Não existe turbina no sistema de tubos. Da mesma forma, embora exista uma bomba no sistema, não existe bomba entre os pontos 1 e 2 e, portanto, o termo de carga da bomba também cai. Solucionamos a Equação 1 para $P_2/\rho g$, que é a pressão de entrada da bomba expressa como uma carga,

Carga de pressão na entrada da bomba:

$$\frac{P_2}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g} + (z_1 - z_2) - \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} - h_{L,\text{ total}} \tag{2}$$

Observe que na Equação 2, reconhecemos que $P_1 = P_{atm}$, uma vez que a superfície do reservatório está exposta à pressão atmosférica.
A carga de sucção positiva líquida disponível na entrada da bomba é obtida da Equação 14–8. Após a substituição da Equação 2 obtemos

NPSH disponível:

$$\text{NPSH} = \frac{P_{atm} - P_v}{\rho g} + (z_1 - z_2) - h_{L,\text{ total}} - \frac{(\alpha_2 - 1)V_2^2}{2g} \tag{3}$$

Como conhecemos P_{atm}, P_v e a diferença de elevação, tudo o que resta é estimar a perda de carga irreversível total através do sistema de tubos, a qual depende da vazão em volume. Como o diâmetro do tubo é constante

Perda de carga irreversível:

$$h_{L,\text{ total}} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} \tag{4}$$

O restante do problema é mais fácil de resolver em um computador. Para determinada vazão em volume, calculamos a velocidade V e o número de Reynolds Re. Com Re e a rugosidade de tubo conhecida, usamos o diagrama de Moody (ou a equação de Colebrook) para obter o fator de atrito f. A soma de todos os coeficientes de perdas menores é

Perdas menores:

$$\sum K_L = 0{,}5 + 3 \times 0{,}3 + 6{,}0 = 7{,}4 \tag{5}$$

Fazemos um cálculo manual para ilustrar. $\dot{V} = 400$ gpm $(0{,}02523\ m^3/s)$, a velocidade média da água através do tubo é

$$V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4(0{,}02523\ m^3/s)}{\pi(4{,}0\ pol)^2}\left(\frac{1\ pol}{0{,}0254\ m}\right)^2 = 3{,}112\ m/s \tag{6}$$

que produz um número de Reynolds de $\text{Re} = \rho VD/\mu = 3{,}538 \times 10^5$. Nesse número de Reynolds, e com o fator de rugosidade $\varepsilon/D = 0{,}005$, a equação de Colebrook resulta em $f = 0{,}0306$. Substituindo as propriedades dadas, juntamente com f, D, L e as Equações 4, 5 e 6 na Equação 3, calculamos a carga de sucção positiva líquida disponível a essa vazão

$$\begin{aligned}\text{NPSH} &= \frac{(101.300 - 3169)\ N/m^2}{(997{,}0\ kg/m^3)(9{,}81\ m/s^2)}\left(\frac{kg \cdot m/s^2}{N}\right) + 1{,}219\ m \\ &\quad - \left(0{,}0306\frac{10{,}5\ pés}{0{,}3333\ pé} + 7{,}4 - (1{,}05 - 1)\right)\frac{(3{,}112\ m/s)^2}{2(9{,}81\ m/s^2)} \\ &= 7{,}148\ m = 23{,}5\ pés\end{aligned} \tag{7}$$

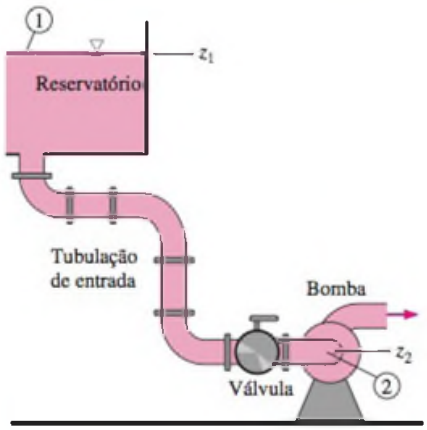


FIGURA 14–20
Sistema de tubos de entrada do reservatório (1) para a entrada da bomba (2) do Exemplo 14–3.

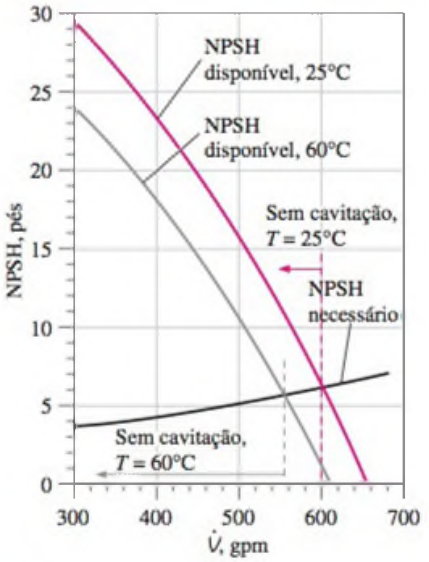


FIGURA 14–21
A carga de sucção positiva como função da vazão volumétrica para a bomba do Exemplo 14–3 a duas temperaturas. A cavitação deve ocorrer a vazões maiores do que o ponto no qual os valores disponível e necessário do NPSH se cruzam.

A carga de sucção positiva líquida necessária é obtida da Figura 14–15. Em nossa vazão de exemplo de 400 gpm, o $NPSH_{necessário}$ está acima de 4,0 pés. Como o NPSH real é muito mais alta do que isso, não precisamos nos preocupar com a cavitação nessa vazão. Utilizamos o EES (ou uma planilha eletrônica) para calcular a NPSH como função da vazão em volume, e os resultados estão representados graficamente na Figura 14–21. Esse gráfico deixa claro que a 25°C a **cavitação ocorre a vazões acima de aproximadamente 600 gpm** — próximo do fornecimento livre.

Se a água fosse mais quente do que 25°C, a pressão do vapor aumentaria, a viscosidade diminuiria e a densidade diminuiria ligeiramente. Os cálculos são repetidos a $T = 60°C$, na qual $\rho = 983{,}3\ kg/m^3$, $\mu = 4{,}67 \times 10^{-4}\ kg/m \cdot s$ e $P_v = 19{,}94\ kPa$. Os resultados também estão representados graficamente na Figura 14–21, onde vemos que **a vazão em volume máxima sem cavitação diminui com a temperatura** (até cerca de 555 gpm a 60°C). Essa diminuição confirma nossa intuição, uma vez que a água mais quente já está mais próxima de seu ponto de ebulição desde o começo.

Finalmente, como podemos aumentar a taxa máxima de escoamento? *Qualquer modificação que aumente o NPSH disponível ajuda.* Podemos elevar a altura da superfície do reservatório (aumentar a carga hidrostática). Podemos projetar novamente a tubulação, para que apenas um cotovelo seja necessário, e substituir a válvula de globo por uma válvula de retenção de esfera (para diminuir as perdas menores). Podemos aumentar o diâmetro do tubo e diminuir a rugosidade da superfície (para diminuir as perdas maiores). Neste problema em particular, as perdas menores têm a maior influência, mas em muitos problemas, as perdas maiores são significativas e o aumento do diâmetro do tubo é mais efetivo. Esse é outro motivo pelo qual muitas bombas centrífugas têm um diâmetro de entrada maior do que o diâmetro de saída.

Discussão Observe que o $NPSH_{necessário}$ não depende da temperatura da água, mas que o NPSH real ou disponível aumenta com a temperatura (Figura 14–21).

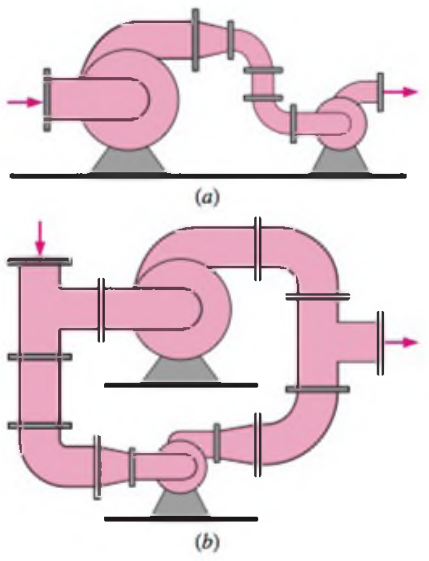


FIGURA 14–22
A organização de duas bombas bastante diferentes (*a*) em série ou (*b*) em paralelo pode na verdade levar a problemas.

Bombas em Série e Paralelo

Ao enfrentar a necessidade de aumentar a vazão volumétrica ou a elevação da pressão em um nível pequeno, você deve considerar a inclusão de uma bomba pequena adicional em série ou em paralelo com a bomba original. Embora a organização em série ou em paralelo seja aceitável para algumas aplicações, a organização de bombas *dissimilares* em série ou em paralelo pode levar a problemas, particularmente se uma bomba for muito maior do que a outra (Figura 14–22). Um melhor procedimento é aumentar a velocidade e/ou potência de entrada (motor elétrico maior) original da bomba, substituir o rotor por outro maior ou substituir toda a bomba por outra maior. A lógica dessa decisão pode ser vista nas curvas de desempenho da bomba, considerando que a *elevação da pressão e a vazão em volume estão relacionadas.* A organização de bombas diferentes em série pode criar problemas, porque a vazão em volume através de cada bomba deve ser igual, mas a elevação geral da pressão é igual à elevação da pressão de uma bomba mais a de outra. Se as bombas tiverem curvas de desempenho diferentes, a bomba menor pode ser forçada a operar além da vazão de fornecimento livre, modo de operação no qual ela age como uma *perda* de carga, reduzindo a taxa total de escoamento do volume. A organização de bombas diferentes em paralelo pode criar problemas, porque a elevação geral da pressão deve ser igual, mas a vazão em volume líquida é a sua soma através de cada ramal. Se as bombas não forem dimensionadas adequadamente, a bomba menor pode não conseguir processar a grande carga imposta a ela, e o escoamento em seu ramal poderia na verdade ser *revertido;* isso reduziria inadvertidamente a elevação geral da pressão. Em ambos os casos, a potência fornecida à bomba menor seria desperdiçada.

Tendo essas precauções em mente, existem muitas aplicações nas quais duas ou mais bombas semelhantes (em geral idênticas) são operadas em série ou em paralelo. Quando operadas em *série,* a carga líquida combinada é simplesmente a soma das cargas líquidas de cada bomba (a determinada vazão em volume).

Carga líquida combinada para n *bombas em série:* $$H_{\text{combinada}} = \sum_{i=1}^{n} H_i \qquad (14\text{–}9)$$

A Equação 14–9 é ilustrada na Figura 14–23 para três bombas em série. Neste exemplo, a bomba 3 é a mais forte e a bomba 1, a mais fraca. A carga de fechamento das três bombas combinadas em série é igual à soma da carga de fechamento de cada bomba individual. Para valores baixos da vazão em volume, a carga líquida das três bombas em série é igual a $H_1 + H_2 + H_3$. Além do fornecimento livre da bomba 1 (à direita da primeira linha cinza tracejada vertical da Figura 14–23), a *bomba 1 deve ser fechada e desviada*. Caso contrário ela estaria funcionando além de seu ponto de operação máximo projetado, e a bomba ou seu motor poderiam se danificar. Além disso, a carga líquida através dessa bomba seria *negativa* como já foi discutido, contribuindo para uma perda líquida do sistema. Com a bomba 1 desviada, a carga líquida combinada torna-se $H_2 + H_3$. Da mesma forma, além do fornecimento livre da bomba 2, aquela bomba também deveria ser fechada e desviada, e a carga líquida combinada seria igual a H_3 sozinha, como está indicado à direita da segunda linha cinza tracejada vertical na Figura 14–23. Nesse caso, o fornecimento livre combinado é igual àquele da bomba 3 sozinha, considerando que as duas outras bombas foram desviadas.

Quando duas ou mais bombas idênticas (ou semelhantes) são operadas em *paralelo,* suas vazões individuais (em vez das cargas líquidas) são somadas

Capacidade combinada para n *bombas em paralelo:* $$\dot{V}_{\text{combinada}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{V}_i \qquad (14\text{–}10)$$

Como exemplo, considere as três *mesmas* bombas, mas organizadas em paralelo e não em série. A curva de desempenho das bombas combinadas é mostrada na Figura 14–24. O fornecimento livre das três bombas combinadas é igual à soma do fornecimento livre de cada uma delas. Para valores baixos de carga líquida, a capacidade das três bombas em paralelo é igual a $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$. Acima da carga de fechamento da bomba 1 (acima da primeira linha cinza tracejada horizontal da Figura 14–24), a *bomba 1 deve ser fechada e seu ramal, bloqueado* (com uma válvula). Caso contrário ela estaria funcionando além de seu ponto de operação máximo projetado, e a bomba ou seu motor poderiam se danificar. Além disso, a vazão em volume através dessa bomba seria *negativa* como já foi discutido, contribuindo para uma perda líquida do sistema. Com a bomba 1 fechada e bloqueada, a capacidade combinada torna-se $\dot{V}_2 + \dot{V}_3$. Da mesma forma, acima da carga de fechamento da bomba 2, essa bomba também deve ser fechada e bloqueada. A capacidade combinada é igual a $\dot{V}_3$ apenas, como foi indicado acima, a segunda linha cinza tracejada horizontal da Figura 14–24. Nesse caso, a carga de fechamento

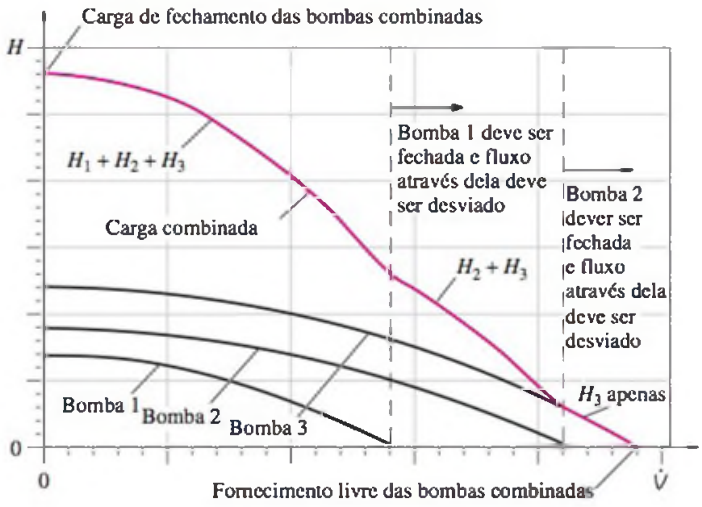


FIGURA 14–23
A curva de desempenho da bomba (azul) para três bombas diferentes em série. Para valores baixos de vazão em volume, a carga líquida combinada é igual à soma da carga líquida de cada bomba propriamente dita. Entretanto, para evitar danos à bomba e perda da carga líquida combinada, toda bomba individual deve ser fechada e desviada a vazões maiores do que aquela do fornecimento livre da bomba, indicada pelas linhas cinzas tracejadas verticais. Se as três bombas fossem idênticas, seria preciso desligar uma das bombas, uma vez que o fornecimento livre de cada bomba ocorreria a mesma vazão em volume.

combinada é igual àquela da bomba 3 sozinha, considerando que as duas outras bombas estão fechadas e seus ramais bloqueados.

Na prática, várias bombas podem ser combinadas em paralelo para fornecer uma vazão em volume grande (Figura 14–25). Os exemplos incluem os bancos de bombas utilizados para circulação de água em torres de arrefecimento e circuitos de água gelada (Wright, 1999). Idealmente todas as bombas devem ser idênticas para que não precisemos nos preocupar em fechar nenhuma delas (Figura 14–24). Da mesma forma, é sensato instalar válvulas de controle em cada ramal para que, quando uma bomba precisar ser fechada (para manutenção ou quando a vazão necessária for baixa), o retorno através da bomba seja evitado. Observe que as válvulas extras e a tubulação necessária para uma rede de bombas paralelas aumentam as perdas de carga do sistema. Assim, o desempenho geral das bombas combinadas é prejudicado.

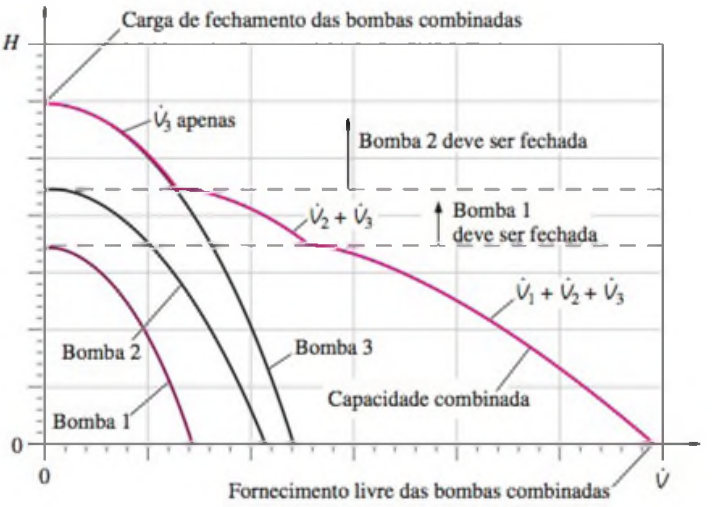


FIGURA 14–24
A curva de desempenho da bomba (azul) para três bombas em paralelo. Para um valor baixo de carga líquida, a capacidade combinada é igual à soma da capacidade de cada bomba propriamente dita. Entretanto, para evitar danos à bomba e perda da capacidade combinada, toda bomba individual deve ser fechada a cargas líquidas maiores do que a carga de fechamento da bomba, como indicam as linhas cinza tracejadas horizontais. O ramal daquela bomba também deve ser bloqueado com uma válvula para evitar o escoamento reverso. Se as três bombas fossem idênticas, não seria preciso desligar nenhuma das bombas, uma vez que a carga de fechamento de cada uma delas ocorreria a mesma carga líquida.

FIGURA 14–25
Várias bombas idênticas quase sempre funcionam em uma configuração paralela, para que uma vazão em volume grande possa ser atingida quando necessário. Três bombas paralelas são mostradas.
Cortesia da Goulds Pumps, ITT Industries. Usada com permissão.

Bombas de Deslocamento Positivo

As pessoas criaram inúmeras bombas de deslocamento positivo através dos séculos. Em cada projeto, o fluido é sugado para um volume em expansão e, em seguida, é empurrado à medida que aquele volume se contrai, mas o mecanismos que causa essa variação do volume difere bastante entre os diversos projetos. Alguns projetos são bastante simples, como a *bomba peristáltica* de tubo flexível (Figura 14–26*a*) que comprime um tubo com pequenas rodas, empurrando o fluido. (Esse mecanismo é mais ou menos semelhante ao movimento peristáltico de nosso esôfago ou intestinos, em que os músculos em vez das rodas comprimem o tubo.) Outros são mais complexos, usando cames giratórios com lóbulos sincronizados (Figura 14–26*b*), engrenagens com travamento (Figura 14–26*c*) ou parafusos (Figura 14–26*d*). As bombas de deslocamento positivo são ideais para aplicações de alta pressão, como líquidos viscosos de bombeamento ou pastas fluidas espessas, e para aplicações nas quais quantidades precisas de líquido devem ser distribuídas ou medidas, como nas aplicações médicas.

Para ilustrarmos a operação de uma bomba por deslocamento positivo, fazemos um diagrama das quatro fases de metade de um ciclo de uma **bomba giratória** simples com dois lóbulos em cada rotor (Figura 14–27). Os dois rotores são sincronizados por uma caixa de engrenagem externa, de modo que girem a mesma velocidade angular, mas em direções opostas. No diagrama, o rotor superior gira na direção horária e o rotor inferior, na direção anti-horária, sugando fluido da esquerda e descarregando-o na direita. Um ponto branco é desenhado em um lobo de cada rotor para ajudá-lo a visualizar a rotação.

Existem lacunas entre os rotores e o corpo e entre os lóbulos dos próprios rotores, como está ilustrado (de maneira exagerado) na Figura 14–27. O fluido pode vazar através dessas lacunas, reduzindo a eficiência da bomba. Os fluidos de alta viscosidade não podem penetrar nas lacunas tão facilmente; assim, a carga

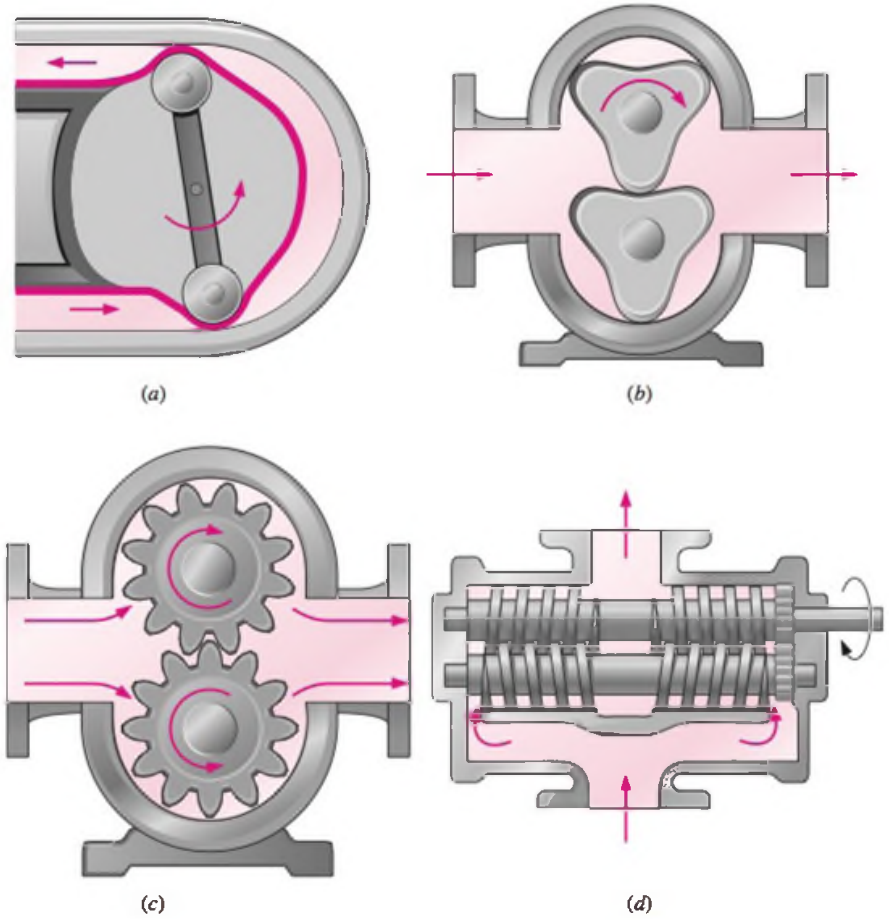


FIGURA 14–26
Exemplos de bombas de deslocamento positivo: (*a*) bomba peristáltica de tubo flexível, (*b*) bomba giratória de três lóbulos, (*c*) bomba de engrenagem e (*d*) bomba com parafuso duplo.

Adaptado de F. M. White, Mecânica dos Fluidos, 4ª ed. Copyright © 2003. The McGraw-Hill Companies, Inc. Com permissão.

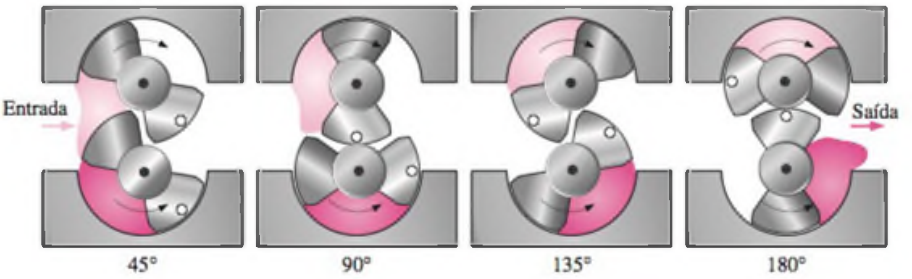


FIGURA 14–27
Quatro fases (um oitavo de uma volta adiante) na operação de uma bomba giratória de dois lóbulos, um tipo de bomba por deslocamento positivo. A região azul-claro representa uma parte do fluido empurrado através do rotor superior, enquanto a região azul-escuro representa uma parte do fluido empurrada através do rotor inferior, que gira na direção oposta. O escoamento se dá da esquerda para a direita.

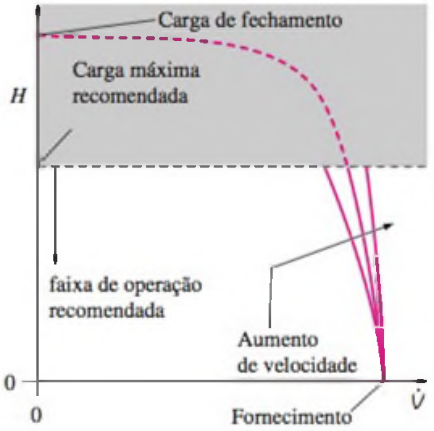


FIGURA 14–28
Comparação entre as curvas de desempenho de uma bomba giratória que opera a mesma velocidade, mas com fluidos de várias viscosidades. Para evitar sobrecarga do motor, a bomba não deve ser operada dentro da região sombreada.

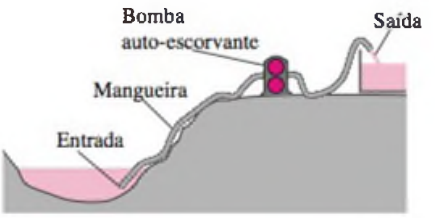


FIGURA 14–29
Uma bomba que pode elevar um líquido mesmo quando a bomba em si está "vazia" é chamada de bomba auto-escorvante.

líquida (e a eficiência) de uma bomba giratória em geral *aumenta* com a viscosidade do fluido, como mostra a Figura 14–28. Esse é um motivo pelo qual as bombas centrífugas (e outros tipos de bombas de deslocamento positivo) são uma boa opção para bombear fluidos altamente viscosos e pastas fluidas. Elas são usadas, por exemplo, como bombas de óleo do motor de automóveis e na indústria dos alimentos para bombear os líquidos pesados como molho, pasta de tomate e chocolate, e pastas fluidas como sopas.

A curva de desempenho da bomba (carga líquida *versus* capacidade) de uma bomba giratória é quase vertical em todo o seu intervalo operacional recomendado, uma vez que a capacidade é bastante constante independentemente da carga a determinada velocidade rotacional (Figura 14–28). Entretanto, como indica a linha azul tracejada da Figura 14–28, a valores muito altos de carga líquida, que correspondem a pressões de saída da bomba muito altas, os vazamentos podem se tornar mais sérios, mesmo para fluidos com viscosidade alta. Além disso, o motor que faz a bomba funcionar não pode superar o grande torque causado por essa pressão de saída alta, e começa a perder velocidade ou sofrer sobrecarga, o que pode queimá-lo. Assim, os fabricantes de bombas centrífugas não recomendam a operação da bomba acima de determinada carga líquida máxima, que em geral está bem abaixo da carga de fechamento. As curvas de desempenho da bomba fornecidas pelo fabricante nem sempre mostram o desempenho da bomba fora do intervalo operacional recomendado.

As bombas de deslocamento positivo podem ter muitas vantagens com relação às bombas dinâmicas. Por exemplo, uma bomba por deslocamento positivo pode processar melhor os líquidos sensíveis ao cisalhamento, uma vez que o cisalhamento induzido é muito menor do que aquele de uma bomba dinâmica que opera a pressão e vazão semelhante. O sangue é um líquido sensível ao cisalhamento e esse é o motivo pelo qual as bombas de deslocamento positivo são usadas nos corações artificiais. Uma bomba por deslocamento positivo bem vedada pode criar uma pressão de vácuo significativa em sua entrada, mesmo quando seca, e pode elevar um líquido que está a vários metros abaixo da bomba. Esse tipo de bomba é chamado de **bomba auto-escorvante** (Figura 14–29). Finalmente, o(s) rotor(es) de uma bomba por deslocamento positivo funciona a velocidades mais baixas do que o rotor (propulsor) de uma bomba dinâmica a cargas semelhantes, estendendo a vida útil das vedações e de outros componentes.

As bombas de deslocamento positivo também apresentam algumas desvantagens. Sua vazão volumétrica não pode ser alterada, a menos que a taxa de rotação seja alterada. (Isso não é tão simples quanto parece, uma vez que a maioria dos motores elétricos AC foi desenvolvida para operar a uma ou mais velocidades rotacionais *fixas*. Eles criam pressão muito alta no lado da saída e, se esta é bloqueada, podem ocorrer rupturas ou superaquecimento dos motores elétricos como já foi discutido. Por esse motivo, é necessário ter proteção contra o excesso de pressão (por exemplo, uma válvula de alívio da pressão). Devido ao seu projeto, as bombas de deslocamento positivo podem fornecer um escoamento pulsante, que pode ser inaceitável em algumas aplicações.

A análise das bombas de deslocamento positivo é bastante direta. Pela geometria da bomba, calculamos o **volume fechado** ($V_{fechado}$) que é preenchido (e expelido)

para cada n rotações do eixo. Assim, a vazão em volume é igual à taxa de rotação $\dot{n}$ vezes V_{fechado} dividido por n

Vazão em volume, bomba por deslocamento positivo:

$$\dot{V} = \dot{n}\frac{V_{\text{fechado}}}{n} \qquad (14\text{–}11)$$

EXEMPLO 14–4 Vazão em Volume através de uma Bomba por Deslocamento Positivo

Uma bomba de deslocamento positivo giratória de dois lóbulos, como aquela da Figura 14–27, movimenta 0,45 cm^3 de óleo para motor SAE 30 em cada volume de lóbulo $V_{\text{lóbulo}}$, conforme representação da Figura 14–30. Calcule a vazão em volume do óleo para o caso em que $\dot{n}$ = 900 rpm.

SOLUÇÃO Devemos calcular a vazão em volume do óleo através de uma bomba de deslocamento positivo para os valores dados para o volume do lóbulo e a taxa de rotação.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente na média. **2** Não há vazamentos nas lacunas entre os lóbulos ou entre os lóbulos e o corpo. **3** O óleo é incompressível.

Análise Estudando a Figura 14–27, vemos que para metade de uma rotação (180° para n = 0,5 rotação) dos dois eixos de rotação contrária, o volume total de óleo bombeado é $V_{\text{fechado}} = 2V_{\text{lóbulo}}$. A vazão em volume é calculada com a Equação 14–11,

$$\dot{V} = \dot{n}\frac{V_{\text{fechado}}}{n} = (900\ \text{rot/min})\frac{2(0{,}45\ \text{cm}^3)}{0{,}5\ \text{rot}} = 1620\ \text{cm}^3/\text{min}$$

Discussão Se houvesse vazamentos na bomba, a vazão em volume seria mais baixa. A densidade do óleo não é necessária para o cálculo da vazão em volume. Entretanto, quanto mais alta a densidade do fluido, mais alta será o torque de eixo necessário e a potência no eixo.

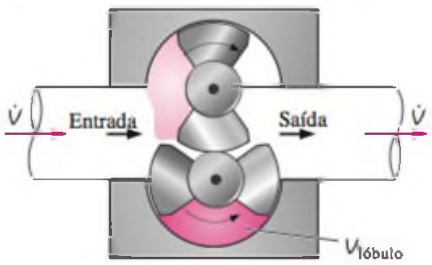


FIGURA 14–30
A bomba giratória de dois lóbulos do Exemplo 14–4. O escoamento se dá da esquerda para a direita.

Bombas Dinâmicas

Existem três tipos principais de *bombas dinâmicas* que envolvem pás giratórias chamadas de **pás de rotor**, que transmitem momento ao fluido. Por esse motivo elas também são chamadas de **bombas rotodinâmicas** ou simplesmente de **bombas giratórias** (não confundir com bombas de deslocamento positivo, que utilizam o mesmo nome). Existem também algumas bombas dinâmicas não giratórias, como as bombas de jato e as eletromagnéticas, mas elas não serão discutidas neste livro. As bombas giratórias são classificadas pelo modo como o escoamento sai da bomba: *escoamento centrífugo, escoamento axial* e *escoamento misto* (Figura 14–31). Em uma **bomba de escoamento centrífugo**, o fluido entra axialmente (na mesma direção do eixo da haste giratória) no centro da bomba, mas é descarregado radialmente (ou tangencialmente) ao longo do raio externo da carcaça da bomba. Por esse motivo as bombas centrífugas também são chamadas de **bombas de escoamento radial**. Em uma **bomba de escoamento axial**, o fluido entra e sai axialmente, em geral ao longo da parte externa da bomba, por causa do bloqueio exercido pelo eixo, motor, cubo da roda etc. Uma **bomba de escoamento misto** é intermediária entre as bombas centrífuga e axial, com o escoamento entrando axialmente, não necessariamente no centro, mas saindo com algum ângulo entre radialmente e axialmente.

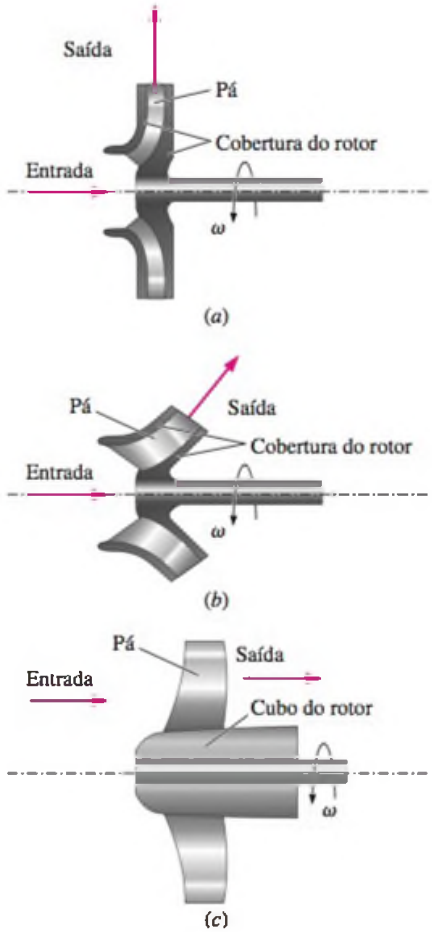


FIGURA 14–31
O rotor (parte giratória) das três categorias principais de bombas dinâmicas: (*a*) *escoamento centrífugo*, (*b*) *escoamento misto* e (*c*) *escoamento axial*.

Bombas Centrífugas

As bombas centrífugas e os compressores podem ser identificados facilmente pelo seu corpo em forma de caracol, chamado **voluta** (Figura 14–32). Elas se encontram em toda a sua casa — em lavadoras de pratos, banheiras de água quente, lavadoras e secadoras de roupas, secadores de cabelo, aspiradores de pó, coifas de

FIGURA 14–32
Um compressor centrífugo comum com sua voluta em forma de caracol característica.
Cortesia de The New York Blower Company, Willowbrook, IL. Usada com permissão.

cozinha, ventiladores de exaustão de banheiros, máquinas de recolher folhagem, fornos etc. Elas são usadas em automóveis — a bomba de água do motor, o compressor de ar da unidade de aquecedor/condicionador de ar etc. As bombas centrífugas também são onipresentes na indústria. Elas são usadas nos sistemas de ventilação de prédios, nas operações de lavagem, nos lagos de resfriamento e torres de arrefecimento e em inúmeras outras operações industriais nas quais os fluidos são bombeados.

Uma representação esquemática de bomba centrífuga é dada na Figura 14–33. Observe que uma **cobertura** sempre cerca as pás do propulsor para aumentar a rigidez da pá. Em terminologia de bombas, a montagem giratória que consiste no eixo, cubo de roda, pás do rotor e na capa do rotor é chamada simplesmente de **rotor**. O fluido entra axialmente através da parte média oca da bomba (a **sucção**), após a qual ele encontra as pás giratórias. Ele adquire velocidade tangencial ou radial por transferência de momento com as pás do rotor, e adquire velocidade radial adicional pelas chamadas forças centrífugas que, na verdade, são a falta de forças *centrípetas* suficientes para sustentar o movimento circular. O escoamento sai do rotor após ganhar velocidade e pressão à medida que é lançado radialmente para fora na direção da voluta. De acordo com a representação da Figura 14–33, a voluta é um **difusor** em forma de caracol cuja finalidade é desacelerar o fluido que sai rapidamente das laterais traseiras das pás do rotor, aumentando mais a pressão do fluido, e para combinar e orientar o escoamento de todas as passagens de pás na direção de uma saída comum. Como já foi mencionado, se o escoamento é constante na média, se o fluido é incompressível e se os diâmetros de entrada e saída são iguais, a velocidade média do escoamento na saída é idêntica àquela da entrada. Assim, não é necessariamente a velocidade, mas sim a *pressão* que aumenta da entrada para a saída através de uma bomba centrífuga.

Foram discutidos três tipos de bomba centrífuga, como mostra a Figura 14–34: *pás inclinadas para trás, pás radiais* e *pás inclinadas para a frente*. As bombas centrífugas com **pás inclinadas para trás** (Figura 14–34*a*) são as mais comuns. Elas resultam na maior eficiência das três, porque o fluido escoa para dentro e para fora das passagens da pá com um mínimo de rotação. Às vezes as pás têm forma de aerofólio, resultando em desempenho semelhante, porém com eficiência maior ainda. A elevação da pressão é intermediária entre os dois outros tipos de bombas centrífugas. As bombas centrífugas com **pás radiais** (também chamadas de **pás retas** (Figura 14–34*b*) têm a geometria mais simples e produzem a maior elevação de pressão das três para uma ampla variedade de vazões em volume, mas a elevação da pressão diminui rapidamente após o ponto de eficiência máxima. As bombas centrífugas com **pás inclinadas para a frente** (Figura 14–34*c*) produzem uma elevação de pressão que é quase constante, apesar de ser mais baixa do que aquela das pás radiais ou inclinadas para trás, em uma ampla variedade de vazões em volume. As bombas centrífugas inclinadas para a frente em geral têm mais pás, mas estas são menores, como mostra a Figura 14–34*c*. As

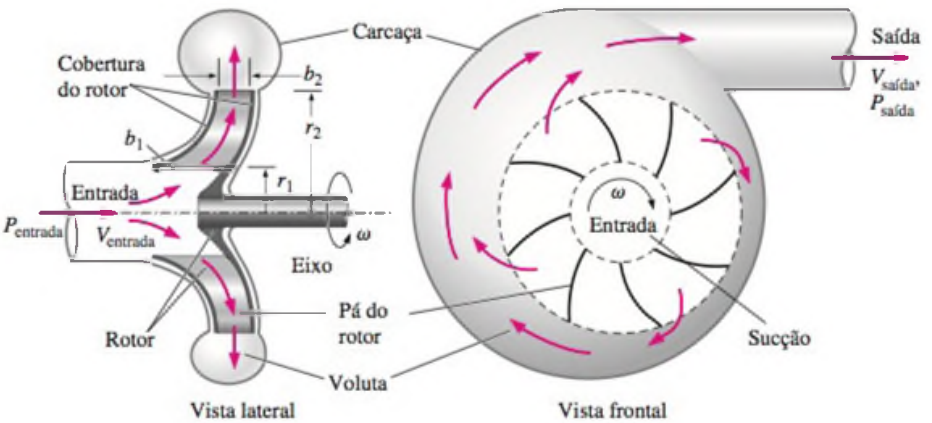


FIGURA 14–33
Visualizações lateral e frontal de uma *bomba centrífuga* comum. O fluido entra axialmente na metade da bomba (a sucção), é arremessado para o exterior pela montagem da pá giratória (*rotor*), é difundido no difusor de expansão (*voluta*) e é descarregado na lateral da bomba. Definimos r_1 e r_2 como os locais radiais da entrada e saída da pá do rotor, respectivamente, enquanto b_1 e b_2 são as larguras da pá axial na entrada e saída da pá do rotor, respectivamente.

bombas centrífugas com pás inclinadas para a frente em geral têm uma eficiência máxima mais baixa do que as bombas com pás retas. As bombas centrífugas com inclinação radial e para trás são preferidas para aplicações nas quais é preciso fornecer vazão em volume e elevação de pressão em um intervalo estreito de valores. Se for desejável um intervalo mais amplo de vazões em volume e/ou pressão, o desempenho das bombas radiais e inclinadas para trás talvez não consiga atender os novos requisitos. Esses tipos de bombas são menos resistentes (menos robustas). O desempenho das bombas inclinadas para trás é mais resistente e acomoda uma variação maior, à custa de menor eficiência e elevação de pressão por unidade de potência de entrada. Se uma bomba precisar produzir uma grande elevação de pressão em uma ampla variedade de vazões em volume, a bomba centrífuga inclinada para trás é uma opção atraente.

As curvas de desempenho de carga líquida e potência no eixo para esses três tipos de bombas centrífugas são dadas na Figura 14–34*d*. As curvas foram ajustadas de forma que cada bomba atinja o mesmo fornecimento livre (a vazão máxima em volume a carga líquida zero). Observe que essas são representações qualitativas com finalidades apenas comparativas — a forma das curvas de desempenho realmente medidas podem diferir significativamente, dependendo dos detalhes do projeto da bomba.

Para qualquer inclinação das pás do rotor (para trás, radial ou para a frente), podemos analisar os vetores de velocidade através das pás. O campo de escoamento real é não permanente, completamente tridimensional e talvez compressível. Por questões de simplicidade, em nossa análise consideramos o escoamento permanente na estrutura de referência absoluta e na estrutura de referência relativa que gira com o rotor. Consideramos apenas o escoamento incompressível, e apenas o componente da velocidade radial ou normal (subscrito n) e o componente da velocidade circunferencial ou tangencial (subscrito t) da entrada para a saída da pá. Não consideramos o componente da velocidade axial (à direita na Figura 14–35 e para dentro da página na vista frontal da Figura 14–33). Em outras palavras, embora exista um componente de velocidade diferente de zero através do rotor, ele não entra em nossa análise. Uma visualização lateral mais próxima de uma bomba centrífuga simplificada é representada na Figura 14–35, na qual definimos $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$ como os componentes normais médios da velocidade de raios r_1 e r_2, respectivamente. Embora seja mostrada uma lacuna entre a pá e o corpo, consideramos em nossa análise simplificada que não ocorre vazamento nessas lacunas.

A vazão em volume $\dot{V}$ que entra no olho da bomba passa através da área de seção transversal circunferencial definida pela largura b_1 de raio r_1. A conservação da massa exige que essa mesma vazão em volume deve passar através da área de seção transversal circunferencial definida pela largura b_2 de raio r_2. Usando os componentes de velocidade normais médios $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$ definidos na Figura 14–35 escrevemos

Vazão em volume:
$$\dot{V} = 2\pi r_1 b_1 V_{1,n} = 2\pi r_2 b_2 V_{2,n} \tag{14–12}$$

da qual obtemos

$$V_{2,n} = V_{1,n}\frac{r_1 b_1}{r_2 b_2} \tag{14–13}$$

Está claro na Equação 14–13 que $V_{2,n}$ pode ser menor do que, igual a ou maior do que $V_{1,n}$, dependendo dos valores de b e r nos dois raios.

Fazemos um diagrama detalhado da visualização frontal de uma pá de rotor na Figura 14–36, no qual mostramos os componentes da velocidade radial e tangencial. Desenhamos uma pá inclinada para trás, mas a mesma análise vale para as pás de *qualquer* inclinação. A entrada da pá (de raio r_1) se move a velocidade tangencial ωr_1. Da mesma forma, a saída da pá se move a velocidade tangencial ωr_2. Está claro na Figura 14–36 que essas duas velocidades tangenciais diferem não apenas em magnitude, mas também em direção, por causa da inclinação da pá. Definimos o **ângulo do bordo de ataque** β_1 como o ângulo da pá relativo à direção tangencial

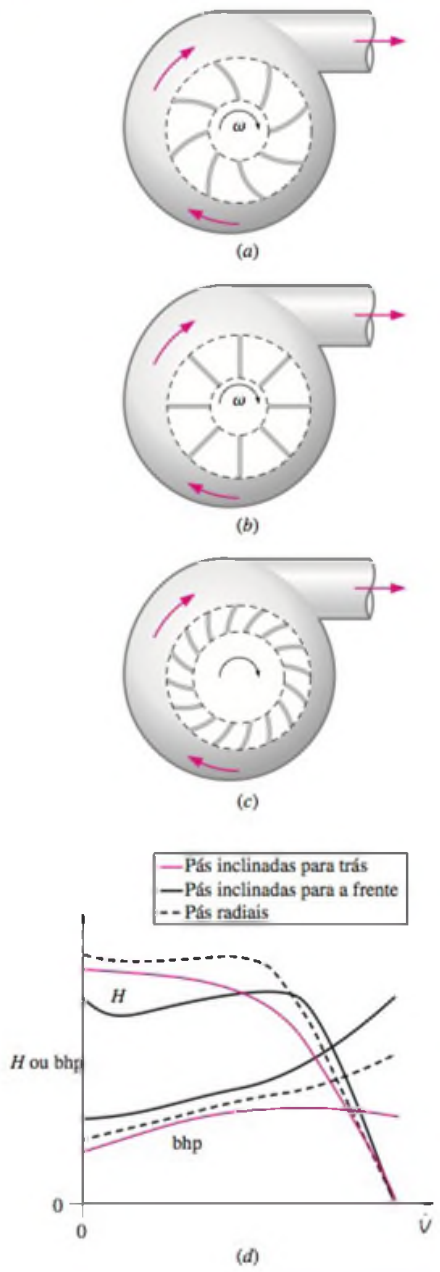


FIGURA 14–34
Os três tipos principais de bombas centrífugas são aqueles com (*a*) *pás inclinadas para trás*, (*b*) *pás radiais* e (*c*) *pás inclinadas para a frente*; (*d*) comparação entre as curvas de carga líquida e potência no eixo para os três tipos de bombas centrífugas.

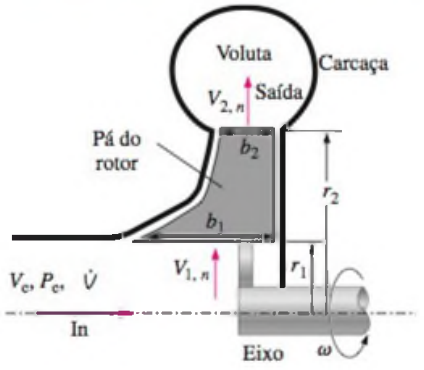


FIGURA 14–35
Visualização lateral em detalhe da bomba de escoamento centrífugo simplificada, usada para a análise elementar dos vetores de velocidade; $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$ são definidos como os componente normais (radiais) médios da velocidade de raios r_1 e r_2, respectivamente.

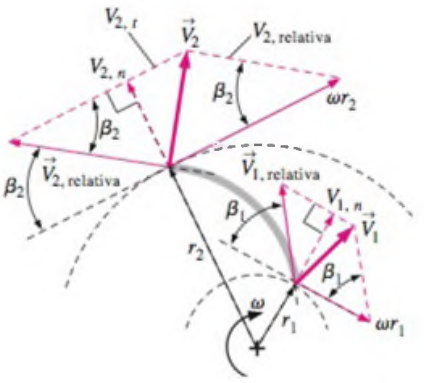


FIGURA 14–36
Visualização frontal detalhada da bomba de escoamento centrífugo detalhada usada para a análise elementar dos vetores de velocidade. Os vetores de velocidade absoluta do fluido são mostrados como setas em negrito. Considera-se que o escoamento é tangente em toda parte da superfície da pá sob o ponto de vista de uma estrutura de referência que gira com a pá, como indicam os vetores de velocidade relativa.

reversa de raio r_1. Definimos o **ângulo de defesa** β_2 como o ângulo da pá relativo à direção tangencial reversa de raio r_2.

Agora fazemos uma aproximação simplificadora significativa. Consideramos que o escoamento é imposto sobre a pá *paralelo ao bordo de ataque* e sai *paralelo ao bordo de fuga da pá*. Em outras palavras,

> Consideramos que o escoamento é tangente em todas as partes à superfície da pá quando visualizado sob uma estrutura de referência que gira com a pá.

Na entrada, essa aproximação também é chamada de **condição de entrada sem choque**, que não deve ser confundida com ondas de choque (Capítulo 12). Em vez disso, a terminologia implica escoamento uniforme para a pá do rotor sem um "choque" de rotação repentino. Inerente a essa aproximação está a hipótese de que *não há separação de escoamento* em nenhuma parte ao longo da superfície da pá. Se a bomba centrífuga opera em ou próximo de suas condições de projeto, essa hipótese é válida. Entretanto, quando a bomba opera muito fora das condições de projeto, o escoamento pode se separar da superfície da pá (em geral, no lado da sucção onde existem gradientes de pressão adversos) e nossa análise simplificada não funciona.

Os vetores de velocidade $\vec{V}_{1,\text{relativa}}$ e $\vec{V}_{2,\text{relativa}}$ são desenhados na Figura 14–36 paralelos à superfície da pá, de acordo com nossa hipótese simplificada. Esses são os vetores de velocidade vistos da estrutura de referência relativa de um observador que se movimenta com a pá giratória. Quando adicionarmos vetorialmente a velocidade tangencial ωr_1 (a velocidade da pá ao raio r_1) a $\vec{V}_{1,\text{relativa}}$, completando o paralelogramo representado na Figura 14–36, o vetor resultante é a velocidade *absoluta* do fluido $\vec{V}_1$ na entrada da pá. Exatamente da mesma maneira, obtemos $\vec{V}_2$, a velocidade absoluta do fluido na saída da pá (também representada na Figura 14–36). Por questões de exatidão, os componentes da velocidade normal $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$ também são mostrados na Figura 14–36. Observe que esses componentes da velocidade normal não dependem da estrutura de referência que usamos, seja ela absoluta ou relativa.

Para avaliarmos o torque do eixo giratório, aplicamos a relação do momento angular a um volume de controle como discutimos no Capítulo 6. Selecionamos um volume de controle que cerca as pás, do raio r_1 até o raio r_2, representado na Figura 14–37. Também apresentamos na Figura 14–37 os ângulos α_1 e α_2, definidos como o ângulo de partida do vetor de velocidade absoluta da direção normal aos raios r_1 e r_2 respectivamente. Mantendo o conceito do tratamento de um volume de controle como uma "caixa-preta", ignoramos os detalhes das pás individuais do rotor. Em vez disso, consideramos que o escoamento entra no volume de controle com velocidade absoluta uniforme $\vec{V}_1$ ao redor de toda a circunferência ao raio r_1, e sai com velocidade absoluta uniforme $\vec{V}_2$ ao redor de toda a circunferência ao raio r_2.

Como o momento angular é definido como o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{V}$, apenas os componentes *tangenciais* de $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ são relevantes ao torque do eixo. Eles são mostrados como $V_{1,t}$ e $V_{2,t}$ na Figura 14–37. Acontece que o torque do eixo é igual à variação no momento angular entre a entrada e a saída, como é dado pela **equação de turbomáquina de Euler** (também chamada de **fórmula da turbina de Euler**), derivada no Capítulo 6,

Equação de turbomáquina de Euler:
$$T_{\text{eixo}} = \rho\dot{V}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t}) \qquad \textbf{(14–14)}$$

Ou, em termos dos ângulos α_1 e α_2 e das magnitudes dos vetores da velocidade absoluta

Forma alternativa, equação da turbomáquina de Euler:
$$T_{\text{eixo}} = \rho\dot{V}(r_2V_2 \operatorname{sen}\alpha_2 - r_1V_1 \operatorname{sen}\alpha_1) \qquad \textbf{(14–15)}$$

Em nossa análise simplificada não existem perdas irreversíveis. Assim, a eficiência da bomba $\eta_{\text{bomba}} = 1$, implicando o fato de que a potência da água $\dot{W}_{\text{potência da água}}$ e a potência no eixo são iguais. Usando as Equações 14–3 e 14–4

$$\text{bhp} = \omega T_{\text{eixo}} = \rho\omega\dot{V}(r_2 V_{2,t} - r_1 V_{1,t}) = \dot{W}_{\text{potência da água}} = \rho g\dot{V}H \qquad (14\text{–}16)$$

que é solucionada para a carga líquida H

Carga líquida:
$$H = \frac{1}{g}(\omega r_2 V_{2,t} - \omega r_1 V_{1,t}) \qquad (14\text{–}17)$$

EXEMPLO 14–5 Desempenho Idealizado do Compressor

Um compressor centrífugo gira a $\dot{n}$ = 1.750 rpm (183,3 rad/s). O ar entra no rotor no plano normal às pás (α_1 = 0°) e sai a um ângulo de 40° no plano radial (α_2 = 40°) como representa a Figura 14–38. O raio de entrada é r_1 = 4,0 cm e a largura da pá de entrada é b_1 = 5,2 cm. O raio de saída é r_2 = 8,0 cm e a largura da pá de saída é b_2 = 2,3 cm. A vazão em volume é de 0,13 m³/s. Considerando 100% de eficiência, calcule a carga líquida produzida por este compressor em milímetros equivalentes de altura de coluna de água. Calcule também o potência no eixo em watts.

SOLUÇÃO Devemos calcular a potência no eixo e a carga líquida de um compressor idealizado a determinada vazão volumétrica e taxa de rotação.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente na média. **2** Não há vazamentos nas lacunas entre as pás do rotor e o corpo do compressor. **3** O ar é incompressível. **4** A eficiência do compressor é de 100% (sem perdas irreversíveis).

Propriedades Consideramos a densidade do ar como ρ_{ar} = 1,20 kg/m³.

Análise Como a vazão em volume (capacidade) é dada, calculamos os componentes da velocidade normal na entrada e na saída usando a Equação 14–12,

$$V_{1,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_1 b_1} = \frac{0{,}13\ \text{m}^3/\text{s}}{2\pi(0{,}040\ \text{m})(0{,}052\ \text{m})} = 9{,}947\ \text{m/s} \qquad (1)$$

$V_1 = V_{1,n}$ e $V_{1,t} = 0$, uma vez que $\alpha_1 = 0°$. Da mesma forma, $V_{2,n}$ = 11,24 m/s e

$$V_{2,t} = V_{2,n}\,\text{tg}\,\alpha_2 = (11{,}24\ \text{m/s})\,\text{tg}(40°) = 9{,}435\ \text{m/s} \qquad (2)$$

Agora usamos a Equação 14–17 para prever a carga líquida

$$H = \frac{\omega}{g}(r_2 V_{2,t} - r_1 \underbrace{V_{1,t}}_{0}) = \frac{183{,}3\ \text{rad/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}(0{,}080\ \text{m})(9{,}435\ \text{m/s}) = 14{,}1\ \text{m} \qquad (3)$$

Observe que a carga líquida da Equação 3 está em metros de *ar*, o fluido bombeado. Para convertermos para pressão em unidades de milímetros equivalentes de coluna de água, multiplicamos a taxa da densidade do ar pela densidade da água

$$H_{\text{coluna de água}} = H\frac{\rho_{\text{ar}}}{\rho_{\text{água}}}$$

$$= (14{,}1\ \text{m})\frac{1{,}20\ \text{kg/m}^3}{998\ \text{kg/m}^3}\left(\frac{1000\ \text{mm}}{1\ \text{m}}\right) = \mathbf{17{,}0\ mm\ de\ água} \qquad (4)$$

Finalmente usamos a Equação 14–16 para prever a potência no eixo necessária

$$\text{bhp} = \rho g\dot{V}H = (1{,}20\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}13\ \text{m}^3/\text{s})(14{,}1\ \text{m})\left(\frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{21{,}6\ W} \qquad (5)$$

Discussão Observe a conversão de unidade da Equação 5 de quilogramas, metros e segundos em watts; essa conversão é útil em muitos cálculos de turbomáquina. A carga líquida real fornecida para o ar será mais baixa do que aquela prevista pela Equação 3 devido a ineficiências. Da mesma forma, a potência no eixo real será mais alta do que aquela prevista pela Equação 5 devido a ineficiências no compressor, atrito do eixo etc.

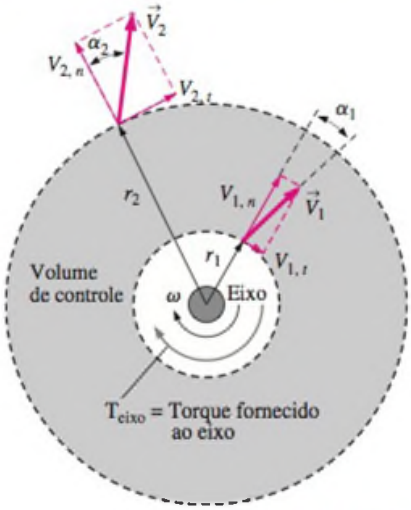


FIGURA 14–37
O volume de controle (sombreado) usado para a análise do momento angular de uma bomba centrífuga; os componentes da velocidade tangencial absoluta $V_{1,t}$ e $V_{2,t}$ estão rotulados.

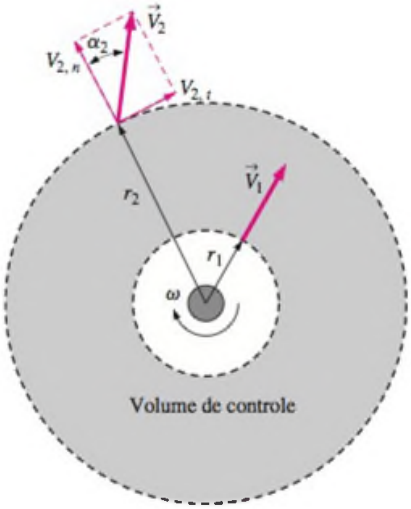


FIGURA 14–38
Vetores de volume de controle e velocidade absoluta para o compressor centrífugo do Exemplo 14–5. Visualização ao longo do eixo do compressor.

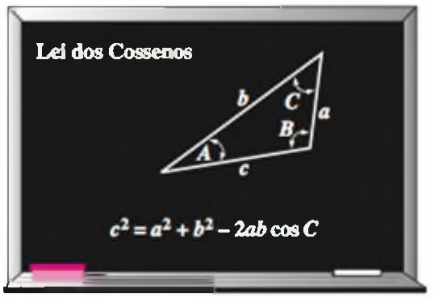


FIGURA 14–39
A lei dos cossenos é utilizada na análise de uma bomba centrífuga.

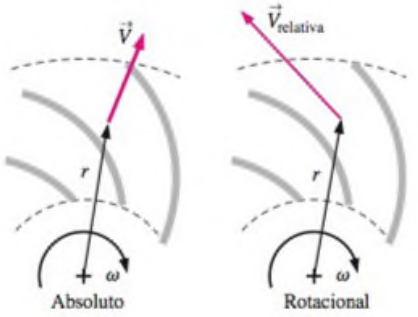


FIGURA 14–40
Para a aproximação do escoamento através de um rotor sem perdas irreversíveis é mais conveniente trabalhar com uma estrutura de referência relativa que gira com o rotor. Nesse caso, a equação de Bernoulli ganha um termo extra, indicado na Equação 14–22.

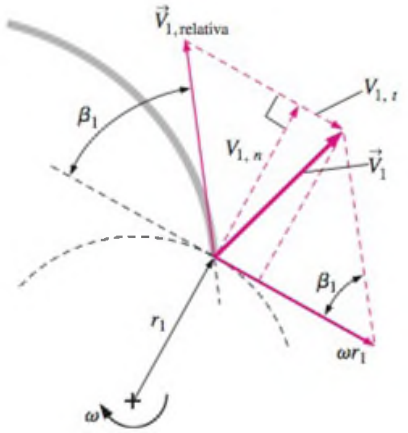


FIGURA 14–41
Visualização frontal detalhada dos vetores de velocidade na entrada da pá do rotor. O vetor de velocidade absoluta é mostrado como uma seta em negrito.

Para projetarmos a forma das pás do rotor, devemos usar a trigonometria para obter as expressões de $V_{1,t}$ e $V_{2,t}$ em termos dos ângulos de pá β_1 e β_2. Aplicando a *lei dos cossenos* (Figura 14–39) ao triângulo da Figura 14–36 formado pelo vetor da velocidade absoluta, o vetor da velocidade relativa $\vec{V}_{2\ relativa}$, e a velocidade tangencial da pá com raio r_2 (de magnitude ωr_2) obtemos

$$V_2^2 = V_{2,\text{relativa}}^2 + \omega^2 r_2^2 - 2\omega r_2 V_{2,\text{relativa}} \cos \beta_2 \qquad \textbf{(14–18)}$$

Mas também vemos na Figura 14–36 que

$$V_{2,\text{relativa}} \cos \beta_2 = \omega r_2 - V_{2,t}$$

Substituindo essa equação na Equação 14–18 temos

$$\omega r_2 V_{2,t} = \frac{1}{2}(V_2^2 - V_{2,\text{relativa}}^2 + \omega^2 r_2^2) \qquad \textbf{(14–19)}$$

O resultado é uma equação semelhante para a entrada da pá (mudar todos os subscritos 2 da Equação 14–19 pelo subscrito 1). Substituindo estes na Equação 14–17 temos

$$\textit{Carga líquida:}\quad H = \frac{1}{2g}[(V_2^2 - V_1^2) + (\omega^2 r_2^2 - \omega^2 r_1^2) - (V_{2,\text{relativa}}^2 - V_{1,\text{relativa}}^2)] \qquad \textbf{(14–20)}$$

Em palavras, a Equação 14–20 informa que no caso ideal (sem perdas irreversíveis), a carga líquida é proporcional à variação da energia cinética absoluta mais a variação da energia cinética na ponta do rotor menos a variação da energia cinética entre a entrada e a saída do rotor. Finalmente, equacionando a Equação 14–20 e a Equação 14–2, onde definimos o subscrito 2 como o escoamento de saída e o subscrito 1 como o escoamento de entrada, vemos que

$$\left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V_{\text{relativa}}^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z\right)_{\text{saída}} = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V_{\text{relativa}}^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z\right)_{\text{entrada}} \qquad \textbf{(14–21)}$$

Observe que não limitamos a análise apenas à entrada e saída. Na verdade, podemos aplicar a Equação 14–21 dois raios *quaisquer* ao longo do rotor. Assim, em geral, escrevemos uma equação que normalmente é chamada de **equação de Bernoulli em um sistema de referência giratório**:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V_{\text{relativa}}^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z = \text{constante} \qquad \textbf{(14–22)}$$

Vemos que a Equação 14–22 é igual à equação normal de Bernoulli, exceto que como a velocidade utilizada é a *relativa* (na estrutura de referência giratória), um termo "extra" (o terceiro da esquerda na Equação 14–22) aparece na equação para considerar os efeitos rotacionais (Figura 14–40). Enfatizamos que a Equação 14–22 é uma aproximação, válida apenas para o caso ideal no qual não há perdas irreversíveis através do rotor. No entanto, ela é valiosa como aproximação de primeira ordem para o escoamento através do rotor de uma bomba centrífuga.

Agora examinemos a Equação 14–17, a equação da carga líquida, com mais detalhes. Como o termo que contém $V_{1,t}$ tem um sinal negativo, obtemos o H máximo definindo $V_{1,t}$ como zero. (Estamos considerando que não há mecanismo no olho da bomba que possa gerar um valor *negativo* de $V_{1,t}$.) Assim, uma aproximação de primeira ordem para a **condição de projeto** da bomba é definida como $V_{1,t} = 0$. Em outras palavras, selecionamos o ângulo de entrada da pá β_1 de forma que o escoamento para a pá do rotor seja puramente radial em uma estrutura de referência absoluta e $V_{1,n} = V_1$. Os vetores da velocidade a $r = r_1$ na Figura 14–36 são ampliados e redesenhados na Figura 14–41. Usando alguma trigonometria vemos que

$$V_{1,t} = \omega r_1 - \frac{V_{1,n}}{\text{tg}\ \beta_1} \qquad \textbf{(14–23)}$$

Uma expressão semelhante é obtida para $V_{2,t}$ (substituir o subscrito 1 por 2) ou, na verdade, por qualquer raio entre r_1 e r_2. Quando $V_{1,t} = 0$ e $V_{1,n} = V_1$

$$\omega r_1 = \frac{V_{1,n}}{\text{tg}\,\beta_1} \tag{14–24}$$

Finalmente combinando a Equação 14–24 com a Equação 14–12, temos uma expressão para a vazão em volume como função do ângulo de entrada da pá β_1 e da velocidade rotacional

$$\dot{V} = 2\pi b_1 \omega r_1^2 \,\text{tg}\,\beta_1 \tag{14–25}$$

A Equação 14–25 pode ser usada para um projeto preliminar da forma da pá do rotor como ilustra o Exemplo 14–6.

EXEMPLO 14–6 Projeto Preliminar de uma Bomba Centrífuga

Uma bomba centrífuga está sendo projetada para bombear líquido refrigerante R-134a à temperatura ambiente e pressão atmosférica. Os raios de entrada e saída do rotor são $r_1 = 100$ e $r_2 = 180$ mm, respectivamente (Figura 14–42). As larguras de entrada e saída do rotor são $b_1 = 50$ e $b_2 = 30$ mm (para dentro da página na Figura 14–42). A bomba deve fornecer 0,25 m³/s do líquido a uma carga líquida de 14,5 m quando o rotor gira a 1.720 rpm. O projeto da forma da pá no caso em que essas condições operacionais são as *condições de projeto* da bomba ($V_{1,t} = 0$ representada na figura); especificamente, calcule os ângulos β_1 e β_2 e discuta a forma da pá. Calcule também a potência necessária para a bomba.

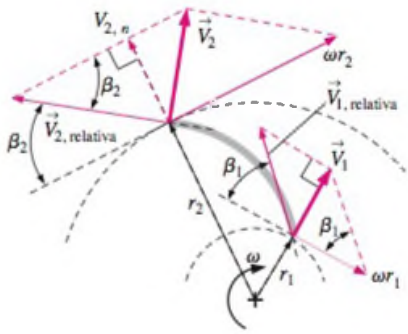


FIGURA 14–42
Os vetores de velocidade relativa e absoluta e a geometria do projeto do rotor de bomba centrífuga do Exemplo 14–6.

SOLUÇÃO Para determinada vazão, carga líquida e dimensões de uma bomba centrífuga, devemos projetar a forma da pá (ângulos dos bordos de fuga e ataque). Também devemos estimar a potência necessária para a bomba.

Hipóteses **1** O escoamento é estável. **2** O líquido é incompressível. **3** Não existem perdas irreversíveis através do rotor. **4** Este é apenas um projeto preliminar.

Propriedades Para o refrigerante R-134a a $T = 20°C$, $v_f = 0{,}0008157$ m³/kg. Assim, $\rho = 1/v_f = 1.226$ kg/m³.

Análise Calculamos a potência da água necessária com a Equação 14–3,

$$\dot{W}_{\text{potência da água}} = \rho g \dot{V} H$$

$$= (1226\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(0{,}25\ \text{m}^3\text{/s})(14{,}5\ \text{m})\left(\frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$= 43.600\ \text{W}$$

A potência de freio necessária será maior do que isso em uma bomba real. Entretanto, ao mantermos as aproximações para este projeto preliminar, supomos eficiência de 100%, de modo que a $W_{\text{potência da água}}$ seja aproximadamente igual a

$$\text{bhp} \cong \dot{W}_{\text{potência da água}} = 43.600\ \text{W}\left(\frac{\text{hp}}{745{,}7\ \text{W}}\right) = 58{,}5\ \text{hp}$$

Reportamos o resultado final até dois dígitos significativos para manter a exatidão das quantidades dadas e, assim, bhp ≈ **59 hp**.

Em todos os cálculos com rotação, precisamos converter a velocidade rotacional de $\dot{n}$ (rpm) em ω (rad/s), como ilustra a Figura 14–43

$$\omega = 1720\ \frac{\text{rot}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rot}}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right) = 180{,}1\ \text{rad/s} \tag{1}$$

Calculamos o ângulo de entrada da pá usando a Equação 14–25,

$$\beta_1 = \text{arctg}\left(\frac{\dot{V}}{2\pi b_1 \omega r_1^2}\right) = \text{arctg}\left(\frac{0{,}25\ \text{m}^3\text{/s}}{2\pi(0{,}050\ \text{m})(180{,}1\ \text{rad/s})(0{,}10\ \text{m})^2}\right) = 23{,}8°$$

FIGURA 14–43
A conversão adequada de unidades exige que as unidades da taxa de rotação estejam em rad/s.

Encontramos β_2 utilizando as equações derivadas anteriormente em nossa análise elementar. Em primeiro lugar, para a condição de projeto na qual $V_{1,t} = 0$, a Equação 14–17 se reduz a

Carga líquida: $$H = \frac{1}{g}(\omega r_2 V_{2,t} - \omega r_1 \underbrace{V_{1,t}}_{0}) = \frac{\omega r_2 V_{2,t}}{g}$$

da qual calculamos o componente da velocidade tangencial

$$V_{2,t} = \frac{gH}{\omega r_2} \tag{2}$$

Usando a Equação 14–12, calculamos o componente da velocidade normal

$$V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2} \tag{3}$$

A seguir, realizamos a mesma trigonometria utilizada para derivar a Equação 14–23, mas no *bordo de fuga* da pá e não no bordo de ataque. O resultado é

$$V_{2,t} = \omega r_2 - \frac{V_{2,n}}{\operatorname{tg} \beta_2}$$

do qual finalmente solucionamos β_2

$$\beta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_{2,n}}{\omega r_2 - V_{2,t}}\right) \tag{4}$$

Após a substituição das Equações 2 e 3 na Equação 4 e a inserção dos valores numéricos obtemos

$$\beta_2 = 14{,}7°$$

Reportamos os resultados finais até apenas dois dígitos significativos. Assim, nosso projeto preliminar exige pás de rotor *inclinadas para trás* com $\beta_1 \cong 24°$ e $\beta_2 \cong 15°$. Depois que sabemos os ângulos de lâmina dos bordos de ataque e defesa, criamos a *forma* detalhada da pá do rotor variando uniformemente o ângulo da pá β de β_1 até β_2 à medida que o raio aumenta de r_1 até r_2. Como está representado na Figura 14–44, a pá pode ter várias formas e ainda manter $\beta_1 \cong 24°$ e $\beta_2 \cong 15°$, dependendo de como variamos β com o raio. Na figura todas as três pás começam no mesmo local (ângulo zero absoluto) ao raio r_1; o ângulo do bordo de ataque de todas as três pás é $\beta_1 = 24°$. A pá de comprimento médio (a pá cinza na Figura 14–44) é construída variando β *linearmente* com r. Seu bordo de fuga intercepta o raio r_2 a um ângulo absoluto de aproximadamente 93°. A pá mais longa (a pá preta da figura) é construída variando β mais rapidamente perto de r_1 do que de r_2. Em outras palavras, a curvatura da pá é mais pronunciada perto de seu bordo de ataque do que de seu bordo de fuga. Ela intercepta o raio exterior a um ângulo absoluto de cerca de 114°. Finalmente, a pá mais curta (a pá azul da Figura 14–44) tem menos curvatura de pá próximo a seu bordo de ataque, mas uma curvatura mais pronunciada próximo a seu bordo de fuga. Ela intercepta r_2 a um ângulo absoluto de aproximadamente 77°. *Não fica imediatamente óbvio qual forma de pá é melhor.*

Discussão Lembre-se de que este é um projeto preliminar no qual as perdas irreversíveis são ignoradas. Uma bomba real teria perdas, e a potência no eixo necessária seria mais alta (talvez de 20% a 30% mais alta) do que o valor estimado aqui. Em uma bomba real com perdas, uma pá mais curta tem menos arrasto de atrito superficial, mas as tensões normais sobre a pá são maiores, porque o escoamento fica mais complexo próximo ao bordo de fuga, onde as velocidades são maiores. Isso pode levar a problemas estruturais se as pás não forem muito espessas, particularmente ao bombear líquidos densos. Uma pá mais longa tem arrasto de atrito superficial mais alto, mas tensões normais mais baixas. Além disso, você pode perceber ao fazer uma estimativa simples do volume de pá da Figura 14–44: para o mesmo número de pás, quanto mais longas as pás, maior o bloqueio do escoamento, uma vez que elas têm espessura finita. Além disso, o efeito de espessura do deslocamento das camadas limites que aumentam ao longo das superfícies da pá (Capítulo 10) leva a um bloqueio mais pronunciado ainda para as pás longas. Obviamente, alguma otimização de engenharia é necessária para determinar a forma exata da pá.

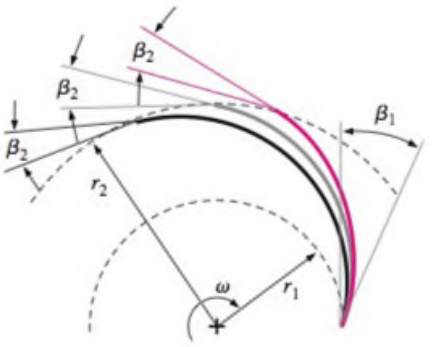


FIGURA 14–44
Três formas de pás possíveis para o projeto do rotor de bomba centrífuga do Exemplo 14–6. Todas as três pás têm ângulo de bordo de ataque $\beta_1 = 24°$ e ângulo de bordo de fuga $\beta_2 = 15°$, mas diferem no modo como β varia com o raio. O desenho está em escala.

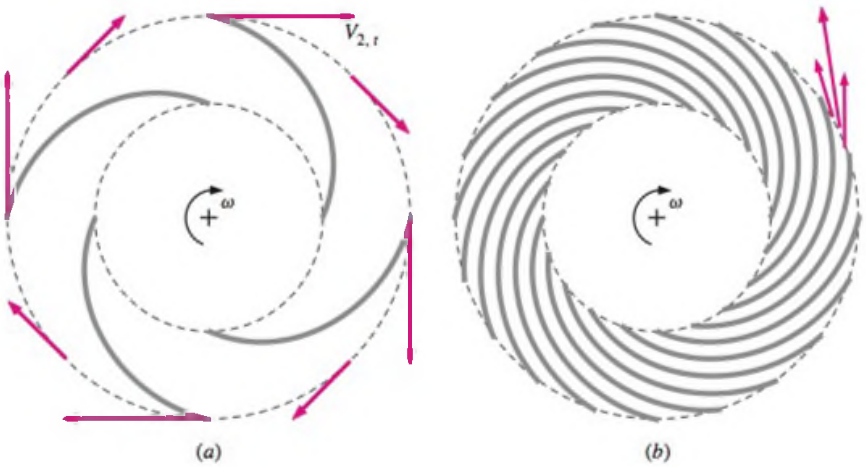


FIGURA 14–45
(*a*) Um rotor de bomba centrífuga com muito poucas pás leva a *perda de escoamento circulatório* — a velocidade tangencial no raio externo r_2 é menor nas lacunas entre as pás do que nos *bordos de defesa* das pás (os vetores absolutos da velocidade tangencial são mostrados). (*b*) Por outro lado, como as pás reais do rotor têm espessura finita, um rotor com muitas pás leva a perdas de passagem devidas ao bloqueio de escoamento excessivo e a grande arrasto por atrito superficial (os vetores de velocidade de uma estrutura de referência giratória com o rotor são mostrados saindo de uma linha de pás). O resultado é que os engenheiros de bombas devem otimizar a forma *e* o número de pás.

Quantas pás devemos usar em um rotor? Se usarmos um número muito pequeno de pás, a **perda de escoamento circulatório** será alta. A perda de escoamento circulatório ocorre porque existe um número finito de pás. Em nossa análise preliminar consideremos uma velocidade tangencial uniforme $V_{2,t}$ ao redor de toda a circunferência da saída do volume de controle (Figura 14–37). Isso é estritamente correto apenas se tivermos um número infinito de pás infinitesimalmente finas. Em uma bomba real, obviamente, o número de pás é finito e as pás não são infinitesimalmente finas. Como resultado, o componente tangencial do vetor de velocidade absoluta não é uniforme, mas cai nos espaços entre as pás conforme ilustra a Figura 14–45*a*. O resultado líquido é um valor efetivamente menor de $V_{2,t}$ que, por sua vez, diminui a carga líquida real. Essa perda de carga líquida (e eficiência de bomba) é chamada de *perda de escoamento circulatório*. Por outro lado, se tivermos muitas pás (como na Figura 14–45*b*), haverá perdas de bloqueio de escoamento excessivas e perdas devidas ao crescimento das camadas de fronteira, novamente levando a velocidades de escoamento não uniforme no raio exterior da bomba e menor carga líquida e eficiência. Essas perdas são chamadas de **perdas de passagem**. O resultado é que alguma otimização de engenharia se faz necessária para selecionar a forma da pá e o número das pás. Tal análise está além do escopo deste texto. Um exame rápido na literatura da turbomáquina mostra que 11, 14 e 16 são números de pás de rotor comuns para as bombas centrífugas médias.

Depois de projetarmos a bomba para uma carga líquida e vazão específicas (condições de projeto), podemos estimar sua carga líquida a condições *distantes* das condições de projeto. Em outras palavras, mantendo b_1, b_2, r_1, r_2, β_1, β_2 e ω fixos, variamos a vazão volumétrica acima e abaixo da vazão de projeto. Temos todas as equações: a Equação 14–17 da carga líquida H em termos dos componentes de velocidade tangencial absoluta $V_{1,t}$ e $V_{2,t}$, a Equação 14–23 para $V_{1,t}$ e $V_{2,t}$ como funções dos componentes da velocidade normal absoluta $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$ e a Equação 14–12 para $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$ como funções da vazão volumétrica $\dot{V}$. Na Figura 14–46 combinamos essas equações para gerar um gráfico de H *versus* $\dot{V}$ para a bomba criada no Exemplo 14–6. A linha azul sólida é o desempenho previsto, com base em nossa análise preliminar. A curva de desempenho prevista é quase linear com V acima e abaixo das condições de projeto, uma vez que o termo $\omega r_1 V_{1,t}$ da Equação 14–17 é pequeno quando comparado ao termo $\omega r_2 V_{2,t}$. Nas condições de projeto previstas, definimos $V_{1,t} = 0$. Para vazões de volume maiores do que isso, $V_{1,t}$ é previsto pela Equação 14–23 como *negativo*. Mantendo nossas hipóteses anteriores, porém, não é possível ter valores negativos para $V_{1,t}$. Assim, a inclinação da curva de desempenho prevista se altera repentinamente além das condições de projeto.

A Figura 14–46 também representa o desempenho *real* dessa bomba centrífuga. Embora o desempenho previsto esteja próximo do desempenho real a condições de projeto, as duas curvas desviam substancialmente das condições de

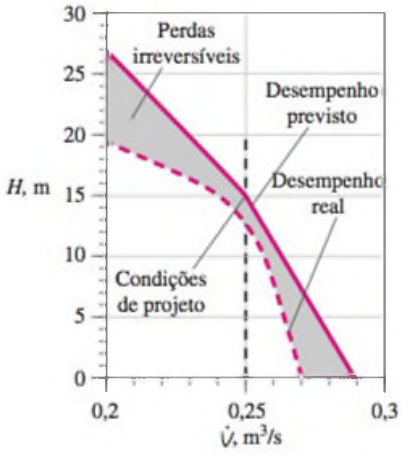


FIGURA 14–46
A carga líquida como função da vazão em volume da bomba do Exemplo 14–6. A diferença entre o desempenho previsto e real é devida a irreversibilidades não previstas.

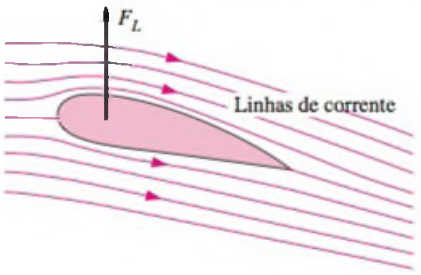


FIGURA 14–47
As pás de uma bomba de escoamento axial se comportam como a asa de um avião. O ar é desviado para baixo pela asa à medida que gera força de elevação F_L.

FIGURA 14–48
A descarga para baixo e a elevação de pressão através do plano do rotor de um helicóptero, que é um tipo de bomba com escoamento axial.

projeto. Sob todas as vazões em volume, a carga líquida real é *mais baixa* do que a carga líquida prevista. Isso se deve aos efeitos irreversíveis, como o atrito ao longo das superfícies da pá, vazamento de fluido entre as pás e o corpo, pré-rotação (redemoinho) do fluido na região do olho, separação do escoamento nos bordos de ataque das pás (perdas por choque) ou nas partes em expansão das passagens de escoamento, perda de escoamento circulatório, perda de passagem e dissipação irreversível dos vórtices de turbilhão da voluta, entre outras coisas.

Bombas Axiais

As bombas axiais não utilizam as chamadas forças centrífugas. Em vez disso, as pás do rotor se comportam muito mais como a asa de um avião (Figura 14–47), produzindo elevação pela alteração do momento do fluido à medida que elas giram. O rotor de um helicóptero, por exemplo, é um tipo de bomba de escoamento axial (Figura 14–48). A força de elevação sobre a pá é causada pelas diferenças de pressão entre as superfícies superior e inferior da pá, e a variação na direção do escoamento leva à **descarga** (uma coluna de ar descendente) através do plano do rotor. Sob uma perspectiva de tempo ponderado, existe um salto de pressão através do plano do rotor que induz um escoamento de ar para baixo (Figura 14–48).

Imagine girar o plano do rotor verticalmente; agora temos um **propulsor** (Figura 14–49*a*). Tanto o rotor do helicóptero quanto o propulsor do avião são exemplos de **ventiladores com escoamento axial aberto**, uma vez que não há duto ou corpo ao redor das pontas das pás. O ventilador comum que você instala na janela do quarto no verão opera de acordo com os mesmos princípios, mas o objetivo é soprar ar em vez de fornecer uma força. Tenha certeza, porém, de que *há* uma força líquida que atua sobre o corpo do ventilador. Se o ar é soprado da esquerda para a direita, a força no ventilador age para a esquerda e o ventilador é mantido para baixo pelo caixilho da janela. O corpo ao redor do ventilador da casa também age como um duto curto, o que ajuda a direcionar o escoamento e eliminar algumas perdas nas pontas da pá. O ventilador pequeno que fica dentro do computador em geral é um ventilador com escoamento axial; ele se parece com um ventilador de janela em miniatura (Figura 14–49*b*) e é um exemplo de **ventilador com escoamento axial em duto**.

Se você examinar mais de perto a pá do propulsor do avião da Figura 14–49*a*, a do rotor de um helicóptero, a do propulsor de um avião de aeromodelismo controlado por rádio, ou mesmo a de um ventilador de janela bem projetado, notará uma pequena **torção** nela. Especificamente, o aerofólio de uma seção transversal próxima ao cubo da roda ou raiz da pá está a um **ângulo de inclinação** (θ) maior do que o aerofólio a uma seção transversal próxima da ponta, $\theta_{\text{raiz}} > \theta_{\text{ponta}}$

(*a*)

(*b*)

FIGURA 14–49
Os ventiladores com escoamento axial podem ser abertos ou em duto: (*a*) um propulsor é um ventilador aberto e (*b*) um ventilador de computador é um ventilador em duto.
(a) Cortesia da Whirl Wind Propellers Corporation. Usada com permissão. (b) Cortesia da ebm-papst Mulfingen GmbH & Co. KG. Usada com permissão.

(Figura 14–50). Isso acontece porque a velocidade tangencial da pá aumenta linearmente com o raio

$$u_\theta = \omega r \tag{14–26}$$

A determinado raio então, a velocidade do ar $\vec{V}_{\text{relativa}}$ *com relação à pá* é estimada até a primeira ordem como a soma do vetor da velocidade do vento $\vec{V}_{\text{vento}}$ e o negativo da velocidade da pá $\vec{V}_{\text{pá}}$,

$$\vec{V}_{\text{relativa}} \cong \vec{V}_{\text{vento}} - \vec{V}_{\text{pá}} \tag{14–27}$$

onde a magnitude de $\vec{V}_{\text{pá}}$ é igual à velocidade tangencial da pá u_θ, dada pela Equação 14–26. A direção de $\vec{V}_{\text{pá}}$ é tangencial ao caminho de rotação da pá. À posição de pá representada na Figura 14–50, $\vec{V}_{\text{pá}}$ está à esquerda.

Na Figura 14–51 calculamos $\vec{V}_{\text{relativa}}$ graficamente usando a Equação 14–27 em dois raios — o raio raiz e o raio de ponta da pá do rotor representada na Figura 14–50. Como você pode ver, o ângulo de ataque relativo α é igual em ambos os casos. Na verdade, a quantidade de torção é determinada pela definição do ângulo de inclinação θ de forma que α seja igual a qualquer raio.

Observe também que a magnitude da velocidade relativa $\vec{V}_{\text{relativa}}$ aumenta da raiz para a ponta. Acontece que a pressão dinâmica encontrada pelas seções transversais da pá aumenta com o raio, e a força de elevação por largura de unidade para dentro da página na Figura 14–51 também aumenta com o raio. Os propulsores tendem a ser mais estreitos na raiz e maiores na direção da ponta para aproveitar a contribuição maior da elevação disponível na direção da ponta. Na extremidade da ponta, porém, a pá em geral é arredondada para evitar o *arrasto induzido* excessivo (Capítulo 11) que existiria se a pá fosse simplesmente cortada abruptamente como na Figura 14–50.

A Equação 14–27 não é exata por diversos motivos. Em primeiro lugar, o movimento giratório do rotor introduz algum **redemoinho** no escoamento de ar (Figura 14–52). Isso reduz a velocidade tangencial efetiva da pá com relação ao vento. Em segundo lugar, como o cubo de roda do rotor tem tamanho finito, o ar é acelerado ao seu redor, fazendo com que a velocidade do vento aumente localmente nas seções transversais da pá próximo à raiz. Em terceiro lugar, o eixo do rotor ou propulsor pode não estar alinhado exatamente em paralelo ao vento. Por fim, a velocidade do vento propriamente dito não é determinada com facilidade porque o vento se acelera à medida que se aproxima do rotor em turbilhão. Existem métodos disponíveis para aproximar esses e outros efeitos secundários, mas eles estão além do escopo deste texto. A aproximação de primeira ordem dada pela Equação 14–27 é adequada para o rotor preliminar e para o projeto do propulsor, como ilustra o Exemplo 14–7.

Os propulsores do avião têm **inclinação variável**, e isso significa que a inclinação de toda a pá pode ser ajustada pela rotação das pás através dos vínculos

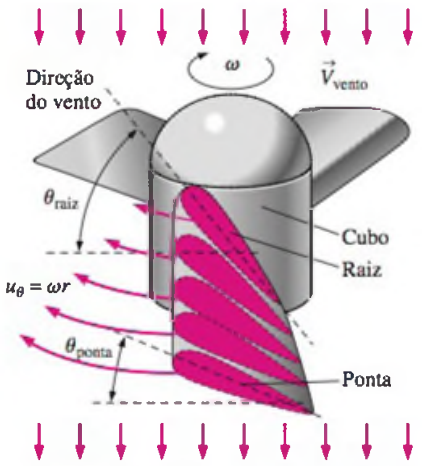


FIGURA 14–50
Uma pá de rotor bem desenhada ou uma pá de propulsor tem uma *torção*, como mostram as fatias *azuis* de seção transversal através de uma das três pás; o ângulo de inclinação da pá θ é mais alto na raiz do que na ponta porque a velocidade tangencial da pá aumenta com o raio.

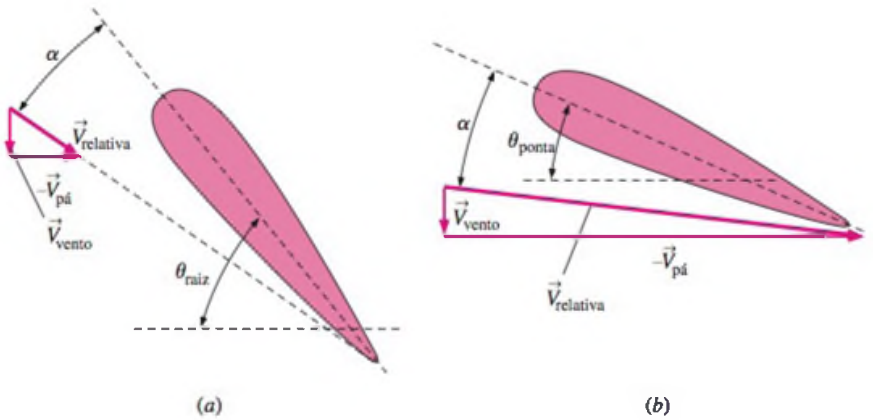


FIGURA 14–51
Cálculo gráfico do vetor $\vec{V}_{\text{relativa}}$ em dois raios: (*a*) raiz e (*b*) ponta da pá do rotor representadas na Figura 14–50.

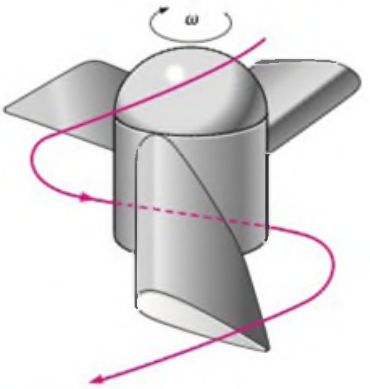


FIGURA 14–52
As pás giratórias de um rotor ou propulsor induzem o turbilhão no fluido vizinho.

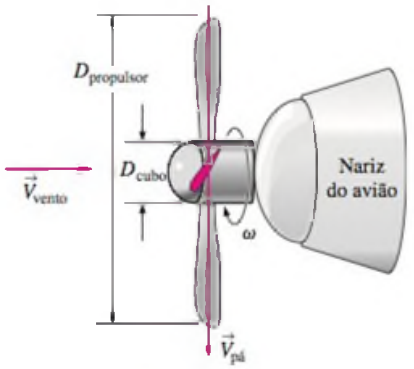


FIGURA 14–53
Configuração do projeto do propulsor do avião-modelo do Exemplo 14–7, fora de escala.

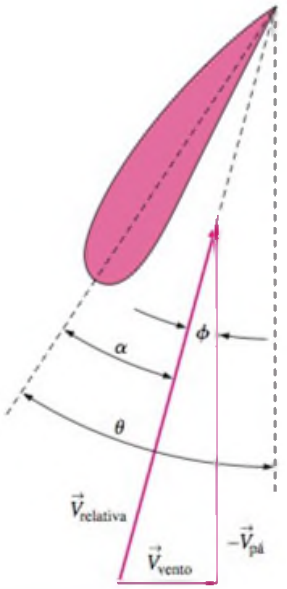


FIGURA 14–54
Os vetores de velocidade em algum raio arbitrário r do propulsor do Exemplo 14–7.

mecânicos do cubo. Por exemplo, quando avião à propulsão está parado no aeroporto, aquecendo seus motores a rpm alta, por que ele não começa a se movimentar? Bem, por um único motivo, os freios estão sendo aplicados. O mais importante é que a inclinação do propulsor é ajustada para que o ângulo médio de ataque das seções transversais do aerofólio é zero nenhum empuxo líquido é fornecido. Enquanto o avião taxeia até a pista de decolagem, a inclinação é ajustada para produzir uma pequena quantidade de empuxo. À medida que o avião decola, as rpm do motor são altas, e a inclinação da pá é ajustada de forma que o propulsor forneça o máximo de empuxo. Na maioria dos casos a inclinação pode até mesmo ser ajustada "para trás" (ângulo de ataque negativo) para fornecer **impulso invertido** e diminuir a velocidade do avião após a aterrissagem.

EXEMPLO 14–7 Cálculo da Torção do Propulsor de um Avião

Suponhamos que você esteja criando o propulsor de um avião de aeromodelismo controlado por rádio. O diâmetro geral do propulsor é de 34,0 cm e o diâmetro da montagem do cubo é de 5,5 cm (Figura 14–53). O propulsor gira a 1.700 rpm e o aerofólio selecionado para a seção transversal do propulsor atinge sua eficiência máxima a um ângulo de ataque de 14°. Quando o avião voa a 30 mi/h (13,4 m/s), calcule o ângulo de inclinação da pá da raiz até a ponta da pá de forma que $\alpha = 14°$ em toda parte ao longo da pá do propulsor.

SOLUÇÃO Devemos calcular o ângulo de inclinação da pá θ da raiz até a ponta do propulsor de forma que o ângulo de ataque seja $\alpha = 14°$ em todos os raios ao longo da pá do propulsor.

Hipóteses **1** O ar nessas baixas velocidades é incompressível. **2** Desprezamos os efeitos secundários do redemoinho e da aceleração do ar à medida que ele se aproxima do propulsor, ou seja, a magnitude de $\vec{V}_{vento}$ é considerada igual à velocidade do avião. **3** O avião voa nivelado, de forma que o eixo do propulsor é paralelo à velocidade do vento.

Análise A velocidade do ar relativa à pá é aproximada até a primeira ordem a qualquer raio usando a Equação 14–27. Uma representação dos vetores de velocidade em algum raio arbitrário r é mostrada na Figura 14–54. Da geometria vemos que

O ângulo de inclinação ao raio arbitrário r:
$$\theta = \alpha + \phi \tag{1}$$

e

$$\phi = \text{arctg}\frac{|\vec{V}_{vento}|}{|\vec{V}_{pá}|} = \text{arctg}\frac{|\vec{V}_{vento}|}{\omega r} \tag{2}$$

onde também usamos a Equação 14–26 para a velocidade de pá ao raio r. Na raiz ($r = D_{cubo}/2 = 2{,}75$ cm), a Equação 2 torna-se

$$\theta = \alpha + \phi = 14° + \text{arctg}\left[\frac{13{,}4 \text{ m/s}}{(1700 \text{ rot/min})(0{,}0275 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ rot}}{2\pi \text{ rad}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{\text{min}}\right)\right] = 83{,}9°$$

Da mesma forma, o ângulo de inclinação na ponta ($r = D_{propulsor}/2 = 17{,}0$ cm) é

$$\theta = \alpha + \phi = 14° + \text{arctg}\left[\frac{13{,}4 \text{ m/s}}{(1700 \text{ rot/min})(0{,}17 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ rot}}{2\pi \text{ rad}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{\text{min}}\right)\right] = 37{,}9°$$

Aos raios entre a raiz e a ponta, as Equações 1 e 2 são usadas para calcular θ como função de r. Os resultados são representados graficamente na Figura 14–55.

Discussão O ângulo de inclinação não é linear por causa da função arco-tangente da Equação 2.

Representamos graficamente as curvas de desempenho qualitativas para um ventilador à propulsão típico na Figura 14–56. Ao contrário dos ventiladores centrífugos, a potência no eixo tende a *diminuir* com a vazão. Além disso, a curva de eficiência se inclina mais para a direita em comparação à curva dos ventiladores centrífugos (consulte a Figura 14–8). O resultado é que a eficiência cai rapidamente para vazões em volume mais altas do que no ponto de melhor eficiência. A curva de carga líquida também diminui continuamente com a vazão (embora haja algumas ondulações), e sua forma é muito diferente daquela de um ventilador com escoamento centrífugo. Se as necessidades de carga não são tão sérias, os ventiladores do propulsor podem ser operados além do ponto de eficiência máxima para atingir vazões em volume mais altas. Como diminui a valores altos de $\dot{V}$, não há penalidade para a potência quando o ventilador funciona a vazões altas. Por esse motivo é tentador instalar um ventilador ligeiramente *subdimensionado* e fazê-lo funcionar além de seu ponto de melhor eficiência. No outro extremo, se operado *abaixo* de seu ponto de eficiência máximo, o escoamento pode ser ruidoso e instável, o que indica que pode estar *superdimensionado* (maior do que o necessário). Por esses motivos, em geral é melhor utilizar um ventilador à propulsão a ou ligeiramente acima de seu ponto de eficiência máxima.

Quando usado para movimentar o escoamento em um duto, um único ventilador com escoamento axial de único rotor é chamado de **ventilador tubo-axial** (Figura 14–57*a*). Em muitas aplicações práticas da engenharia para os ventiladores com escoamento axial, tais como ventiladores de exaustão em cozinhas, ventiladores de duto de ventilação em prédios, ventiladores com sistema de aspiração, e ventiladores de resfriamento em radiador automotivo, o escoamento em turbilhão produzido pelas pás giratórias (Figura 14–57*a*) não é problema. Mas o movimento de turbilhão e o aumento da intensidade da turbulência podem continuar por alguma distância a jusante, e não há aplicações nas quais o turbilhão (ou o ruído e turbulência associados a ele) seja altamente indesejável. Os exemplos incluem ventiladores de túnel de vento, ventiladores de torpedos e alguns especializados para ventilação de eixo de mina. Existem dois projetos básicos que eliminam bastante o turbilhão. O primeiro deles funciona com adição de um segundo rotor que gira na *direção oposta* em série com o rotor existente para formar um par de pás girando no sentido contrário. Tal projeto é denominado **ventilador com escoamento axial de rotação contrária** (Figura 14–57*b*). O turbilhão causado pelo rotor a montante é cancelado por um turbilhão oposto causado pelo rotor a jusante. O segundo deles é um conjunto de **pás do estator** que pode ser adicionado a montante ou a jusante do rotor giratório. Como o nome implica, as pás do estator são aletas do difusor *fixas* (não giram) que simplesmente redirecionam o fluido. Um projeto de escoamento axial com um conjunto de pás do rotor *e* um conjunto de pás do estator chamadas **aletas** (o **estator**) é determinado **ventilador axial de aletas** (Figura 14–57*c*). O projeto da pá do estator do ventilador axial de aletas é muito mais simples e econômico para implementar do que o projeto do ventilador com escoamento axial com rotação contrária.

O fluido em turbilhão a jusante de um ventilador tubo-axial desperdiça energia cinética e tem um alto nível de turbulência; o ventilador axial por pás recupera parcialmente essa energia cinética desperdiçada e reduz o nível de turbulência. Assim, os ventiladores axiais por pás são mais silenciosos e mais eficientes quanto à energia do que os tubo-axiais. Um ventilador com escoamento axial e rotação contrária adequadamente projetado pode ser ainda mais silencioso e eficiente quanto à energia. Além disso, como existem dois conjuntos de pás giratórias, uma elevação maior da pressão pode ser obtida com o projeto de rotação contrária. A construção de um ventilador com escoamento axial de rotação contrária é mais complexa, obviamente, exigindo dois motores sincronizados ou uma caixa de engrenagens.

Os ventiladores com escoamento axial podem ser movidos à esteira ou por transmissão direta. O motor de um ventilador axial por pás e transmissão direta é montado na metade do duto. É prática comum (e bom projeto) utilizar *pás de*

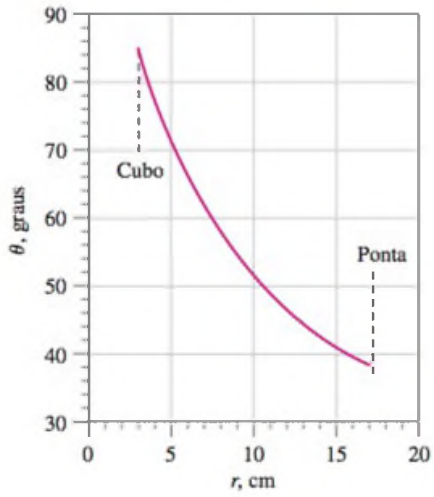


FIGURA 14–55
O ângulo de inclinação da pá como função do raio para o propulsor do Exemplo 14–7

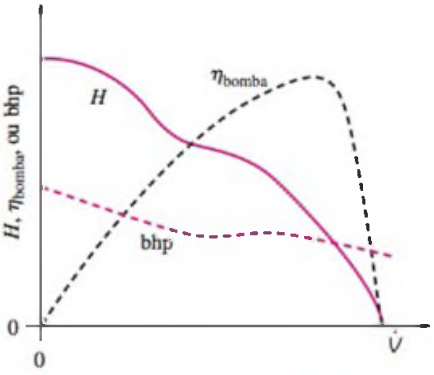


FIGURA 14–56
Curvas de desempenho de ventilador típicas para um ventilador por propulsor (escoamento axial).

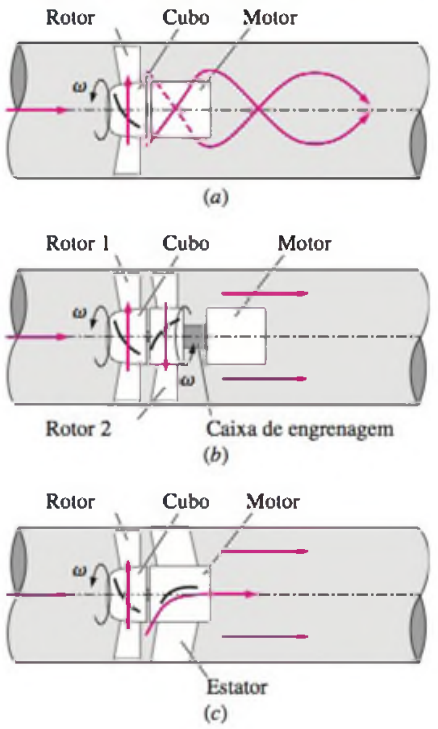


FIGURA 14–57
Um *ventilador tubo-axial* (*a*) impõe um turbilhão ao fluido de saída enquanto (*b*) um *ventilador com escoamento axial de rotação contrária* e (*c*) um *ventilador com escoamento axial e pás* foram desenvolvidos para remover o turbilhão.

estator para fornecer suporte físico ao motor. As fotos de um ventilador tubo-axial de transmissão por esteira e de um ventilador axial por pás de transmissão direta são fornecidas na Figura 14–58. As pás do estator do ventilador axial por pás podem ser vistas atrás (a jusante) das pás do rotor da Figura 14–58*b*. Um projeto alternativo seria colocar as pás do estator a *montante* do rotor, impondo um **pré-turbilhão** ao fluido. O turbilhão causado pelas pás giratórias do rotor remove esse pré-turbilhão.

A concepção da forma das pás é um processo bastante objetivo em todos esses projetos de ventilador com escoamento axial, pelo menos no primeiro pedido. Por questões de simplicidade, vamos considerar pás finas (por exemplo, feitas de folha de metal) e não em forma de aerofólio. Considere, por exemplo, um ventilador com escoamento axial por pás, com pás de rotor a montante das pás do estator (Figura 14–59). A distância entre o rotor e o estator foi exagerada nesta figura para permitir que os vetores de velocidade sejam desenhados entre as pás. Consideramos que o raio do cubo do estator é igual ao raio do cubo do rotor, de modo que a área de escoamento transversal permaneça constante. Como já fizemos antes com o rotor, consideramos a seção transversal de uma pá de rotor à medida que ela passa verticalmente na nossa frente. Como existem várias pás, a próxima passará logo depois. A um raio r selecionado, fazemos a aproximação bidimensional de que as pás passam por uma *série infinita* de pás bidimensionais chamada de **fileira de pás** ou **cascata**. Uma hipótese semelhante é considerada para as pás do estator, embora elas sejam fixas. Ambas as fileiras de pás estão representadas na Figura 14–59.

Na Figura 14–59*b* os vetores de velocidade são vistos sob um sistema de referência absoluto, ou seja, a referência de um observador fixo que olha horizontalmente o ventilador com escoamento axial por pás. O escoamento entra pela esquerda à velocidade V_e na direção horizontal (axial). A fileira de pás do rotor se move a velocidade constante ωr verticalmente para cima nessa estrutura de referência, como está indicado. O escoamento é girado por essas pás móveis e sai do bordo de fuga para cima e à direita (como indica a Figura 14–59*b*) como o vetor $\vec{V}_{rt}$. (A notação de subscrito indica o bordo de fuga do rotor.) Para encontrarmos a magnitude e direção de $\vec{V}_{rt}$, redesenhamos as linhas da pá e os vetores em uma estrutura de referência *relativa* (a estrutura de referência da pá giratória do rotor) na Figura 14–59*c*. Essa estrutura de referência é obtida pela subtração da velocidade de pá do rotor (adicionando uma magnitude de vetor ωr apontando para baixo verticalmente) de todos os vetores de velocidade. Como mostra a Figura 14–59*c*, o vetor de velocidade relativa ao bordo de ataque da pá do rotor é $\vec{V}_{e,\,relativa}$, calculado como a soma do $\vec{V}_e$ e o vetor descendente de magnitude ωr. Ajustamos a inclinação da pá do rotor de forma que $\vec{V}_{e,\,relativa}$ fique paralelo (tangencial) ao bordo de ataque da pá do rotor nessa seção transversal.

FIGURA 14–58
Ventiladores com escoamento axial: (*a*) um ventilador tubo-axial de transmissão por esteira sem pás de estator e (*b*) um ventilador axial por pás e transmissão direta com pás de estator para reduzir o turbilhão e melhorar a eficiência.
(a) © Barry Blower, ASC LP. Usada com permissão. (b) Foto cortesia da Howden Buffalo, Inc. Usada com permissão.

O escoamento é girado pela pá do rotor. Consideramos que o escoamento que sai da pá do rotor é paralelo ao bordo de fuga da pá (da estrutura de referência relativa), como representa a Figura 14–59*c*, como vetor. Também sabemos que o componente horizontal (axial) de $\vec{V}_{\text{rt, relativa}}$ deve ser igual a $\vec{V}_{\text{e}}$ para conservar a massa. Observe que estamos considerando o escoamento incompressível e a área de escoamento constante normal à página da Figura 14–59. Assim, o componente axial da velocidade em todas as partes deve ser igual a $\vec{V}_{\text{e}}$. Essa informação estabelece a magnitude do vetor $\vec{V}_{\text{rt, relativa}}$, que não é igual à magnitude de $\vec{V}_{\text{rt, relativa}}$. Voltando à estrutura de referência absoluta da Figura 14–59*b*, a velocidade absoluta $\vec{V}_{\text{rt}}$ é calculada como a soma vetorial de $\vec{V}_{\text{rt, relativa}}$ e o vetor verticalmente ascendente de magnitude ωr.

Finalmente, a pá do estator foi criada de forma que $\vec{V}_{\text{rt}}$ fique paralelo ao bordo de ataque da pá do estator. O escoamento é girado novamente, desta vez pela pá do estator. Seu bordo de fuga é horizontal, de modo que o escoamento saia axialmente (sem nenhum turbilhão). A velocidade final do escoamento de saída deve ser idêntica à velocidade do escoamento de entrada pela conservação de massa se considerarmos o escoamento incompressível e a área de escoamento constante normal à página. Em outras palavras, $\vec{V}_{\text{s}} = \vec{V}_{\text{e}}$. Por questões de inteireza, a velocidade do escoamento de saída da estrutura de referência relativa é representada na Figura 14–59*c*. Também vemos que $\vec{V}_{\text{s, relativa}} = \vec{V}_{\text{e, relativa}}$.

Agora imagine a repetição dessa análise para *todos* os raios do cubo até a ponta. Assim como no rotor, poderíamos criar nossas pás com alguma *torção*, uma vez que o valor de ωr aumenta com o raio. Um aperfeiçoamento modesto da eficiência pode ser obtido a condições de projeto usando aerofólios em vez de pás de folha de metal; o aperfeiçoamento é mais significativo a condições fora de projeto.

Se houver, digamos, sete pás de rotor em um ventilador axial por pás, quantas pás de estator haveria? A princípio você poderia dizer sete, para que o estator coincidisse com o rotor – mas esse seria um projeto muito ruim! Por quê? Porque no instante em que uma pá do rotor passa diretamente na frente de uma pá do estator, todos os seus seis irmãos fariam a mesma coisa. O escoamento de cada pá de estator seria simultaneamente perturbado na esteira de uma pá do rotor. O escoamento resultante seria pulsante e ruidoso, e toda a unidade sofreria sérias vibrações. Em vez disso, uma boa prática de projeto seria selecionar o número de pás do estator, para que ele não tivesse nenhum *denominador comum* com o número de pás do rotor. Combinações como sete e oito, sete e nove, seis e sete ou nove e onze são boas opções. Combinações como oito e dez (denominador comum de dois) ou nove e doze (denominador comum de três) *não* são boas opções.

Representamos graficamente as curvas de desempenho de um ventilador com escoamento axial por pás na Figura 14–60. As formas gerais são muito semelhantes àquelas de um ventilador com rotor (Figura 14–56) e você deve consultar nossa discussão sobre isso. Afinal de contas, um ventilador com escoamento axial por pás é realmente igual a um ventilador com escoamento tubo-axial, exceto pelas pás de estator adicionais que endireitam o escoamento e tendem a suavizar as curvas de desempenho.

Como já foi dito, um ventilador com escoamento axial fornece uma vazão em volume alta, mas uma elevação de pressão relativamente baixa. Algumas aplicações exigem alta vazão *e* alta elevação de pressão. Em tais casos, vários pares de estator–rotor podem ser combinados *em série*, em geral com eixo e cubo comuns (Figura 14–61). Quando dois ou mais pares de rotor–estator se combinam como este, nós os chamamos de **bomba com escoamento axial de vários estágios**. Uma análise da fileira de pás semelhante àquela da Figura 14–59 é aplicada a cada estágio posterior. Os detalhes da análise podem se complicar, porém, por causa dos efeitos da compressibilidade e porque a área de escoamento do cubo para a ponta pode não permanecer constante. Em um **compressor com escoamento axial de vários estágios**, por exemplo, a área de escoamento diminui a jusante. As pás de cada estágio posterior ficam menores à medida em que o ar é mais comprimido. Em uma **turbina com escoamento axial de vários estágios**, a área de escoamento

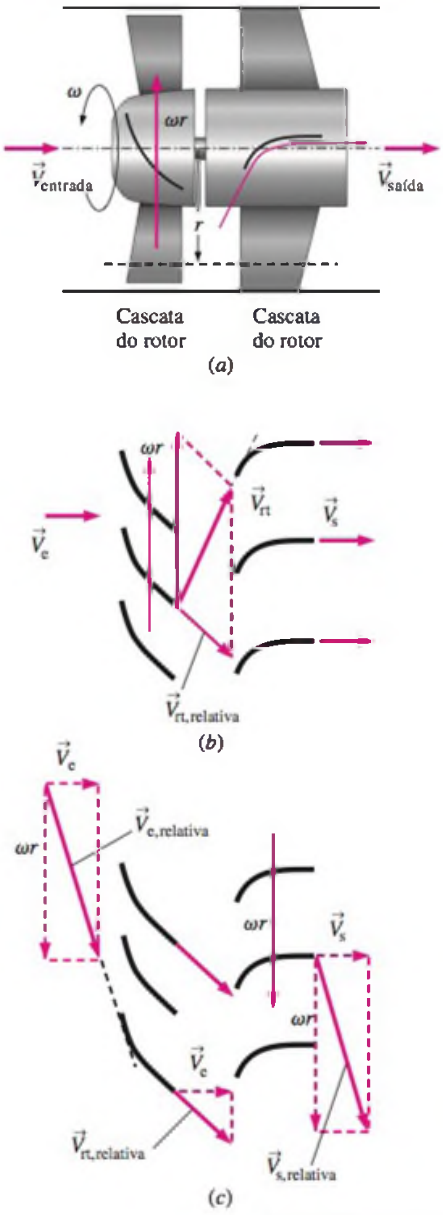


FIGURA 14–59
A análise de um ventilador com escoamento axial por pás de raio *r* usando a aproximação de fileira de pás bidimensional; (*a*) visualização geral, (*b*) estrutura de referência absoluta e (*c*) estrutura de referência relativa às pás giratórias do rotor.

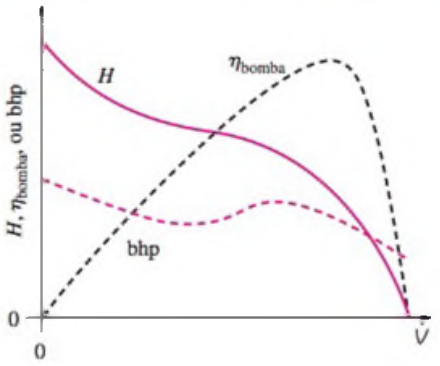


FIGURA 14–60
Curvas de desempenho de ventilador típicas para um ventilador com escoamento axial por pás.

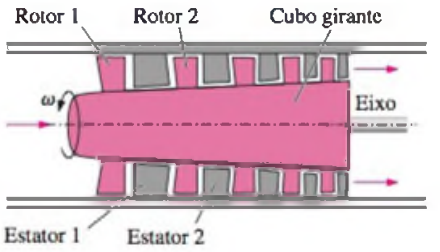


FIGURA 14–61
Uma bomba com escoamento axial de vários estágios consiste em dois ou mais pares de rotor e estator.

em geral *aumenta* a jusante à medida que a pressão se perde em cada estágio sucessivo da turbina.

Um exemplo conhecido de uma turbomáquina que utiliza os compressores de escoamento axial de vários estágios e as turbinas com escoamento axial de vários estágios é o **motor turboventilador** usado para alimentar os modernos aviões comerciais. Uma representação esquemática em corte de um motor turboventilador é mostrada na Figura 14–62. Parte do ar passa através do ventilador, que fornece empuxo da mesma forma que um propulsor. O restante do ar passa através de um compressor de baixa pressão, de um compressor de alta pressão, de uma câmara de combustão, de uma turbina de alta pressão e, finalmente, de uma turbina de baixa pressão. O ar e os produtos da combustão são descarregados a alta velocidade para fornecer empuxo maior ainda. Os códigos da dinâmica dos fluidos computacional (CFD) obviamente são muito úteis no projeto dessas turbomáquinas complexas (Capítulo 15).

EXEMPLO 14–8 **Projeto de um Ventilador com Escoamento Axial por Pás para um Túnel de Vento**

Um ventilador com escoamento axial por pás é criado para alimentar um túnel de vento. Não deve haver nenhum turbilhão no escoamento a jusante do ventilador. Resolve-se que as pás do estator devem ficar *a montante* das pás do rotor (Figura 14–63) para proteger as pás do rotor contra danos por parte de objetos que poderiam ser soprados acidentalmente para dentro do ventilador. Para reduzir as despesas, as pás do estator e do rotor devem ser feitas de folha de metal. O bordo de ataque de cada pá do estator é alinhado axialmente ($\beta_{sl} = 0{,}0°$) e seu bordo de fuga está a um ângulo de $\beta_{st} = 60{,}0°$ do eixo, como mostra a representação. (A notação de subscrito "sl" indica o bordo de ataque do estator e "st" indica o bordo de fuga do estator.) Existem 16 pás de estator. A condições de projeto, a velocidade de escoamento axial através das pás é 47,1 m/s e o rotor gira a 1.750 rpm. Ao raio $r = 0{,}40$ m, calcule os ângulos dos bordos de ataque e defesa da pá do rotor e represente a forma da pá. Quantas pás de rotor deve haver?

SOLUÇÃO Para determinadas condições de escoamento e forma de pá do estator a determinado raio, precisamos projetar a pá do rotor. Devemos calcular especificamente os ângulos dos bordos de ataque e defesa da pá do rotor e representar sua forma. Também precisamos resolver quantas pás do rotor devem ser construídas.

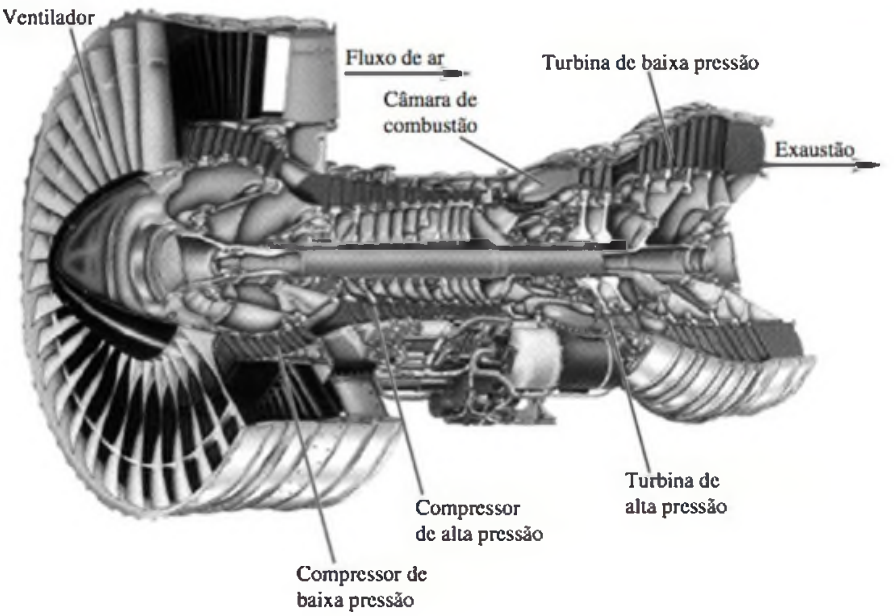


FIGURA 14–62
Motor turboventilador Pratt & Whitney PW4000; um exemplo de turbomáquina com escoamento axial de vários estágios.
Cortesia da Pratt & Whitney. Usado com permissão.

Hipóteses 1 O ar é quase incompressível. **2** A área de escoamento entre o cubo e a ponta é constante. **3** A análise da fileira de pás bidimensionais é apropriada.
Análise Em primeiro lugar analisamos o escoamento através do estator sob uma estrutura de referência absoluta, usando a aproximação bidimensional de uma cascata (fileiras de pás) de pás do estator (Figura 14–64). O escoamento entra axialmente (horizontalmente) e é girado a 60,0° na descendente. Como o componente axial da velocidade deve permanecer constante para conservar a massa, a magnitude da velocidade que sai do bordo de fuga do estator, $\vec{V}_{es}$, é calculada como

$$V_{es} = \frac{V_e}{\cos \beta_{es}} = \frac{47{,}1 \text{ m/s}}{\cos(60{,}0°)} = 94{,}2 \text{ m/s} \quad (1)$$

A direção de $\vec{V}_{es}$ é considerada a do bordo de fuga do estator. Em outras palavras, consideramos que o escoamento gira perfeitamente através da fileira de pás e sai paralelamente ao bordo de fuga da pá, como mostra a Figura 14–64. Convertemos $\vec{V}_{es}$ em estrutura de referência *relativa* que se move com as pás do rotor. Ao raio de 0,40 m, a velocidade tangencial das pás do rotor é

$$u_\theta = \omega r = (1750 \text{ rot/min})\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rot}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)(0{,}40 \text{ m}) = 73{,}30 \text{ m/s} \quad (2)$$

Como a fileira de pás do rotor se move na ascendente na Figura 14–63, adicionamos uma velocidade *descendente* com a magnitude dada pela Equação 2 para traduzir $\vec{V}_{es}$ na estrutura de referência giratória representada na Figura 14–65. O ângulo do bordo de ataque do rotor, β_{rl}, é calculado usando a trigonometria

$$\beta_{rl} = \text{arctg}\,\frac{\omega r + V_e \text{ tg } \beta_{st}}{V_e}$$

$$= \text{arctg}\,\frac{(73{,}30 \text{ m/s}) + (47{,}1 \text{ m/s}) \text{ tg}(60{,}0°)}{47{,}1 \text{ m/s}} = 73{,}09° \quad (3)$$

O ar agora deve ser girado pela fileira de pás do rotor de forma a sair do bordo de fuga da pá do rotor a um ângulo zero (axialmente, sem turbilhão) sob uma estrutura de referência absoluta. Isso determina o ângulo do bordo de fuga do rotor, β_{rt}. Especificamente, quando adicionamos uma velocidade a *montante* de magnitude ωr (Equação 2) à velocidade relativa que sai do bordo de fuga do rotor, $\vec{V}_{rt,\,\text{relativa}}$, convertemos de volta para a estrutura de referência absoluta e obtemos $\vec{V}_{rt}$, a velocidade de saída do bordo de fuga do rotor. É essa velocidade, $\vec{V}_{rt}$, que deve ser axial (horizontal). Além disso, para conservar massa, $\vec{V}_{rt}$ deve ser igual a $\vec{V}_e$, uma vez que consideramos o escoamento incompressível. Trabalhando ao contrário construímos a $\vec{V}_{rt,\,\text{relativa}}$ da Figura 14–66. A trigonometria revela que

$$\beta_{rt} = \text{arctg}\,\frac{\omega r}{V_e} = \text{arctg}\,\frac{73{,}30 \text{ m/s}}{47{,}1 \text{ m/s}} = 57{,}28° \quad (4)$$

Concluímos que a pá do rotor nesse raio tem um ângulo de bordo de ataque de cerca de 73,1° (Equação 3) e um ângulo de bordo de fuga de cerca de 57,3° (Equação 4). Uma representação da pá do rotor nesse raio é fornecida na Figura 14–65; a curvatura total é pequena, sendo menor do que 16° entre os bordos de ataque e de defesa.

Finalmente, para evitar interação entre as esteiras da pá do estator e os bordos de ataque da pá do rotor, selecionamos o número de pás do rotor de forma que ele não seja um denominador comum do número de pás do estator. Como há 16 pás do estator, escolhemos um número como **13**, **15** ou **17** para as pás de rotor. A seleção de 14 não seria apropriada, uma vez que ela compartilha o denominador comum 2 com o número 16. A seleção de 12 seria pior, pois ela compartilha tanto 2 quanto 4 como denominadores comuns.
Discussão Podemos repetir o cálculo para todos os raios do cubo à ponta, completando o projeto de todo o rotor. Haveria torção, como já foi discutido.

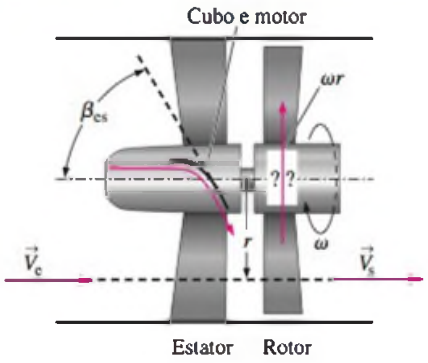


FIGURA 14–63
Diagrama do ventilador com escoamento axial por pás do Exemplo 14–8. O estator precede o rotor e a forma da pá do rotor é desconhecida — ele deve ser projetado.

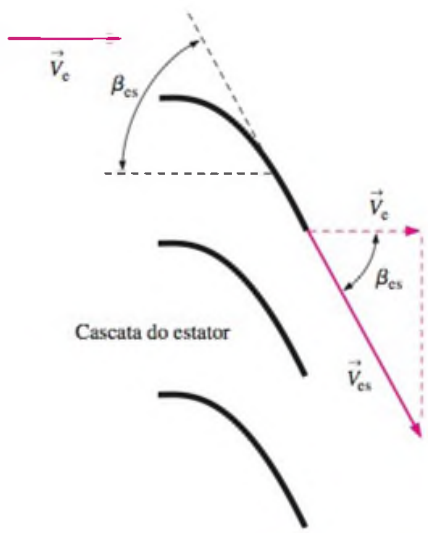


FIGURA 14–64
Análise do vetor de velocidade da fileira de pás do estator do ventilador com escoamento axial por pás do Exemplo 14–8; estrutura de referência absoluta.

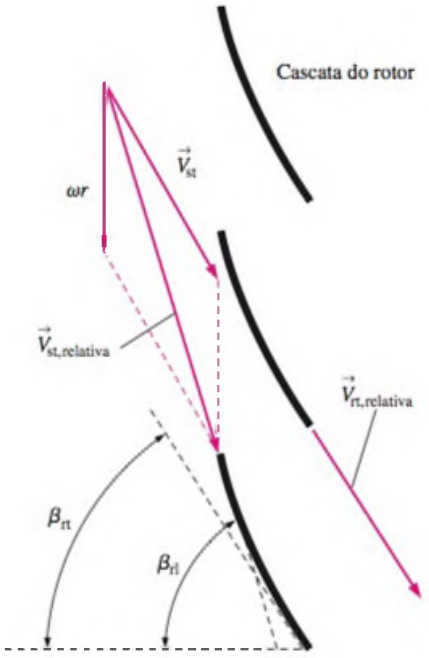


FIGURA 14–65
Análise da velocidade do bordo de ataque do estator à medida que ele é imposto ao bordo de ataque do rotor; estrutura de referência relativa.

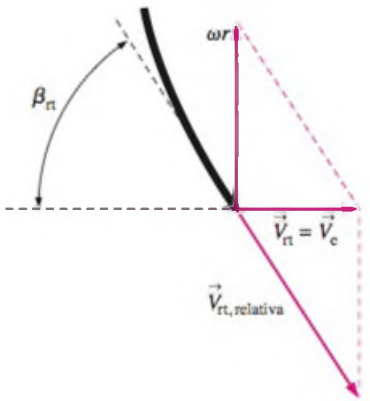


FIGURA 14–66
Análise da velocidade do bordo de fuga do rotor; estrutura de referência absoluta.

14–3 • LEIS DE SEMELHANÇA DE BOMBAS

Análise Dimensional

A turbomáquina oferece um exemplo muito prático do poder e da utilidade da *análise dimensional* (Capítulo 7). Aplicamos o *método das variáveis repetidas* ao relacionamento entre gravidade vezes a carga líquida (gH) e propriedades de bomba como vazão em volume ($\dot{V}$); algum comprimento característico, em geral o diâmetro das pás do rotor (D); altura da rugosidade da superfície da pá (ε); e a velocidade rotacional do rotor (ω) juntamente com as propriedades de fluido massa específica (ρ) e viscosidade (μ). Observe que tratamos o grupo gH como uma variável. Os grupos Pi adimensionais são mostrados na Figura 14–67; o resultado é o seguinte relacionamento envolvendo parâmetros adimensionais:

$$\frac{gH}{\omega^2 D^2} = \text{função de}\left(\frac{\dot{V}}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \tag{14–28}$$

Uma análise semelhante com potência do eixo como função das mesmas variáveis resulta em

$$\frac{\text{bhp}}{\rho \omega^3 D^5} = \text{função de}\left(\frac{\dot{V}}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \tag{14–29}$$

O segundo parâmetro adimensional (ou grupo Π) no lado direito das Equações 14–28 e 14–29 obviamente é um *número de Reynolds,* uma vez que ωD é uma velocidade característica

$$\text{Re} = \frac{\rho \omega D^2}{\mu}$$

O terceiro Π da direita é o *parâmetro adimensional da rugosidade.* Os três novos grupos adimensionais dessas duas equações são símbolos dados e seus nomes são os seguintes:

Parâmetros de bomba adimensionais:

$$C_H = \text{Coeficiente de carga} = \frac{gH}{\omega^2 D^2}$$

$$C_Q = \text{Coeficiente de capacidade} = \frac{\dot{V}}{\omega D^3} \tag{14–30}$$

$$C_P = \text{Coeficiente de potência} = \frac{\text{bhp}}{\rho \omega^3 D^5}$$

Observe o subscrito Q do símbolo que significa o coeficiente de capacidade. Ele vem da nomenclatura encontrada em muitos livros sobre mecânica dos fluidos e turbomáquinas que utilizam Q e não $\dot{V}$ como a vazão em volume através da bomba. Usamos a notação C_Q por questões de consistência com a convenção da turbomáquina, embora usemos $\dot{V}$ para a vazão em volume para evitar confusão com a transferência de calor.

Quando os líquidos são bombeados, a cavitação pode ser um problema, e precisamos de outro parâmetro adimensional relacionado à carga de sucção positiva líquida necessária. Felizmente, podemos simplesmente substituir a $\text{NPSH}_{\text{necessário}}$ no lugar de H na análise dimensional, uma vez que elas têm dimensões idênticas (comprimento). O resultado é

$$C_{\text{NPSH}} = \text{Coeficiente de carga de sucção} = \frac{g\text{NPSH}_{\text{necessário}}}{\omega^2 D^2} \tag{14–31}$$

Se necessário, outras variáveis, como espessura da lacuna entre as pontas da pá e a carcaça da bomba e espessura da pá, podem ser adicionadas à análise dimensional. Felizmente, essas variáveis em geral são menos importantes e não são consideradas aqui. Na verdade, você pode argumentar que duas bombas, a rigor, não são *geometricamente semelhantes*, a menos que a espessura da lacuna, a espessura da pá e a rugosidade de superfície sejam escaladas geometricamente.

Os relacionamentos derivados pela análise dimensional, como as Equações 14–28 e 14–29, podem ser interpretados da seguinte maneira: caso duas bombas, A e B, sejam *geometricamente semelhantes* (a bomba A é geometricamente proporcional à bomba B, embora elas tenham tamanhos diferentes), e se os Π's *independentes* são iguais entre si (neste caso se $C_{Q,A} = C_{Q,B}$, $\mathrm{Re}_A = \mathrm{Re}_B$ e $\varepsilon_A/D_A = \varepsilon_B/D_B$), então os Π's *dependentes* certamente também são iguais entre si. Em particular $C_{H,A} = C_{H,B}$ da Equação 14–28 e $C_{P,A} = C_{P,B}$ da Equação 14–29. Se tais condições forem estabelecidas, diz-se que as duas bombas são *dinamicamente semelhantes* (Figura 14–68). Quando a semelhança dinâmica é atingida, diz-se que o ponto operacional da curva de desempenho da bomba A e o ponto operacional correspondente da curva de desempenho da bomba B são **homólogos**.

O requisito de igualdade de todos os três parâmetros independentes têm uma certa elasticidade. Se os números de Reynolds da bomba A e da bomba B excederem vários milhares, existem condições de escoamento dentro da bomba. Acontece que para escoamento turbulento, se os valores de Re_A e Re_B não forem iguais, mas não estiverem muito distantes um do outro, a similaridade entre as duas bombas ainda será uma aproximação plausível. Essa situação é chamada de **independência do número de Reynolds**. (Observe que se as bombas operarem no regime *laminar*, o número de Reynolds em geral deve permanecer como um parâmetro de escala.) Na maioria dos casos de análise de engenharia de turbomáquinas prática, o efeito das diferenças do parâmetro de rugosidade também é pequeno, a menos que as diferenças de rugosidade sejam grandes, como quando se escala de uma bomba muito pequena uma bomba muito grande (ou vice-versa). Assim, para muitos problemas práticos, podemos negligenciar o efeito de Re e ε/D. As Equações 14–28 e 14–29 podem ser reduzidas a

$$C_H \cong \text{função de } C_Q \qquad C_P \cong \text{função de } C_Q \tag{14–32}$$

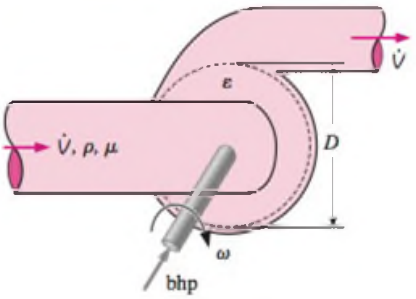
Como sempre, a análise dimensional não pode prever a *forma* dos relacionamentos funcionais da Equação 14–32, mas como esses relacionamentos são obtidos para determinada bomba, eles podem ser generalizados para bombas geometricamente similares com diâmetros diferentes, operam a velocidades rotacionais e vazões diferentes e operam mesmo com fluidos de densidade e viscosidade diferente.

Transformamos a Equação 14–5 para a eficiência de bomba em uma função dos parâmetros adimensionais da Equação 14–30,

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\rho(\dot{V})(gH)}{\text{bhp}} = \frac{\rho(\omega D^3 C_Q)(\omega^2 D^2 C_H)}{\rho \omega^3 D^5 C_P} = \frac{C_Q C_H}{C_P} = \text{função de } C_Q \tag{14–33}$$

Como η_{bomba} já não tem dimensão, esse é outro parâmetro de bomba adimensional propriamente dito. Observe que como a Equação 14–33 revela que η_{bomba} pode ser formado pela combinação de três outros Π's, η_{bomba} não é *necessário* para escalar a bomba. Entretanto, certamente esse é um parâmetro *útil*. Como C_H, C_P e η_{bomba} são funções apenas de C_Q, quase sempre representamos graficamente esses três parâmetros como funções de C_Q na mesma representação, gerando um conjunto de **curvas de desempenho de bomba adimensionais**. Um exemplo é dado na Figura 14–69 para o caso de uma bomba centrífuga típica. As formas da curva de outros tipos de bombas, obviamente, seriam diferentes.

As leis da similaridade simplificadas das Equações 14–32 e 14–33 se dividem quando o protótipo em escala total é significativamente maior do que seu modelo (Figura 14–70); o desempenho do protótipo em geral é *melhor*. Existem vários



$gH = f(\dot{V}, D, \varepsilon, \omega, \rho, \mu)$

$k = n - j = 7 - 3 = 4$ Π's esperados

$$\Pi_1 = \frac{gH}{\omega^2 D^2} \qquad \Pi_2 = \frac{\dot{V}}{\omega D^3}$$

$$\Pi_3 = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \qquad \Pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$$

FIGURA 14–67
Análise dimensional de uma bomba.

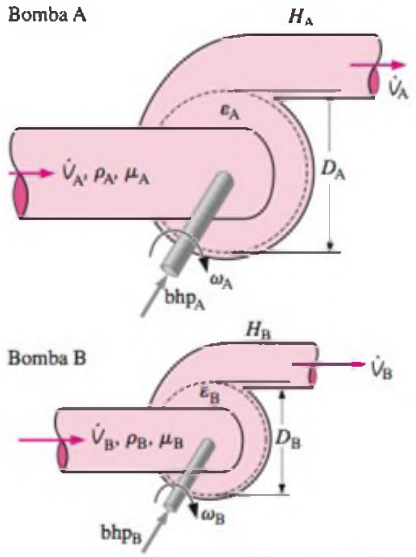


FIGURA 14–68
A análise dimensional é útil para escalar duas bombas *geometricamente semelhantes*. Se todos os parâmetros adimensionais da bomba A forem equivalentes àqueles da bomba B, as duas bombas serão *dinamicamente semelhantes*.

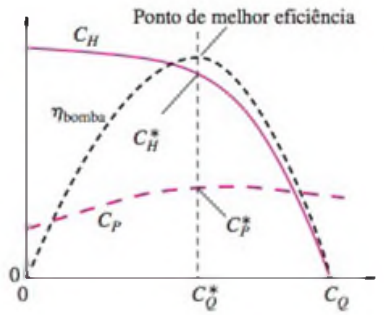


FIGURA 14–69
Quando representadas graficamente em termos de parâmetros de bomba adimensionais, as curvas de desempenho de todas as bombas de uma família de bombas geometricamente semelhantes se incorporam em um único conjunto de *curvas de desempenho de bomba não dimensionais*. Os valores no melhor ponto de eficiência são indicados por asteriscos.

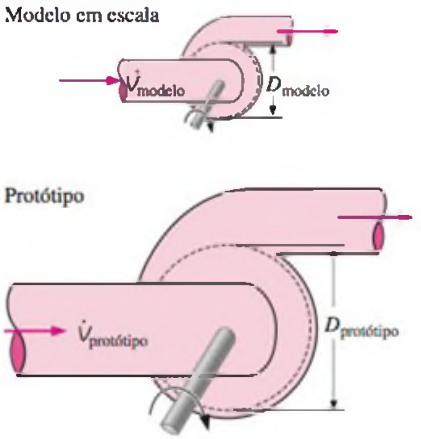


FIGURA 14–70
Quando um modelo em pequena escala é testado para prever o desempenho de uma bomba-protótipo em escala total, a eficiência medida do modelo em geral é um pouco *mais baixa* do que aquela do protótipo. As equações empíricas de correção como a Equação 14–34 foram desenvolvidas para considerar o aperfeiçoamento da eficiência da bomba com o tamanho dela.

motivos para isso: a bomba-protótipo quase sempre opera a números altos de Reynolds que não podem ser atingidos em laboratório. Sabemos pelo diagrama de Moody que o fator de atrito diminui com Re, assim como a espessura da camada de fronteira. Assim, a influência das camadas de fronteira viscosas é menos significativa à medida que o tamanho da bomba aumenta, uma vez que as camadas de fronteira ocupam uma porcentagem menos significativa da trajetória de escoamento através do rotor. Além disso, a rugosidade relativa (ε/D) sobre as superfícies das pás do rotor de protótipo pode ser significativamente menor do que aquela das pás da bomba-modelo, a menos que as superfícies sejam micropolidas. Finalmente, as bombas em escala total grande têm folgas de ponta menores com relação ao diâmetro da pá e, portanto, as perdas e o vazamento de ponta são menos significativos. Algumas equações empíricas foram desenvolvidas para considerar o aumento de eficiência entre um modelo pequeno e um protótipo em escala total. Uma dessas equações foi sugerida por Moody (1926) para as turbinas, mas também pode ser usada como correção de primeira ordem das bombas

Equação de Moody para a correção de eficiência das bombas:

$$\eta_{\text{bomba, protótipo}} \cong 1 - (1 - \eta_{\text{bomba, modelo}})\left(\frac{D_{\text{modelo}}}{D_{\text{protótipo}}}\right)^{1/5} \tag{14–34}$$

Velocidade Específica de Bomba

Outro parâmetro útil adimensional chamado **velocidade específica de bomba** (N_{Sp}) é formado por uma combinação de parâmetros C_Q e C_H:

Velocidade específica de bomba:

$$N_{Sp} = \frac{C_Q^{1/2}}{C_H^{3/4}} = \frac{(\dot{V}/\omega D^3)^{1/2}}{(gH/\omega^2 D^2)^{3/4}} = \frac{\omega \dot{V}^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \tag{14–35}$$

Se todos os engenheiros observassem suas unidades com cuidado, o N_{Sp} sempre seria listado como um parâmetro adimensional. Infelizmente, os engenheiros acostumaram-se a usar unidades inconsistentes na Equação 14–35, o que transforma o parâmetro adimensional perfeito N_{Sp} em uma quantidade dimensional desajeitada (Figura 14–71). Mais confusão ainda se forma porque alguns engenheiros preferem unidades de rotações por minuto (rpm) para a velocidade rotacional, enquanto outros utilizam rotações por segundo (Hz), esta última mais comum na Europa. Além disso, os engenheiros dos Estados Unidos em geral ignoram a constante gravitacional na definição de N_{Sp}. Neste livro, adicionamos os subscritos "Eur" ou "EUA" para N_{Sp} com a finalidade de distinguir entre as formas dimensional e não dimensional da velocidade específica das bombas. Nos Estados Unidos, é comum escrever H em unidades de pés (a carga líquida é expressa como uma altura de coluna equivalente do fluido que está sendo bombeado), $\dot{V}$ em unidades de galões por minuto (gpm), e a taxa de rotação em termos de n (rpm) em vez de ω (rad/s). Usando a Equação 14–35 definimos

Velocidade específica de bomba, unidades comuns nos EUA

$$N_{\text{Sp, EUA}} = \frac{(n, \text{rpm})(\dot{V}, \text{gpm})^{1/2}}{(H, \text{pé})^{3/4}} \tag{14–36}$$

Na Europa é comum escrever H em unidades de metros (e incluir $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ na equação), $\dot{V}$ em unidades de m^3/s e a taxa de rotação $\dot{n}$ em unidades de rotações por *segundo* (Hz), em vez de ω (rad/s) ou $\dot{n}$ (rpm). Usando a Equação 14–35 definimos

Velocidade específica de bomba, unidades comuns na Europa:

$$N_{\text{Sp, Eur}} = \frac{(n, \text{Hz})(\dot{V}, \text{m}^3/\text{s})^{1/2}}{(gH, \text{m}^2/\text{s}^2)^{3/4}} \tag{14–37}$$

As conversões entre essas três formas de velocidade específica de bomba são fornecidas como taxas na Figura 14–72. Quando trabalhar como engenheiro, você precisará saber com certeza qual forma de velocidade específica de bomba está sendo usada, embora nem sempre isso esteja óbvio.

Tecnicamente, a velocidade específica de bomba poderia ser aplicada a qualquer condição operacional e seria apenas outra função de C_Q. Entretanto, em geral esse não é o modo como ela é usada. Em vez disso, é comum definir a velocidade específica de bomba em *apenas um ponto operacional*, ou seja, o ponto de melhor eficiência (BEP) da bomba. O resultado é um único número que caracteriza a bomba.

A velocidade específica da bomba é usada para caracterizar a operação de uma bomba em suas condições ideais (ponto de melhor eficiência) e é útil para a seleção preliminar de bomba.

Como está representado na Figura 14–73, as bombas centrífugas têm desempenho ideal para N_{Sp} próximo de 1, enquanto as bombas de escoamento misto e axial têm melhor desempenho a N_{Sp} próximo de 2 e 5, respectivamente. Se N_{Sp} é menor do que cerca de 1,5, uma bomba centrífuga é a melhor opção. Se N_{Sp} estiver entre cerca de 1,5 e 3,5, uma bomba com escoamento misto é uma opção melhor. Quando N_{Sp} é maior do que cerca de 3,5, uma bomba axial deve ser usada. Esses intervalos são indicados na Figura 14–73 em termos de N_{Sp}, $N_{Sp,\ EUA}$ e $N_{Sp,\ Eur}$. A representação gráfica também oferece os tipos de pás para referência.

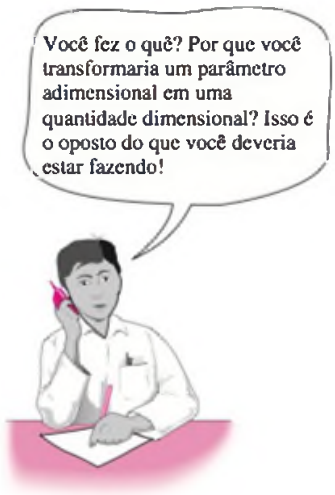


FIGURA 14–71
Embora a velocidade específica de bomba seja um parâmetro adimensional, é prática comum escrevê-la como uma quantidade dimensional usando um conjunto inconsistente de unidades.

EXEMPLO 14–9 Usando a Velocidade Específica de Bomba para o Projeto Preliminar de Bombas

Uma bomba está sendo criada para fornecer 320 gpm de gasolina à temperatura ambiente. A carga líquida necessária é 23,5 pés (de gasolina). Já foi determinado que o eixo da bomba deve girar a 1.170 rpm. Calcule a velocidade específica de bomba na forma dimensional e na forma comum nos EUA. Com base em nosso resultado, resolva qual tipo de bomba dinâmica seria a mais adequada para essa aplicação.

SOLUÇÃO Devemos calcular a velocidade específica de bomba e, em seguida, determinar se uma bomba centrífuga, com escoamento misto ou axial seria a melhor opção para esta aplicação em particular.

Hipóteses A bomba opera próximo de seu ponto de melhor eficiência. **2** A eficiência máxima *versus* a curva de velocidade específica segue a Figura 14–73 de forma relativamente boa.

Análise Em primeiro lugar, devemos calcular a velocidade específica da bomba em unidades comuns nos EUA

$$N_{Sp,\ EUA} = \frac{(1170\ \text{rpm})(320\ \text{gpm})^{1/2}}{(23{,}5\ \text{pés})^{3/4}} = \mathbf{1960} \qquad (1)$$

Convertemos em velocidade específica de bomba normalizada usando o fator de conversão dado na Figura 14–72

$$N_{Sp} = N_{Sp,\ EUA}\left(\frac{N_{Sp}}{N_{Sp,\ EUA}}\right) = 1960(3{,}658 \times 10^{-4}) = \mathbf{0{,}717} \qquad (2)$$

Usando as Equações 1 ou 2, Figura 14–73 mostra que uma **bomba de escoamento centrífugo é a opção mais adequada**.

Discussão Observe que as propriedades do fluido nunca entraram em nossos cálculos. O fato de estarmos bombeando gasolina e não algum outro líquido como a água é irrelevante. Entretanto, a potência de freio necessária para fazer funcionar a bomba *depende* da densidade do fluido.

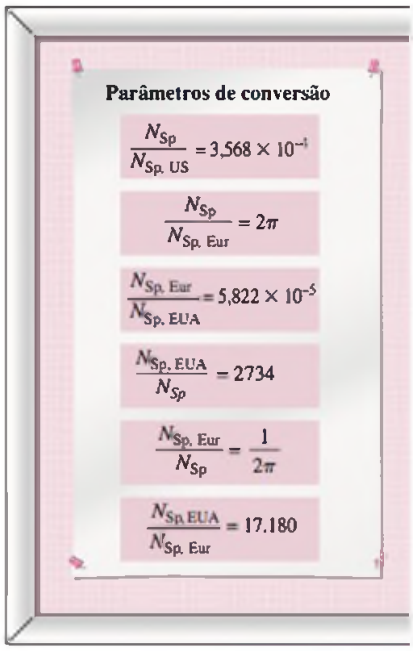


FIGURA 14–72
Conversões entre as definições adimensionais, convencionadas nos EUA e na Europa para a velocidade específica de bomba. Os valores numéricos são dados até quatro dígitos significativos. As conversões para $N_{Sp,\ EUA}$ assumem a gravidade padrão da Terra.

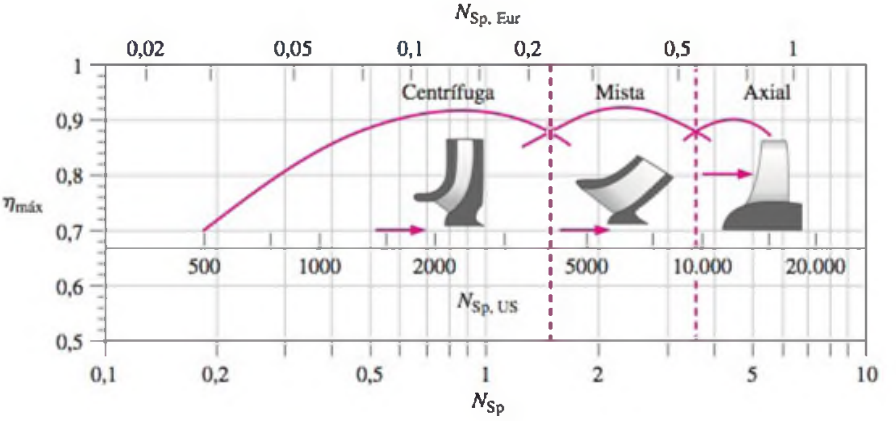


FIGURA 14–73
A eficiência máxima como função da velocidade específica da bomba para os três tipos principais de bombas dinâmicas. As escalas horizontais mostram a velocidade específica de bomba não dimensional (N_{Sp}), a velocidade específica de bomba em unidades comuns nos EUA ($N_{Sp,\ EUA}$) e a velocidade específica de bomba em unidades comuns na Europa ($N_{Sp,\ Eur}$).

Leis de Semelhança

Desenvolvemos grupos adimensionais úteis para relacionar duas bombas geométricas e dinamicamente similares. É conveniente resumir os relacionamentos de similaridade como *relações*. Alguns autores chamam esses relacionamentos de **regras de similaridade**, enquanto outros os chamam de **leis de semelhança**. Para dois estados homólogos quaisquer A e B

Lei de semelhança:

$$\frac{\dot{V}_B}{\dot{V}_A} = \frac{\omega_B}{\omega_A}\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^3 \qquad (14\text{–}38a)$$

$$\frac{H_B}{H_A} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2 \qquad (14\text{–}38b)$$

$$\frac{\text{bhp}_B}{\text{bhp}_A} = \frac{\rho_B}{\rho_A}\left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^3\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^5 \qquad (14\text{–}38c)$$

As Equações 14–38 aplicam-se a bombas e turbinas. Os estados A e B podem ser dois estados homólogos *quaisquer* entre duas turbomáquinas geometricamente similares *quaisquer*, ou mesmo entre dois estados homólogos da *mesma* máquina. Os exemplos incluem variação da velocidade rotacional ou bombeamento de um fluido diferente com a mesma bomba. Para o caso simples de determinada bomba na qual ω é variado, mas o mesmo fluido é bombeado, $D_A = D_B$ e $\rho_A = \rho_B$. Em tal caso as Equações 14–38 se reduzem às formas mostradas na Figura 14–74. Um *jingle* foi desenvolvido para nos ajudar a lembrar do expoente de ω, como indica a figura. Observe também que em qualquer parte existe uma relação de duas velocidades rotacionais (ω), e que podemos substituir os valores apropriados em rpm ($\dot{n}$), uma vez que a conversão é igual no numerador e no denominador.

As leis de semelhança de bomba são bastante úteis como *ferramenta de projeto*. Em particular, suponhamos que as curvas de desempenho de uma bomba existente sejam conhecidas, e que a bomba opere com eficiência e confiabilidade razoáveis. O fabricante da bomba resolve criar uma nova bomba maior para outras aplicações, por exemplo, para bombear fluido mais pesado ou para fornecer uma carga líquida substancialmente mais alta. Em vez de iniciar do começo, os *engenheiros simplesmente escalam um projeto existente*. As leis de semelhança da bomba permitem que essa escala seja realizada com uma quantidade mínima de esforço.

V: Vazão em volume	$\frac{\dot{V}_B}{\dot{V}_A} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^1 = \left(\frac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)^1$
H: Carga	$\frac{H_B}{H_A} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2 = \left(\frac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)^2$
P: Potência	$\frac{\text{bhp}_B}{\text{bhp}_A} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^3 = \left(\frac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)^3$

FIGURA 14–74
Quando as leis de semelhança são aplicadas a uma bomba simples na qual a única coisa variada é a velocidade rotacional do eixo ω, ou rpm do eixo, $\dot{n}$, as Equações 14–38 se reduzem àquelas mostradas acima, para as quais um *jingle* pode ser usado para nos ajudar a lembrar do expoente de ω (ou de $\dot{n}$,):

Problemas Muito Difíceis são tão fáceis quanto 1, 2, 3 (do inglês Very Hard Problem).

EXEMPLO 14–10 Os Efeitos da Duplicação da Velocidade da Bomba

O Professor Seymour Fluids utiliza um pequeno túnel de água de loop fechado para realizar a pesquisa de visualização do escoamento. Ele gostaria de dobrar a velocidade da água na seção de teste do túnel e percebe que a forma mais econômica de fazê-lo é dobrar a velocidade rotacional da bomba de escoamento. O que ele não percebe é que o novo motor elétrico terá que ser muito mais poderoso! Se o Professor Fluids dobrar a velocidade de escoamento, aproximadamente com qual fator a potência do motor terá que ser aumentada?

SOLUÇÃO Para o dobro de ω, devemos calcular com qual fator a potência do motor da bomba deve aumentar.

Hipóteses **1** A água permanece a mesma temperatura. **2** Após dobrar a velocidade da bomba, esta funciona em condições homólogas às condições originais.

Análise Como nem o diâmetro nem a densidade mudaram, a Equação 14–38c se reduz a

Taxa da potência de eixo necessária:

$$\frac{\text{bhp}_B}{\text{bhp}_A} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^3 \qquad (1)$$

Definindo $\omega_B = 2\omega_A$ na Equação 1 temos $\text{bhp}_B = 8\text{bhp}_A$. Assim, a **potência para o motor da bomba deve ser aumentada por um fator de 8**. Uma análise semelhante usando a Equação 14–38b mostra que a carga líquida da bomba aumenta por um fator de 4. Como pode ser visto na Figura 14–75, a carga líquida e a potência aumentam rapidamente à medida que a velocidade da bomba é aumentada.

Discussão O resultado é apenas aproximado, uma vez que não incluímos nenhuma análise do sistema de tubulação. Embora a duplicação da velocidade de escoamento através da bomba aumente a carga disponível por um fator de 4, a duplicação da velocidade de escoamento através do túnel de água não aumenta necessariamente a carga *necessária* do sistema pelo mesmo fator de 4 (por exemplo, o fator de atrito diminui com o número de Reynolds, exceto a valores muito altos de Re). Em outras palavras, nossa hipótese 2 não está necessariamente correta. Obviamente, o sistema se ajustará a um ponto operacional no qual as cargas necessária e disponível coincidem, mas esse ponto não será necessariamente homólogo ao ponto operacional original. No entanto, a aproximação é útil como resultado de primeira ordem. O Professor Fluids também precisa se preocupar com a possibilidade de cavitação a velocidade mais alta.

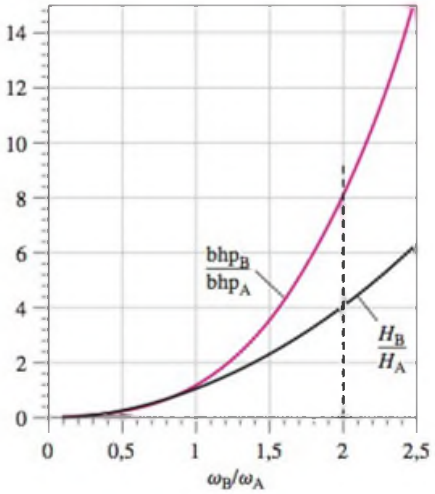


FIGURA 14–75
Quando a velocidade de uma bomba aumenta, a carga líquida aumenta muito rapidamente; potência no eixo aumenta mais rapidamente ainda.

EXEMPLO 14–11 Projeto de uma Nova Bomba Geometricamente Semelhante

Após a graduação, você vai trabalhar em uma empresa fabricante de bombas. Um dos produtos mais vendidos da sua empresa é uma bomba d´água, que chamaremos de bomba A. O diâmetro do seu rotor é $D_A = 6{,}0$ cm e seus dados de desempenho durante a operação a $n_A = 1.725$ rpm ($\omega_A = 180{,}6$ rad/s) são mostrados na Tabela 14–2. O departamento de pesquisa de marketing recomenda que a empresa crie um produto novo, uma bomba maior (que chamaremos de bomba B) que será usada para bombear líquido refrigerante R-134a à temperatura ambiente. A bomba deve ser criada de forma que seu ponto de melhor eficiência ocorra o mais próximo de uma vazão volumétrica $\dot{V}_B = 2.400$ cm³/s e a uma carga líquida $H_B = 450$ cm (de R-134a). O engenheiro-chefe (seu chefe) pede para você realizar algumas análises preliminares usando as leis de escala da bomba para determinar se uma bomba escalada geometricamente poderia ser projetada e construída de acordo com os requisitos. (*a*) Represente graficamente as curvas de desempenho da bomba A na forma dimensional e adimensionais, e identifique o ponto de melhor eficiência. (*b*) Calcule o diâmetro de bomba necessário D_B, a velocidade rotacional n_B e a potência de freio bhp_B do novo produto.

TABELA 14–2
Os dados de desempenho do fabricante para uma bomba d'água que opera a 1725 rpm e temperatura ambiente (Exemplo 14–11)*

$\dot{V}$, cm³/s	H, cm	η_{bomba}, %
100	180	32
200	185	54
300	175	70
400	170	79
500	150	81
600	95	66
700	54	38

* A carga líquida está em centímetros de água.

SOLUÇÃO (*a*) Para determinada tabela de dados de desempenho de bomba para uma bomba de água, devemos representar graficamente as curvas de desempenho dimensional e adimensional e identificar o BEP. (*b*) Devemos projetar uma bomba geometricamente semelhante para o refrigerante R-134a que opera dentro do seu BEP e das condições de projeto determinadas.

Hipóteses **1** A nova bomba pode ser fabricada de modo a ser geometricamente similar à bomba existente. **2** Ambos os líquidos (água e refrigerante R-134a) são incompressíveis. **3** Ambas as bombas operam sob condições estáveis.

Propriedades À temperatura ambiente (20°C), a densidade da água é $\rho_{\text{água}} = 998{,}0$ kg/m³ e do refrigerante R-134a é $\rho_{\text{R-134a}} = 1.226$ kg/m³.

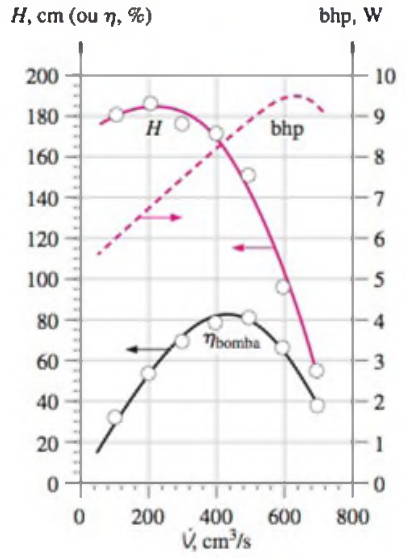


FIGURA 14–76
Curvas de desempenho de bomba dimensional suavizadas para a bomba d'água do Exemplo 14–11.

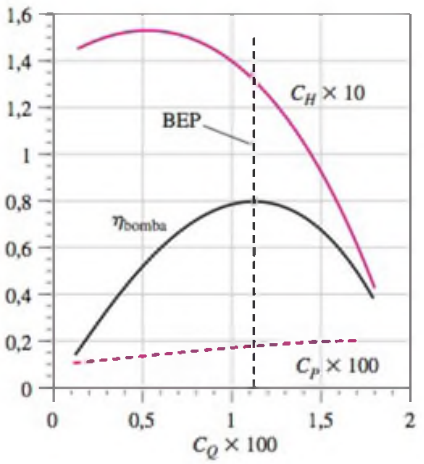


FIGURA 14–77
As curvas de desempenho não dimensionais suavizadas para as bombas do Exemplo 14–11; o BEP é estimado como o ponto de operação no qual η_{bomba} é um máximo.

Análise (*a*) Em primeiro lugar, aplicamos um ajuste de curva polinomial de menores quadrados e segunda ordem aos dados da Tabela 14–2 para obter curvas de desempenho de bomba mais suaves. Elas estão representadas graficamente na Figura 14–76, ao longo de uma curva para potência de freio, que é obtida da Equação 14–5. Um exemplo de cálculo, incluindo conversões de unidades é mostrado na Equação 1 para os dados de $\dot{V}_A = 500$ cm³/s, que é aproximadamente o ponto de melhor eficiência:

$$\text{bhp}_A = \frac{\rho_{\text{água}} g \dot{V}_A H_A}{\eta_{\text{bomba,A}}}$$

$$= \frac{(998{,}0\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)(500\ \text{cm}^3/\text{s})(150\ \text{cm})}{0{,}81}\left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}\right)^4\left(\frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$= 9{,}07\ \text{W} \qquad (1)$$

Observe que o valor real de A representado na Figura 14–76 a $\dot{V}_A = 500$ cm³/s difere ligeiramente daquele da Equação 1 devido ao fato de que o ajuste de curva de menor quadrado suaviza a dispersão dos dados tabulados originais.

A seguir usamos as Equações 14–30 para converter os dados dimensionais da Tabela 14–2 em parâmetros de similaridade de bombas não dimensionais. Exemplos de cálculos são mostrados nas Equações 2 a 4 no mesmo ponto de operação anterior (no local aproximado do BEP). A $\dot{V}_A = 500$ cm³/s o coeficiente de capacidade é aproximadamente

$$C_Q = \frac{\dot{V}}{\omega D^3} = \frac{500\ \text{cm}^3/\text{s}}{(180{,}6\ \text{rad/s})(6{,}0\ \text{cm})^3} = 0{,}0128 \qquad (2)$$

O coeficiente de carga nessa vazão é aproximadamente

$$C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2} = \frac{(9{,}81\ \text{m/s}^2)(1{,}50\ \text{m})}{(180{,}6\ \text{rad/s})^2(0{,}060\ \text{m})^2} = 0{,}125 \qquad (3)$$

Por fim, o coeficiente de potência a $\dot{V}_A = 500$ cm³/s é aproximadamente

$$C_P = \frac{\text{bhp}}{\rho\omega^3 D^5} = \frac{9{,}07\ \text{W}}{(998\ \text{kg/m}^3)(180{,}6\ \text{rad/s})^3(0{,}060\ \text{m})^5}\left(\frac{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{W}\cdot\text{s}}\right) = 0{,}00198 \qquad (4)$$

Esses cálculos são repetidos (com o auxílio de uma planilha) aos valores de $\dot{V}_A$ entre 100 e 700 cm³/s. Os dados ajustados à curva são usados para que as curvas de desempenho de bomba normalizada sejam suaves; elas são traçadas na Figura 14–77. Observe que η_{bomba} é representada como uma fração e não como uma porcentagem. Além disso, para ajustar todas as três curvas em um gráfico com uma única ordenada, e com a abscissa centralizada quase ao redor da unidade, multiplicamos C_Q por 100, C_H por 10 e C_P por 100. Você verá que esses fatores de escala funcionam bem para uma ampla variedade de bombas, das muito pequenas até as muito grandes. Uma linha vertical no BEP também é representada na Figura 14–77 com os dados suavizados. Os dados ajustados à curva resultam nos seguintes parâmetros de desempenho de bomba não dimensional no BEP:

$$C_Q^* = 0{,}0112 \qquad C_H^* = 0{,}133 \qquad C_P^* = 0{,}00184 \qquad \eta_{\text{bomba}}^* = 0{,}812 \qquad (5)$$

(*b*) Projetamos a nova bomba para que seu ponto de melhor eficiência seja homólogo ao BEP da bomba original, mas com um fluido diferente, um diâmetro de bomba diferente e uma velocidade rotacional diferente. Utilizando os valores identificados na Equação 5, usamos as Equações 14–30 para obter as condições operacionais da nova bomba. Como $\dot{V}_B$ e H_B são conhecidas (condições de projeto), solucionamos simultaneamente D_B e ω_B. Após um pouco de álgebra, na qual eliminamos ω_B, nós calculamos o diâmetro de projeto da bomba B,

$$D_B = \left(\frac{\dot{V}_B^2 C_H^*}{(C_Q^*)^2 g H_B}\right)^{1/4} = \left(\frac{(0{,}0024\ \text{m}^3/\text{s})^2(0{,}133)}{(0{,}0112)^2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(4{,}50\ \text{m})}\right)^{1/4} = \mathbf{0{,}108\ m} \qquad (6)$$

Em outras palavras, a bomba A precisa ser escalada até um fator de D_B/D_A = 10,8 cm/6,0 cm = 1,80. Com o valor de D_B conhecido, retornamos às Equações 14–30 para solucionar ω_B, a velocidade rotacional de projeto da bomba B,

$$\omega_B = \frac{\dot{V}_B}{(C_Q^*)D_B^3} = \frac{0{,}0024\ \text{m}^3/\text{s}}{(0{,}0112)(0{,}108\ \text{m})^3} = 168\ \text{rad/s} \quad \rightarrow \quad \dot{n}_B = \mathbf{1610\ rpm} \qquad (7)$$

Finalmente, a potência de freio necessária para a bomba B é calculada pelas Equações 14–30,

$$\text{bhp}_B = (C_P^*)\rho_B\omega_B^3 D_B^5$$

$$= (0{,}00184)(1226\ \text{kg/m}^3)(168\ \text{rad/s})^3(0{,}108\ \text{m})^5\left(\frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}\right) = \mathbf{160\ W} \qquad (8)$$

Uma abordagem alternativa é usar as leis de semelhança diretamente, eliminando algumas etapas intermediárias. Solucionamos as Equações 14–38a e b para D_B eliminando a relação ω_B/ω_A. Em seguida, ligamos o valor conhecido de D_A e os valores ajustados de curva de $\dot{V}_A$ e H_A no BEP (Figura 14–78). O resultado concorda com aqueles que foram calculados antes. De forma semelhante podemos calcular o ω_B e o bhp_B.

Discussão Embora o valor desejado de ω_B tenha sido calculado com exatidão, uma questão prática é que fica difícil (senão impossível) encontrar um motor elétrico que gire exatamente na rpm desejada. Os motores elétricos padrão monofásicos, de 60-Hz e 120-V AC em geral funcionam a 1.725 ou 3.450 rpm. Assim, podemos não conseguir cumprir o requisito de rpm com uma bomba de transmissão direta. Obviamente, se a bomba tiver transmissão por correia, ou se houver uma caixa de engrenagens ou um controlador de freqüência, podemos ajustar facilmente a configuração para obter a taxa de rotação desejada. Outra opção é que como ω_B é apenas ligeiramente menor do que ω_A, nós operamos a nova bomba à velocidade padrão do motor (1.725 rpm), fornecendo uma bomba um pouco mais potente do que o necessário. A desvantagem dessa opção é que a nova bomba operaria a um ponto que não estaria exatamente no BEP.

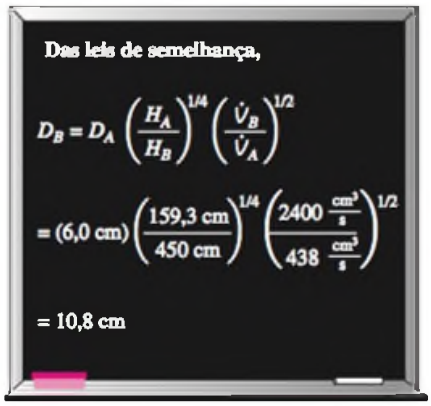


FIGURA 14–78
As leis de semelhança podem ser manipuladas para obter uma expressão para o novo diâmetro da bomba D_B; ω_B e bhp_B podem ser obtidos de forma semelhante (isso não é mostrado).

14–4 • TURBINAS

As turbinas têm sido usadas há séculos para converter a energia mecânica livremente disponível de rios e do vento em trabalho mecânico útil, em geral por meio de um eixo giratório. Quando o fluido de trabalho é a água, as turbomáquinas são chamadas de **turbinas hidráulicas** ou **hidroturbinas**. Quando o fluido de trabalho é o ar, e a energia é extraída do vento, a máquina é chamada apropriadamente de **turbina eólica**. O termo **moinho de vento** tecnicamente deveria se aplicar apenas quando a saída de energia mecânica fosse usada para moer grãos, como nos velhos tempos (Figura 14–79). Entretanto, a maioria das pessoas utiliza a palavra *moinho de vento* para descrever qualquer turbina eólica, seja ela usada para moer grãos, bombear água ou gerar eletricidade. Nas usinas de energia a carvão ou nucleares, o fluido de trabalho em geral é o vapor e, assim, as turbomáquinas que convertem energia de vapor em energia mecânica de um eixo giratório são chamadas de **turbinas a vapor**. Um nome mais genérico para as turbinas que empregam um gás compressível como fluido de trabalho é **turbina a gás**. (A turbina de um motor de avião comercial a jato moderno é um tipo de turbina a gás.)

Em geral, as turbinas que produzem energia têm eficiências um pouco mais altas do que as bombas que absorvem energia. As hidroturbinas grandes, por exemplo, podem atingir eficiências gerais acima de 95%, enquanto que a melhor eficiência das grandes turbinas atinge um pouco mais de 90%. Existem vários motivos para isso. Em primeiro lugar, normalmente as bombas operam a velocidades rotacionais mais altas do que as turbinas e, portanto, as tensões de cisalhamento e as perdas por atrito são mais altas. Em segundo lugar, a conversão da energia cinética em energia de escoamento (bombas) tem perdas inerentemente mais altas do que as bombas invertidas (turbinas). Você pode fazer a seguinte associação: como a pressão

FIGURA 14–79
Um moinho de vento restaurado em Brewster, MA, usado nos anos 1800 para moer grãos. (Observe que as pás devem ser cobertas para funcionar.) Os "moinhos" modernos que geram eletricidade são chamados mais adequadamente de turbinas eólicas.
Cortesia da Brewster Historical Society Museum, Brewster, MA. Usada com permissão.

se eleva através de uma bomba (gradiente de pressão adversa), mas *cai* através de uma turbina (gradiente de pressão favorável), as camadas limites têm menos chance de se separarem em uma turbina do que em uma bomba. Em terceiro lugar, as turbinas (particularmente as hidroturbinas) com freqüência são muito maiores do que as bombas, e as perdas por viscosidade tornam-se menos importantes à medida que o tamanho aumenta. Finalmente, enquanto as bombas em geral operam em um intervalo amplo de vazões, a maioria das turbinas que geram eletricidade funciona dentro de um intervalo operacional mais estreito e a velocidades constantes controladas. Assim, elas podem ser projetadas para operar com muita eficiência nessas condições. Nos Estados Unidos, o fornecimento de energia AC padrão é 60 Hz (3.600 ciclos por minuto). Portanto, a maioria das turbinas a vento, água e vapor opera a velocidades que são frações naturais disso, a saber, 7.200 rpm divididos pelo número de pólos gerados, que em geral é um número par. As grandes turbinas em geral operam a velocidades baixas como 7.200/60 = 120 rpm ou 7.200/48 = 150 rpm. As turbinas a gás utilizadas para a geração de energia funcionam a velocidades muito mais altas, algumas a até 7.200/2 = 3.600 rpm!

Assim como acontece com as bombas, classificamos as turbinas em duas categorias amplas, *deslocamento positivo* e *dinâmico*. Em sua maior parte, as turbinas com deslocamento positivo são dispositivos pequenos utilizados para medição da vazão volumétrica, enquanto as turbinas dinâmicas variam de minúsculas até enormes e são utilizadas para a medição do escoamento e produção de potência. Oferecemos detalhes sobre essas duas categorias.

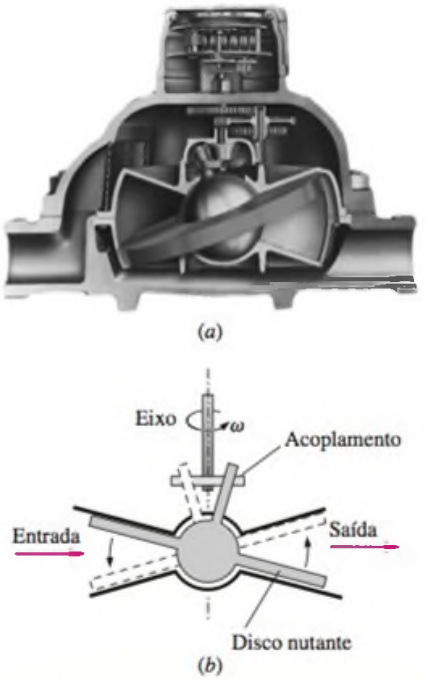


FIGURA 14–80
O *fluxômetro de fluido com disco nutante* é um tipo de turbina com deslocamento positivo usado para medir a vazão em volume: (*a*) visualização em corte e (*b*) diagrama mostrando o movimento do disco nutante. Este tipo de fluxômetro normalmente é usado como medidor de água em residências.
Foto cortesia da Niagara Meters, Spartanburg, SC.

Turbinas por Deslocamento Positivo

Uma **turbina por deslocamento positivo** pode ser comparada a uma bomba por deslocamento positivo que funciona ao contrário — à medida que o fluido é empurrado para um volume fechado, ele gira um eixo ou desloca um êmbolo. Em seguida, o volume fechado do fluido é empurrado para fora à medida que mais fluido entra no dispositivo. Existe uma perda de carga líquida através da turbina com deslocamento positivo. Em outras palavras, a energia é extraída do fluido passante e é transformada em energia mecânica. Entretanto, as turbinas por deslocamento positivo em geral *não* são usadas para a produção de potência, mas sim para medir a vazão ou volume de escoamento.

O exemplo mais comum é o medidor de água residencial (Figura 14–80). Muitos medidores de água comerciais utilizam um **disco nutante** que oscila e gira à medida que a água escoa através do medidor. O disco tem uma esfera no centro com ligações apropriadas que transferem o movimento de giro excêntrico do disco nutante para a rotação de um eixo. O volume do fluido que passa através do dispositivo por rotação de 360° do eixo é conhecido com exatidão e, portanto, o volume total de água utilizado é registrado pelo dispositivo. Quando a água escoa a velocidade moderada de uma torneira residencial, às vezes é possível ouvir um som borbulhante vindo do medidor de água — esse é o som do disco nutante oscilando dentro do medidor. Obviamente, existem outros projetos de turbina por deslocamento positivo, assim como há diversos projetos de bombas de deslocamento positivo.

Turbinas Dinâmicas

As turbinas dinâmicas são usadas tanto como medidores quanto como geradores de potência. Por exemplo, os meteorologistas utilizam um anemômetro de três conchas para medir a velocidade do vento (Figura 14–81*a*). Os pesquisadores da mecânica de fluidos experimental utilizam pequenas turbinas de várias formas (a maioria delas se parece com pequenos rotores) para medir a velocidade do ar ou da água (Capítulo 8). Nessas aplicações, a saída de potência do eixo e a eficiência da turbina não têm muita importância. Esses instrumentos são projetados de forma que sua velocidade rotacional possa ser calibrada adequadamente com a velocidade do fluido. Em seguida, por contagem eletrônica do número de rotações de pá por segundo, a velocidade do fluido é calculada e exibida pelo dispositivo.

(*a*) (*b*)

FIGURA 14–81
Exemplos de turbinas dinâmicas: (*a*) um anemômetro de três conchas comum usado para medir a velocidade do vento e (*b*) um avião de pesquisa Piper PA28 com turbinas projetadas para extrair energia dos vórtices das pontas das asas.

(a) Copyright da imagem de Campbell Scientific, Inc., Logan, UT, USA. Todos os direitos reservados. Usada com permissão.
(b) NASA Langley Research Center.

Uma aplicação nova para uma turbina dinâmica é mostrada na Figura 14–81*b*. Os pesquisadores da Nasa montaram turbinas nas pontas das asas de um avião de pesquisa Piper PA28 para extrair energia dos vórtices das pontas das asas (Capítulo 11); a energia extraída foi convertida em eletricidade a ser usada para as necessidades a bordo.

Neste capítulo, enfatizamos as grandes turbinas dinâmicas projetadas para produzir eletricidade. A maior parte da nossa discussão diz respeito às turbinas hidráulicas que utilizam a grande variação de elevação de uma represa para gerar eletricidade. Existem dois tipos básicos de turbina dinâmica — *por impulso* e *por reação*, e cada um deles é discutido com alguns detalhes. Comparando as duas turbinas dinâmicas para produção de energia, vemos que as turbinas por impulso exigem carga maior, mas podem operar com vazão de escoamento menor. As turbinas de reação podem operar com muito menos carga, mas exigem uma vazão em volume mais alta.

Turbinas por Impulso

Em uma **turbina por impulso**, o fluido é enviado através de um bocal para que a maioria de sua energia mecânica disponível seja convertida em energia cinética. Em seguida, o jato de alta velocidade se impõe sobre as aletas em forma de pás que transferem energia para o eixo da turbina, como mostra a representação da Figura 14–82. O tipo moderno e mais eficiente de turbina por impulso foi inventado por Lester A. Pelton (1829–1908) em 1878, e a roda giratória agora é chamada de **roda de Pelton** em sua homenagem. As pás de uma roda de Pelton foram criadas para dividir o escoamento pela metade e girar o escoamento a quase 180° (com relação a uma estrutura de referência que se movimenta com a pá), como ilustra a Figura 14–82*b*. De acordo com a lenda, Pelton modelou o divisor em forma de aresta inspirado nas narinas de uma vaca. A parte mais externa de cada pá é cortada para que a maioria do jato possa passar através da pá que não está alinhada ao jato (pá $n + 1$ da Figura 14–82) para atingir a pá mais alinhada (pá n da Figura 14–82). Dessa forma, a quantidade máxima de momento do jato é utilizada. Esses detalhes podem ser vistos em foto de uma roda de Pelton (Figura 14–83). A Figura 14–84 mostra uma roda de Pelton em operação, na qual é possível ver claramente a divisão e giro do jato de água.

Analisamos a saída de potência de uma turbina com roda de Pelton usando a equação de turbomáquina de Euler. A saída de potência do eixo é igual a ωT_{eixo}, onde T_{eixo} é dada pela Equação 14–14,

Equação de turbomáquina de Euler para uma turbina:

$$\dot{W}_{eixo} = \omega T_{eixo} = \rho\omega\dot{V}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t}) \qquad (14\text{–}39)$$

Devemos tomar cuidado com os sinais negativos, uma vez que esse é um dispositivo que *produz energia*, e não *que absorve energia*. Para turbinas, a convenção é definir o ponto 2 como a entrada e o ponto 1 como a saída. O centro da pá se movimenta à velocidade tangencial $r\omega$, como ilustra a Figura 14–82. Simplificamos a análise considerando que existe uma abertura na parte mais externa de cada pá, e que todo o jato atinge a pá que, por acaso, está na parte inferior direta do rotor no instante

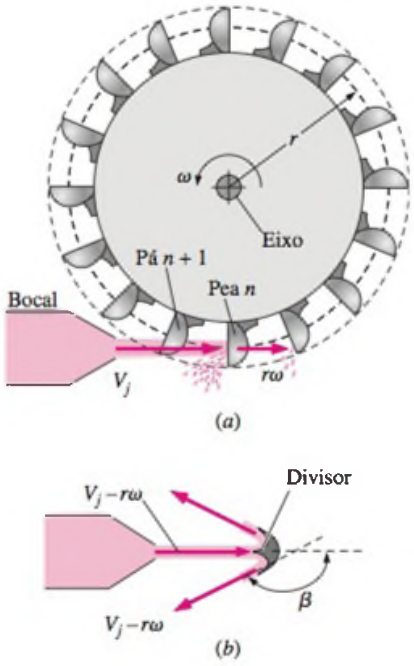


FIGURA 14–82
Diagrama representativo de uma *turbina por impulso* do tipo Pelton; o eixo da turbina é girado quando o fluido à alta velocidade de um ou mais jatos é imposto às pás montadas no eixo da turbina. (*a*) Vista lateral, estrutura de referência absoluta e (*b*) vista inferior de uma seção transversal da pá n, estrutura de referência giratória.

em questão (pá *n* da Figura 14–82). Além disso, pelo fato de tanto o tamanho da pá quanto o diâmetro do jato de água serem pequenos comparados ao raio do rotor, aproximamos r_1 e r_2 a valores semelhantes de r. Finalmente, consideramos que a água é girada através de um ângulo β sem perder nenhuma velocidade; portanto, na estrutura de referência relativa se movimentando-se com a pá a velocidade de saída é $V_j - r\omega$ (igual à velocidade relativa de entrada) como mostra a Figura 14–82. Voltando à estrutura de referência absoluta, necessária para a aplicação da Equação 14–39, o componente tangencial da velocidade na entrada, $V_{2,t}$, é simplesmente a própria velocidade do jato, V_j. Nós construímos um diagrama de velocidade na Figura 14–85 como um auxílio para o cálculo do componente tangencial da velocidade absoluta na saída, $V_{1,t}$. Depois de alguns cálculos trigonométricos, que você pode verificar após observar que sen $(\beta - 90°) = -\cos\beta$,

$$V_{1,t} = r\omega + (V_j - r\omega)\cos\beta$$

Substituindo essa equação na Equação 14–39 temos

$$\dot{W}_{\text{eixo}} = \rho r\omega\dot{V}\{V_j - [r\omega + (V_j - r\omega)\cos\beta]\}$$

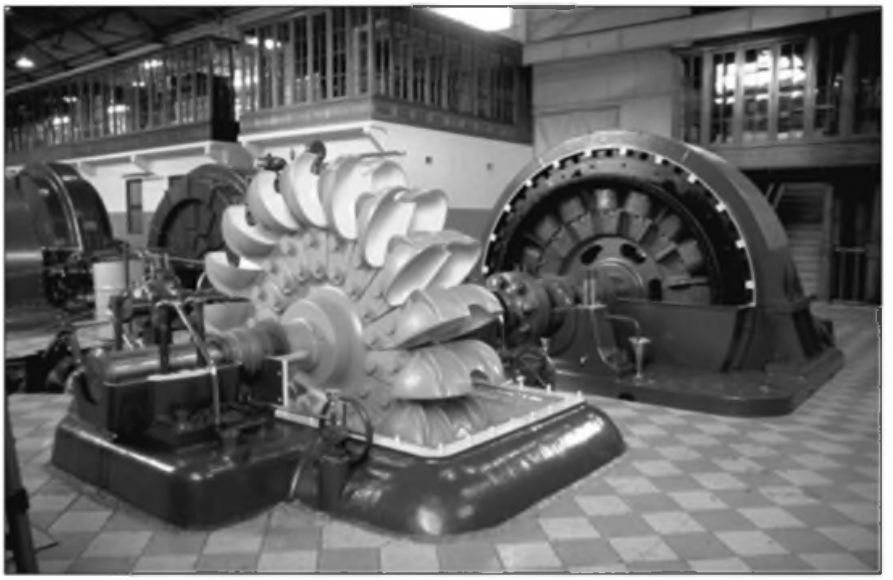


FIGURA 14–83
Vista detalhada de uma roda de Pelton mostrando o projeto das pás; o gerador elétrico está à direita. Esta roda de Pelton está exposta no Waddamana Power Station Museum próximo a Bothwell na Tasmânia.
Cortesia da Hydro Tasmania, www.hydro.com.au. Utilizada com permissão.

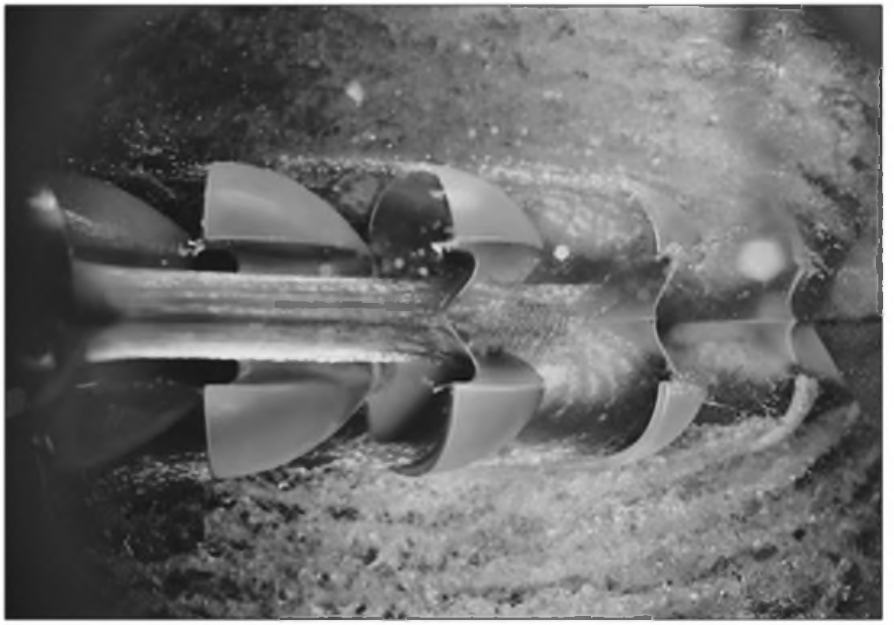


FIGURA 14–84
Vista da parte inferior de uma roda de Pelton em operação, ilustrando a divisão e o giro do jato d'água na pá. O jato de água entra pela esquerda e a roda de Pelton gira à direita.
Cortesia da VA TECH HYDRO. Usada com permissão.

que pode ser simplificado como

Potência de eixo de saída: $$\dot{W}_{\text{eixo}} = \rho r\omega \dot{V}(V_j - r\omega)(1 - \cos\beta) \qquad (14\text{–}40)$$

Obviamente, a potência máxima é atingida em teoria se $\beta = 180°$. Entretanto, se esse fosse o caso, a água que sai de uma pá atingiria a lateral de sua vizinha que vem logo a seguir, reduzindo o torque gerado e a potência. Na prática, a potência máxima é atingida pela redução de β em torno de 160° a 165°. O fator de eficiência devido a β é menor do que 180°

O fator de eficiência devido a β: $$\eta_\beta = \frac{\dot{W}_{\text{eixo, atual}}}{\dot{W}_{\text{eixo, ideal}}} = \frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos(180°)} \qquad (14\text{–}41)$$

Quando $\beta = 160°$, por exemplo, $\eta_\beta = 0{,}97$ — uma perda em torno de apenas 3%.

Finalmente vemos pela Equação 14–40 que a saída da potência de eixo $\dot{W}_{\text{eixo}}$ é zero se $r\omega = 0$ (o rotor não gira). $\dot{W}_{\text{eixo}}$ também é zero se $r\omega = V_j$ (a pá se move à velocidade do jato). Em algum lugar entre esses dois extremos está a velocidade ideal do rotor. Ao definirmos a derivativa da Equação 14–40 com relação a $r\omega$ como zero, descobrimos que isso ocorre quando $r\omega = V_j/2$ (pá se movendo à metade da velocidade do jato, como mostra a Figura 14–86).

Para uma turbina de rotor de Pelton real, existem outras perdas além daquelas da Equação 14–41: atrito mecânico, arrasto aerodinâmico nas pás, atrito ao longo das paredes internas das pás, falta de alinhamento entre o jato e as pás à medida que a pá gira, aspersão reversa e perdas de bocal. Mesmo assim, a eficiência de uma turbina de rotor de Pelton bem projetada pode chegar a quase 90%. Em outras palavras, até 90% da energia mecânica disponível da água é convertida em energia de eixo giratório.

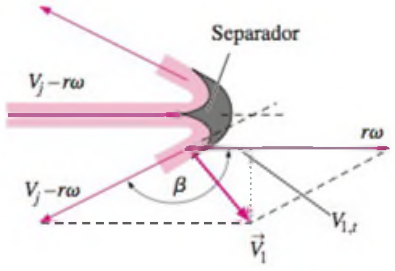


FIGURA 14–85
O diagrama de velocidade do escoamento para dentro e para fora de uma pá de rotor de Pelton. Traduzimos a velocidade do escoamento de saída da estrutura de referência móvel para a estrutura de referência absoluta, somando a velocidade da pá ($r\omega$) à direita.

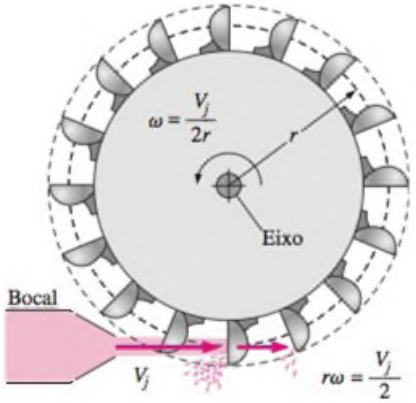


FIGURA 14–86
A potência máxima teórica que pode ser atingida por uma turbina de Pelton ocorre quando o rotor gira a $\omega = V_j/(2r)$, ou seja, quando a pá se move à metade da velocidade do jato de água.

Turbinas de Reação

O outro tipo principal de turbina hidráulica produtora de energia é a **turbina de reação**, que consiste em aletas-guia fixas, aleta guia ajustáveis e pás giratórias chamadas de **pás de rotor** (Figura 14–87). O escoamento entra tangencialmente à alta pressão, é girado na direção do rotor pelas aletas fixas à medida que se movimenta ao longo da carcaça em espiral ou **voluta** e, em seguida, passa através de aletas ajustáveis com um componente de velocidade tangencial grande. O momento é trocado entre o fluido e o rotor à medida que o rotor gira e há uma grande queda de pressão. Ao contrário da turbina de impulso, a água preenche completamente a carcaça de uma turbina de reação. Por esse motivo, uma turbina de reação em geral produz mais potência do que uma turbina de impulso de mesmo diâmetro, carga líquida e vazão. O ângulo das aletas ajustáveis é ajustável para controlar a vazão através do rotor. (Na maioria dos projetos, as aletas ajustáveis podem se fechar umas sobre as outras, cortando o escoamento da água para o rotor.) A condições de projeto, o escoamento que sai das aletas ajustáveis é imposto paralelamente ao bordo de ataque da pá do rotor (sob uma estrutura de referência giratória) para evitar perdas por choque. Observe que em um bom projeto, o número de aletas ajustáveis não compartilha de um denominador comum com o número de pás do rotor. Caso contrário, haveria séria vibração causada pela imposição simultânea de duas ou mais esteiras da aleta ajustável para os bordos de ataque das pás do rotor. Por exemplo, na Figura 14–87 existem 17 pás de rotor e 20 aletas ajustáveis. Esses são os números típicos para muitas turbinas hidráulicas de reação grandes, como mostram as fotografias das Figuras 14–89 e 14–90. O número de aletas fixas e ajustáveis em geral é igual (há 20 aletas fixas na Figura 14–87). Isso não é problema, uma vez que nenhuma delas gira, e a interação da esteira não permanente também não é um problema.

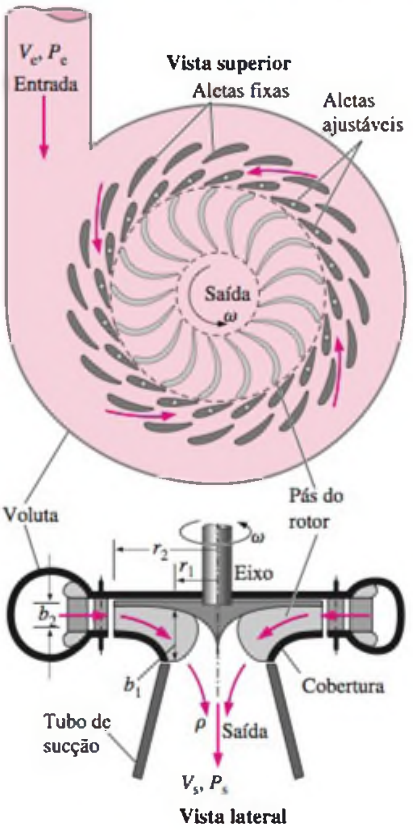


FIGURA 14–87
Uma *turbina de reação* difere significativamente de uma turbina de impulso; em vez de usar jatos de água, uma *voluta* é preenchida com turbilhão de água que faz girar o rotor. Para aplicações de turbina hidráulica, o eixo em geral é vertical. As visualizações superior e lateral são exibidas, incluindo as *aletas fixas* e as *aletas ajustáveis*.

Existem dois tipos principais de turbina de reação — a *Francis* e a *Kaplan*. A geometria da **turbina Francis** de certa forma é semelhante a uma bomba centrífuga ou de escoamento misto, mas com o escoamento na direção oposto. Observe, porém, que uma bomba típica funcionando ao contrário *não* seria uma turbina muito eficiente. A turbina Francis tem esse nome em homenagem a James B. Francis (1815–1892), que desenvolveu o projeto na década de 1840. A **turbina Kaplan**, por outro lado, é meio parecida com um ventilador *de escoamento axial* que funciona ao contrário. Se você já viu o giro inicial de um ventilador de janela quando o vento sopra forte, saberá visualizar o princípio operacional básico de uma turbina Kaplan. A turbina Kaplan tem esse nome em homenagem ao seu inventor, Viktor Kaplan (1876–1934). Na verdade, existem várias subcategorias das turbinas Francis e Kaplan, e a terminologia usada na área das turbinas hidráulicas nem sempre é padronizada.

Lembre-se de que classificamos as bombas dinâmicas de acordo com o ângulo com o qual o escoamento sai da pá do rotor — centrífugas (radiais), escoamento misto ou axial (consulte a Figura 14–31). De modo semelhante, mas inverso, classificamos as turbinas de reação de acordo com o ângulo com o qual o escoamento *entra* no rotor (Figura 14–88). Se o escoamento entra no rotor radialmente como na Figura 14–88*a*, a turbina é chamada de **turbina Francis com escoamento radial** (consulte também Figura a 14–87). Se o escoamento entra no rotor com algum ângulo entre radial e axial (Figura 14–88*b*), a turbina é chamada de **turbina Francis com escoamento misto**. Este último projeto é o mais comum. Alguns engenheiros de turbina hidráulica utilizam o termo "turbina Francis" apenas quando há uma **cobertura** no rotor como na Figura 14–88*b*. As turbinas Francis são mais adequadas para as cargas que ficam entre as cargas altas das turbinas Pelton e as cargas baixas das turbinas Kaplan. Uma turbina Francis grande típica pode ter 16 ou mais pás de rotor e pode atingir uma eficiência de turbina entre 90% e 95%. Se o rotor não tiver cobertura, e o escoamento entrar no rotor parcialmente inclinado, ela é chamada de **turbina com escoamento misto** (Figura 14–88*c*). Por fim, se o escoamento for inclinado completamente na direção axial *antes* de entrar no rotor (Figura 14–88*d*), ela é chamada de **turbina com escoamento axial**. Os rotores de uma turbina com escoamento axial em geral têm apenas de três a oito pás, muito menos do que as turbinas Francis. Dessas existem dois tipos: as turbinas Kaplan e as turbinas de propulsor. As turbinas Kaplan são chamadas de **duplamente reguladas** porque a taxa de escoamento é controlada de duas maneiras — girando as aletas ajustáveis e ajustando a inclinação das pás do rotor. As **turbinas de propulsor** são quase que idênticas às turbinas Kaplan, exceto que as pás são fixas (o ângulo de ataque não é ajustável) e a taxa de escoa-

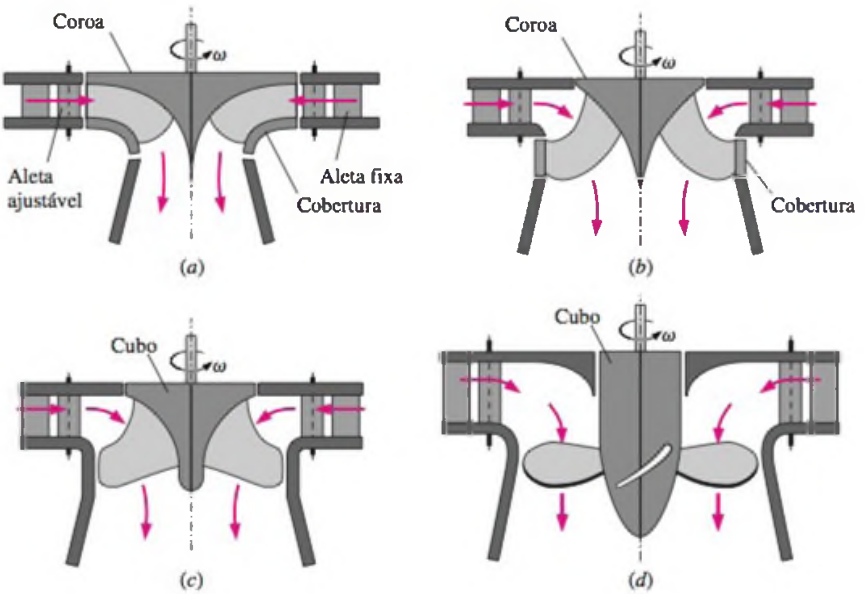


FIGURA 14–88
As características de distinção das quatro subcategorias de turbinas de reação: (*a*) *escoamento em turbina Francis radial*, (*b*) *escoamento em turbina Francis mista*, (*c*) *escoamento em turbina de propulsor mista* e (*d*) *escoamento em turbina de propulsor axial*. A principal diferença entre (*b*) e (*c*) é que os rotores Francis com escoamento misto têm uma *cobertura* que gira com o rotor, enquanto os rotores de propulsor com escoamento misto não têm essa cobertura. Existem dois tipos de turbinas de propulsor com escoamento misto: *as Kaplan* têm pás com inclinação ajustável, enquanto as *com propulsor* não têm. Observe que a terminologia utilizada aqui não é universal nos livros sobre turbomáquina nem entre os fabricantes de turbina hidráulica.

mento é regulada apenas pelas aletas ajustáveis (**regulagem simples**). Comparadas às turbinas Pelton e Francis, as Kaplan e as de propulsor são mais adequadas para as condições de carga baixa e vazão alta. Suas eficiências se comparam àquelas das turbinas Francis e podem chegar a 94%.

A Figura 14–89 mostra a foto do rotor com escoamento radial de uma turbina Francis com escoamento radial. Os funcionários aparecem para que você tenha uma idéia do tamanho dos rotores de uma usina hidrelétrica. A Figura 14–90 mostra a

FIGURA 14–89
O rotor de uma turbina Francis com escoamento radial na hidrelétrica de Round Butte em Madras, Oregon, EUA. O rotor tem 17 pás com diâmetro externo de 11,8 pés (3,60 m). A turbina gira a 180 rpm e produz 119 MW de potência a uma vazão de 127 m^3/s e uma carga líquida de 105 m.
Foto cortesia da American Hydro Corporation, York, PA. Usada com permissão.

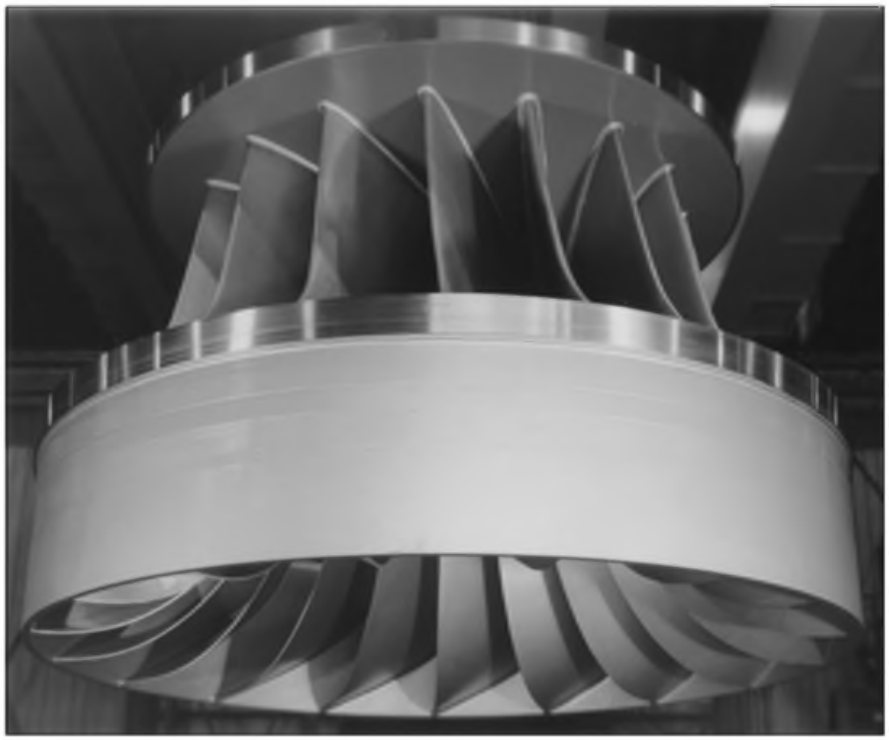


FIGURA 14–90
O rotor de uma turbina Francis com escoamento misto utilizada na hidrelétrica de Smith Mountain em Roanoke, VA. O rotor tem 17 pás com diâmetro externo de 20,3 pés (6,19 m). A turbina gira a 100 rpm e produz 194 MW de energia a uma vazão de 375 m^3/s e uma carga líquida de 54,9 m.
Foto cortesia da American Hydro Corporation, York, PA. Usada com permissão.

fotografia do rotor com escoamento misto de uma turbina Francis e a Figura 14–91 mostra a foto do rotor com escoamento axial de uma turbina Kaplan. A vista é da entrada (parte superior).

Representamos na Figura 14–92 uma represa hidrelétrica típica que utiliza as turbinas Francis de reação para gerar eletricidade. A carga geral ou **carga bruta** H_{bruta} é definida como a diferença de elevação entre a superfície do reservatório a montante da represa e a superfície da água que sai da represa $H_{\text{bruta}} = z_A - z_E$. Se não houver perdas irreversíveis em *nenhuma parte* do sistema, a quantidade máxima de potência que seria gerada por turbina seria

Produção de potência ideal:
$$\dot{W}_{\text{ideal}} = \rho g \dot{V} H_{\text{bruta}} \qquad (14\text{–}42)$$

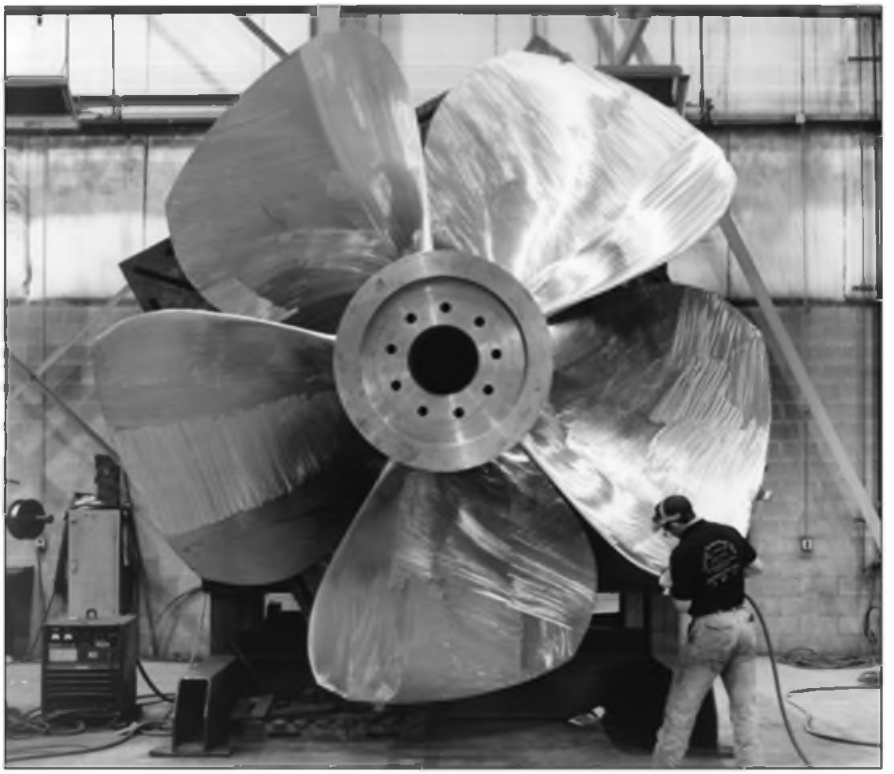


FIGURA 14–91
O rotor com cinco pás de uma turbina Kaplan usada na hidrelétrica de Warwick em Cordele, GA. O rotor tem cinco pás com diâmetro externo de 12,7 pés (3,87 m). A turbina gira a 100 rpm e produz 5,37 MW de potência com uma vazão de 63,7 m³/s e carga líquida de 9,75 m.
Foto cortesia da American Hydro Corporation, York, PA. Usada com permissão.

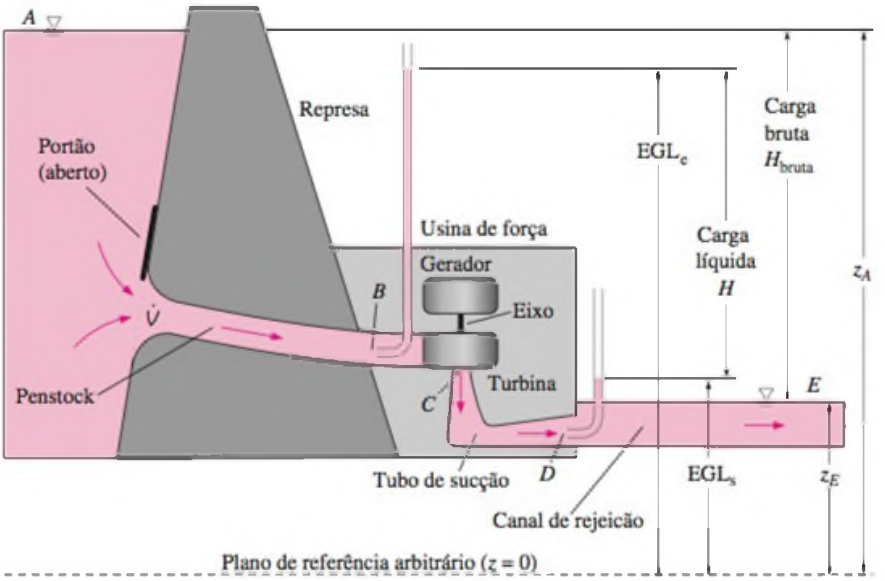


FIGURA 14–92
Configuração e terminologia típicas de uma usina hidrelétrica que utiliza a turbina Francis para gerar eletricidade; o desenho não está em escala. As sondas de Pitot aparecem apenas com finalidade ilustrativa.

Obviamente, há perdas irreversíveis em todo o sistema, de modo que a potência realmente produzida é mais baixa do que a potência ideal dada pela Equação 14–42.

Acompanhamos o escoamento da água através de todo o sistema da Figura 14–92, definindo os termos e discutindo as perdas. Começamos no ponto *A* a montante da represa onde a água é tranqüila, à pressão atmosférica e à sua elevação maior z_A. A água escoa à vazão por meio de um tubo grande em toda a represa chamado de **conduto forçado**. O escoamento para o conduto forçado pode ser cortado pelo fechamento de uma válvula na entrada do conduto forçado. Se inseríssemos uma sonda de Pitot no ponto *B* no final do conduto forçado imediatamente antes da turbina, como ilustra a Figura 14–92, a água do tubo subiria até uma altura de coluna igual à linha piezométrica de energia EGL_e na entrada da turbina. Essa altura de coluna é menor do que o nível da água no ponto *A*, devido a perdas irreversíveis do conduto forçado e sua entrada. Em seguida, o escoamento passa através da turbina, que está conectada por um eixo ao gerador elétrico. Observe que o gerador elétrico em si tem perdas irreversíveis. Sob a perspectiva da mecânica dos fluidos, porém, estamos interessados apenas nas perdas através e a jusante da turbina.

Após passar através do rotor da turbina o fluido de saída (ponto *C*) ainda tem energia cinética considerável e talvez escoamento turbilhonar. Para recuperar parte dessa energia cinética (que de outra forma seria desperdiçada), o escoamento entra em um difusor de área expandida chamado de **tubo de sucção** que, por sua vez, direciona o escoamento para a horizontal e diminui a sua velocidade, enquanto aumenta a pressão antes da descarga para a água a jusante, chamado de **canal de rejeição**. Se tivéssemos que imaginar outra sonda de Pitot no ponto *D* (a saída do tubo de sucção), a água do tubo subiria até uma altura de coluna igual à linha piezométrica rotulada como EGL_s na Figura 14–92. Como o tubo de sucção é considerado parte integrante da montagem da turbina, a carga líquida através da turbina é especificada como a diferença entre a EGL_e e a EGL_s

Carga líquida de uma turbina hidráulica: $$H = EGL_e - EGL_s \qquad (14\text{–}43)$$

Em palavras

> A carga líquida de uma turbina é definida como a diferença entre a linha piezométrica imediatamente a montante da turbina e a linha piezométrica na saída do tubo de sucção.

Na saída do tubo de sucção (ponto *D*) a velocidade de escoamento é significativamente mais baixa do que no ponto *C* a montante do tubo de sucção; entretanto, ela é *finita*. Toda a energia cinética que sai do tubo de sucção é dissipada no canal de rejeição. Isso representa uma perda de carga irreversível e é o motivo pelo qual EGL_s é maior do que a elevação da superfície do canal de rejeição, z_E. Entretanto, a recuperação significativa da pressão ocorre em um tubo de sucção bem projetado. O tubo de sucção faz com que a pressão na saída do rotor (ponto *C*) caia *abaixo* da pressão atmosférica, permitindo assim que a turbina utilize a carga disponível com maior eficiência. Em outras palavras, o tubo de sucção faz com que a pressão na saída do rotor seja mais baixa do que seria sem o tubo de sucção — aumentando a variação da pressão entre a entrada e a saída da turbina. Os projetistas devem ter cuidado, porém, porque pressões subatmosféricas podem levar a cavitação, que é indesejável por muitos motivos, como já discutimos anteriormente.

Se estivéssemos interessados na eficiência líquida de toda a usina hidrelétrica, definiríamos essa eficiência como a relação entre a energia elétrica real produzida e a energia ideal (Equação 14–42) com base na carga bruta. Este capítulo está mais preocupado com a eficiência da turbina propriamente dita. Por convenção, a **eficiência da turbina** *tem por base a carga líquida H em vez da carga bruta* H_{bruta}. Especificamente, $\eta_{turbina}$ é definida como a relação entre a potência de eixo de saída da turbina e a potência extraída da água que escoa através da turbina.

Eficiência é sempre definida por

$$\eta = \text{eficiência} = \frac{\text{saída real}}{\text{entrada nescesária}}$$

Então, para a bomba,

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\dot{W}_{\text{água}}}{\dot{W}_{\text{eixo}}} = \frac{\rho g H \dot{V}}{\text{bhp}}$$

e para a turbina,

$$\eta_{\text{turbine}} = \frac{\dot{W}_{\text{eixo}}}{\dot{W}_{\text{água}}} = \frac{\text{bhp}}{\rho g H \dot{V}}$$

FIGURA 14–93
Por definição, a eficiência sempre deve ser menor do que a unidade. A eficiência de uma turbina é o recíproco da eficiência de uma bomba.

Eficiência da turbina:

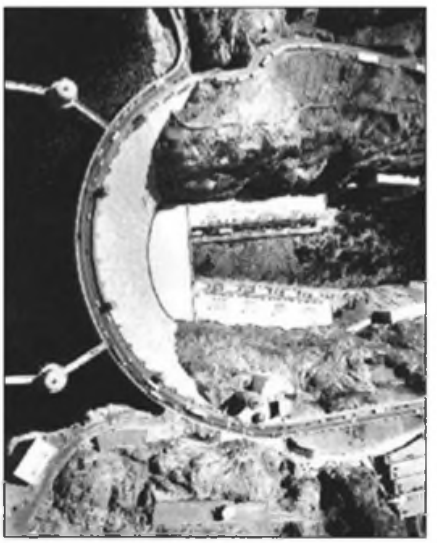
$$\eta_{\text{turbina}} = \frac{\dot{W}_{\text{eixo}}}{\dot{W}_{\text{potência da água}}} = \frac{\text{bhp}}{\rho g H \dot{V}} \qquad (14\text{–}44)$$

Observe que a eficiência da turbina η_{turbina} é o recíproco da eficiência de bomba η_{bomba}, uma vez que a potência no eixo é a *saída real* em vez da *entrada necessária* (Figura 14–93).

Observe também que estamos considerando apenas uma turbina de cada vez nesta discussão. A maioria das usinas hidrelétricas grandes tem *várias* turbinas organizadas em paralelo. Assim a companhia fornecedora de energia pode desligar algumas das turbinas durante épocas de baixa demanda por energia e para manutenção. A Hoover Dam em Boulder City, Nevada, por exemplo, tem 17 turbinas paralelas, 15 das quais são turbinas Francis grandes idênticas que podem produzir aproximadamente 130 MW de eletricidade cada uma (Figura 14–94). A carga bruta máxima é de 590 pés (180 m). A produção total de energia de pico excede os 2 GW (2.000 MW).

Realizamos o projeto e a análise preliminares das turbinas da mesma forma que fizemos anteriormente para as bombas, usando a equação de turbomáquina de Euler e os diagramas de velocidade. Na verdade, mantemos a mesma notação, a saber r_1 para o raio interno e r_2 para o raio externo das pás giratórias. Para uma turbina, porém, a direção do escoamento é oposta àquela de uma bomba, de modo que a entrada está a um raio r_2 e a saída, a um raio r_1. Para uma análise de primeira ordem, consideramos que as pás são infinitesimalmente finas. Também consideramos que as pás estão alinhadas de forma que o escoamento sempre é tangente à superfície da pá e ignoramos o efeito viscoso (camadas limites) nas superfícies. A melhor maneira de obter as correções de ordem superior é utilizar um código de dinâmica de fluidos computacional.

Considere, por exemplo, a vista superior da turbina Francis da Figura 14–87. Os vetores de velocidade estão desenhados na Figura 14–95 tanto para a estrutura de referência absoluta quanto para estrutura de referência relativa que gira com o rotor. Começando com a aleta-guia fixa (linha preta grossa da Figura 14–95), o escoamento é girado para atingir a pá do rotor (linha cinza grossa) à velocidade absoluta $\vec{V}_2$. Mas a pá do rotor gira no sentido anti-horário e a um raio r_2 ela se movimenta tangencialmente à parte inferior esquerda à velocidade ωr_2. Para transladarmos na estrutura de referência giratória, formamos a soma vetorial de $\vec{V}_2$ e a *negativa* de ωr_2, como mostra a representação. A resultante é um vetor $\vec{V}_{2,\text{ relativa}}$, que é paralelo ao bordo de ataque da pá do rotor (ângulo β_2 da linha tangente do círculo r_2). O componente tangencial $V_{2,t}$ do vetor de velocidade absoluta $\vec{V}_2$ é



(*a*)

(*b*)

FIGURA 14–94
(*a*) Uma vista aérea da Hoover Dam e (*b*) a parte superior (visível) de vários geradores paralelos elétricos movidos por turbinas hidráulicas na Hoover Dam.
(a) Departamento do Interior dos Estados Unidos da América, Escritório de Recuperação — Região do Baixo Colorado; (b) foto de Jim Steinhart, PlanetWare.

necessário para a equação da turbomáquina de Euler (Equação 14–39). Após alguma trigonometria

Bordo de ataque do rotor:
$$V_{2,t} = \omega r_2 - \frac{V_{2,n}}{\text{tg}\,\beta_2} \tag{14–45}$$

Seguindo o escoamento ao longo da pá do rotor na estrutura de referência relativa (giratória), vemos que o escoamento é desviado de forma que saia paralelamente ao bordo de ataque da pá do rotor (ângulo β_1 da linha tangente do círculo r_1). Por fim, para transladarmos de volta até a estrutura de referência absoluta, nós somamos $\vec{V}_{1,\text{relativa}}$ vetorialmente, e a velocidade da pá ωr_1, que age à esquerda como está representado na Figura 14–96. A resultante é o vetor absoluto $\vec{V}_1$. Como a massa deve ser conservada, os componentes normais dos vetores da velocidade absoluta $V_{1,n}$ e $V_{2,n}$ se relacionam pela Equação 14–12, onde as larguras de pá axial b_1 e b_2 são definidas na Figura 14–87. Após alguma trigonometria (idêntica àquela do bordo de ataque), geramos uma expressão para o componente tangencial $V_{1,t}$ do vetor de velocidade absoluta $\vec{V}_1$ para uso na equação de turbomáquina de Euler

Bordo de fuga do rotor:
$$V_{1,t} = \omega r_1 - \frac{V_{1,n}}{\text{tg}\,\beta_1} \tag{14–46}$$

Os leitores atentos notarão que a Equação 14–46 de uma turbina é idêntica à Equação 14–23 para uma bomba. Isso não é apenas aleatório, mas resulta do fato de que os vetores de velocidade, ângulos etc. são definidos da mesma maneira para uma turbina e para uma bomba, exceto que todo o escoamento acontece na direção oposta.

É possível ver na equação de turbomáquina de Euler que a potência máxima é obtida quando $V_{1,t} < 0$, ou seja, quando a pá do rotor gira o escoamento tanto que o turbilhão na saída do rotor está na direção oposta à rotação do rotor. Essa situação é chamada de **turbilhão reverso** (Figura 14–97). Na prática, os rotores de pás fixas da maioria das turbina hidráulicas Francis foram criadas para impor uma pequena quantidade de turbilhão reverso ao escoamento que sai do rotor. Entretanto, uma grande quantidade de turbilhão reverso não é desejável. A eficiência de turbina cai rapidamente à medida que o turbilhão reverso aumenta, porque quanto maior o turbilhão, maior a energia cinética da água que sai da turbina, sendo que grande parte dela é desperdiçada (os tubos de sucção não têm eficiência de 100%). Além disso, embora o turbilhão reverso aumente a potência de saída, o giro extra exige uma carga líquida mais alta para determinada vazão. Obviamente, é preciso muito ajuste para criar a turbina hidráulica mais eficiente dentro das restrições de projeto impostas. Lembre-se também de que o escoamento é tridimensional; existe um componente axial de velocidade à medida que o escoamento é girado para baixo no tubo de sucção. Não é preciso muito tempo para perceber que as ferramentas de simulação por computador são muito úteis para os projetistas de turbina. Na verdade, com a ajuda de modernos códigos CFD, a eficiência das turbina hidráulicas aumentou até o ponto em que as atualizações de antigas turbinas de hidrelétricas são economicamente viáveis. Um exemplo de saída de CFD é mostrado na Figura 14–98 para uma turbina Francis com escoamento misto.

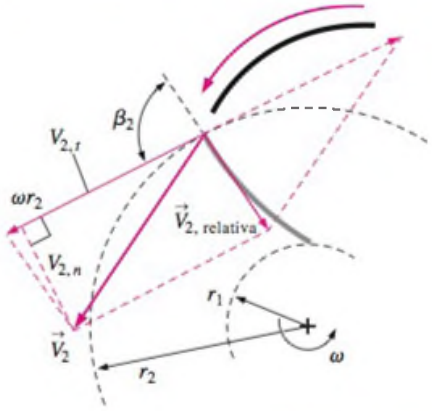


FIGURA 14–95
Vetores de velocidade relativa e absoluta e geometria para o raio externo do rotor de uma turbina Francis. Os vetores de velocidade absolutos estão em negrito.

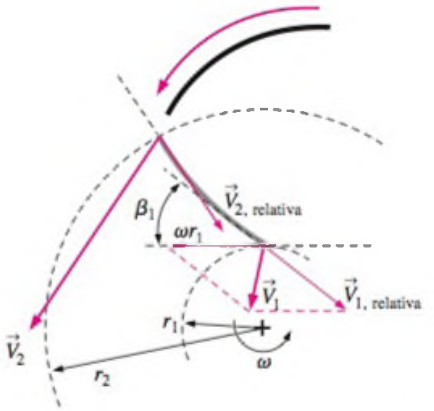
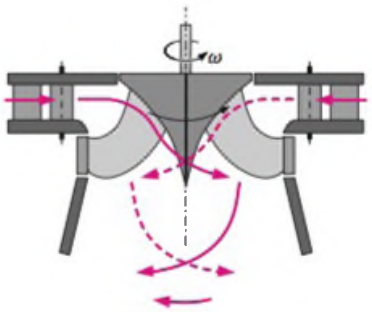


FIGURA 14–96
Vetores de velocidade relativa e absoluta e geometria para o raio interno do rotor de uma turbina Francis. Os vetores de velocidade absolutos estão em negrito.



Turbilhão reverso

FIGURA 14–97
Em muitas turbina hidráulicas Francis com escoamento misto, o escoamento que sai do rotor turbilhona em uma direção oposta àquela do próprio rotor. Isso é chamado de *turbilhão reverso*.

EXEMPLO 14–12 Projeto de Turbina Hidráulica

Uma turbina hidráulica Francis com escoamento radial reformada está sendo projetada para substituir uma turbina antiga de uma represa de hidrelétrica. A nova turbina deve atender às seguintes restrições de projeto para acoplar-se adequadamente à configuração existente: o raio interno do rotor é r_2 = 8,20 pés (2,50 m) e seu raio externo é r_1 = 5,80 pés (1,77 m). As larguras da pá do rotor são b_2 = 3,00 pés (0,914 m) e b_1 = 8,60 pés (2,62 m) na entrada e na

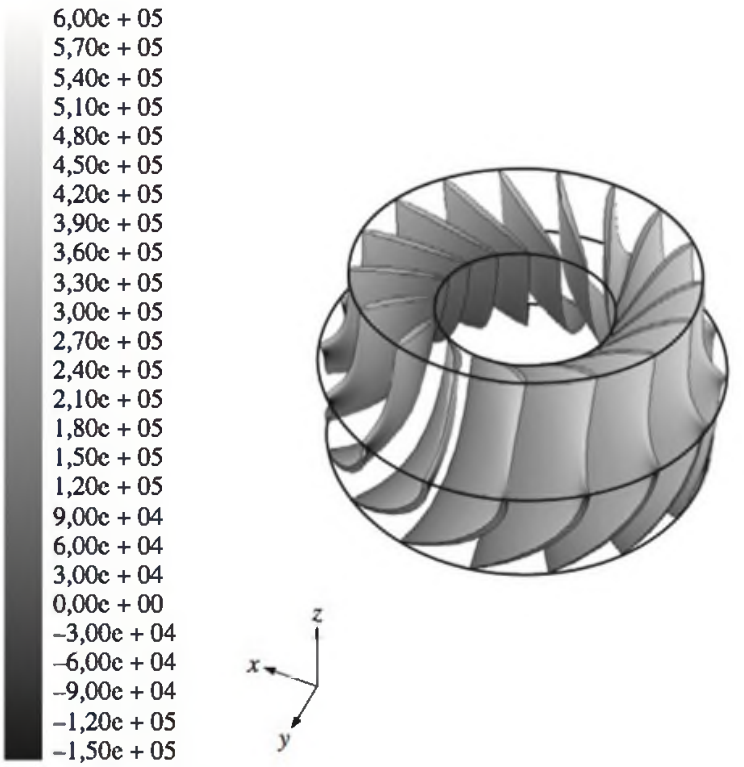


FIGURA 14–98
A distribuição da pressão estática (representação greafica de curva de escala de cinza) nas superfícies das pás do rotor calculadas pelo CFD; a pressão está em unidades de pascais. A figura mostra um rotor de turbina Francis com escoamento misto de 17 pás que gira no sentido anti-horário ao redor do eixo z. Apenas uma passagem de pá foi modelada, mas a imagem é reproduzida 16 vezes por conta da simetria. As pressões mais altas (regiões claras) são encontradas mais próximo dos bordos de ataque das superfícies de pressão do rotor, enquanto as pressões mais baixas (regiões escuras) ocorrem na superfície de sucção do rotor próximo ao bordo de fuga.

Foto cortesia da American Hydro Corporation, York, PA. Usada com permissão

saída, respectivamente. O rotor deve girar a $\dot{n}$ = 120 rpm (ω = 12,57 rad/s) para fazer funcionar o gerador elétrico de 60 Hz. As aletas ajustáveis giram o escoamento com um ângulo α_2 = 33° da direção radial na entrada do rotor, e o escoamento na saída do rotor deve ter um ângulo α_1 entre –10° e 10° da direção radial (Figura 14–99) para que o escoamento seja adequado através do tubo de sucção. A vazão a condições de projeto é 9,50 × 10^6 gpm (599 m^3/s) e a carga bruta fornecida pela represa é H_{bruta} = 303 pés (92,4 m). (*a*) Calcule os ângulos de entrada e saída da pá do rotor, β_2 e β_1, respectivamente, e a saída de potência e a carga líquida necessária se as perdas irreversíveis forem desprezadas no caso com α_1 = 10° da radial (com turbilhão de rotação). (*b*) Repita os cálculos para o caso com α_1 = 0° da radial (sem turbilhão). (*c*) Repita os cálculos para o caso com α_1 = –10° da radial (turbilhão reverso).

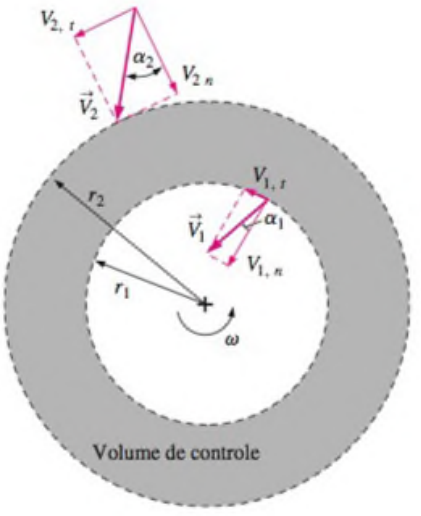


FIGURA 14–99
Visualização superior das velocidades absolutas e dos ângulos de escoamento associados ao rotor de uma turbina Francis que está sendo criada para uma represa de hidrelétrica. O volume de controle é limitado pela entrada e pela saída do rotor.

SOLUÇÃO Para determinado conjunto de critérios de projeto de turbina hidráulica devemos calcular os ângulos de pá de rotor, a carga líquida necessária e a saída de potência nos três casos — dois com turbilhão e um sem turbilhão na saída do rotor.

Hipóteses **1** O escoamento é permanente. **2** O fluido é água a 20°C. **3** As pás são infinitesimalmente finas. **4** Em toda parte, o escoamento é tangente às pás do rotor. **5** Desprezamos as perdas irreversíveis em toda a turbina.

Propriedades Para água a 20°C, ρ = 998,0 kg/m^3.

Análise (*a*) Solucionamos o componente normal da velocidade na entrada usando a Equação 14–12,

$$V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2} = \frac{599\ \text{m}^3/\text{s}}{2\pi(2{,}50\ \text{m})(0{,}914\ \text{m})} = 41{,}7\ \text{m/s} \qquad (1)$$

Usando a Figura 14–99 como guia, o componente da velocidade tangencial na entrada é

$$V_{2,t} = V_{2,n}\ \text{tg}\ \alpha_2 = (41{,}7\ \text{m/s})\ \text{tg}\ 33° = 27{,}1\ \text{m/s} \qquad (2)$$

Solucionamos a Equação 14–45 para o ângulo do bordo de ataque do rotor β_2,

$$\beta_2 = \text{arctg}\left(\frac{V_{2,n}}{\omega r_2 - V_{2,t}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{41{,}7 \text{ m/s}}{(12{,}57 \text{ rad/s})(2{,}50 \text{ m}) - 27{,}1 \text{ m/s}}\right) = \mathbf{84{,}1°} \quad (3)$$

As Equações 1 a 3 são repetidas para a saída do rotor, com os seguintes resultados:

$$\textit{Saída do rotor:} \qquad V_{1,n} = 20{,}6 \text{ m/s}, \qquad V_{1,t} = 3{,}63 \text{ m/s}, \qquad \beta_1 = \mathbf{47{,}9°} \quad (4)$$

A visualização superior dessa pá de rotor é representada (em escala) na Figura 14–100.

Usando as Equações 2 e 4, a potência de saída de eixo é estimada com a equação de turbomáquina de Euler, a Equação 14–39,

$$\dot{W}_{\text{eixo}} = \rho\omega\dot{V}(r_2 V_{2,t} - r_1 V_{1,t}) = (998{,}0 \text{ kg/m}^3)(12{,}57 \text{ rads/s})(599 \text{ m}^3\text{/s})$$
$$\times [(2{,}50 \text{ m})(27{,}2 \text{ m/s}) - (1{,}77 \text{ m})(3{,}63 \text{ m/s})]\left(\frac{\text{MW} \cdot \text{s}}{10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}\right)$$
$$= 461 \text{ MW} = \mathbf{6{,}18 \times 10^5 \text{ hp}} \quad (5)$$

Finalmente, calculamos a carga liquida necessária usando a Equação 14–44, considerando que η_{turbina} = 100%, uma vez que estamos ignorando as irreversibilidades

$$H = \frac{\text{bhp}}{\rho g \dot{V}} = \frac{461 \text{ MW}}{(998{,}0 \text{ kg/m}^3)(9{,}81 \text{ m/s}^2)(599 \text{ m}^3\text{/s})}\left(\frac{10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}{\text{MW} \cdot \text{s}}\right) = \mathbf{78{,}6 \text{ m}} \quad (6)$$

(*b*) Quando repetimos os cálculos sem turbilhão na saída do rotor ($\alpha_1 = 0°$), o ângulo do bordo de ataque da pá do rotor se reduz a **42,8°** e a potência de saída aumenta para 509 MW (**6,83 × 10⁵ hp**). A carga líquida necessária aumenta para **86,8 m**.

(*c*) Quando repetimos os cálculos com turbilhão *reverso* na saída do rotor ($\alpha_1 = -10°$), o ângulo do bordo de fuga da pá do rotor se reduz a **38,5°** e a potência de saída aumenta para 557 MW (**7,47 × 10⁵ hp**). A carga líquida necessária aumenta para **95,0 m**. Uma repreentação gráfica da potência e da carga líquida como função do ângulo de escoamento da saída α_1 é mostrado na Figura 14–101. Você pode ver que bhp e H aumentam com a diminuição de α_1.

Discussão A potência de saída teórica aumenta em cerca de 10% eliminando o turbilhão da saída do rotor, e aumenta em quase outros 10% quando há 10° de turbilhão reverso. Entretanto, a carga bruta disponível da represa é de apenas 92,4 m. Assim, o caso de turbilhão reverso da parte (*c*) é claramente impossível, uma vez que a carga líquida prevista deve ser maior do que H_{bruta}. Lembre-se de que este é um projeto preliminar no qual estamos desprezando as irreversibilidades. A potência de saída real será mais baixa e a carga líquida necessária real será mais alta do que os valores previstos aqui.

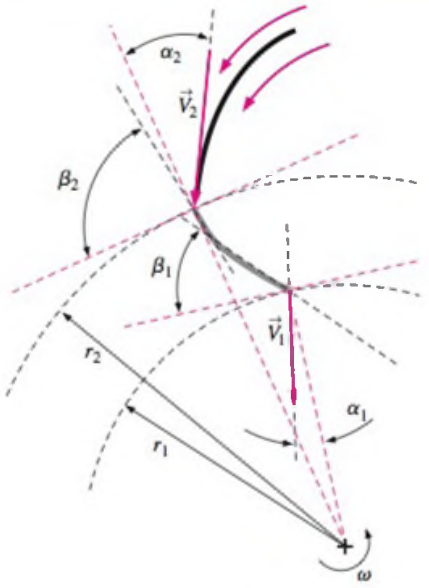


FIGURA 14–100
Representação do projeto da pá de rotor do Exemplo 14–12, visualização superior. Uma aleta-guia e os vetores de velocidade absoluta também são mostrados.

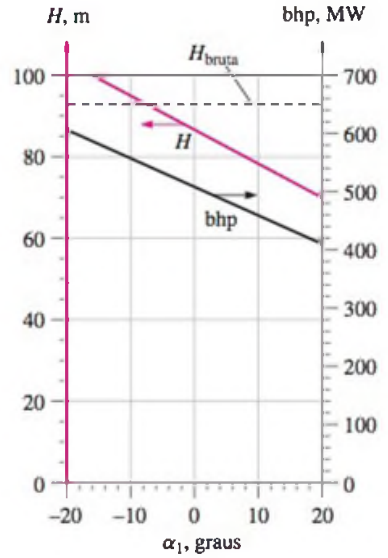


FIGURA 14–101
A carga líquida necessária e a saída de potência no eixo como função do ângulo de escoamento de saída do rotor para a turbina do Exemplo 14–12.

14–5 • LEIS DE SEMELHANÇA PARA TURBINAS

Parâmetros Adimensionais para Turbinas

Definimos os grupos adimensionais (grupos Pi) para turbinas da mesma forma que fizemos na Seção 14–3 para as bombas. Desprezando o número de Reynolds e os efeitos da rugosidade, tratamos das mesmas variáveis dimensionais: gravidade vezes carga líquida (gH), vazão ($\dot{V}$), diâmetro das pás do rotor (D), velocidade rotacional do rotor (ω), potência no eixo (bhp) e densidade de fluido (ρ), como ilustra a Figura

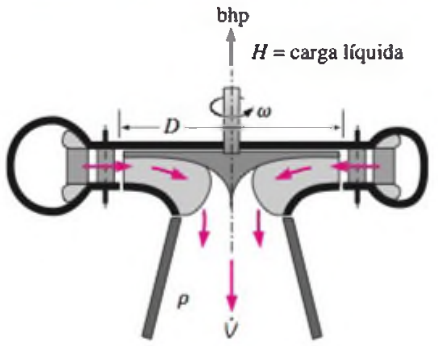


FIGURA 14–102
As principais variáveis usadas para a análise dimensional de uma turbina.

14–102. Na verdade, a análise dimensional é idêntica, seja analisando uma bomba ou uma turbina, exceto pelo fato de que para as turbinas, consideramos bhp em vez de $\dot{V}$ como a variável independente. Além disso, η_{turbina} (Equação 14–44) é usada no lugar de η_{bomba} como a eficiência adimensional. Um resumo dos parâmetros adimensionais são fornecidos aqui:

Parâmetros adimensionais para turbinas:

$$C_H = \text{Coeficiente de carga} = \frac{gH}{\omega^2 D^2} \qquad C_Q = \text{Coeficiente de capacidade} = \frac{\dot{V}}{\omega D^3}$$

$$C_P = \text{Coeficiente de potência} = \frac{\text{bhp}}{\rho \omega^3 D^5} \qquad \eta_{\text{turbina}} = \text{Eficiência de turbina} = \frac{\text{bhp}}{\rho g H \dot{V}} \tag{14–47}$$

Ao traçarmos as curvas de desempenho de turbina, usamos C_P em vez de C_Q como o parâmetro independente. Em outras palavras, C_H e C_Q são funções de C_P, e η_{turbina}, portanto, também é uma função de C_P já que

$$\eta_{\text{turbina}} = \frac{C_P}{C_Q C_H} = \text{função de } C_P \tag{14–48}$$

As leis de semelhança (Equações 14–38) podem ser aplicadas às turbinas e também às bombas, permitindo escalar as turbinas acima ou abaixo (Figura 14–103). Também usamos as leis de semelhança para prever o desempenho de determinada turbina operando a velocidades diferentes e taxas de escoamento da mesma forma que fizemos anteriormente para as bombas.

As leis de semelhança simples são válidas apenas e estritamente se o modelo e o protótipo operarem a números de Reynolds idênticos, e são exata e geometricamente semelhantes (incluindo a rugosidade de superfície relativa e a folga radial). Infelizmente, nem sempre é possível atender todos esses critérios ao executar os testes de modelo, porque o número de Reynolds que pode ser atingido nos testes de modelo em geral é muito menor do que o do protótipo, e as superfícies de modelo têm rugosidade relativa e folga radial maiores. Quando o protótipo em escala total é significativamente maior do que seu modelo, o desempenho do protótipo em geral é *melhor*, pelos mesmos motivos discutidos anteriormente para as bombas. Algumas equações empíricas foram desenvolvidas para considerar o aumento de eficiência entre um modelo pequeno e um protótipo em escala total. Uma dessas equações foi sugerida por Moody (1926), e pode ser usada como correção de primeira ordem

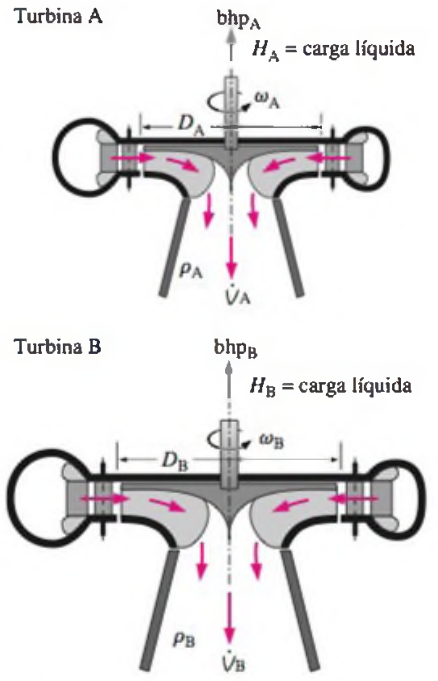


FIGURA 14–103
A análise dimensional é útil para escalar duas turbinas geometricamente semelhantes. Se todos os parâmetros adimensionais da turbina A forem equivalents àqueles da turbina B, as duas turbinas são *dinamicamente semelhantes*.

Equação de correção de eficiência de Moody para as turbinas:

$$\eta_{\text{turbina, protótipo}} \cong 1 - (1 - \eta_{\text{turbina, modelo}}) \left(\frac{D_{\text{modelo}}}{D_{\text{protótipo}}} \right)^{1/5} \tag{14–49}$$

Observe que a Equação 14–49 também é usada como correção de primeira ordem para escalar as *bombas*-modelo em escala total (Equação 14–34).

Na prática, os engenheiros de turbina hidráulica em geral acham que o aumento real de eficiência do modelo para o protótipo é de apenas dois terços do aumento dado pela Equação 14–49. Por exemplo, suponhamos que a eficiência de um modelo em escala um para dez seja de 93,2%. A Equação 14–49 prevê uma eficiência em escala total de 95,7%, ou um aumento de 2,5%. Na prática, esperamos apenas cerca de dois terços desse aumento ou 93,2 + 2,5(2/3) = 94,9%. Algumas equações de correção mais avançadas estão disponíveis na **International Electrotechnical Commission (IEC)**, uma organização mundial para padronização.

EXEMPLO 14–13 Aplicação das Leis de Semelhança de Turbina

Uma turbina Francis está sendo desenvolvida para uma represa hidrelétrica. Em vez de começar desde o início, os engenheiros resolvem escalar geometricamente uma turbina hidráulica já projetada que tem um histórico de desempenho excelente. A turbina existente (turbina A) tem diâmetro $D_A = 2{,}05$ m e gira a $\dot{n}_A = 120$ rpm ($\omega_A = 12{,}57$ rad/s). No seu ponto de melhor eficiência $\dot{V}_A = 350$ m³/s, $H_A = 75{,}0$ m de água e $\text{bhp}_A = 242$ MW. A nova turbina (turbina B) será usada em uma instalação maior. Seu gerador girará à mesma velocidade (120 rpm), mas sua carga líquida será mais alta ($H_B = 104$ m). Calcule o diâmetro da nova turbina de forma que ela opere com mais eficiência, e calcule $\dot{V}_B$, bhp_B e $\eta_{\text{turbina, B}}$.

SOLUÇÃO Devemos projetar uma nova turbina hidráulica escalando uma turbina hidráulica existente. Devemos calcular especificamente o diâmetro, a vazão e a potência no eixo da nova turbina.

Hipóteses **1** A nova turbina é geometricamente semelhante à turbina existente. **2** Os efeitos do número de Reynolds e da rugosidade são desprezíveis. **3** O novo conduto forçado também é geometricamente similar ao existente, de modo que o escoamento que entra na nova turbina (perfil de velocidade, intensidade da turbulência etc.) é similar ao da turbina existente.

Propriedades A densidade da água a 20°C é $\rho = 998{,}0$ kg/m³.

Análise Como a nova turbina (B) é dinamicamente similar à turbina existente (A), estamos preocupados apenas com um ponto operacional homólogo em particular de ambas as turbinas, a saber, o melhor ponto de eficiência. Solucionamos a Equação 14–38b para D_B

$$D_B = D_A\sqrt{\frac{H_B}{H_A}\frac{\dot{n}_A}{\dot{n}_B}} = (2{,}05\text{m})\sqrt{\frac{104\text{ m}}{75{,}0\text{ m}}\frac{120\text{ rpm}}{120\text{ rpm}}} = \mathbf{2{,}41\text{ m}}$$

Em seguida, solucionamos a Equação 14–38a para $\dot{V}_B$

$$\dot{V}_B = \dot{V}_A\left(\frac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^3 = (350\text{ m}^3\text{/s})\left(\frac{120\text{ rpm}}{120\text{ rpm}}\right)\left(\frac{2{,}41\text{ m}}{2{,}05\text{ m}}\right)^3 = \mathbf{572\text{ m}^3\text{/s}}$$

Finalmente solucionamos a Equação 14–38c para bhp_B

$$\text{bhp}_B = \text{bhp}_A\left(\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)\left(\frac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)^3\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^5$$

$$= (242\text{ MW})\left(\frac{998{,}0\text{ kg/m}^3}{998{,}0\text{ kg/m}^3}\right)\left(\frac{120\text{ rpm}}{120\text{ rpm}}\right)^3\left(\frac{2{,}41\text{ m}}{2{,}05\text{ m}}\right)^5 = \mathbf{548\text{ MW}}$$

Como verificação, calculamos os parâmetros adimensionais da turbina da Equação 14–47 para ambas as turbinas para mostrar que esses dois pontos operacionais são, sem dúvida, homólogos (Figura 14–104). Como já discutimos anteriormente, porém, a similaridade dinâmica total não pode realmente ser atingida entre as duas turbinas, por causa dos efeitos de escala (as turbinas maiores em geral têm eficiência mais alta). O diâmetro da nova turbina é de cerca de 18% maior do que aquele da turbina existente, de modo que o aumento da eficiência devido ao tamanho da turbina não deve ser significativo. Verificamos isso usando a equação de correção da eficiência de Moody (Equação 14–49), considerando a turbina A como o "modelo" e B como o "protótipo"

Correção da eficiência:

$$\eta_{\text{turbina, B}} \cong 1 - (1 - \eta_{\text{turbina, A}})\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^{1/5} = 1 - (1 - 0{,}942)\left(\frac{2{,}05\text{ m}}{2{,}41\text{ m}}\right)^{1/5} = \mathbf{0{,}944}$$

ou 94,4%. Sem dúvida, a correção de primeira ordem resulta em uma eficiência prevista para a turbina maior que é apenas uma fração de 1% maior do que a eficiência da turbina menor.

$$C_{H,\text{ A}} = C_{H,\text{ B}} = \frac{gH}{\omega^2 D^2} = 1{,}11$$

$$C_{Q,\text{ A}} = C_{Q,\text{ B}} = \frac{\dot{V}}{\omega D^3} = 3{,}23$$

$$C_{P,\text{ A}} = C_{P,\text{ B}} = \frac{\text{bhp}}{\rho\omega^3 D^5} = 3{,}38$$

$$\eta_{\text{turbina, A}} = \eta_{\text{turbina, B}} = \frac{\text{bhp}}{\rho g H\dot{V}} = 94{,}2\%$$

FIGURA 14–104
Parâmetros de turbina adimensionais para ambas as turbinas do Exemplo 14–13. Como as duas turbinas operam em pontos homólogos, seus parâmetros adimensionais devem coincidir.

Discussão Se o escoamento que entra na nova turbina do conduto forçado não fosse semelhante àquele da turbina existente (por exemplo, o perfil de velocidade e a intensidade de turbulência), poderíamos esperar semelhança dinâmica.)

Velocidade Específica da Turbina

Em nossa discussão anterior sobre as bombas, definimos outro parâmetro adimensional útil, a velocidade específica de bomba (N_{Sp}), com base em C_Q e C_H. Poderíamos usar a mesma definição de velocidade específica para turbinas, mas como C_P e não C_Q é o parâmetro adimensional independente para as turbinas, definimos a **velocidade específica de turbina** (N_{St}) de modo diferente, ou seja, em termos de C_P e C_H,

Velocidade específica de turbina:

$$N_{St} = \frac{C_P^{1/2}}{C_H^{5/4}} = \frac{(\text{bhp}/\rho\omega^3 D^5)^{1/2}}{(gH/\omega^2 D^2)^{5/4}} = \frac{\omega(\text{bhp})^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH)^{5/4}} \qquad \textbf{(14–50)}$$

A velocidade específica de turbina também é chamada de **velocidade específica de potência** em alguns livros. Propomos o exercício de comparar as definições da velocidade específica de bomba (Equação 14–35) e da velocidade específica da turbina (Equação 14–50) para demonstrar que

Relacionamento entre N_{St} e N_{Sp}: $$N_{St} = N_{Sp}\sqrt{\eta_{\text{turbina}}} \qquad \textbf{(14–51)}$$

Observe que a Equação 14–51 *não* se aplica a uma bomba que funciona ao contrário como uma turbina o vice-versa. *Existem* aplicações nas quais a *mesma* turbomáquina é usada como uma bomba *e* como uma turbina; esses dispositivos são chamados apropriadamente de **bombas–turbinas**. Por exemplo, uma usina a carvão ou nuclear pode bombear água até uma elevação maior durante épocas de demanda de energia baixa e, em seguida, pode passar aquela água pela mesma turbomáquina (operando como uma turbina) durante épocas de demanda de energia alta (Figura 14–105). Tais instalações quase sempre aproveitam as diferenças naturais de elevação em locais montanhosos e podem atingir cargas brutas significativas (acima de 1.000 pés) sem exigir a construção de uma represa. Uma fotografia de uma bomba-turbina é mostrada na Figura 14–106.

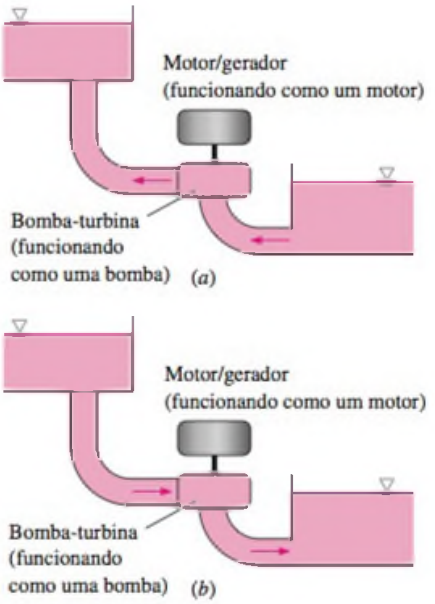


FIGURA 14–105
Uma *bomba–turbina* é usada por algumas usinas para armazenamento de energia: (*a*) a água é bombeada pela bomba-turbina durante períodos de demanda de energia baixa e (*b*) a eletricidade é gerada pela bomba-turbina durante períodos de demanda de energia alta.

FIGURA 14–106
O rotor de uma bomba-turbina usada na estação de armazenamento bombeado de Yards Creek em Blairstown, NJ. Há sete pás de rotor com diâmetro externo de 17,3 pés (5,27 m). A turbina gira a 240 rpm e produz 112 MW de potência à vazão de 56,6 m3/s de uma carga líquida de 221 m.
Foto cortesia da American Hydro Corporation, York, PA. Usada com permissão.

Observe que há ineficiências na bomba-turbina quando ela opera como uma bomba, e também quando opera como turbina. Além disso, como uma turbomáquina deve ser criada para operar como bomba *e* como turbina, nem η_{bomba} nem $\eta_{turbina}$ são tão altas quanto seriam com uma bomba ou turbina dedicadas. Entretanto, a eficiência geral desse tipo de armazenamento de energia está em torno de 80% para uma unidade bomba-turbina bem projetada.

Na prática, a bomba-turbina pode operar a uma taxa de escoamento e rpm diferentes quando atua como uma turbina, comparada a quando atua como uma bomba, uma vez que o melhor ponto de eficiência da turbina não é necessariamente igual àquele da bomba. Entretanto, para o caso simples em que a taxa de escoamento e a rpm são iguais para as operações de bomba e turbina, utilizamos as Equações 14–35 e 14–50 para comparar a velocidade específica da bomba e a velocidade específica da turbina. Após alguma álgebra

Relacionamento de velocidade específica bomba-turbina a mesma taxa de escoamento e rpm:

$$N_{St} = N_{Sp}\sqrt{\eta_{turbina}}\left(\frac{H_{bomba}}{H_{turbina}}\right)^{3/4} = N_{Sp}(\eta_{turbina})^{5/4}(\eta_{bomba})^{3/4}\left(\frac{bhp_{bomba}}{bhp_{turbina}}\right)^{3/4} \qquad \textbf{(14–52)}$$

Já discutimos alguns problemas da velocidade específica das unidades de bomba. Infelizmente, esses mesmos problemas também ocorrem com a velocidade específica da turbina. Ou seja, embora N_{St} seja por definição um parâmetro adimensional, os engenheiros se acostumaram a usar unidades inconsistentes que transformam N_{St} em uma quantidade dimensional complicada. Nos Estados Unidos, a maioria dos engenheiros de turbina escreve as unidades rotacionais em unidades de rotações por minuto (rpm), bhp em unidades de cavalo-vapor e H em unidades de pés. Além disso, eles ignoram a constante gravitacional g e a densidade ρ na definição de N_{St}. (Considera-se que a turbina opere na terra e que o fluido de trabalho seja a água). Definimos

Velocidade específica de turbina, unidades comuns nos EUA:

$$N_{St,\,EUA} = \frac{(n,\,\text{rpm})\,(\text{bhp},\,\text{hp})^{1/2}}{(H,\,\text{pé})^{5/4}} \qquad \textbf{(14–53)}$$

Existe alguma discrepância na literatura da turbomáquina com relação às conversões entre as duas formas de velocidade específica de turbina. Para converter $N_{St,\,EUA}$ em N_{St} dividimos por $g^{5/4}$ e $\rho^{1/2}$ e, em seguida, usamos as taxas de conversão para cancelar todas as unidades. Definimos $g = 32{,}174$ pés/s^2 e consideramos a água à densidade $\rho = 62{,}40$ lbm/pés^3. Quando realizada adequadamente, convertendo ω em rad/s, a conversão é $N_{St,\,EUA} = 0{,}02301 N_{St}$ ou $N_{St} = 43{,}46_{St,\,EUA}$. Entretanto, alguns autores convertem ω em *rotações* por segundo, introduzindo um fator 2π na conversão, ou seja, $N_{St,\,EUA} = 0{,}003662\ N_{St}$ ou $N_{St} = 273{,}1\ N_{St,\,EUA}$. A conversão anterior é mais comum e está resumida na Figura 14–107.

Tecnicamente, a velocidade específica da turbina poderia ser aplicada a qualquer condição operacional e seria apenas outra função de C_P. Em geral, porém, esse não é o modo como ela é usada. Em vez disso, é comum definir apenas a velocidade específica da turbina com o ponto de melhor eficiência (BEP) da turbina. O resultado é um único número que caracteriza a turbina.

A velocidade específica da turbina é usada para caracterizar a operação de uma turbina em suas condições ideais (ponto de melhor eficiência) e é útil para a seleção preliminar de turbina.

Como foi representado graficamente na Figura 14–108, as turbinas de impulso têm desempenho ideal para N_{St} próximo de 0,15, enquanto as turbinas Francis e Kaplan têm melhor desempenho a N_{St} próximo de 1 e 2,5, respectivamente. Se N_{St} é menor do que cerca de 0,3, uma turbina de impulso é a melhor opção. Se N_{St} estiver entre cerca de 0,3 e 2, uma turbina Francis é uma opção melhor. Quando N_{St} é maior do que aproximadamente 2, uma bomba de Kaplan deve ser usada. Esses intervalos são indicados na Figura 14–108 em termos de N_{St} e $N_{St,\,EUA}$.

FIGURA 14–107
Conversões entre as definições adimensionais e as definições padrão dos EUA da velocidade específica de turbina. Os valores numéricos são dados até quatro dígitos significativos. As conversões assumem a gravidade da terra e a água como fluido de trabalho.

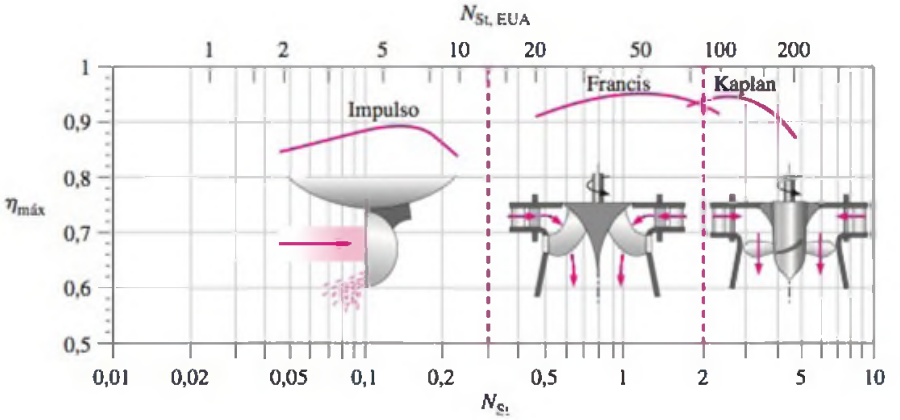


FIGURA 14–108
A eficiência máxima como função da velocidade específica da turbina para os três tipos principais de bombas dinâmicas. As escalas horizontais mostram a velocidade específica de turbina adimensional (N_{St}) e a velocidade específica de turbina em unidades comuns nos EUA ($N_{St, EUA}$). A representacão gráfica também oferece exemplos de tipos de pás para referência.

EXEMPLO 14–14 Velocidade Específica de Turbina

Calcule e compare a velocidade específica de turbina para as turbinas pequenas (A) e grandes (B) do Exemplo 14–13.

SOLUÇÃO A velocidade específica da turbina de duas turbinas dinamicamente semelhantes deve ser comparada.

Propriedades A densidade da água a $T = 20°C$ é $\rho = 998{,}0\ kg/m^3$.

Análise Calculamos a velocidade específica de turbina adimensional para a turbina A

$$N_{St,A} = \frac{\omega_A (bhp_A)^{1/2}}{\rho_A^{1/2}(gH_A)^{5/4}}$$

$$= \frac{(12{,}57\ rad/s)(242 \times 10^6\ W)^{1/2}}{(998{,}0\ kg/m^3)^{1/2}[(9{,}81\ m/s^2)(75{,}0\ m)]^{5/4}}\left(\frac{kg \cdot m/s^2}{W \cdot s}\right)^{1/2} = 1{,}615 \cong \mathbf{1{,}62}$$

e para a turbina B

$$N_{St,B} = \frac{\omega_B (bhp_B)^{1/2}}{\rho_B^{1/2}(gH_B)^{5/4}}$$

$$= \frac{(12{,}57\ rad/s)(548 \times 10^6\ W)^{1/2}}{(998{,}0\ kg/m^3)^{1/2}[(9{,}81\ m/s^2)(104\ m)]^{5/4}}\left(\frac{kg \cdot m/s^2}{W \cdot s}\right)^{1/2} = 1{,}615 \cong \mathbf{1{,}62}$$

Vemos que as velocidades específicas das duas turbinas são iguais. Como verificação da álgebra, calculamos o N_{St} da Figura 14–109 de uma forma diferente usando sua definição em termos de C_P e C_H (Equação 14–50). O resultado é igual (exceto pelo arredondamento do erro). Finalmente, calculamos a velocidade específica da turbina em unidades comuns dos EUA com as conversões da Figura 14–107

$$N_{St,EUA,A} = N_{St,EUA,B} = 43{,}46 N_{St} = (43{,}46)(1{,}615) = \mathbf{70{,}2}$$

Discussão Como as turbinas A e B operam em pontos homólogos, não é surpresa que suas velocidades específicas de turbina sejam iguais. Na verdade, se elas não fossem iguais, isso seria um sinal certo de erro algébrico ou de cálculo. Na Figura 14–108, uma turbina Francis, sem dúvida, é a opção apropriada para uma velocidade específica de turbina de 1,6.

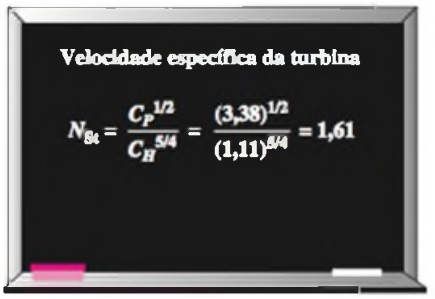


FIGURA 14–109
Cálculo da velocidade específica de turbina usando os parâmetros adimensionais C_P e C_H para o Exemplo 14–14. (Consulte a Figura 14–104 para obter os valores de C_P e C_H para a turbina A e a turbina B.)

Turbinas a Gás e Vapor

A maior parte de nossa discussão se relacionou às turbina hidráulicas. Agora vamos falar sobre as turbinas desenvolvidas para uso com *gases*, como os produtos de combustão ou vapor. Em uma usina a carvão ou nuclear, o vapor a alta pressão é produzido por uma caldeira e, em seguida, é enviado para uma turbina a vapor para produzir eletricidade. Devido ao reaquecimento, à regeneração e a outros esforços para aumentar a eficiência geral, essas turbinas a vapor em geral têm dois estágios

(alta pressão e baixa pressão). Quase todas as turbinas a vapor de usinas são dispositivos com escoamento axial e vários estágios como aquela mostrada na Figura 14–110. Não aparecem as aletas do estator que direcionam o escoamento entre cada conjunto de pás de turbina. A análise das turbinas com escoamento axial é muito semelhante àquela dos ventiladores com escoamento axial, como foi discutido na Seção 14–2, e não será repetida aqui.

Turbinas similares de escoamento axial são usadas em motores de aviões (Figura 14–62) e em geradores de turbina a gás (Figura 14–111). Um gerador de turbina a gás é semelhante a um motor a jato, exceto que em vez de fornecer empuxo, a turbomáquina foi criada para transferir o máximo de energia de combustível possível para o eixo giratório, que está conectado a um gerador elétrico. É claro que as turbinas a gás usadas para a geração de energia são, em geral, muito maiores do que os motores a jato, uma vez que elas são instaladas no chão. Assim como as turbina hidráulicas, um ganho significativo de eficiência é atingido à medida que o tamanho geral da turbina aumenta.

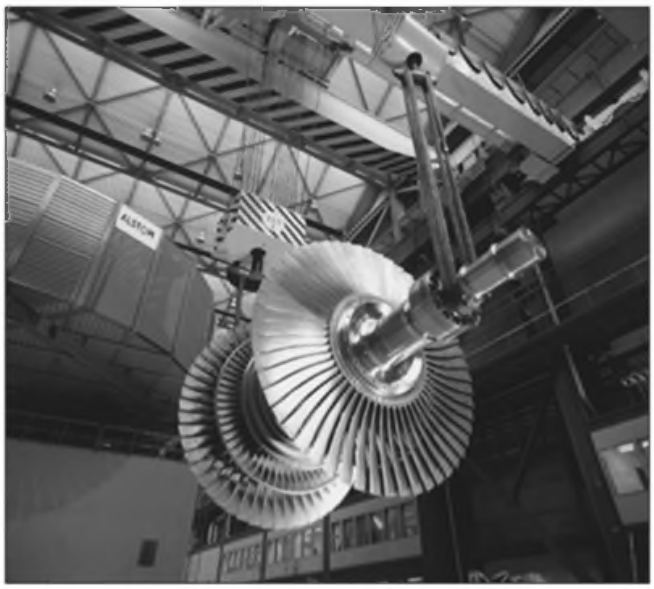


FIGURA 14–110
As pás de uma turbina a vapor de dois estágios usada em uma usina a carvão ou nuclear. O escoamento se dá da esquerda para a direita, com o estágio de alta pressão à esquerda e o estágio de baixa pressão à direita.
Cortesia da Alstom. Usada com permissão.

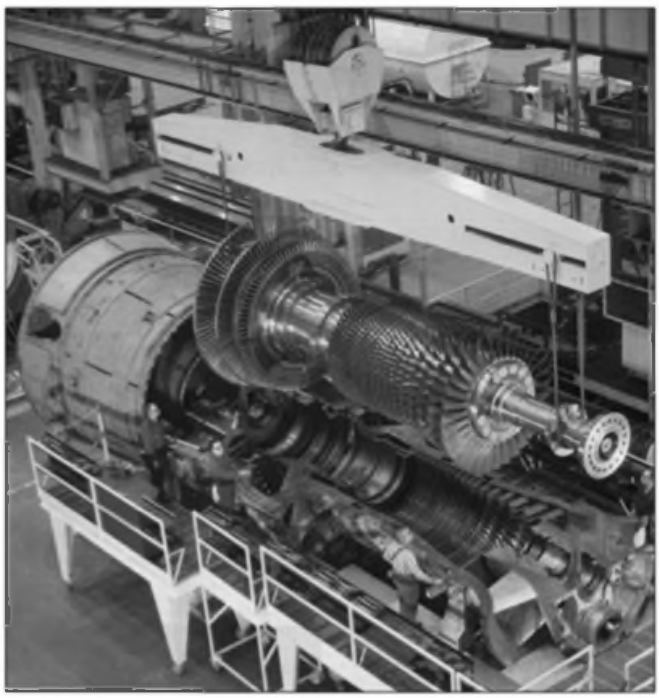


FIGURA 14–111
A montagem do rotor da turbina a gás MS7001F sendo abaixada até a metade inferior da carcaça da turbina a gás. O escoamento se dá da direita para a esquerda, com o conjunto a montante de pás do rotor (chamado de *pás*) compreendendo o compressor de vários estágios, e o conjunto a jusante de pás do rotor (chamado de *pás*) compreendendo a turbina de vários estágios. As pás do estator do compressor (chamadas de *aletas*) e as pás do estator da turbina (chamadas de *bocais*) podem ser vistas na metade inferior da carcaça da turbina a gás. Esta turbina a gás gira a 3.600 rpm e produz mais de 135 MW de potência.
Cortesia da General Electric Power Systems. Usada com permissão.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Atomizadores de Combustível Giratórios

Autor Convidado: Werner J. A. Dahm, Universidade de Michigan

As taxas de rotação muito altas às quais operam os motores das turbinas a gás pequenas, com freqüência se aproximando de 100.000 rpm, permitem aos atomizadores giratórios centrífugos a criação de spray de combustível líquido que é queimado no combustor. Observe que um atomizador de 10 cm de diâmetro girando a 30.000 rpm impõe 490.000 m/s^2 de aceleração (50.000 g) ao combustível líquido, permitindo que tais atomizadores de combustível produzam potencialmente tamanhos de gota muito pequenos.

Os tamanhos reais das gotas dependem das propriedades do fluido, incluindo as densidades de líquido e gás ρ_L e ρ_G, as viscosidades μ_L e μ_G e a tensão de superfície líquido-gás σ_s. A Figura 14–112 mostra esse atomizador giratório girando à taxa ω, com canais radiais no anel ao raio nominal $R = (R_1 + R_2)/2$. O combustível escoa para os canais devido à aceleração $R\omega^2$ e forma um filme líquido sobre as paredes do canal. A aceleração alta leva a uma espessura de filme típica t de apenas 10 μm. A forma do canal é fechada para produzir o desempenho de atomização desejado. Para determinada forma, os tamanhos resultantes de gotas dependem da velocidade de escoamento transversal $V_c = R\omega$ na qual o filme é emitido na saída do canal, juntamente com as propriedades de líquido e gás. A partir daí, existem quatro grupos sem dimensões que determinam o desempenho da atomização: a densidade líquido-gás e as taxas de viscosidade $r = [\rho_L/\rho_G]$ e $m = [\mu_L/\mu_G]$, o *número* de *Weber* do filme $\mathrm{We}_t = [\rho_G V_c^2 t/\sigma_s]$ e o *número* de *Ohnesorge* $\mathrm{Oh}_t = [\mu_L/(\rho_L\sigma_s t)^{1/2}]$.

Observe que We_t dá a relação característica entre as forças aerodinâmicas que o gás exerce sobre o filme líquido e as forças de tensão de superfície que agem sobre a superfície do líquido, enquanto Oh_t dá a relação entre as forças viscosas do filme líquido e as forças de tensão de superfície que agem sobre o filme. Juntas elas expressam a importância relativa dos três principais efeitos físicos envolvidos no processo de atomização: *inércia, difusão viscosa* e *tensão de superfície.*

A Figura 14–113 mostra exemplos do processo resultante de quebra do líquido em diversas formas de canal e taxas de rotação, visualizado por meio da fotografia a laser pulsada a 10 ns. Os tamanhos de gota são relativamente insensíveis às variações do número de Ohnesorge, uma vez que os valores dos atomizadores de combustível práticos estão no limite $\mathrm{Oh}_t << 1$ e, portanto, os efeitos viscosos são relativamente desprezíveis. O número de Weber, porém, permanece crucial uma vez que a tensão de superfície e os efeitos da inércia dominam o processo de atomização. A We_t pequeno, o líquido passa por quebra *subcrítica* na qual a tensão de superfície tira o filme líquido fino em uma única coluna que subseqüentemente se quebra para formar gotas relativamente grandes. A valores *supercríticos* de We_t, o filme líquido fino se divide aerodinamicamente em tamanhos pequenos de gota na ordem da espessura de filme t. Com resultados como esses, os engenheiros podem desenvolver atomizadores de combustível giratórios para aplicações práticas.

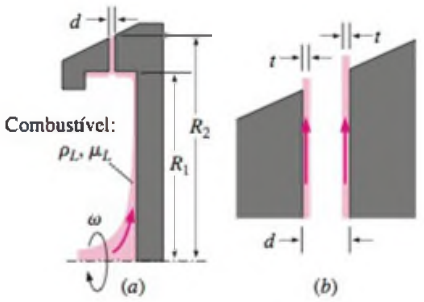


FIGURA 14–112
Diagrama de *(a)* um atomizador de combustível giratório e *(b)* uma visualização detalhada do filme de combustível líquido ao longo das paredes do canal.

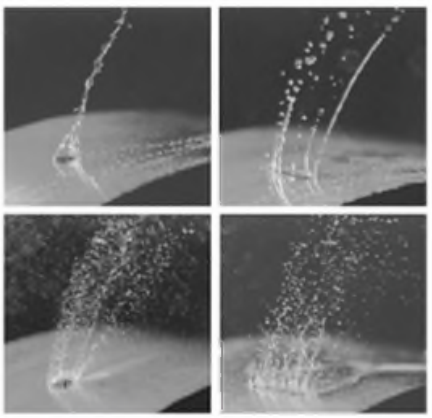


FIGURA 14–113
Visualizações da quebra do líquido pelos atomizadores de combustível giratórios, mostrando quebra subcrítica a valores relativamente baixos de We_t (*superior*), para os quais os efeitos da tensão de superfície são suficientemente fortes com relação à inércia para empurrar o filme líquido fino para colunas grandes; e a quebra supercrítica a valores mais altos de We_t (*inferior*), para os quais a inércia domina a tensão de superfície e o filme fino se quebra em gotas pequenas.
Reimpresso com permissão da Werner J. A. Dahm, Universidade de Michigan.

Referência

Dahm, W. J. A., Patel, P. R. e Lerg, B. H. "Visualization and Fundamental Analysis of Liquid Atomization by Fuel Slingers in Small Gas Turbines", *AIAA Documento N. 2002-3183*, AIAA, Washington, DC, 2002.

RESUMO

Classificamos as turbomáquinas em duas categorias amplas, *bombas* e *turbinas*. A palavra *bomba* é um termo geral para qualquer máquina de fluido que *adiciona* energia a um fluido. Explicamos como ocorre essa transferência de energia para os diversos tipos de projetos de bomba — tanto as *bombas por deslocamento positivo* quanto as *bombas dinâmicas*. A palavra *turbina* se refere a uma máquina de fluido que *extrai* energia *de* um fluido. Existem também as *turbinas por deslocamento positivo* e as *turbinas dinâmicas* com diversas variedades.

A equação mais útil para o projeto preliminar de turbomáquina é a *equação da turbomáquina de Euler*

$$T_{eixo} = \rho\dot{V}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t})$$

Observe que para as bombas, a entrada e a saída estão aos raios r_1 e r_2, respectivamente, enquanto para as turbinas, a entrada está ao raio r_2 e a saída está ao raio r_1. Mostramos diversos exemplos nos quais as formas das pás das bombas e turbinas são projetadas com base nas velocidades de escoamento desejadas. Em seguida, usando a equação da turbomáquina de Euler, o desempenho da turbomáquina pode ser previsto.

As *leis de semelhança da turbomáquina* ilustram uma aplicação prática da análise dimensional. Mostramos como as leis de semelhança são usadas no projeto das novas turbomáquinas que são geometricamente semelhantes às existentes. Para bombas e turbinas, os principais parâmetros adimensionais são o coeficiente de carga, o coeficiente de capacidade e o coeficiente de potência, definidos, respectivamente, como

$$C_H = \frac{gH}{\omega^2D^2} \qquad C_Q = \frac{\dot{V}}{\omega D^3} \qquad C_P = \frac{\text{bhp}}{\rho\omega^3D^5}$$

Além desses, definimos a *eficiência de bomba* e *de turbina* como recíprocas entre si

$$\eta_{bomba} = \frac{\dot{W}_{\text{potência da água}}}{\dot{W}_{eixo}} = \frac{\rho g\dot{V}H}{\text{bhp}}$$

$$\eta_{turbina} = \frac{\dot{W}_{eixo}}{\dot{W}_{\text{potência da água}}} = \frac{\text{bhp}}{\rho g\dot{V}H}$$

Finalmente, dois outros parâmetros adimensionais bastante úteis, chamados de *velocidade de bomba* e *velocidade específica de turbina* são definidos, respectivamente, como

$$N_{Sp} = \frac{C_Q^{1/2}}{C_H^{3/4}} = \frac{\omega\dot{V}^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \qquad N_{St} = \frac{C_P^{1/2}}{C_H^{5/4}} = \frac{\omega(\text{bhp})^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH)^{5/4}}$$

Esses parâmetros são úteis para a seleção preliminar do tipo de bomba ou turbina mais apropriado para determinada aplicação.

O projeto de turbomáquina assimila o conhecimento de várias áreas-chave da mecânica de fluidos, incluindo a análise de massa, energia e momento (Capítulos 5 e 6); análise dimensional e modelagem (Capítulo 7); escoamento em tubos (Capítulo 8); análise diferencial (Capítulos 9 e 10); e aerodinâmica (Capítulo 11). Além disso, no caso das turbinas a gás e de outros tipos de turbomáquinas que envolvem gases, a análise do escoamento compressível (Capítulo 12) é necessária. Por fim, a dinâmica dos fluidos computacional (Capítulo 15) tem um papel cada vez mais importante no projeto de turbomáquinas altamente eficientes.

REFERÊNCIAS E SUGESTÕES DE LEITURA

1. ASHRAE (Sociedade Americana dos Engenheiros de Aquecimento, Refrigeração e Condicionamento de Ar, Inc.). *ASHRAE Fundamentals Handbook*, ASHRAE, 1791 Tullie Circle, NE, Atlanta, GA, 30329; edições a cada quatro anos: 1993, 1997, 2001 etc.

2. L. F. Moody. "The Propeller Type Turbine", *ASCE Trans.*, 89, p. 628, 1926.

3. Earl Logan, Jr., ed. *Handbook of Turbomachinery*. Nova Iorque: Marcel Dekker, Inc., 1995.

4. A. J. Glassman, ed. *Turbine Design and Application*. Nasa Sp-290, Programa de Informações Científicas e Técnicas da Nasa. Washington, DC, 1994.

5. D. Japikse e N. C. Baines. *Introduction to Turbomachinery*. Norwich, VT: Concepts ETI, Inc. e Oxford: Oxford University Press, 1994.

6. Earl Logan, Jr. *Turbomachinery: Basic Theory and Applications*, 2. ed. Nova Iorque: Marcel Dekker, Inc., 1993.

7. R. K. Turton. *Principles of Turbomachinery*, 2. ed. London: Chapman & Hall, 1995.

8. Terry Wright. *Fluid Machinery: Performance, Analysis, and Design*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.

PROBLEMAS*

Problemas Gerais

14–1C Qual é o termo mais comum para uma *turbomáquina que produz energia*? E para uma *turbomáquina que absorve energia*? Explique essa terminologia. Em particular, em qual estrutura de referência esses termos são definidos — do fluido ou da vizinhança?

14–2C Quais as principais diferenças entre ventiladores e compressores? Discuta isso em termos da elevação de pressão e da vazão.

14–3C Liste pelo menos dois exemplos comuns de ventiladores e compressores.

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

14–4C Discuta a principal diferença entre uma *turbomáquina por deslocamento positivo* e uma *turbomáquina dinâmica*. Dê um exemplo de cada para bombas e turbinas.

14–5C Para uma bomba, discuta a diferença entre *potência no eixo* e *potência da água* e defina também a eficiência de bomba em termos dessas quantidades.

14–6C Para uma turbina, discuta a diferença entre *potência no eixo* e *potência da água* e defina também a eficiência de turbina em termos dessas quantidades.

14–7C Explique por que existem um termo "extra" na equação de Bernoulli em uma estrutura de referência giratória.

14–8 Uma bomba d'água aumenta a pressão da água que passa através dela (Figura P14–8). Estima-se que a água seja incompressível. Para cada um dos três casos listados abaixo, como a velocidade média da água varia através da bomba? Em particular, V_s é menor do que, igual a ou maior do que V_e? Mostre suas equações e explique.

(*a*) O diâmetro de saída é menor do que o diâmetro de entrada ($D_s < D_e$)

(*b*) Os diâmetros de entrada e saída são iguais ($D_s = D_e$)

(*a*) O diâmetro de saída é maior do que o diâmetro de entrada ($D_s > D_e$)

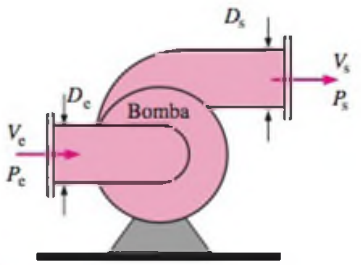


FIGURA P14–8

14–9 Um compressor de ar aumenta a pressão ($P_s > P_e$) e a densidade ($\rho_s > \rho_e$) do ar que passa através dele (Figura P14–9). No caso em que os diâmetros de saída e entrada são iguais ($D_s = D_e$), como a velocidade média do ar varia através do compressor? Em particular, V_s é menor do que, igual a ou maior do que V_e? Explique. *Resposta:* menor do que

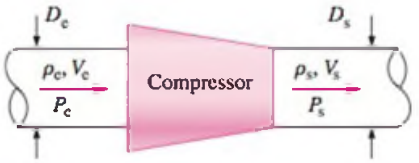


FIGURA P14–9

Bombas

14–10C Existem três categorias principais de bombas dinâmicas. Liste e defina essas categorias.

14–11C Para cada declaração sobre as bombas centrífugas, selecione se ela é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta.

(*a*) Uma bomba centrífuga com pás radiais tem eficiência mais alta do que a mesma bomba com pás inclinadas para trás.

(*b*) Uma bomba centrífuga com pás radiais produz uma elevação de pressão maior do que a mesma bomba com pás inclinadas para trás ou para a frente ao longo de um intervalo amplo de $\dot{V}$.

(*c*) Uma bomba centrífuga com pás inclinadas para a frente é uma boa opção quando é preciso fornecer uma elevação de pressão grande em um intervalo amplo de taxas de escoamento de volume.

(*d*) Uma bomba centrífuga com pás inclinadas para trás deveria ter menos pás do que uma bomba de mesmo tamanho com pás inclinadas para trás ou radiais.

14–12C A Figura P14–12C mostra dois locais possíveis para uma bomba d´água em um sistema de tubulação que bombeia água do tanque mais baixo para o tanque mais alto. Qual local é melhor? Por quê?

14–13C Defina *carga de sucção líquida positiva* e *carga de sucção líquida necessária positiva*, e explique como essas duas quantidades são usadas para garantir que não haja cavitação em uma bomba.

14–14C Considere o escoamento através de uma bomba de água. Para cada declaração, selecione se ela é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta.

(*a*) Quanto mais rápido for o escoamento através da bomba, maior a probabilidade de ocorrer cavitação.

(*b*) À medida que a temperatura da água aumenta, o $NPSH_{necessário}$ também aumenta.

(*c*) À medida que a temperatura da água aumenta, o $NPSH_{disponível}$ também aumenta.

(*d*) À medida que a temperatura da água aumenta, a probabilidade de ocorrer cavitação é menor.

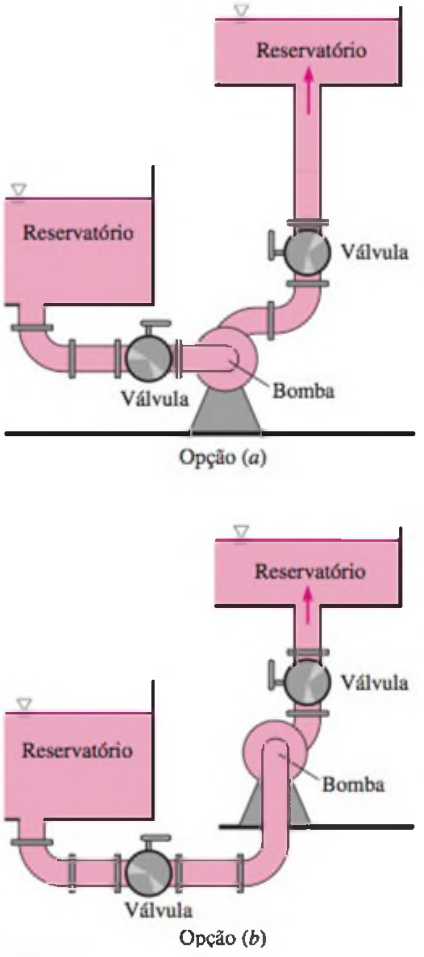


FIGURA P14–12C

14–15C Explique por que em geral não é sensato organizar duas (ou mais) bombas diferentes em série ou em paralelo.

14–16C Considere uma bomba líquida centrífuga típica. Para cada declaração, selecione se ela é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta.

(*a*) $\dot{V}$ do *fornecimento livre* da bomba é maior do que $\dot{V}$ em seu *ponto de melhor eficiência*.

(*b*) À *carga de fechamento* da bomba, a *eficiência da bomba* é zero.

(*c*) Ao *ponto de melhor eficiência* da bomba, sua *carga líquida* está em seu valor máximo.

(*d*) À *carga de fornecimento livre* da bomba, a *eficiência da bomba* é zero.

14–17C Escreva a equação que define a carga de sucção positiva líquida real (disponível) NPSH. Com essa definição, discuta pelo menos cinco maneiras de diminuir a probabilidade de cavitação na bomba, para o mesmo líquido, temperatura e vazão.

14–18C Considere o escoamento estável e incompressível através de duas bombas idênticas (bombas 1 e 2), seja em série ou em paralelo. Para cada declaração, selecione se ela é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta.

(*a*) A vazão através das duas bombas em série é igual a $\dot{V}_1 + \dot{V}_2$.

(*b*) A carga líquida geral através das duas bombas em série é igual a $H_1 + H_2$.

(*c*) A vazão através das duas bombas em paralelo é igual a $\dot{V}_1 + \dot{V}_2$.

(*d*) A carga líquida geral através das duas bombas em paralelo é igual a $H_1 + H_2$.

14–19C A Figura P14–19C mostra uma representação gráfica da carga líquida da bomba como função da vazão da bomba ou capacidade. Na figura, rotule a carga de fechamento, o fornecimento livre, a curva de desempenho da bomba e a curva do sistema e o ponto operacional.

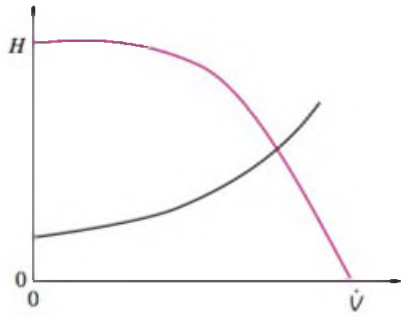


FIGURA P14–19C

14–20 Suponhamos que a bomba da Figura P14–19C esteja situada entre dois tanques de água com suas superfícies livres abertas para a atmosfera. Qual superfície livre está a uma elevação maior — aquela correspondente ao tanque que fornece água na entrada da bomba, ou aquela que corresponde ao tanque conectado à saída da bomba? Justifique sua resposta por meio da equação de energia entre as duas superfícies livres.

14–21 Suponhamos que a bomba da Figura P14–19C esteja situada entre dois tanques de água grandes com suas superfícies livres abertas para a atmosfera. Explique qualitativamente o que aconteceria à curva de desempenho da bomba se a elevação da superfície livre no tanque de saída fosse aumentada, com todos os outros dados iguais. Repita isso para a curva de sistema. O que aconteceria ao ponto operacional — a vazão do ponto operacional diminuiria, aumentaria ou permaneceria igual? Indique a variação em uma representação gráfica qualitativa de *H versus* $\dot{V}$ e discuta. (Sugestão: Use a equação da energia entre a superfície livre do tanque a montante da bomba e a superfície livre do tanque a jusante da bomba.)

14–22 Suponhamos que a bomba da Figura P14–19C esteja situada entre dois tanques grandes de água com suas superfícies livres abertas para a atmosfera. Explique qualitativamente o que aconteceria à curva de desempenho da bomba se uma válvula do sistema de tubulação fosse trocada de 100% aberta para 50% aberta, com todos os outros dados iguais. Repita isso para a curva de sistema. O que aconteceria ao ponto operacional — a vazão do ponto operacional diminuiria, aumentaria ou permaneceria igual? Indique a variação em uma representação gráfica qualitativa de *H versus* $\dot{V}$ e discuta. (Sugestão: Use a equação da energia entre a superfície livre do tanque a montante e a superfície livre do tanque a jusante.) *Resposta:* diminuiria

14–23 Considere o sistema de escoamento representado na Figura P14–23. O fluido é a água e a bomba é centrífuga. Gere uma representação gráfica *qualitativa* da carga líquida da bomba como função da sua capacidade. Na figura, rotule a carga de fechamento, o fornecimento livre, a curva de desempenho da bomba e a curva do sistema e o ponto operacional. (Sugestão: Considere atentamente a carga líquida necessária às condições de taxa de escoamento zero.)

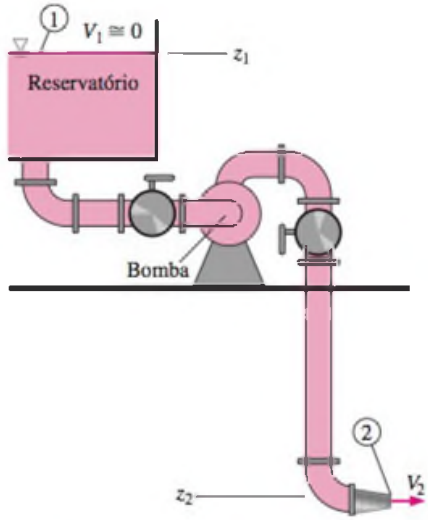


FIGURA P14–23

14–24 Suponhamos que a bomba da Figura P14–23 opere a *condições de fornecimento livre*. O tubo, tanto a montante quanto a jusante da bomba, tem um diâmetro interno de 2,0 cm e rugosidade próxima a zero. O coeficiente de perda menor associado à entrada afiada é de 0,50, cada válvula tem um coeficiente de perda menor de 2,4, e cada um dos três cotovelos tem um coeficiente de perda menor de 0,90. A contração e a saída reduzem o diâmetro em um fator de 0,60 (60% do diâmetro do tubo), e o coeficiente de perda menor da contração é de 0,15. Observe que o coeficiente de perda menor tem por base a velocidade de *saída* média, e não a velocidade média através do tubo propriamente dito. O comprimento total do tubo é de 6,7 m, e a diferença de elevação é de $(z_1 - z_2) = 4{,}6$ m. Estime a vazão através do sistema de tubulação.
Resposta: 36,0 Lpm

14–25 Repita o Problema 14–24, mas com um tubo rugoso – rugosidade do tubo $\varepsilon = 0{,}50$ mm. Considere que uma bomba modificada esteja sendo usada, de modo que a nova bomba opere às condições de fornecimento livre, assim como no Problema 14–24. Considere que todas as outras dimensões e parâmetros sejam iguais aos daquele problema. Seus resultados confirmam nossa intuição? Explique.

14–26 Considere o sistema de tubulação da Figura P14–23, com todas as dimensões, parâmetros, coeficientes de perda menor etc. do Problema 14–24. O desempenho da bomba segue um ajuste de curva parabólica, $H_{\text{disponível}} = H_0 - a\dot{V}^2$, no qual $H_0 = 17{,}6$ m é a carga de fechamento da bomba e $a = 0{,}00426$ m/(Lpm)^2 é um coeficiente do ajuste da curva. Estime a taxa de escoamento operacional do volume $\dot{V}$ em Lpm (litros por minuto) e compare com aquela do Problema 14–24. Discuta.

14–27 Os dados de desempenho de uma bomba d'água centrífuga aparecem na Tabela P14–27 para água a 20°C (Lpm = litros por minuto). (*a*) Para cada linha de dados, calcule a eficiência da bomba (porcentagem). *Mostre totalmente todas as unidades e conversões de unidades.* (*b*) Estime a vazão (Lpm) e a carga líquida (m) no BEP da bomba.

TABELA P14–27

$\dot{V}$, Lpm	H, m	bhp, W
0,0	47,5	133
6,0	46,2	142
12,0	42,5	153
18,0	36,2	164
24,0	26,2	172
30,0	15,0	174
36,0	0,0	174

14–28 Para a bomba d'água centrífuga do Problema 14–27 represente graficamente os dados de desempenho da bomba: H (m), bhp (W) e η_{bomba} (porcentagem) como funções de $\dot{V}$ (Lpm), usando apenas símbolos (sem linhas). Execute ajustes de curvas polinomiais de menor quadrado em todos os três parâmetros, e represente graficamente as curvas ajustadas como linhas (sem símbolos) no mesmo gráfico. Por questões de consistência, use um ajuste de curva de primeira ordem para H como função de $\dot{V}^2$, use um ajuste de curva de segunda ordem para como função de $\dot{V}$ e $\dot{V}^2$ e use um ajuste de curva de terceira ordem para η_{bomba} como função de $\dot{V}$, $\dot{V}^2$ e $\dot{V}^3$. Liste totalmente todas as equações de ajuste de curva e coeficientes (com unidades). Calcule o BEP da bomba com base nas expressões de ajuste de curva.

14–29 Suponha que a bomba dos Problemas 14–27 e 14–28 seja usada em um sistema de tubulação que tenha o requisito de sistema $H_{\text{necessária}} = (z_2 - z_1) + b\dot{V}^2$, no qual a diferença de elevação é $z_2 - z_1 = 10{,}0$ m e o coeficiente $b = 0{,}0185$ m/(Lpm)^2. Estime o ponto operacional do sistema, ou seja, $\dot{V}_{\text{operacional}}$ (Lpm) e $H_{\text{operacional}}$ (m).

14–30 Suponhamos que você esteja considerando a compra de uma bomba d'água com os dados de desempenho mostrados na Tabela P14–27. Seu supervisor pede mais informações sobre a bomba. (*a*) Estime a carga de fechamento H_0 e o fornecimento livre $\dot{V}_{\text{máx}}$ da bomba. [Sugestão: Execute um ajuste de curva de menores quadrados (análise de regressão) de $H_{\text{disponível}}$ *versus* $\dot{V}^2$, e calcule os valores de melhor ajuste dos coeficientes H_0 e a que traduzem os dados tabulados da Tabela P14–30 na expressão parabólica $H_{\text{disponível}} = H_0 - a\dot{V}^2$. Com esses coeficientes estime o fornecimento livre da bomba.] (*b*) A aplicação exige 57,0 Lpm de escoamento a uma elevação de pressão em toda a bomba de 5,8 psi. Essa bomba pode atender os requisitos? Explique.

TABELA P14–30

$\dot{V}$, Lpm	H, m
20	21
30	18,4
40	14
50	7,6

14–31 Os dados de desempenho de uma bomba d'água seguem o ajuste de curva $H_{\text{disponível}} = H_0 - a\dot{V}^2$, no qual a carga de fechamento da bomba $H_0 = 5{,}30$ m, o coeficiente $a = 0{,}0453$ m/(Lpm)^2, as unidades da carga da bomba H são metros e as unidades de $\dot{V}$ são litros por minuto (Lpm). A bomba é usada para bombear água de um reservatório grande para outro reservatório grande a uma elevação maior. As superfícies livres de ambos os reservatórios estão expostas à pressão atmosférica. A curva do sistema é simplificada como $H_{\text{necessária}} = (z_2 - z_1) + b\dot{V}^2$, na qual a diferença de elevação $z_2 - z_1 = 3{,}52$ m e o coeficiente $b = 0{,}0261$ m(Lpm)^2. Calcule o ponto operacional da bomba ($\dot{V}_{\text{operacional}}$ e $H_{\text{operacional}}$) em unidades apropriadas (Lpm e metros, respectivamente). *Respostas:* 4,99 Lpm, 4,17 m

14–32 Uma bomba é usada para bombear água de um reservatório grande para outro reservatório grande a uma elevação maior. As superfícies livres de ambos os reservatórios estão expostas à pressão atmosférica, de acordo com a representação da Figura P14–32. As dimensões e os coeficientes de perda menor são fornecidos pela figura. O desempenho da bomba é aproximado pela expressão $H_{\text{disponível}} = H_0 - a\dot{V}^2$, onde a carga de fechamento $H_0 = 24{,}4$ m de coluna d'água, o coeficiente $a = 0{,}0678$ m/Lpm^2, a carga disponível da bomba $H_{\text{disponível}}$ está em unidades de metros de coluna d'água e a capacidade $\dot{V}$ está em unidades de litros por minuto (Lpm). Estime a capacidade fornecida pela bomba. *Resposta:* 11,6 Lpm

$z_2 - z_1$ = 7,85 m (diferença de elevação)
D = 2,03 cm (diâmetro do tubo)
$K_{L,\text{entrada}}$ = 0,50 (entrada do tubo)
$K_{L,\text{válvula}}$ = 17,5 (válvula)
$K_{L,\text{cotovelo}}$ = 0,92 (cada cotovelo — há 5)
$K_{L,\text{saída}}$ = 1,05 (saída do tubo)
L = 176,5 m (comprimento total do tubo)
ε = 0,25 mm (rugosidade do tubo)

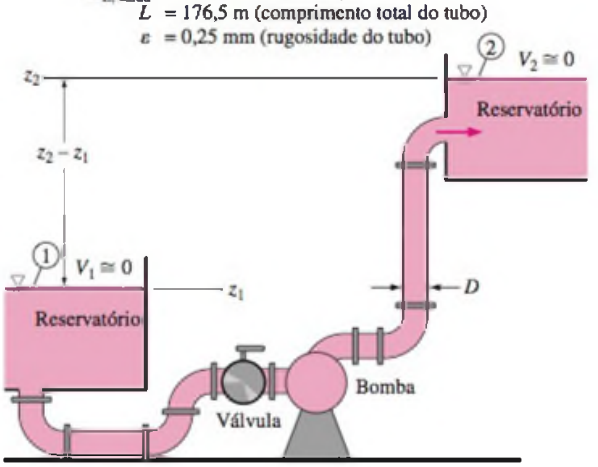


FIGURA P14–32

14–33 Para a bomba e o sistema de tubulação do Problema 14–32, represente graficamente a carga de bomba necessária $H_{\text{necessária}}$ (m de coluna de água) como função da vazão $\dot{V}$ (Lpm). Na mesma representação, compare a carga de bomba disponível $H_{\text{disponível}}$ *versus* $\dot{V}$ e marque o ponto operacional. Discuta.

14–34 Suponhamos que a superfície livre do reservatório de entrada do Problema 14–33 esteja 5,0 m acima, de forma que $z_2 - z_1 = 2{,}85$ m. Todas as constantes e os parâmetros são idênticos àqueles do Problema 14–33 exceto pela diferença de elevação. Calcule a vazão neste caso e compare-a com o resultado do Problema 14–33. Discuta.

14–35 O supervisor de Clara pede que ela encontre uma bomba substituta que aumente a taxa de escoamento em todo o sistema de tubulação do Problema 14–32 por um fator de 2 ou maior. Clara procura em alguns catálogos, e encontra uma bomba com os dados de desempenho mostrados na Tabela P14–35. Todas as dimensões e parâmetros permanecem iguais aos do Problema 14–32 — apenas a bomba muda. (*a*) Execute um ajuste de curva de menores quadrados (análise de regressão) de $H_{\text{disponível}}$ *versus* $\dot{V}^2$, e calcule os valores de melhor ajuste dos coeficientes H_0 e a que traduzem os dados tabulados da Tabela P14–35 na expressão parabólica $H_{\text{disponível}} = H_0 - a\dot{V}^2$. Represente graficamente os pontos de dados como símbolos e o ajuste de curva como uma linha para comparar. (*b*) Use a expressão obtida na parte (*a*) para estimar a taxa do volume operacional da nova bomba se ela substituísse a bomba existente, com todos os outros dados iguais. Compare com os resultados do Problema 14–32 e discuta. Clara atingiu seu objetivo? (*c*) Gere uma representação gráfica da carga líquida necessária e da carga líquida disponível como funções da vazão e indique o ponto operacional na representação.

TABELA P14–35

$\dot{V}$, Lpm	H, m
0	46,5
5	46
10	42
15	37
20	29
25	16,5
30	0

14–36 Calcule a vazão entre os reservatórios do Problema 14–35 para o caso em que o diâmetro do tubo dobra, com todos os outros dados iguais. Discuta.

14–37 Compare os resultados dos Problemas 14–32 e 14–35, a vazão aumenta como era de esperar quando se dobra o diâmetro interno do tubo. Seria de esperar que o número de Reynolds também aumentasse. Ele aumenta? Explique.

14–38 Repita o Problema 14–32, mas despreze todas as perdas menores. Compare a vazão com aquela do Problema. 14–32. As perdas menores são importantes neste problema? Discuta.

14–39 Considere a bomba e o sistema de tubulação do Problema 14–32. Suponhamos que o reservatório inferior seja imenso, e a elevação de sua superfície não varie, mas que o reservatório superior não seja tão grande, e que sua superfície suba lentamente à medida que o reservatório encha. Gere uma curva da vazão $\dot{V}$ (Lpm) como função de $z_2 - z_1$ no intervalo entre 0 até o valor de $z_2 - z_1$, ponto em que a bomba pára de bombear mais água. Nesse valor de $z_2 - z_1$ isso ocorre? A curva é linear? Por quê? O que aconteceria se $z_2 - z_1$ fosse maior do que esse valor? Explique.

14–40 Um sistema de ventilação local (sistema de tampa e duto) é usado para remover o ar e os contaminantes produzidos por um laboratório farmacêutico (Figura 14–40). O diâmetro interno (DI) do duto é $D = 150$ mm, sua rugosidade média é de 0,15 mm e seu comprimento total é $L = 24{,}5$ m. Existem três cotovelos ao longo do duto, cada um com um coeficiente de perda menor de 0,21. A literatura do fabricante relaciona o coeficiente de perda na entrada da tampa como 3,3 com base na velocidade do duto. Quando o abafador está totalmente aberto seu coeficiente de perda é de 1,8. O coeficiente de perda menor através do tê de 90° é 0,36. Finalmente, uma válvula de uma via é instalada para evitar que os contaminantes de uma segunda tampa escoam "de volta" para a sala. O coeficiente de perda menor da válvula de uma via (aberta) é 6,6. Os dados de desempenho do ventilador se ajustam a uma curva parabólica com a forma $H_{\text{disponível}} = H_0 - a\dot{V}^2$, na qual a carga de fechamento $H_0 = 60{,}0$ mm de coluna de água, o coeficiente $a = 2{,}50 \times 10^{-7}$ mm de coluna d'água por (Lpm)^2, a carga disponível $H_{\text{disponível}}$ está em unidades de mm de coluna de água e a capacidade está em unidades de Lpm de ar. Estime a vazão em Lpm em todo o sistema de ventilação. *Resposta:* 7.090 Lpm

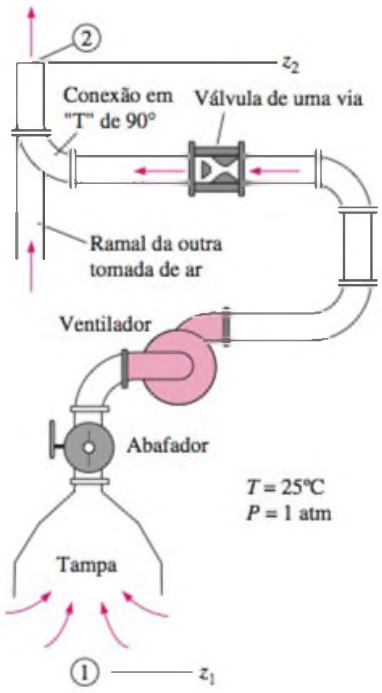


FIGURA P14–40

14–41 Para o sistema de dutos do Problema 14–40, plote a carga de ventilador necessária $H_{\text{necessária}}$ (mm de coluna d'água) como função da vazão $\dot{V}$ (Lpm). Na mesma plotagem, compare a carga de ventilador disponível $H_{\text{disponível}}$ *versus* $\dot{V}$ e marque o ponto operacional. Discuta.

14–42 Repita o Problema 14–40, ignorando todas as perdas menores. As perdas menores são importantes neste problema? Discuta.

14–43 Suponhamos que a válvula de uma via da Figura P14–40 sofra mau funcionamento em virtude de corrosão e trave em sua posição totalmente fechada (nenhum ar pode passar). O ventilador está ligado e todas as outras condições são idênticas

àquelas do Problema 14–40. Calcule a pressão manométrica (em pascais e em mm de coluna d'água) em um ponto imediatamente a jusante do ventilador. Repita para um ponto imediatamente a montante da válvula de uma via.

14–44 Uma bomba centrífuga de inicialização automática é usada para bombear água a 25°C de um reservatório cuja superfície está 2,2 m acima da linha central da entrada da bomba (Figura P14–44). O tubo é de PVC com DI de 24,0 mm e altura de rugosidade interna média desprezível. O comprimento do tubo da entrada submersa do tubo até a entrada da bomba é de 2,8 m. Existem apenas duas perdas menores no sistema de tubulação entre a entrada do tubo e a entrada da bomba: uma entrada com reentrância afiada ($K_L = 0{,}85$), e um cotovelo de 90° comum, uniforme e com flange ($K_L = 0{,}3$). A carga de sucção positiva líquida necessária da bomba é fornecida pelo fabricante como um ajuste de curva: $\text{NPSH}_{\text{necessário}} = 2{,}2\text{ m} + (0{,}0013\text{ m/Lpm}^2)\,\dot{V}^2$, onde a vazão está em Lpm. Estime a vazão máxima (em unidades de Lpm) que pode ser bombeada sem cavitação.

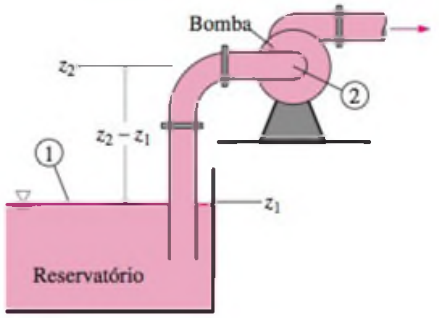


FIGURA P14–44

14–45 Repita o Problema 14–44, mas para uma temperatura de água de 80°C. Repita para 90°C. Discuta.

14–46 Repita o Problema 14–44, mas para um diâmetro de tubo aumentado por um fator de 2 (com todos os outros dados iguais). A vazão com a qual ocorre a cavitação na bomba aumenta ou diminui para um tubo maior? Discuta.

14–47 Duas bombas d'água estão organizadas em *série*. Os dados de desempenho das duas bombas seguem o ajuste de curva parabólica $H_{\text{disponível}} = H_0 - a\dot{V}^2$. Para a bomba 1, $H_0 = 5{,}30$ m e o coeficiente $a = 0{,}0438\text{ m/Lpm}^2$; para a bomba 2, $H_0 = 7{,}80$ m e o coeficiente $a = 0{,}0347\text{ m/Lpm}^2$. Em ambos os casos, as unidades da carga líquida de bomba H são m e as unidades de capacidade $\dot{V}$ são Lpm. Calcule a carga de fechamento combinada e o fornecimento livre das duas bombas funcionando juntas em série. A qual vazão a bomba 1 deve ser fechada e desviada? Explique. *Respostas:* 13,1 m, 15,0 Lpm, 11,0 Lpm

14–48 As mesmas duas bombas d'água do Problema 14–47 estão organizadas em *paralelo*. Calcule a carga de fechamento combinada e o fornecimento livre das duas bombas funcionando juntas em paralelo. A qual carga líquida combinada a bomba 1 deve ser fechada e desviada? Explique.

14–49 Uma bomba com deslocamento positivo e giratória de dois lóbulos, semelhante àquela da Figura 14–30, movimenta 3,64 cm^3 de pasta de tomate em cada volume de lóbulo $\dot{V}_{\text{lóbulo}}$. Calcule a vazão da pasta de tomate para o caso em que $\dot{n} = 400$ rpm.

14–50 Considere a bomba de engrenagem da Figura 14–26*c*. Suponhamos que o volume do fluido confinado entre dois dentes de engrenagem seja de 0,350 cm^3. Quanto volume de fluido é bombeado por rotação?
Resposta: 9,80 cm^3

14–51 Uma bomba centrífuga gira a $\dot{n} = 750$ rpm. A água entra no rotor normal às pás ($\alpha_1 = 0°$) e sai a um ângulo de 35° da direção radial ($\alpha_2 = 35°$). O raio de entrada é $r_1 = 12{,}0$ cm, no qual a largura da pá $b_1 = 18{,}0$ cm. O raio de saída é $r_2 = 24{,}0$ cm, na qual a largura da pá $b_2 = 14{,}0$ cm. A vazão é 0,573 m^3/s. Considerando eficiência de 100%, calcule a carga líquida produzida por essa bomba em cm de altura de coluna d'água. Calcule também a potência no eixo necessária em W.

14–52 Um ventilador com escoamento axial por aletas está sendo projetado com as pás do estator a montante das pás do rotor (Figura P14–52). Para reduzir as despesas, as pás do estator e do rotor devem ser feitas de folha de metal. As pás do estator são um arco circular simples com seu bordo de ataque alinhado axialmente e seu bordo de fuga a um ângulo de $\beta_{\text{est}} = 26{,}6°$ do eixo, como mostra a representação. (A notação de subscrito indica o bordo de fuga do rotor.) Existem 18 pás de estator. A condições de projeto, a velocidade de escoamento axial através das pás é 31,4 m/s e o rotor gira a 1800 rpm. A um raio de 0,50 m, calcule os ângulos dos bordos de ataque e defesa da pá do rotor e represente a forma da pá. Quantas pás de rotor deve haver?

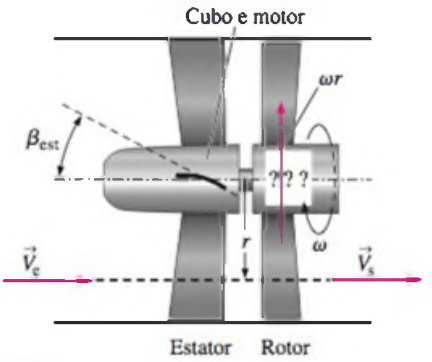


FIGURA P14–52

Turbinas

14–53C Dê pelo menos dois motivos pelos quais as turbinas quase sempre têm eficiências maiores do que as das bombas.

14–54C Discuta rapidamente a principal diferença na forma pela qual as bombas dinâmicas e as turbinas de reação são classificadas como centrífugas (radiais), de escoamento misto ou radial.

14–55C O que é um *tubo de sucção*, e qual sua finalidade? Descreva o que aconteceria se os projetistas de turbomáquina não prestassem atenção ao projeto do tubo de sucção.

14–56C Cite e descreva rapidamente as diferenças entre os dois tipos básicos de turbina dinâmica.

14–57C Discuta o significado de *turbilhão reverso* em turbina hidráulicas de reação, e explique por que algum turbilhão reverso é desejável. Use uma equação para confirmar sua resposta. Por que *não* é adequado ter muito turbilhão reverso?

14–58 Prove que para determinada velocidade de jato, vazão, ângulo de giro e raio de rotor, a potência máxima de eixo produzida por umo rotor de Pelton ocorre quando a pá da turbina se movimenta à metade da velocidade de jato.

14–59 Um rotor de Pelton é usado para produzir potência hidrelétrica. O raio médio do rotor é de 1,83 m e a velocidade do jato é de 102 m/s de um bocal com diâmetro de saída igual a 10,0 cm. O ângulo de giro das pás é de $\beta = 165°$. (*a*) Calcule a vazão através da turbina em m^3/s. (*b*) Qual a taxa de rotação

ideal (em rpm) do rotor (para obter a potência máxima)? (*c*) Calcule a potência do eixo de saída em MW se a eficiência da turbina for de 82%.

Respostas: (a) 0,801 m³/s *(b)* 266 rpm *(c)* 3,35 MW

14–60 Alguns engenheiros estão avaliando locais em potência para a instalação de uma pequena represa para hidrelétrica. Em um desses locais, a carga bruta é de 650 m e eles estimam que a vazão da água através de cada turbina seja de 1,5 m³/s. Estime a produção ideal de potência por turbina em MW.

14–61 Uma turbina hidráulica com escoamento radial de Francis está sendo projetada com as seguintes dimensões: r_2 = 2,00 m, r_1 = 1,42 m, b_2 = 0,731 m e b_1 = 2,20 m. O rotor gira a n = 180 rpm. As aletas ajustáveis giram o escoamento com o ângulo α_2 = 30° da direção radial na entrada do rotor, e o escoamento na saída do rotor está a um ângulo α_1 = 10° da direção radial (Figura P14–61). A vazão a condições de projeto é de 340 m³/s e a carga bruta fornecida pela represa é H_{bruta} = 90,0 m. Para o projeto preliminar, as perdas irreversíveis são desprezadas. Calcule os ângulos da pá do rotor de entrada e saída β_2 e β_1, respectivamente, e preveja a saída de potência (MW) e a carga líquida necessária (m). Esse projeto é possível?

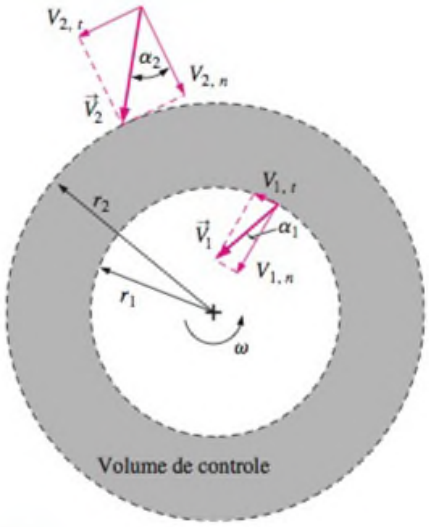


FIGURA P14–61

14–62 Reconsidere o Problema 14–61. Usando o EES (ou outro software), investigue o efeito do ângulo de saída do rotor α_1 sobre a carga líquida necessária e a potência de saída. Deixe o ângulo de saída variar de −20° a 20° em incrementos de 1° e represente graficamente seus resultados. Determine o valor mínimo possível de α_1 de forma que o escoamento não viole as leis da termodinâmica.

14–63 Uma turbina hidráulica com escoamento radial de Francis tem as seguintes dimensões, nas quais o local 2 está na entrada e o local 1 está na saída: r_2 = 2,00 m, r_1 = 1,30 m, b_2 = 0,85 m e b_1 = 2,10 m. Os ângulos da pá do rotor são β_2 = 66° e β_1 = 18,5° na entrada e na saída da turbina, respectivamente. O rotor gira a n = 100 rpm. A vazão a condições de projeto é de 80,0 m³/s. As perdas irreversíveis são desprezadas nesta análise preliminar. Calcule o ângulo α_2 com o qual as aletas ajustáveis devem tirar o escoamento, onde α_2 é medido da direção radial na entrada do rotor (Figura P14–61). Calcule o ângulo de turbilhão α_1, onde α_1 é medido da direção radial na saída do rotor (Figura P14–61). Essa turbina tem turbilhão para a frente ou reverso? Preveja a saída de potência (MW) e a carga líquida necessária (m).

14–64 Uma turbina hidráulica com escoamento radial de Francis tem as seguintes dimensões, nas quais o local 2 está na entrada e o local 1 está na saída: r_2 = 201,17 cm, r_1 = 134,11 cm, b_2 = 79,25 cm e b_1 = 219,46 cm. Os ângulos da pá do rotor são β_2 = 82° e β_1 = 46° na entrada e na saída da turbina respectivamente. O rotor gira a n = 120 rpm. A vazão a condições de projeto é de 4,70 × 10⁶ gpm. As perdas irreversíveis são desprezadas nesta análise preliminar. Calcule o ângulo α_2 com o qual as aletas ajustáveis devem tirar o escoamento, onde α_2 é medido da direção radial na entrada do rotor (Figura P14–61). Calcule o ângulo de turbilhão α_1, onde α_1 é medido da direção radial na saída do rotor (Figura P14–61). Essa turbina tem turbilhão para a frente ou reverso? Preveja a saída de potência (hp) e a carga líquida necessária (pés).

Leis de Semelhança de Bomba e Turbina

14–65C Procure pelo significado da palavra *semelhança* em um dicionário. Por que você acha que alguns engenheiros se referem às leis de semelhança da turbomáquina como *leis de semelhança*?

14–66C Para cada declaração, selecione se ela é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta.

(*a*) Se a rpm de uma bomba dobra, com todos os outros dados iguais, a capacidade da bomba sobe por um fator de cerca de 2.

(*b*) Se a rpm de uma bomba dobra, com todos os outros dados iguais, a carga líquida da bomba sobe por um fator de cerca de 2.

(*c*) Se a rpm de uma bomba dobra, com todos os outros dados iguais, a potência de eixo necessária sobe por um fator de cerca de 4.

(*d*) Se a rpm de uma bomba dobra, com todos os outros dados iguais, a potência de eixo de saída da turbina sobe por um fator de cerca de 8.

14–67C Discuta qual parâmetro de desempenho de bomba adimensional em geral é usado como o parâmetro independente. Repita este exercício para turbinas em vez de bombas. Explique.

14–68 Considere a bomba do Problema 14–32. O diâmetro da bomba é de 1,80 cm e ela opera a n = 4.200 rpm. Adimensionalize a curva de desempenho da bomba, ou seja, represente graficamente C_H *versus* C_Q. Mostre cálculos de exemplo para C_H e C_Q a $\dot{V}$ = 14,0 Lpm.

14–69 Calcule a velocidade específica da bomba do Problema 14–68 ao ponto de melhor eficiência para o caso em que o BEP ocorra a 14,0 Lpm. Forneça respostas nas formas adimensionais e em unidades comuns nos EUA. Qual é o tipo dessa bomba?

Resposta: 0,199, 545, centrífuga

14–70 Considere o ventilador do Problema 14–40. O diâmetro do ventilador é de 30,0 cm e ele opera a n = 600 rpm. Adimensionalize a curva de desempenho da bomba, ou seja, represente graficamente C_H *versus* C_Q. Mostre cálculos de exemplo para C_H e C_Q a $\dot{V}$ = 13.600 Lpm.

14–71 Calcule a velocidade específica da bomba do ventilador do Problema 14–70 ao ponto de melhor eficiência para o caso em que o BEP ocorra a 13.600 Lpm. Forneça respostas nas formas adimensionais e em unidades comuns nos EUA. Qual é o tipo desse ventilador?

14–72 Calcule a velocidade específica da bomba do Exemplo 14–11 ao seu ponto de melhor eficiência. Forneça respostas nas formas adimensionais e em unidades comuns nos EUA. Qual é o tipo dessa bomba?

14–73 Lauro deve projetar uma pequena bomba d'água para um aquário. A bomba deve fornecer 18,0 Lpm de água a uma carga líquida de 1,6 m ao seu melhor ponto de eficiência. Um motor que gira a 1.200 rpm está disponível. Qual tipo de bomba (centrífuga, mista ou axial) deve ser projetado por Lauro? Mostre todos os seus cálculos e justifique sua opção. Estime a eficiência máxima que Lauro pode esperar com essa bomba. *Respostas:* centrífuga, 75%

14–74 Considere a bomba do Problema 14–73. Suponhamos que a bomba seja modificada pela inclusão de um motor diferente, cuja rpm é metade daquela da bomba original. Se as bombas operarem a pontos homólogos (a saber, ao BEP) em ambos os casos, preveja a vazão e a carga líquida da bomba modificada. Calcule a velocidade específica da bomba modificada e compare-a àquela da bomba original. Discuta.

14–75 Verifique se a velocidade específica da turbina e da bomba estão relacionadas da seguinte maneira: $N_{St} = N_{Sp}\sqrt{\eta_{turbina}}$.

14–76 Considere uma bomba-turbina que opera tanto como bomba quanto como turbina. Sob condições nas quais a velocidade rotacional ω e a vazão $\dot{V}$ são iguais para a bomba e a turbina, verifique se as velocidades específicas da turbina e da bomba estão relacionadas como

$$N_{St} = N_{Sp}\sqrt{\eta_{turbina}}\left(\frac{H_{bomba}}{H_{turbina}}\right)^{3/4}$$

$$= N_{Sp}(\eta_{turbina})^{5/4}(\eta_{bomba})^{3/4}\left(\frac{bhp_{bomba}}{bhp_{turbina}}\right)^{3/4}$$

14–77 Aplique os fatores de conversão necessários para provar o relacionamento entre a velocidade específica da turbina adimensional e a velocidade específica da turbina em unidades do EUA, $N_{St} = 43{,}46N_{St,\,EUA}$ Observe que consideramos a água como fluido e a gravidade padrão da Terra.

14–78 Calcule a velocidade específica da turbina hidráulica de Round Butte da Figura 14–89. Ela se classifica dentro do intervalo de N_{St} apropriado para aquele tipo de turbina?

14–79 Calcule a velocidade específica da turbina hidráulica de Smith Mountain da Figura 14–90. Ela se classifica dentro do intervalo de N_{St} apropriado para aquele tipo de turbina?

14–80 Calcule a velocidade específica da turbina hidráulica de Warwick da Figura 14–91. Ela se classifica dentro do intervalo de N_{St} apropriado para aquele tipo de turbina?

14–81 Calcule a velocidade específica da turbina do Exemplo 14–12 para o caso em que $\alpha_1 = 10°$. Forneça respostas nas formas adimensionais e em unidades padrão dos EUA. Elas estão no intervalo normal de uma turbina Francis? Caso não estejam, qual tipo seria mais adequado?

14–82 Calcule a velocidade específica da turbina do Problema 14–63. Forneça respostas nas formas adimensionais e em unidades padrão dos EUA. Elas estão no intervalo normal de uma turbina Francis? Caso não estejam, qual tipo seria mais adequado?

14–83 Calcule a velocidade específica da turbina do Problema 14–63. Forneça respostas nas formas adimensionais e em unidades padrão dos EUA. Elas estão no intervalo normal de uma turbina Francis? Caso não estejam, qual tipo seria mais adequado?

14–84 Um modelo em escala um para cinco de uma turbina d'água é testado em um laboratório a $T = 20°C$. O diâmetro do modelo é 8,0 cm, sua vazão é 17,0 m^3/h, ele gira a 1.500 rpm e opera com uma carga líquida de 15,0 m. Ao seu ponto de melhor eficiência, ele fornece 450 W de potência de eixo. Calcule a eficiência da turbina-modelo. Qual o tipo mais provável de turbina que está sendo testado? *Respostas:* 64,9%, impulso

14–85 A turbina-protótipo correspondente a uma turbina-modelo em escala um para cinco discutida no Problema 14–84 deve operar através de uma carga líquida de 50 m. Determine a rpm e a vazão apropriadas para resultar na melhor eficiência. Preveja a saída dopotência no eixo da turbina protótipo, considerando a similaridade geométrica exata.

14–86 Prove que a turbina-modelo (Problema 14–84) e a turbina-protótipo (Problema 14–85) operam a pontos homólogos, comparando a eficiência da turbina e a velocidade específica da turbina em ambos os casos.

14–87 No Problema 14–86, escalamos os resultados do teste da turbina-modelo até o protótipo em escala normal considerando a similaridade dinâmica exata. Entretanto, como já foi discutido anteriormente, um protótipo grande em geral resulta em maior eficiência do que o modelo. Estime a eficiência real da turbina-protótipo. Explique rapidamente a eficiência mais alta.

14–88 Um grupo de engenheiros está projetando uma nova turbina-hidráulica, escalando uma turbina existente. A turbina existente (turbina A) tem diâmetro $D_A = 1{,}50$ m e gira a $n_A = 150$ rpm. No seu ponto de melhor eficiência $\dot{V}_A = 162$ m^3/s, $H_A = 90{,}0$ m de água e $bhp_A = 132$ MW. A nova turbina (turbina B) girará a 120 rpm, e sua carga líquida será de $H_B = 110$ m. Calcule o diâmetro da nova turbina, de forma que ela opere com mais eficiência, e calcule $\dot{V}_B$ e bhp_B. *Respostas:* 2,07 m, 342 m^3/s, 341 MW

14–89 Calcule e compare a eficiência das duas turbinas do Problema 14–88. Elas devem ser iguais, uma vez que estamos assumindo a semelhança dinâmica. Entretanto, a turbina maior, na verdade, será ligeiramente mais eficiente do que a turbina menor. Use a equação de correção de eficiência de Moody par prever a eficiência esperada real da nova turbina. Discuta.

14–90 Calcule e compare a velocidade específica de turbina para as turbinas pequena (A) e grande (B) do Problema 14–88. Qual a maior probabilidade para os tipos dessas turbinas?

Problemas de Revisão

14–91 Para cada declaração, selecione se ela é verdadeira ou falsa e discuta rapidamente sua resposta.

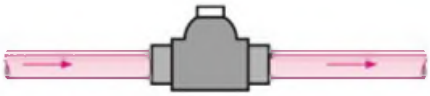
(*a*) Uma bomba de engrenagem é um tipo de bomba por deslocamento positivo.

(*b*) Uma bomba giratória é um tipo de bomba por deslocamento positivo.

(*c*) A curva de desempenho de bomba (carga líquida *versus* capacidade) de uma bomba por deslocamento positivo é quase vertical em todo o intervalo operacional recomendado a determinada velocidade rotacional.

(*d*) A determinada velocidade rotacional, a carga líquida e uma bomba por deslocamento positivo *diminui* a viscosidade do fluido.

14–92C O medidor de água comum encontrado na maioria das residências pode ser visto como um tipo de turbina, uma vez que ele extrai energia da água passante para girar o eixo que está conectado ao mecanismo contador do volume (Figura P14–92C). Sob o ponto de vista de um sistema de tubulação, porém (Capítulo 8), qual tipo de dispositivo é um medidor de água? Explique.



Medidor de água

FIGURA P14–92C

14–93C As velocidades específicas de bomba e turbina são parâmetros "extras" que não fazem parte necessariamente das leis de semelhança de bombas e turbinas. Explique, então, sua finalidade.

14–94C O que é uma *bomba-turbina*? Discuta uma aplicação na qual uma bomba-turbina seja útil.

14–95 Para duas bombas dinamicamente similares, manipule os parâmetros de bomba adimensionais para mostrar que $D_B = D_A(H_A/H_B)^{1/4}(\dot{V}_B/\dot{V}_A)^{1/2}$. O mesmo relacionamento se aplica a duas *turbinas* dinamicamente similares?

14–96 Para duas bombas dinamicamente similares, manipule os parâmetros de turbina adimensionais para mostrar que $D_B = D_A(H_A/H_B)^{3/4}(\rho_A/\rho_B)^{1/2}(\text{bhp}_B/\text{bhp}_A)^{1/2}$. O mesmo relacionamento se aplica a duas *bombas* dinamicamente similares?

Problemas de Projeto e Ensaio

14–97 Desenvolva um aplicativo geral para computador (usando o EES ou outro software) que empregue as leis de semelhança para criar uma nova bomba (B) que seja dinamicamente similar a uma bomba dada (A). As entradas da bomba A são diâmetro, carga líquida, capacidade, densidade, velocidade rotacional e eficiência de bomba. As entradas da bomba B são densidade (ρ_B pode diferir de ρ_A), carga líquida desejada e capacidade desejada. As saídas da bomba B são diâmetro, velocidade rotacional e potência de eixo necessária. Teste seu programa usando as seguintes entradas: $D_A = 5{,}0$ cm, $H_A = 120$ cm, $\dot{V}_A = 400$ cm³/s, $\rho_A = 998{,}0$ kg/m³, $\dot{n}_A = 1.725$ rpm, $\eta_{\text{bomba, A}} = 81\%$, $\rho_B = 1.226$ kg/m³, $H_B = 450$ cm e $\dot{V}_B = 2400$ cm³/s. Verifique seus resultados manualmente. *Respostas:* $D_B = 8{,}80$ cm, $\dot{n}_B = 1898$ rpm *e* $bhp_B = 160$ W

14–98 Experimentos em uma bomba existente (A) resultaram nos seguintes dados BEP: $D_A = 10{,}0$ cm, $H_A = 210$ cm, $\dot{V}_A = 1.350$ cm³/s, $\rho_A = 998{,}0$ kg/m³, $\dot{n}_A = 1.500$ rpm, $\eta_{\text{bomba, A}} = 87\%$. Você deve projetar uma nova bomba (B) com os seguintes requisitos: $\rho_B = 998{,}0$ kg/m³, $H_B = 570$ cm e $\dot{V}_B = 3.670$ cm³/s. Aplique o programa de computador que você desenvolveu no Problema 14–97 para calcular D_B (cm), $\dot{n}_B$ (rpm) e bhp_B (W). Calcule também a velocidade específica da bomba. Qual o tipo mais provável dessa bomba?

14–99 Desenvolva um aplicativo geral para computador (usando o EES ou outro software) que empregue as leis de semelhança para criar uma nova turbina (B) que seja dinamicamente similar a uma turbina dada (A). As entradas da turbina A são diâmetro, carga líquida, capacidade, densidade, velocidade rotacional epotência no eixo. As entradas da turbina B são densidade (ρ_B pode diferir de ρ_A), carga líquida disponível e velocidade rotacional. As saídas da turbina B são diâmetro, capacidade e potência no eixo. Teste seu programa usando as seguintes entradas: $D_A = 1{,}40$ m, $H_A = 80{,}0$ m, $\dot{V}_A = 162$ m³/s, $\rho_A = 998{,}0$ kg/m³, $\dot{n}_A = 150$ rpm, $\dot{V}_A = 118$ MW, $\rho_B = 998{,}0$ kg/m³, $H_B = 95{,}0$ m e $\dot{n}_B = 120$ rpm. Verifique seus resultados manualmente. *Respostas:* $D_B = 1{,}91$ m, $\dot{V}_B = 328$ m³/s e $\text{bhp}_B = 283$ MW

14–100 Experimentos em uma turbina existente (A) resultaram nos seguintes dados: $D_A = 86{,}0$ cm, $H_A = 22{,}0$ m, $\dot{V}_A = 69{,}5$ cm³/s, $\rho_A = 998{,}0$ kg/m³, $\dot{n}_A = 240$ rpm, $\text{bhp}_A = 11{,}4$ MW. Você deve projetar uma nova turbina (B) com os seguintes requisitos: $\rho_B = 998{,}0$ kg/m³, $H_B = 95{,}0$ m e $\dot{n}_B = 210$ rpm. Aplique o programa de computador que você desenvolveu no Problema 14–119 para calcular D_B (m), $\dot{V}_B$ (m³/s) e bhp_B (MW). Calcule também a velocidade específica da turbina. Qual é o tipo mais provável dessa turbina?

14–101 Calcule e compare a eficiência das duas turbinas do Problema 14–100. Elas devem ser iguais, uma vez que estamos considerando a semelhança dinâmica. Entretanto, a turbina maior, na verdade, será ligeiramente mais eficiente do que a menor. Use a equação de correção de eficiência de Moody para prever a eficiência esperada real da nova turbina. Discuta.

CAPÍTULO

15

INTRODUÇÃO À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura deste capítulo você deve ser capaz de:

- Entender a importância de uma malha de alta qualidade e boa resolução
- Aplicar as condições de contorno apropriadas aos domínios computacionais
- Entender como aplicar a CFD aos problemas básicos de engenharia e como determinar se a saída é fisicamente significativa
- Perceber que é preciso ter muito mais estudo e prática com a CFD para usá-la com êxito

Este capítulo apresenta uma breve introdução à dinâmica dos fluidos computacional (CFD). Embora qualquer pessoa inteligente e com conhecimentos de computador possa executar um código CFD, os resultados obtidos podem não ser fisicamente corretos. Na verdade, se a malha não for gerada adequadamente, ou se as condições de contorno ou os parâmetros de escoamento forem aplicados inapropriadamente, os resultados podem ser completamente errados. Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar orientações sobre como gerar uma malha, como especificar condições de contorno e como determinar se a saída de computador é significativa. Enfatizamos a aplicação do CFD aos problemas de engenharia, em vez de detalhes sobre as técnicas de geração de malha, os esquemas de discretizações, os algoritmos do CFD ou a estabilidade numérica.

Os exemplos aqui apresentados foram obtidos com o código FLUENT da dinâmica dos fluidos computacional. Outros códigos da CFD dariam resultados similares, porém não idênticos. Exemplos de soluções usando CFD são mostradas para escoamentos incompressíveis e compressíveis, laminares e turbulentos, com transferência de calor e com superfícies livres.

15–1 • INTRODUÇÃO E FUNDAMENTOS

Motivação

Existem duas abordagens fundamentais ao projeto e análise dos sistemas de engenharia que envolvem o escoamento de fluidos: experimentação e cálculo. A primeira em geral envolve a construção de modelos testados em túneis de vento ou em outras instalações (Capítulo 7), enquanto a última envolve a solução de equações diferenciais, seja analítica (Capítulos 9 e 10) ou computacionalmente. Neste capítulo, apresentamos uma breve introdução à **dinâmica dos fluidos computacional (CFD** — computational fluid dynamics), a área de estudos dedicada à solução das equações do escoamento de fluidos com o uso de um computador (ou, mais recentemente, de *vários* computadores funcionando em paralelo). Os engenheiros modernos aplicam as análises experimentais *e* da CFD, e as duas se complementam. Por exemplo, os engenheiros podem obter *propriedades globais*, como elevação, arrasto, queda de pressão ou de potência, de forma experimental, mas usam a CFD para obter *detalhes* sobre campo de escoamento, como as tensões de cisalhamento, os perfis de velocidade e pressão (Figura 15–1) e as linhas de corrente do escoamento. Além disso, os dados experimentais são muito usados para *validar* as soluções da CFD, comparando as quantidades globais determinadas pelos métodos computacional e experimental. Em seguida, a CFD é empregada para diminuir o ciclo de projeto através de estudos paramétricos cuidadosamente controlados, reduzindo assim a quantidade necessária de testes experimentais.

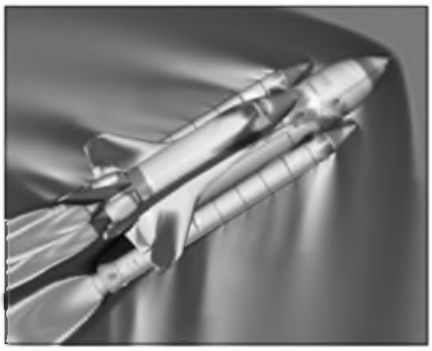


FIGURA 15–1
Cálculos da CFD para a ascensão do veículo de lançamento do ônibus espacial (SSLV). A malha consiste em mais de 16 milhões de pontos e os contornos de pressão são mostrados. As condições de corrente livre são Ma = 1,25 e o ângulo de ataque é –3,3°.
Nasa/Foto de Ray J. Gomez. Usada com permissão..

No estado atual da dinâmica dos fluidos computacional a CFD pode lidar com escoamentos laminares com facilidade, mas é impossível solucionar os escoamentos turbulentos de interesse prático para a engenharia sem invocar os *modelos de turbulência*. Infelizmente, nenhum modelo de turbulência é *universal*, e uma solução CFD turbulenta só é boa se a adequação do modelo de turbulência também o for. Apesar dessa limitação, os modelos de turbulência padrão têm resultados razoáveis para muitos problemas práticos de engenharia.

Existem vários aspectos da CFD que não são abordados neste capítulo — técnicas de geração de malha, algoritmos numéricos, diferenças finitas e esquemas de volume finitos, questões de estabilidade, modelagem de turbulência etc. É preciso estudar esses tópicos para entender completamente os recursos e as limitações da dinâmica dos fluidos computacional. Neste capítulo, apenas tocamos nesse interessante assunto. Nosso objetivo é apresentar os fundamentos da CFD sob a perspectiva de um *usuário*, oferecendo orientações sobre como gerar uma malha, como especificar condições de contorno e como determinar se a saída do computador é fisicamente significativa.

Iniciamos esta seção apresentando as equações diferenciais do escoamento dos fluidos que devem ser resolvidas e, em seguida, esboçamos um procedimento de solução. As seções seguintes são dedicadas às soluções CFD de exemplo para o escoamento laminar, o escoamento turbulento, os escoamentos com transferência de calor, o escoamento compressível e o escoamento de canal aberto.

Equações do Movimento

Para o escoamento laminar em regime permanente de um fluido viscoso, incompressível e newtoniano sem efeitos de superfície livre, as equações do movimento são a *equação da continuidade*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{15–1}$$

e a equação de Navier–Stokes

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' + \nu\nabla^2\vec{V} \tag{15–2}$$

No sentido exato, a Equação 15–1 é uma **equação de conservação** enquanto a Equação 15–2 é uma **equação de transporte** que representa o transporte do momento linear em todo o domínio computacional. Nas Equações 15–1 e 15–2, $\vec{V}$

Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Momento na direção x:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Momento na direção y:

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Momento na direção z:

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

FIGURA 15–2
As equações do movimento a serem resolvidas pela CFD no caso do escoamento permanente, incompressível e laminar de um fluido newtoniano com propriedades constantes e sem efeitos de superfície livre. Um sistema de coordenadas cartesiano é usado. Existem quatro equações e quatro incógnitas: u, v, w e P'

é a velocidade do fluido, ρ é sua densidade e ν, sua viscosidade cinemática ($\nu = \mu/\rho$). A ausência de efeitos de superfície livre permite que usemos a *pressão modificada* P', eliminando assim o termo de gravidade da Equação 15–2 (consulte o Capítulo 10). Observe que a Equação 15–1 é *escalar*, enquanto a Equação 15–2 é uma equação *vetorial*. As Equações 15–1 e 15–2 aplicam-se apenas aos escoamentos incompressíveis nos quais consideramos que ρ e ν são constantes. Assim, para o escoamento tridimensional em coordenadas cartesianas existem *quatro* equações diferenciais combinadas para *quatro* incógnitas, u, v, w e P' (Figura 15–2). Se o escoamento fosse compressível, as Equações 15–1 e 15–2 precisariam ser modificadas adequadamente, como será discutido na Seção 15–5. Os escoamentos de líquidos quase sempre podem ser tratados como incompressíveis, e para muitos escoamentos de gás, o gás está a um número de Mach suficientemente baixo para se comportar quase como um fluido incompressível.

Procedimento da Solução

Realize as etapas abaixo para resolver as Equações 15–1 e 15–2 numericamente. Observe que a ordem de algumas das etapas (particularmente as etapas 2 até 5) podem ser trocadas.

1. Um **domínio computacional** é selecionado e uma **malha** (também chamada de **grade**) é gerada; o domínio é dividido em muitos elementos pequenos chamados de **células**. Para os domínios bidimensionais (2-D), as células são *áreas*, enquanto para os domínios tridimensionais (3-D) as células são *volumes* (Figura 15–3). Cada célula pode ser vista como um minúsculo volume de controle no qual as versões discretizadas das equações de conservação são resolvidas. Observe que limitamos nossa discussão aqui aos códigos CFD de volumes finitos centralizados na célula. A qualidade de uma solução CFD depende bastante da qualidade da malha. Assim, verifique se a malha é de alta qualidade antes de passar para a próxima etapa (Figura 15–4).
2. As *condições de contorno* são especificadas em cada **aresta** do domínio computacional (escoamentos 2-D) ou em cada **face** do domínio (escoamentos 3-D).
3. O tipo do fluido (água, ar, gasolina etc.) é especificado juntamente com as propriedades do fluido (temperatura, densidade, viscosidade etc.). Muitos códigos CFD têm bancos de dados de propriedades incorporados para fluidos comuns, tornando essa etapa relativamente "indolor".
4. Os parâmetros numéricos e os algoritmos de solução são selecionados. Estes são específicos de cada código CFD e não são discutidos aqui. As configurações padrão dos códigos CFD mais modernos são apropriadas para os problemas simples discutidos neste capítulo.

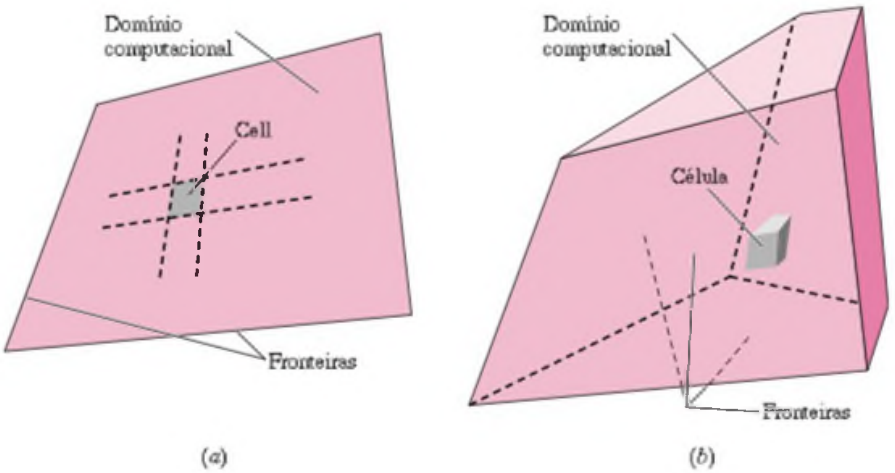


FIGURA 15–3
Um *domínio computacional* é a região no espaço na qual as equações do movimento são resolvidas pela CFD. Uma célula é um pequeno subconjunto do domínio computacional. São mostrados (*a*) um domínio bidimensional e uma célula quadrilateral e (*b*) um domínio tridimensional e uma célula hexaédrica. As fronteiras de um domínio 2-D são chamadas de *arestas*, enquanto as fronteiras de um domínio 3-D são chamadas de *faces*.

5. Os valores iniciais de todas as variáveis do campo de escoamento são especificados para cada célula. Essas são as *condições iniciais*, que podem ou não estar corretas, mas são necessárias como ponto de partida, para que o processo de iteração possa continuar (etapa 6). Observamos que, para realizar cálculos adequados do escoamento não permanente, as condições iniciais *devem* estar corretas.
6. Começando pelas hipóteses iniciais, as formas discretizadas das Equações 15–1 e 15–2 são resolvidas iterativamente, em geral no centro de cada célula. Se todos os termos da Equação 15–2 fossem colocados em um lado da equação, a solução seria "exata" quando a soma desses termos, definida como **resíduo**, fosse zero para cada célula do domínio. Entretanto, em uma solução CFD, a soma *nunca* é identicamente zero, mas diminui (esperamos) com iterações progressivas. Um resíduo pode ser visto como uma medida da quantidade com a qual a solução para determinada equação de transporte se desvia da quantidade exata, e o resíduo médio associado a cada equação de transporte é monitorado para ajudar a determinar quando a solução convergiu. Às vezes, centenas ou mesmo milhares de iterações são necessárias para convergir a uma solução final, e os resíduos podem diminuir em várias ordens de grandeza.
7. Depois que a solução convergiu, as variáveis do campo de escoamento, como velocidade e pressão, são representadas e analisadas graficamente. Os usuários também podem definir e analisar funções personalizadas adicionais formadas por combinações algébricas das variáveis do campo de escoamento. A maioria dos códigos CFD comerciais tem **pós-processadores** incorporados, criados para analisar o campo de escoamento de modo gráfico e rápido. Também existem pacotes de software de pós-processador independentes disponíveis para essa finalidade. Como a saída gráfica quase sempre é exibida em cores vivas, a CFD ganhou o apelido de *dinâmica dos fluidos colorida*.
8. As *propriedades globais*, com queda de pressão, e as *propriedades integrais*, como forças (elevação e arrasto) e momentos que agem sobre um corpo, são calculadas a partir da solução após a covergência (Figura 15–5). Na maioria dos códigos CFD, isso também pode ser feito "imediatamente" à medida que as iterações ocorrem. Em muitos casos, na verdade, é sensato monitorar essas quantidades juntamente com os resíduos durante o processo de iteração; depois que uma solução convergiu, as propriedades globais e integrais também devem se estabilizar em valores constantes.

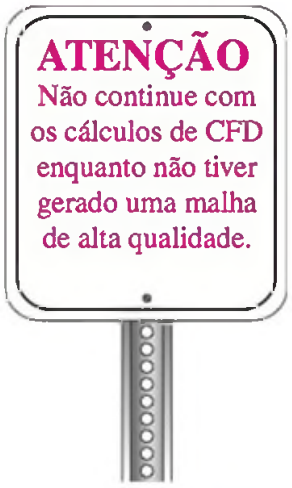


FIGURA 15–4
Uma malha de qualidade é essencial para uma simulação de qualidade na CFD.

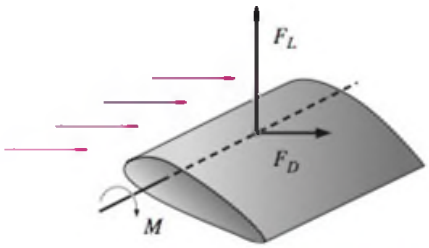


FIGURA 15–5
As *propriedades globais* de um escoamento, como forces e momentos que agem sobre um objeto são calculadas após a solução CFD ter convergido. Elas também podem ser calculadas durante o processo de iteração para monitorar a convergência.

Para o escoamento *em regime não permanente*, uma etapa de tempo físico é especificada, as condições iniciais apropriadas são atribuídas, e um loop de iteração é realizado para resolver as equações de transporte e simular as variações do campo de escoamento nesse pequeno intervalo de tempo. Como as variações entre os patamares de tempo são pequenas, um número relativamente pequeno de iterações (na ordem de dezenas) em geral é necessário entre cada patamar. Após a convergência desse "loop interno", o código continua para o próximo patamar de tempo. Se um escoamento tem uma solução de estado permanente, essa solução quase sempre é mais fácil de encontrar avançando no tempo — após a passagem de tempo suficiente, as variáveis do campo de escoamento se estabilizam em seus valores de estado permanente. A maioria dos códigos de CFD aproveita esse fato especificando internamente uma etapa de pseudotempo (**tempo artificial**) e avançando na direção de uma solução de estado permanente. Em tais casos, o patamar de pseudotempo pode até mesmo ser diferente para células diferentes no domínio computacional e pode ser ajustado adequadamente para diminuir o tempo de convergência.

Outros "truques" são usados para reduzir o tempo de cálculos, como o **multigrid (multimalha)**, na qual as variáveis do campo de escoamento são atualizadas primeiro em uma malha grosseira, para que as características aproximadas do escoamento sejam estabelecidas rapidamente. Em seguida, essa solução é interpo-

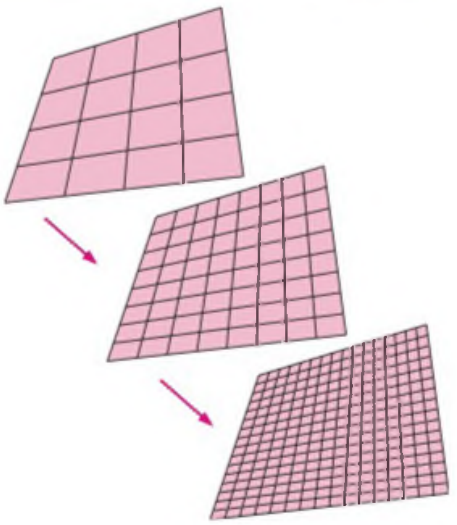


FIGURA 15–6
Com a *multimalha*, as soluções para as equações de movimento são obtidas primeiro em uma malha grosseira, seguida por malhas cada vez mais finas. Isso agiliza a convergência.

FIGURA 15–7
As soluções CFD são fáceis de obter, e as saídas gráficas podem ser incríveis, mas as respostas corretas dependem das entradas corretas e do conhecimento sobre o campo de escoamento.

lada em malhas cada vez mais finas, e a malha final é especificada pelo usuário (Figura 15–6). Em alguns códigos CFD comerciais, várias camadas de multimalhas podem ocorrer "nos bastidores" durante o processo de iteração, sem entrada (ou consciência) do usuário. Você pode aprender mais sobre os algoritmos computacionais e outras técnicas numéricas que melhoram a convergência em livros dedicados aos métodos computacionais, como Tannehill, Anderson e Pletcher (1997).

Equações Adicionais do Movimento

Se a conversão de energia ou transferência de calor for importante para o problema, outra equação de transporte, a *equação da energia,* também deve ser resolvida. Se as diferenças de temperatura levam a variações de densidade significativas, uma *equação de estado* (como a lei do gás ideal) pode ser usada. Se a flutuação for importante, o efeito da temperatura sobre a densidade se refletirá no termo gravitacional (que deve ser separado do termo da pressão modificada na Equação 15–2).

Para um dado conjunto de fronteiras (condições de contorno), uma solução CFD para escoamento laminar aproxima uma solução "exata", limitada apenas pela precisão do esquema de discretização utilizado nas equações do movimento, pelo nível de convergência e pelo grau com o qual a malha é resolvida. O mesmo seria válido para uma simulação de escoamento turbulento, se a malha pudesse ser suficientemente fina para resolver todos os vórtices turbulentos, tridimensionais e temporários. Infelizmente, nem sempre esse tipo de simulação direta do escoamento é possível nas aplicações práticas da engenharia por causa das limitações do computador. Em vez disso aproximações adicionais são feitas na forma de modelos de turbulência para que as soluções de escoamento turbulento sejam possíveis. Os modelos de turbulência geram equações de transporte adicionais que modelam o aumento de mistura e a difusão da turbulência. Essas equações de transporte adicionais devem ser resolvidas juntamente com as equações da massa e do momento. A modelagem da turbulência é discutida com mais detalhes na Seção 15–3.

Os códigos CFD modernos incluem opções para o cálculo de trajetórias de partículas, transporte de espécies, transferência de calor e turbulência. Os códigos são fáceis de usar e é possível obter soluções sem conhecer as equações ou suas limitações. Aí é que está o perigo da CFD: podem ocorrer resultados errados, quando não se tem conhecimento da mecânica dos fluidos (Figura 15–7). É fundamental que os usuários de CFD possuam algum conhecimento básico da mecânica dos fluidos, para que possam discernir se uma solução da CFD faz sentido ou não em termos físicos.

Geração e Independência de Malha

A primeira etapa (e, sem dúvida, a etapa mais importante) de uma solução CFD é a geração de uma malha que defina em todo o domínio computacional as células nas quais as variáveis de escoamento (velocidade, pressão etc.) são calculadas. Também estão disponíveis códigos CFD comerciais modernos com seus próprios geradores de malhas, além dos programas geradores de malhas. As malhas usadas neste capítulo são geradas com o pacote de geração de malha da FLUENT, o **GAMBIT**.

Muitos códigos CFD podem ser executados com malhas estruturadas ou não. Uma **malha estruturada** consiste em células planares com quatro arestas (2-D) ou células volumétricas com seis faces (3-D). Embora as células possam ser distorcidas em vez de retangulares, cada célula é numerada de acordo com índices (i, j, k) que não correspondem necessariamente às coordenadas x, y e z. Uma ilustração de uma malha estruturada 2-D é mostrada na Figuras 15–8. Para construir essa malha, nove **nós** são especificados nas arestas superior e inferior; esses nós correspondem a oito **intervalos** ao longo desses lados. Da mesma forma, cinco nós são especificados nas arestas esquerda e direita, correspondentes a quatro intervalos ao longo desses lados. Os intervalos correspondem a $i = 1$ até 8 e $j = 1$ até 4, e estão numerados e marcados na Figura 15–8. Em seguida, uma malha interna é gerada conectando-se os nós um a um em todo o domínio, de forma que as linhas (j = constante) e as colunas (i = constante) sejam definidas claramente, embora as células propriamente ditas pos-

sam ser distorcidas (não necessariamente retangulares). Em uma malha estruturada em 2-D, cada célula é especificada de forma única por um par de índices (i, j). Por exemplo, a célula sombreada da Figura 15–8 está em $(i = 4, j = 3)$. Você deve estar ciente de que alguns códigos CFD numeram os *nós* em vez dos intervalos.

Uma **malha não estruturada** consiste de células em diversas formas, mas em geral são usados triângulos ou quadriláteros (2-D) e tetraedros ou hexaedros (3-D). Duas malhas não estruturadas para o mesmo domínio da Figura 15–8 foram geradas, usando a *mesma* distribuição de intervalo nas arestas; essas malhas são mostradas na Figura 15–9. Ao contrário da malha estruturada, não é possível identificar de forma única as células da malha não estruturada pelos índices i e j; em vez disso, as células são numeradas de alguma outra forma internamente no código CFD.

Para geometrias complexas, uma malha não estruturada em geral é muito mais fácil de ser criada pelo usuário do código de geração de malha. Entretanto, existem algumas vantagens nas malhas estruturadas. Por exemplo, alguns códigos CFD (em geral mais antigos) foram escritos especificamente para as malhas estruturadas; esses códigos convergem mais rapidamente, e quase sempre de forma mais exata, com a utilização do recurso de índice das malhas estruturadas. Entretanto, nos códigos CFD gerais mais modernos, que podem processar malhas estruturadas e não estruturadas, isso não é mais problema. Mais importante ainda é o fato de que, em geral, *com uma malha estruturada são geradas menos células do que com uma malha não estruturada*. Na Figura 15–8, por exemplo, a malha estruturada tem $8 \times 4 = 32$ células, enquanto a malha triangular não estruturada da Figura 15–9*a* tem 76 células, e a malha quadrilátera não estruturada tem 38 células, embora uma distribuição de nós idêntica seja aplicada aos lados nos três casos. Nas camadas limites, onde as variáveis de escoamento mudam rapidamente na direção normal à parede e malhas com alta resolução são necessárias próximas à parede, as malhas estruturadas permitem uma resolução mais fina do que as malhas não estruturadas para o mesmo número de células. Isso pode ser visto pela comparação das malhas das Figuras 15–8 e 15–9 próximas à aresta direita. As células da malha estruturada são finas e fortemente compactas perto da aresta direita, enquanto as células das malhas não estruturadas não são.

Devemos enfatizar que independentemente do tipo de malha selecionado (estruturada ou não estruturada, quadrilátera ou triangular etc.), o fator mais crítico para produzir soluções CFD confiáveis é a *qualidade* da malha. Em particular, você sempre deve tomar cuidado para que as células individuais não sejam extremamente inclinadas, uma vez que isso pode levar a dificuldades de convergência e imprecisão na solução numérica. A célula sombreada da Figura 15–9*a* é um exemplo de célula com **inclinação** moderadamente alta, definida como o afastamento da simetria. Existem diversos tipos de inclinação, para células bi e tridimensionais. A inclinação de célula tridimensional vai além do escopo deste livro — o tipo de inclinação mais adequado para as células *bidimensionais* é a **inclinação eqüiangular**, definida como

Inclinação eqüiangular:
$$Q_{EAS} = \text{MÁX}\left(\frac{\theta_{máx} - \theta_{igual}}{180° - \theta_{igual}}, \frac{\theta_{igual} - \theta_{mín}}{\theta_{igual}}\right) \qquad (15\text{–}3)$$

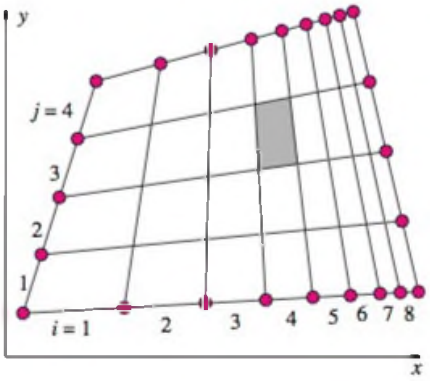


FIGURA 15–8
Exemplo de malha estruturada em 2-D com nove nós e oito intervalos nos lados superior e inferior, e cinco nós e quatro intervalos nas arestas esquerda e direita. Os índices i e j são mostrados. A célula sombreada está em $(i = 4, j = 3)$.

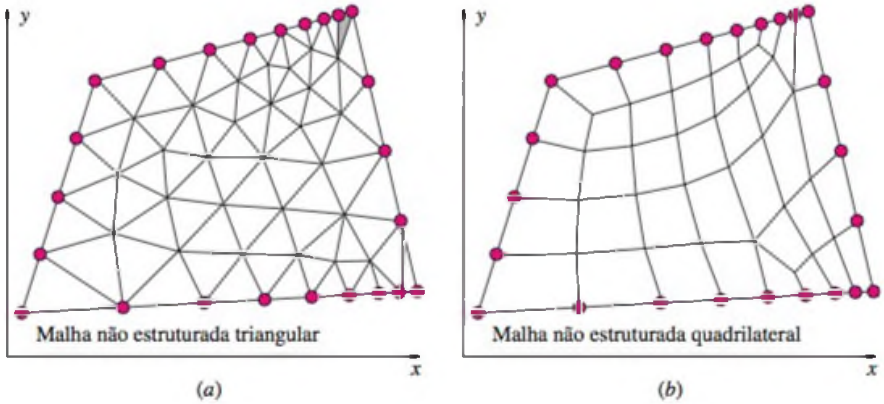


FIGURA 15–9
Exemplos de malhas não estruturadas em 2-D com nove nós e oito intervalos nas arestas superior e inferior, e cinco nós e quatro intervalos nas arestas esquerda e direita. Essas malhas utilizam a mesma distribuição de nós da Figura 15–8: (*a*) malha triangular não estruturada e (*b*) malha quadrilateral não estruturada. A célula sombreada de (*a*) está moderadamente inclinada.

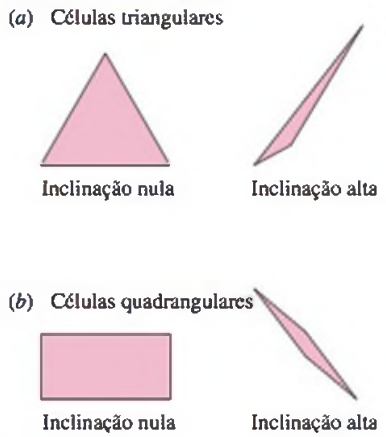


FIGURA 15–10
A inclinação é mostrada em duas dimensões: (*a*) um triângulo eqüilátero tem inclinação nula, mas um triângulo altamente distorcido tem inclinação alta. (*b*) Da mesma forma, um retângulo tem inclinação nula, mas uma célula quadrilátera altamente distorcida tem inclinação alta.

onde $\theta_{mín}$ e $\theta_{máx}$ são os ângulos mínimo e máximo (em graus) entre dois lados da célula e θ_{igual} é o ângulo entre duas arestas quaisquer de uma célula eqüilátera ideal com mesmo número de arestas. Para células triangulares $\theta_{igual} = 60°$ e para células quadriláteras $\theta_{igual} = 90°$. É possível demonstrar pela Equação 15–3 que $0 < Q_{EAS} < 1$ para qualquer célula 2-D. Por definição, um triângulo eqüilátero tem inclinação zero. Da mesma forma, um quadrado ou retângulo tem inclinação nula. Um elemento triangular ou quadrilátero grosseiramente distorcido pode ter inclinação alta inaceitável (Figura 15–10). Alguns códigos de geração de malha utilizam esquemas numéricos para suavizar a malha, de modo que minimize a inclinação.

Outros fatores também afetam a qualidade da malha. Por exemplo, variações bruscas no tamanho da célula podem levar a dificuldades de convergência ou numéricas no código CFD. Da mesma forma, células com razão de aspecto muito grande às vezes podem causar problemas. Embora, na maioria das vezes, seja possível minimizar a contagem de células usando uma malha estruturada, em vez de uma malha não estruturada, uma malha estruturada nem sempre é a melhor opção, dependendo da forma do domínio computacional. Você sempre deve estar ciente da qualidade da malha. Tenha em mente que uma *malha não estruturada de alta qualidade é melhor do que uma malha estruturada de má qualidade.* Um exemplo é mostrado na Figura 15–11 para o caso de um domínio computacional com um pequeno ângulo agudo no canto superior direito. Neste exemplo apenas ajustamos a distribuição dos nós, para que a malha contenha em todos os casos entre 60 e 70 células para comparação direta. A malha estruturada (Figura 15–11*a*) tem $8 \times 8 = 64$ células; mas mesmo após a suavização, a inclinação eqüiangular é de 0,83 — as células próximas ao canto superior direito são altamente inclinadas. A malha triangular não estruturada (Figura 15–11*b*) tem 70 células, mas a inclinação máxima é reduzida para 0,76. Mais importante ainda é o fato de que a inclinação geral é mais baixa em todo o domínio computacional. A malha quadrilátera não estruturada (Figura 15–11*c*) tem 67 células. Embora a inclinação geral seja melhor do que a inclinação da malha estruturada, a inclinação máxima é 0,87 — mais alta do que aquela da malha estruturada. A malha híbrida mostrada na Figura 15–11*d* será discutida rapidamente.

Surgem situações nas quais uma malha estruturada é preferida (por exemplo, o código CFD exige malhas estruturadas, zonas de camadas limites precisam de alta resolução, ou a simulação está pressionando os limites de memória disponíveis no computador). A geração de uma malha estruturada é um processo direto para as geometrias com arestas retas. Tudo o que precisamos fazer é dividir o domínio computacional em **blocos** de quatro arestas (2-D) ou **zonas** de seis faces (3-D). Dentro de cada bloco, geramos uma malha estruturada (Figura 15–12*a*). Tal análise é chamada de análise **multibloco**. Para geometrias mais complicadas com superfícies curvas, precisamos determinar como o domínio computacional pode ser dividido em blocos individuais que podem ou não ter arestas (2-D) ou faces (3-D) planas. Um exemplo bidimensional envolvendo arcos circulares é mostrado na Figura 15–12*b*. A maioria dos códigos CFD exige que os nós coincidam nas arestas e faces comuns entre os blocos.

Muitos códigos CFD comerciais permitem dividir as arestas ou as faces de um bloco e atribuir condições de contorno diferentes a cada segmento da aresta ou

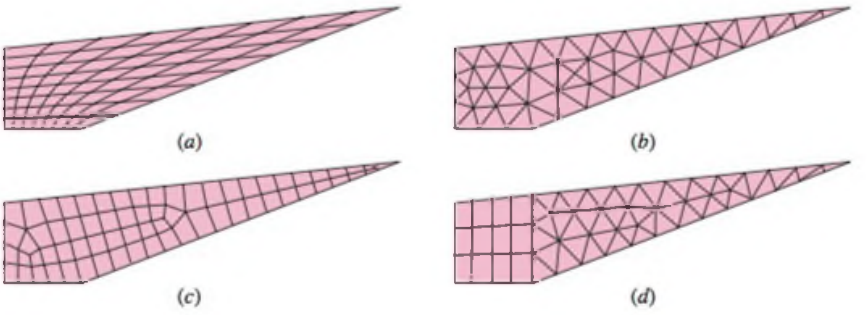


FIGURA 15–11
Comparação de quatro malhas 2-D para um domínio computacional altamente distorcido: (*a*) malha estruturada 8×8 com 64 células e $(Q_{EAS})_{máx} = 0,83$, (*b*) malha triangular não estruturada com 70 células e $(Q_{EAS})_{máx} = 0,76$, (*c*) malha quadrilátera não estruturada com 67 células e $(Q_{EAS})_{máx} = 0,87$ e (*d*) malha híbrida com 62 células e $(Q_{EAS})_{máx} = 0,76$.

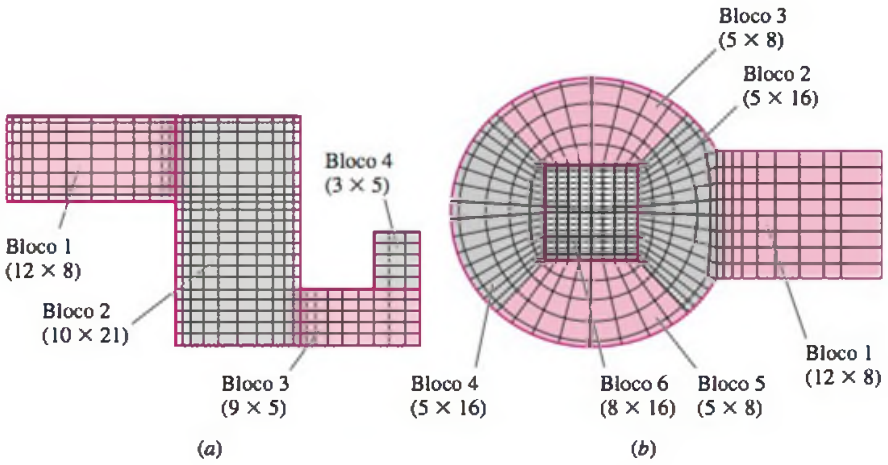


FIGURA 15–12
Exemplos de malhas estruturadas geradas para a análise CFD multibloco: (*a*) um domínio computacional 2-D simples composto por blocos retangulares de quatro arestas e (*b*) um domínio 2-D mais complicado com superfícies curvas, mas também composto por quatro arestas de quatro lados e células quadriláteras. O número de intervalos *i*- e *j*- em cada bloco é mostrado entre parênteses. Obviamente, existem modos alternativos aceitáveis de dividir esses domínios computacionais em blocos.

parte da face. Na Figura 15–12*a*, por exemplo, a aresta esquerda do bloco 2 é dividida a cerca de dois terços de seu comprimento para cima para acomodar a junção com o bloco 1. O segmento inferior dessa aresta é uma parede e o segmento superior é uma aresta interior. (Essas e outras condições de contorno serão discutidas brevemente.) Uma situação semelhante ocorre na aresta direita do bloco 2 e na aresta superior do bloco 3. Alguns códigos CFD aceitam apenas **blocos elementares**, ou seja, *blocos cujas arestas ou faces não podem ser divididos*. Por exemplo, a malha de quatro blocos da Figura 15–12*a* exige sete blocos elementares de acordo com essa limitação (Figura 15–13). O número total de células é o mesmo, como você pode verificar. Finalmente, no caso dos códigos CFD que permitem blocos com arestas ou faces divididas, às vezes nós podemos combinar dois ou mais blocos em um só. Por exemplo, propomos como exercício que você mostre como a malha estruturada da Figura 15–11*b* pode ser simplificada para apenas *três* blocos não elementares.

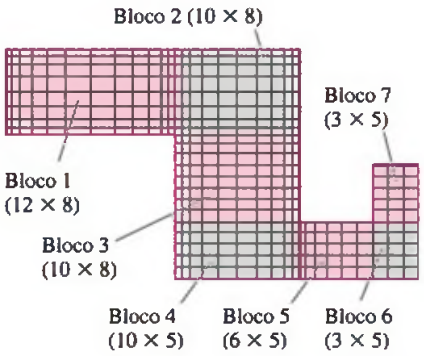


FIGURA 15–13
A malha multiblocos da Figura 15–12a modificada para um código CFD que pode lidar apenas com *blocos elementares*.

Ao desenvolver a topologia dos blocos com geometrias complicadas como na Figura 15–12*b*, o objetivo é criar blocos de forma que nenhuma célula da malha fique altamente inclinada. Além disso, o tamanho da célula não deve mudar bruscamente em nenhuma direção, e a topologia dos blocos deveria levar a um grande agrupamento de células próximas a paredes sólidas, para que as camadas limites possam ser resolvidas. Com a prática você pode dominar a arte de criar malhas estruturadas multiblocos sofisticadas. As malhas multiblocos são *necessárias* nas malhas estruturadas de geometria complexa. Elas também podem ser usadas com as malhas não estruturadas, mas não são necessárias, uma vez que as células podem acomodar as geometrias complexas.

Finalmente, uma **malha híbrida** é aquela que combina regiões ou blocos de malhas estruturadas e não estruturadas. Por exemplo, você pode combinar um bloco de malha estruturada perto de uma parede com um bloco de malha não estruturada fora da região de influência da camada limite. Uma malha híbrida é muito usada para permitir a alta resolução perto de uma parede, sem exigir a alta resolução longe da parede (Figura 15–14). Ao gerar qualquer tipo de malha (estruturada, não estruturada ou híbrida), sempre tome cuidado para que as células individuais não estejam altamente inclinadas. Por exemplo, nenhuma das células da Figura 15–14 tem inclinação significativa. Outro exemplo de uma malha híbrida aparece na Figura 15–11*d*. Aqui dividimos o domínio computacional em dois blocos. O bloco de quatro arestas da esquerda está dividido por uma malha estruturada, enquanto o bloco de três arestas da direita está dividido por uma malha triangular não estruturada. A inclinação máxima é 0,76, a mesma da malha triangular não estruturada da Figura 15–11*b*, mas o número total de células foi reduzido de 70 para 62.

FIGURA 15–14
Exemplo de malha híbrida bidimensional próxima a uma superfície curva; duas regiões estruturadas e uma região não estruturada estão indicadas.

Os domínios computacionais com ângulos muito pequenos como aquele da Figura 15–11 são difíceis de dividir no canto agudo, independentemente do tipo de células usado. Uma forma de evitar valores grandes de inclinação em um canto

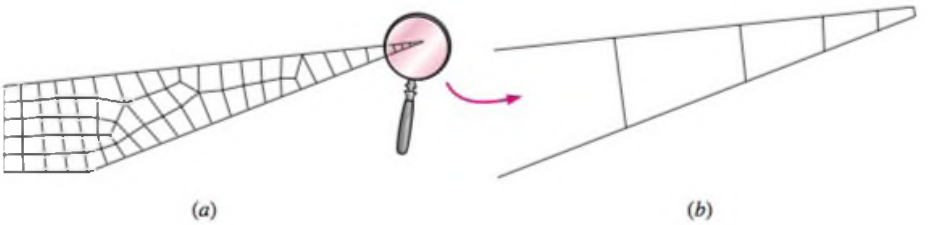


FIGURA 15–15
Malha híbrida para o domínio computacional da Figura 15–11 com o canto agudo cortado: (*a*) vista geral — a malha contém 62 células com $(Q_{EAS})_{máx} = 0{,}53$, (*b*) vista ampliada do canto cortado.

agudo é simplesmente cortar ou arredondar o canto agudo. Isso pode ser feito muito próximo ao canto, para que a modificação geométrica seja imperceptível sob o ponto de vista geral, e tenha pouco ou nenhum efeito sobre o escoamento, embora melhore bastante o desempenho do código CFD reduzindo a inclinação. Por exemplo, o canto agudo problemático do domínio computacional da Figura 15–11 é cortado e redesenhado na Figura 15–15. Pelo uso de multiblocos e malhas híbridas, a malha mostrada na Figura 15–15 tem 62 células e inclinação máxima de apenas 0,53 — um aperfeiçoamento grande com relação a qualquer uma das malhas da Figura 15–11.

A geração de uma boa malha em geral é um processo aborrecido e demorado; os engenheiros que usam CFD regularmente concordarão que a geração de malhas em geral leva mais tempo do que a própria solução CFD (o tempo do engenheiro, não o tempo de CPU). Entretanto, o *tempo gasto gerando uma boa malha é bem empregado,* uma vez que os resultados da CFD serão mais confiáveis e podem convergir mais rapidamente (Figura 15–16). Uma malha de alta qualidade é crítica para uma solução CFD precisa; uma malha com baixa resolução ou de baixa qualidade pode até mesmo levar a uma solução *incorreta*. Portanto, é importante que os usuários da CFD testem a **independência de malha** de sua solução. O método padrão para testar a independência da malha é aumentar a resolução (por um fator de 2 em todas as direções se for possível) e repetir a simulação. Se os resultados não mudarem de forma apreciável, a malha original provavelmente é adequada. Se, por outro lado, houver diferenças significativas entre as duas soluções, a malha original provavelmente tem resolução inadequada. Nesse caso, uma malha mais fina ainda deve ser tentada até que a malha tenha resolução adequada. Esse método de teste da independência da malha é demorado e, infelizmente, nem sempre é possível, particularmente para problemas de engenharia grandes, nos quais a solução força os recursos do computador até seus limites. Em uma simulação 2-D, se uma pessoa dobrar o número de intervalos em cada aresta, o número de células aumenta por um fator de $2^2 = 4$; o tempo de cálculos necessário para a solução CFD também aumenta em um fator de aproximadamente 4. Para escoamentos tridimensionais, quando o número de intervalos é dobrado em cada direção, a contagem das células aumenta por um fator de $2^3 = 8$. Você pode perceber como os estudos de independência da malha podem facilmente ultrapassar a capacidade de memória de um computador e/ou disponibilidade de CPU. Se você não conseguir dobrar o número de intervalos devido a limitações do computador, uma boa regra é testar a independência da malha aumentando o número de intervalo em pelo menos 20% em todas as direções.

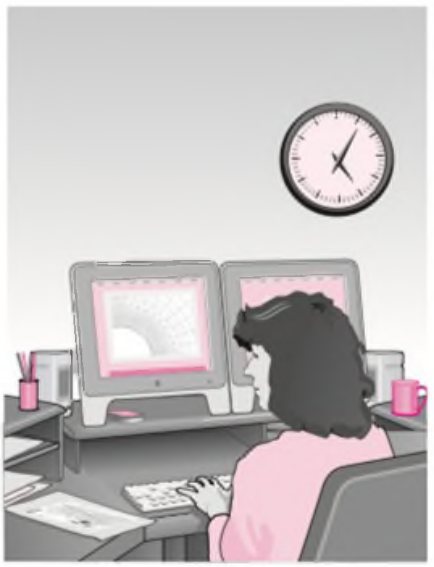


FIGURA 15–16
O tempo gasto gerando uma boa malha é tempo bem empregado.

Uma última observação sobre a geração de malhas. A tendência atual da CFD é a geração de malhas automatizadas, acopladas ao refinamento automático da malha com base em estimativas de erro. Entretanto, mesmo com essas novas tendências, é fundamental que você entenda o modo como a malha afeta a solução CFD.

FIGURA 15–17
As condições de contorno devem ser cuidadosamente aplicadas a *todas* as fronteiras do domínio computacional. As condições de contorno apropriadas são necessárias para obter uma solução CFD exata.

Condições de Contorno

Embora as equações do movimento, o domínio computacional e até mesmo a malha podem ser iguais para dois cálculos CFD, o tipo de escoamento que é modelado é determinado pelas condições de contorno impostas. *As condições de contorno apropriadas são necessárias para obter uma solução CFD exata* (Figura 15–17). Existem vários tipos de condições de contorno; as mais importantes estão listadas e são descritas brevemente a seguir. Os nomes são aqueles usados pelo FLUENT; outros códigos CFD podem usar terminologia um pouco diferente e os detalhes de suas

condições de contorno podem ser diferentes. Na descrição dada, as palavras *face* ou *plano* são usadas, implicando o escoamento tridimensional. Para um escoamento bidimensional, a palavra *aresta* ou *reta* deve substituir *face* ou *plano*.

Condições de Contorno de Parede

A condição de contorno mais simples é aquela de uma **parede**. Como o fluido não pode passar através de uma parede, o componente normal da velocidade é igualado a zero com relação à parede ao longo de uma face na qual a condição de contorno de parede é prescrita. Além disso, devido à condição de não escorregamento, em geral também definimos o componente tangencial da velocidade em uma parede fixa como zero. Na Figura 15–17, por exemplo, os lados superior e inferior desse domínio simples são especificados como condições de contorno da parede sem escorregamento. Se a equação da energia está sendo resolvida, a temperatura ou o fluxo de calor da parede também deve ser especificado (mas não ambos; consulte a Seção 15–4). Quando um modelo de turbulência é usado, as equações de transporte de turbulência são resolvidas, e pode ser que a rugosidade da parede precise ser especificada, uma vez que as camadas limites turbulentas são muito influenciadas pela rugosidade da parede. Além disso, os usuários devem escolher entre os diversos tipos de tratamentos de turbulência de parede (**funções da parede** etc.) Essas opções de turbulência estão além do escopo deste livro (consulte Wilcox, 1998); felizmente, as opções padrão da maioria dos códigos CFD modernos são suficientes para muitas aplicações que envolvem o escoamento turbulento.

As paredes móveis e paredes com tensões de cisalhamento especificadas também podem ser simuladas em muitos códigos CFD. Existem situações nas quais desejamos deixar o fluido escorregar ao longo da parede (chamamos isso de "parede não viscosa"). Por exemplo, podemos especificar uma condição de contorno de parede com tensão de cisalhamento nula, ao longo da superfície livre de uma piscina ou banheira de água quente ao simularmos tal escoamento (Figura 15–18). Observe que com essa simplificação, o fluido pode "escorregar" ao longo da superfície, uma vez que a tensão de cisalhamento viscosa causada pelo ar acima dela é desprezivelmente pequena (Capítulo 9). Ao fazer essa aproximação, porém, as ondas de superfície e as flutuações de pressão associadas não podem ser levadas em conta.

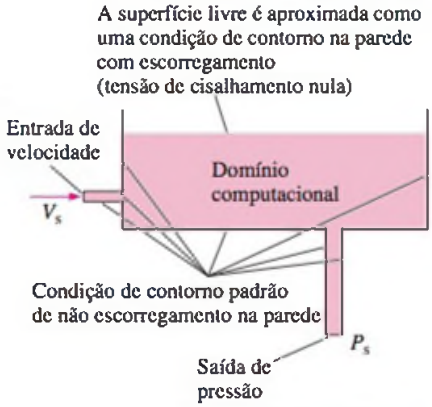


FIGURA 15–18
A condição de contorno padrão de *parede* é imposta às fronteiras sólidas fixas, onde também impomos uma temperatura de parede ou um fluxo de calor de parede. A tensão de cisalhamento ao longo da parede pode ser igualada a zero para simular a superfície livre de um líquido, como mostra esta figura no caso de uma piscina. Existe um escorregamento ao longo desta "parede" que simula a superfície livre (em contato com o ar).

Condições de Contorno para Escoamento de Entrada e de Saída

Existem várias opções nas fronteiras através das quais o fluido entra no domínio computacional (escoamento de entrada) ou sai do domínio (escoamento de saída). Em geral, elas são categorizadas como *condições especificadas por velocidade* ou *condições especificadas por pressão*. Em uma **entrada de velocidade**, especificamos a velocidade do escoamento de entrada ao longo da face da entrada. Se as equações da energia e/ou turbulência estão sendo resolvidas, as propriedades de temperatura e/ou turbulência do escoamento de entrada também precisam ser especificadas.

Em uma **entrada de pressão**, especificamos a pressão total ao longo da face de entrada (por exemplo, o escoamento que entra no domínio computacional a partir de um tanque pressurizado de pressão conhecida ou a partir do campo distante onde a pressão ambiental é conhecida). Em uma **saída de pressão**, o fluido escoa *para fora* do domínio computacional. Especificamos a pressão estática ao longo da superfície externa; em muitos casos essa é a pressão atmosférica (pressão manométrica zero). Por exemplo, a pressão é atmosférica na saída de um tubo de exaustão subsônico aberto para o ar ambiente (Figura 15–19). As propriedades de escoamento, como temperatura, e as propriedades de turbulência também são especificadas nas entradas e saídas de pressão. No último caso, porém, essas propriedades não são usadas, a menos que a solução exija **escoamento reverso** através da saída. *O escoamento reverso em uma saída de pressão em geral é indicação de que o domínio computacional não é suficientemente grande.* Se os avisos de escoamento reverso persistirem à medida que a solução CFD for iterada, o domínio computacional deve ser estendido.

A pressão *não é* especificada em uma entrada de velocidade, uma vez que isso levaria a excesso de especificação matemática, já que a pressão e a velocidade são

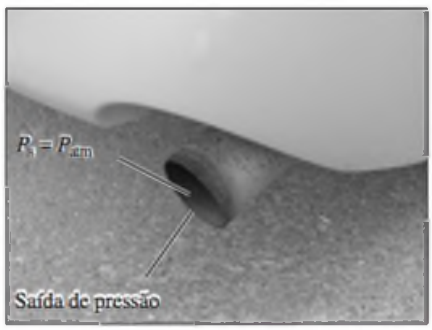


FIGURA 15–19
Ao modelar um campo de escoamento incompressível, com a saída de um tubo ou duto exposto ao ar ambiente, a condição de contorno adequada é uma saída de pressão com $P_s = P_{atm}$. Aqui é mostrado o escapamento de um automóvel.
Foto de Po-Ya Abel Chuang. Usada com permissão.

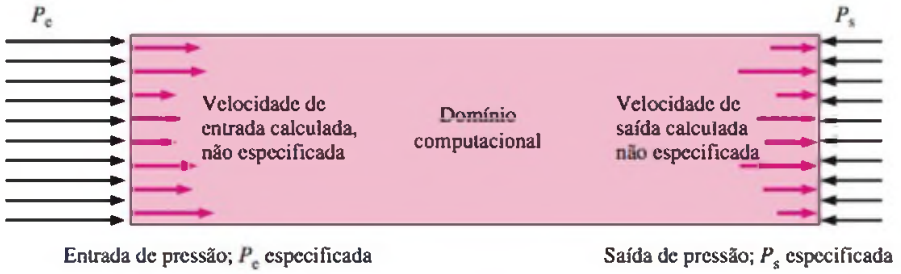


FIGURA 15–20
A uma *entrada* ou *saída de pressão*, especificamos a pressão na face, mas não podemos especificar a velocidade através da face. À medida que a solução CFD converge, a velocidade se ajusta de forma que as condições de contorno de pressão prescritas sejam satisfeitas.

acopladas nas equações do movimento. Em vez disso, a pressão em uma entrada de velocidade se ajusta para combinar com o restante do campo de escoamento. De forma semelhante, a velocidade não é especificada em uma entrada ou saída de pressão, uma vez que isso levaria a excesso de especificação matemática. Em vez disso, a velocidade em uma condição de contorno de pressão especificada se ajusta para combinar com o restante do campo de escoamento (Figura 15–20).

Outra opção em uma saída do domínio computacional é a condição de contorno de **escoamento de saída**. Em uma fronteira de escoamento de saída, nenhuma propriedade de escoamento é especificada; em vez disso, propriedades de escoamento como velocidade, quantidades de turbulência e temperatura são forçadas a terem *gradientes nulos na direção normal à face do escoamento de saída* (Figura 15–21). Por exemplo, se um duto for suficientemente longo para que o escoamento seja *completamente desenvolvido* na saída, a condição de contorno de escoamento de saída seria apropriada, uma vez que a velocidade não muda na direção normal à face da saída. Observe que a direção do escoamento não se restringe à direção perpendicular à fronteira do escoamento de saída, como ilustra a Figura 15–21. Se o escoamento ainda estiver em desenvolvimento, mas a pressão na saída for conhecida, uma condição de contorno de saída de pressão seria mais apropriada do que uma condição de contorno de escoamento de saída. A condição de contorno do escoamento de saída quase sempre é preferida à pressão de saída dos escoamentos em rotação, uma vez que o movimento de turbilhão leva a gradientes de pressão radial que não podem ser tratados facilmente por uma saída de pressão.

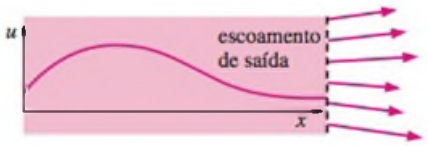


FIGURA 15–21
Em uma condição de contorno de *escoamento de saída*, o gradiente da velocidade na direção normal à face do escoamento de saída é nulo, como ilustra esta figura para u como função de x ao longo de uma linha horizontal. Observe que nem a pressão nem a velocidade são específicas em uma fronteira de escoamento de saída.

Uma situação comum em uma aplicação CFD simples é especificar uma ou mais entradas de velocidade ao longo de partes da fronteira do domínio computacional, e uma ou mais saídas de pressão ou escoamentos de saída em outras partes da fronteira, com as paredes definindo a geometria do restante do domínio computacional. Por exemplo, em nossa piscina (Figura 15–18), definimos a face mais à esquerda do domínio computacional como uma entrada de velocidade e a face de baixo como a saída de pressão. O restante das faces é parede, com a superfície livre modelada como uma parede com tensão de cisalhamento zero.

Finalmente, para simulações de escoamento compressível, as condições de contorno de entrada e saída complicam-se mais ainda com a introdução dos invariantes de Riemann e variáveis características, relacionadas às ondas de entrada e saída. Essa discussão está além do escopo deste livro. Felizmente, muitos códigos CFD têm uma condição de contorno de **campo distante de pressão** para os escoamentos compressíveis. Essa condição de contorno é usada para especificar o número de Mach, a pressão e a temperatura de uma entrada. A mesma condição de contorno pode ser aplicada a uma saída; quando o escoamento sai do domínio computacional, as variáveis de escoamento da saída são extrapoladas do interior do domínio. Novamente, você deve garantir que não haja escoamento reverso em uma saída.

Condições de Contorno Diversas

Algumas fronteiras de um domínio computacional não são paredes, nem entradas ou saídas, mas garantem algum tipo de simetria ou periodicidade. Por exemplo, a condição de contorno **periódica** é útil quando a geometria envolve repetição. As variáveis de campo de escoamento ao longo de uma face de uma fronteira periódica estão numericamente **vinculadas** a uma segunda face de forma idêntica (e na maio-

ria dos códigos CFD também a uma *malha* de face idêntica). Assim, o escoamento que sai (atravessa) a primeira fronteira periódica pode ser imaginado como entrando (atravessando) na segunda fronteira periódica com propriedades idênticas (velocidade, pressão, temperatura etc.). As condições de contorno periódicas sempre ocorrem aos *pares* e são úteis para escoamentos com geometrias repetitivas, como o escoamento entre as lâminas de uma turbomáquina ou através de um conjunto de tubos de trocador de calor (Figura 15–22). A condição de contorno periódica nos permite trabalhar com um domínio computacional muito menor do que o campo de escoamento completo, economizando assim recursos do computador. Na Figura 15–22, você pode imaginar um número infinito de domínios repetidos (linhas tracejadas) acima e abaixo do domínio computacional real (a região sombreada em azul-claro). As condições de contorno periódicas devem ser especificadas como **translacionais** (periodicidade aplicada a duas faces paralelas, como na Figura 15–22) ou **rotacionais** (periodicidade aplicada a duas faces orientadas radialmente). A região de escoamento entre duas lâminas vizinhas de um ventilador (uma **passagem de escoamento**) é um exemplo de um domínio rotacionalmente periódico (consulte a Figura 15–56).

A condição de contorno **simetria** força as variáveis do campo de escoamento a serem *imagens espelhadas* com relação ao plano de simetria. Matematicamente, os *gradientes* da maioria das variáveis de campo de escoamento na direção normal ao plano de simetria são definidos como igualadas a zero em todo o plano de simetria, embora algumas variáveis sejam especificadas como funções pares e outras como funções ímpares em uma condição de contorno de simetria. Para escoamentos físicos com um ou mais planos de simetria, essa condição de contorno nos permite modelar uma *parte* do domínio de escoamento físico, economizando assim recursos de computador. A fronteira de simetria difere da fronteira periódica pois nenhuma fronteira "equivalente" é necessária no caso da simetria. Além disso, o fluido pode escoar *paralelamente* a uma fronteira de simetria, mas não *através* de uma fronteira de simetria, enquanto o escoamento pode *cruzar* uma fronteira periódica. Considere, por exemplo, o escoamento através de um conjunto de tubos de trocador de calor (Figura 15–22). Se considerarmos que nenhum escoamento atravessa as fronteiras periódicas daquele domínio computacional, podemos usar as condições de contorno de simetria. Os leitores atentos notarão que podemos até mesmo cortar o tamanho do domínio computacional pela metade pela escolha sensata dos planos de simetria (Figura 15–23).

Para escoamentos *axissimétricos,* a condição de contorno de **eixo** aplica-se a um lado reto que representa o eixo de simetria (Figura 15–24*a*). O fluido pode escoar *paralelamente* ao eixo, mas não *através* do eixo. A opção axissimétrica permite resolver o escoamento apenas em duas dimensões, como está representado na Figura 15–24*b*. O domínio computacional é apenas um retângulo no plano *xy*; você pode imaginar a rotação desse plano com relação ao eixo *x* para gerar a axissimetria. No caso de escoamentos axissimétricos com turbilhão, o fluido também pode escoar *tangencialmente* em uma trajetória circular ao redor do eixo de simetria. Os escoamentos axissimétricos com turbilhão são chamados de **rotacionalmente simétricos**.

Condições de Contorno Internas

A classificação final das condições de contorno é imposta às faces ou arestas que não definem uma fronteira do domínio computacional, mas que existem *dentro* do domínio. Quando uma condição de contorno **interna** é especificada em uma face, o escoamento cruza a face sem quaisquer modificações forçadas pelo usuário, assim como cruzaria de uma célula interior para outra (Figura 15–25). Essa condição de contorno é necessária nas situações nas quais o domínio computacional é dividido em blocos ou zonas separados, e permite a comunicação entre os blocos. Achamos que essa condição de contorno é útil também para o pós-processamento, uma vez que uma face predefinida está presente no campo de escoamento, em cuja superfície podemos traçar os vetores de velocidade, as curvas de pressão etc. Nas aplicações CFD mais sofisticadas, nas quais há uma malha deslizante ou giratória, a interface entre dois blocos é acionada para transferir adequadamente informações de um bloco para outro.

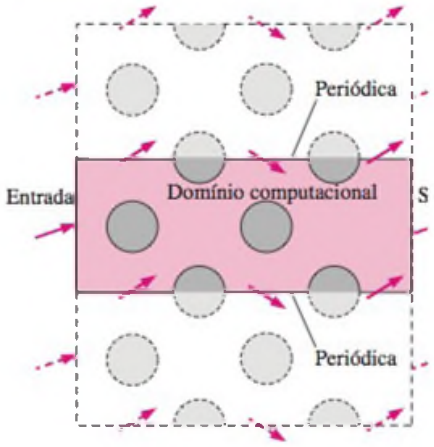


FIGURA 15–22
As condições de contorno *periódicas* são impostas a duas faces idênticas. O que acontece em uma das faces também deve acontecer em sua face periódica equivalente, como ilustram os vetores de velocidade que atravessam as faces periódicas.

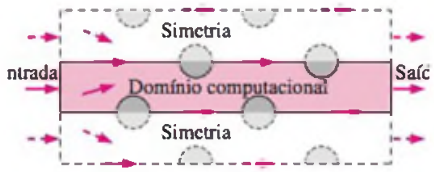


FIGURA 15–23
A condição de contorno de *simetria* é imposta a uma face, para que o escoamento através daquela face seja uma imagem-espelho do escoamento calculado. Desenhamos domínios imaginários (linhas tracejadas) acima e abaixo do domínio computacional (a região sombreada em azul claro) na qual os vetores de velocidade são imagens espelhadas daqueles do domínio computacional. Neste exemplo do trocador de calor, a face esquerda do domínio é uma entrada de velocidade, a face direita é uma saída de pressão ou de escoamento de saída, os cilindros são paredes e as faces superior e inferior são planos de simetria.

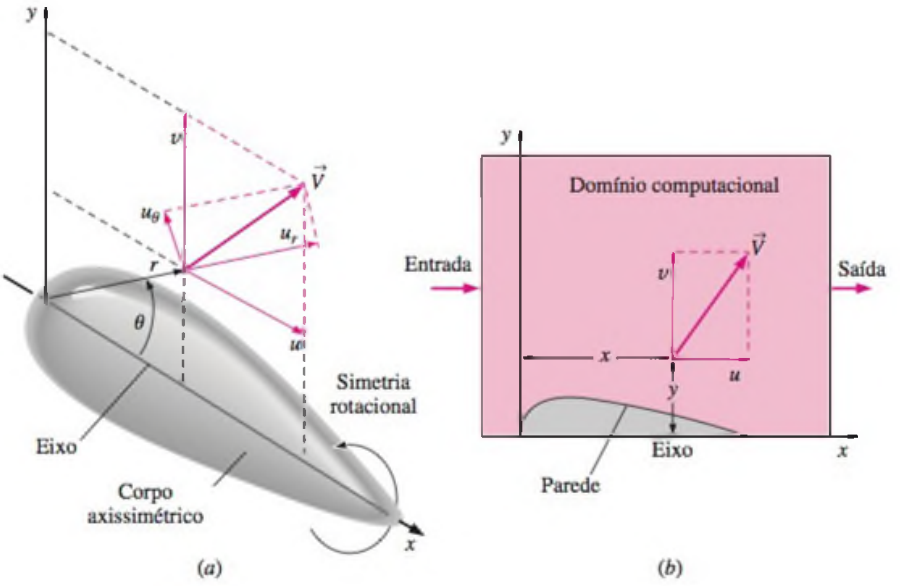


FIGURA 15–24
A condição de contorno de eixo é aplicada ao eixo de simetria (donde o *eixo x*) em um escoamento axissimétrico, uma vez que há simetria rotacional com relação ao eixo. (*a*) Uma fatia que define o plano *xy* ou $r\theta$ é mostrada, e os componentes da velocidade podem ser (u, v) ou (u_r, u_θ). (b) O domínio computacional (região sombreada em azul claro) deste problema se reduz a um plano em duas dimensões (x e y). Em muitos códigos CFD, x e y são usados como coordenadas axissimétricas, com y entendido como a distância do eixo x.

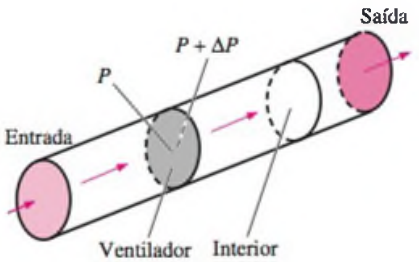


FIGURA 15–25
A condição de contorno do *ventilador* impõe uma mudança brusca da pressão através da face do ventilador para similar um ventilador com escoamento axial em um duto. Quando a elevação da pressão especificada é zero, a condição de contorno do ventilador degenera para uma condição de contorno *interior*.

A condição de contorno de **ventilador** é especificada em um plano através do qual um repentino aumento (ou uma diminuição) de pressão deve ser atribuído. Essa condição de contorno é semelhante a uma condição de contorno interior, exceto pela elevação forçada da pressão. O código CFD não resolve o campo de escoamento não permanente e detalhado por meio de lâminas individuais do ventilador, mas simplesmente modela o plano como um ventilador infinitesimalmente fino que muda a pressão através do plano. A condição de contorno de ventilador é útil, por exemplo, como um modelo simples de um ventilador dentro de um duto (Figura 15–25), um ventilador de teto em uma sala, ou um propulsor ou motor a jato que fornece empuxo a um avião. Se a elevação de pressão através do ventilador é especificada como zero, essa condição de contorno se comporta como uma condição de contorno interior.

A Prática Leva à Perfeição

A melhor maneira de aprender dinâmica dos fluidos computacional é utilizar exemplos e da *prática*. Você deve experimentar diversas malhas, condições de contorno, parâmetros numéricos etc., para ter uma idéia da CFD. Antes de abordar um problema complicado, é melhor resolver os mais simples, particularmente aqueles para os quais existem soluções analíticas ou empíricas conhecidas (para comparação e verificação). Nas próximas seções, resolveremos vários problemas de exemplo com interesse para a engenharia geral, ilustrando muitos dos recursos e limitações da CFD. Começamos com os escoamentos laminares e, em seguida, damos alguns exemplos introdutórios do escoamento turbulento. Finalmente, damos exemplos de escoamentos com transferência de calor, escoamentos compressíveis e escoamentos de líquidos com superfícies livres. O site na Web deste livro traz as imagens coloridas dos resultados, incluindo algumas animações.

15–2 • CÁLCULOS CFD LAMINARES

A dinâmica dos fluidos computacional faz um excelente trabalho de cálculo do escoamento laminar, não permanente ou permanente e incompressível, desde que a malha esteja bem resolvida e as condições de contorno sejam especificadas adequadamente. Mostramos vários exemplos simples de soluções de escoamento laminar, prestando atenção particularmente à resolução de malha e à aplicação apropriada das condições de contorno. Em todos os exemplos desta seção, os escoamentos são incompressíveis e bidimensionais (ou axissimétricos).

Região de Entrada de Escoamento de Tubo em Re = 500

Considere o escoamento da água à temperatura ambiente dentro de um tubo circular uniforme de comprimento $L = 40{,}0$ cm e diâmetro $D = 1{,}00$ cm. Consideramos que a água entra a velocidade uniforme igual a $V = 0{,}05024$ m/s. A viscosidade cinemática da água é $\nu = 1{,}005 \times 10^{-6}$ m^2/s, produzindo um número de Reynolds $\text{Re} = VD/\nu = 500$. Consideramos o escoamento laminar, permanente e incompressível. Estamos interessados na região de entrada na qual o escoamento torna-se gradualmente completamente desenvolvido. Devido à axissimetria, definimos um domínio computacional que é uma fatia bidimensional do eixo até a parede, em vez de um volume cilíndrico tridimensional (Figura 15–26). Geramos seis malhas estruturadas para este domínio computacional: *muito grosseiras* (40 intervalos na direção axial × 8 intervalos na direção radial), *grosseiras* (80 × 16), *médias* (160 × 32), *finas* (320 × 64), *muito finas* (640 × 128) e *ultrafinas* (1.280 × 256). (Observe que o número de intervalos dobra em ambas as direções a cada malha sucessiva; o número de células computacionais aumenta por um fator de 4 para cada malha.) Em todos os casos, os nós são distribuídos axialmente de modo uniforme, mas são concentrados radialmente perto da parede, uma vez que esperamos gradientes de velocidade maiores próximos à parede do tubo. Vistas detalhadas das primeiras três malhas são mostradas na Figura 15–27.

Executamos o programa CFD FLUENT com precisão dupla para todos os seis casos. (A aritmética de dupla precisão nem sempre é necessária nos cálculos de engenharia — utilizamos-na aqui para obter a melhor precisão possível em nossas comparações.) Como o escoamento é laminar, incompressível e axissimétrico, apenas três equações de transporte são resolvidas — continuidade, momento x e momento y. Observe que a coordenada y é usada no código CFD, em vez de r, como a distância do eixo de rotação (Figura 15–24). O código CFD é executado até a convergência (todos os níveis de resíduos se nivelam). Lembre-se de que um resíduo é uma medida do desvio entre uma solução de determinada equação de transporte e a solução exata; quanto menor o resíduo, melhor a convergência. Para o caso de malha muito grosseira, isso ocorre em cerca de 500 iterações, e o nível de resíduo se nivela em menos de 10^{-12} (com relação a seus valores iniciais). A diminuição dos resíduos é traçada na Figura 15–28 para cada caso muito grosseiro. Observe que nos problemas de escoamento mais complicados com malhas mais

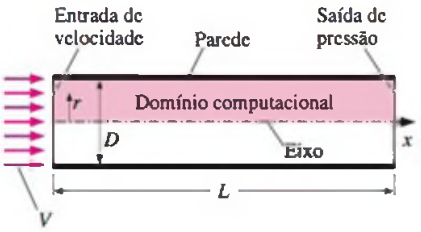


FIGURA 15–26
Devido à axissimetria ao redor do eixo x, o escoamento através de um tubo circular pode ser solucionado computacionalmente com uma fatia bidimensional através do tubo de $r = 0$ até $D/2$. O domínio computacional é a região sombreada em azul claro e o desenho não está em escala. As condições de contorno são indicadas.

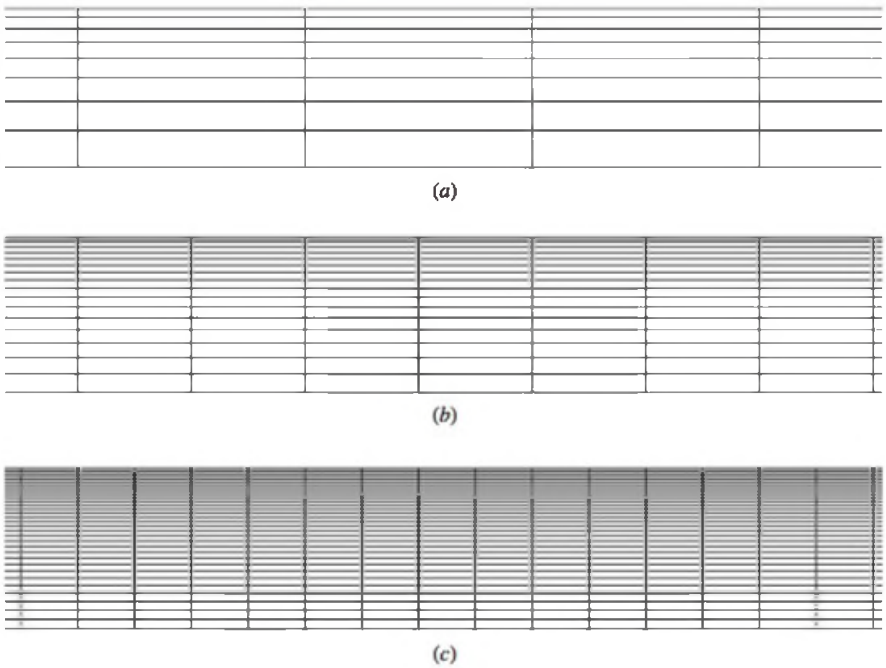


FIGURA 15–27
Partes das três malhas estruturadas grosseiras geradas para o exemplo de escoamento em tubo laminar: (*a*) muito grosseiras (40 × 8), (*b*) grosseiras (80 × 16) e (*c*) médias (160 × 32). O número de células computacionais é 320, 1.280 e 5.120, respectivamente. Em cada vista, a parede do tubo está na parte superior e o eixo do tubo está na parte inferior, como na Figura 15–26.

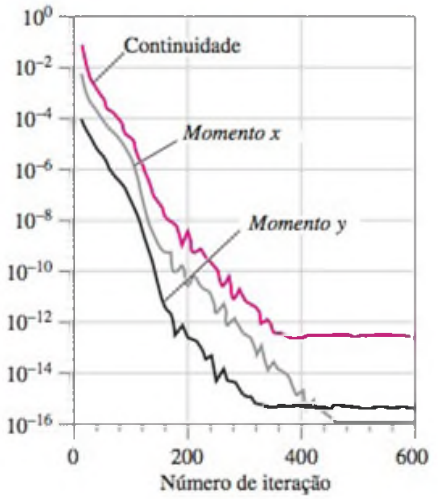


FIGURA 15–28
Diminuição dos resíduos com número de iteração para a solução de escoamento em tubo laminar com malha muito grosseira (aritmética de precisão dupla).

finas, nem sempre é possível esperar resíduos tão baixos; em algumas soluções CFD, os resíduos se nivelam em valores muito mais altos, como 10^{-3}.

Definimos P_1 como a pressão média em um local axial a um diâmetro de tubo a jusante da entrada. Da mesma forma, definimos P_{20} a uma distância de 20 diâmetros. A queda da pressão axial média de 1 para 20 diâmetros, portanto, é $\Delta P = P_1 - P_{20}$, e é igual a 4,404 Pa (até quatro dígitos significativos de precisão) para o caso de malha muito grosseira. A pressão da linha de centro e a velocidade axial são traçadas na Figura 15–29*a* como funções da distância a jusante. A solução parece ser fisicamente plausível. Vemos que o aumento da velocidade axial da linha central preserva massa à medida que a camada limite da parede do tubo aumenta a jusante. Vemos uma queda brusca da pressão perto da entrada do tubo, onde as tensões de cisalhamento viscosas da parede do tubo são mais altas. A queda de pressão se aproxima da linear na direção do final da região de entrada, onde o escoamento é quase completamente desenvolvido, como era de esperar. Finalmente, comparamos na Figura 15–29*b* o perfil de velocidade axial no final do tubo com a solução analítica conhecida para o escoamento de tubo laminar completamente desenvolvido (consulte o Capítulo 8). A solução é excelente, particularmente se considerarmos que existem apenas oito intervalos na direção radial.

Esta solução CFD é independente da malha? Para descobrirmos, repetimos os cálculos usando as malhas grosseira, média, fina, muito fina e ultrafina. A convergência dos resíduos é qualitativamente semelhante àquela da Figura 15–28 para todos os casos, mas o tempo de CPU aumenta significativamente à medida que a resolução de malha melhora, e os níveis de resíduos finais não são tão baixos quanto aqueles do caso de resolução grosseira. O número de iterações necessário até a convergência também aumenta com a melhor resolução de malha. A queda de pressão de $x/D = 1$ para 20 está listada na Tabela 15–1 para todos os seis casos. ΔP também é traçada como função do número de células da Figura 15–30. Vemos que mesmo a malha muito grosseira realiza um trabalho razoável ao prever ΔP. A diferença na queda de pressão da malha muito grosseira para a malha ultrafina é menor do que 10%. Assim, a malha muito grosseira pode ser adequada para alguns cálculos de engenharia. Se for necessária maior precisão, devemos usar uma malha mais fina. Vemos a independência de malha até três algarismos significativos pelo caso muito fino. A variação de ΔP de malha muito fina para malha ultrafina é menor do que 0,07% — uma malha resolvida tão finamente quanto a malha ultrafina não é necessária em nenhuma análise prática de engenharia.

As diferenças mais significativas entre os seis casos ocorrem muito próximas à entrada do tubo, onde os gradientes de pressão e de velocidade são maiores. Na verdade, existe uma *singularidade* na entrada, onde a velocidade axial varia repentinamente de V a zero na parede por causa da condição de não-escorregamento. Traçamos na Figura 15–31 os gráficos de contorno da velocidade axial normalizada, u/V, perto da entrada do tubo. Vemos que embora as propriedades globais do campo

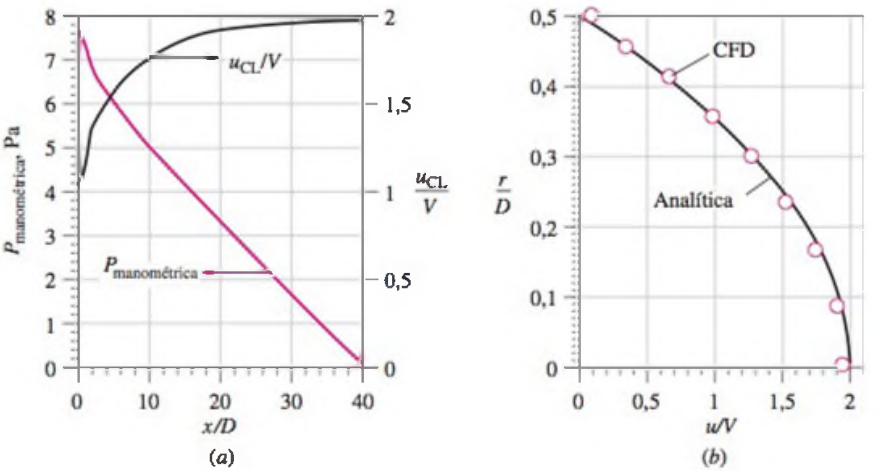


FIGURA 15–29
Resultados da CFD para a simulação de escoamento de tubo laminar com malha muito grosseira: (*a*) desenvolvimento da pressão e velocidade axial da linha central com a distância a jusante e (*b*) perfil de velocidade axial na saída do tubo comparado à previsão analítica.

TABELA 15–1

Queda de pressão $x/D = 1$ para 20 para os diversos casos de resolução de malha na região de escoamento de entrada do escoamento de tubo axissimétrico

Caso	Número de células	ΔP, Pa
Muito grosseira	320	4,404
Grosseira	1.280	3,983
Média	5.120	3,998
Fina	20.480	4,016
Muito fina	81.920	4,033
Ultrafina	327.680	4,035

de escoamento (como a queda de pressão geral) variem em apenas alguns pontos percentuais à medida que a malha é refinada, *detalhes* do campo de escoamento (como os contornos de velocidade mostrados aqui) variam consideravelmente com a resolução da malha. É possível ver que à medida que a malha é refinada continuamente, as formas dos contornos de velocidade axial tornam-se mais suaves e mais bem definidas. As maiores diferenças nas formas de contorno ocorrem perto da parede do tubo.

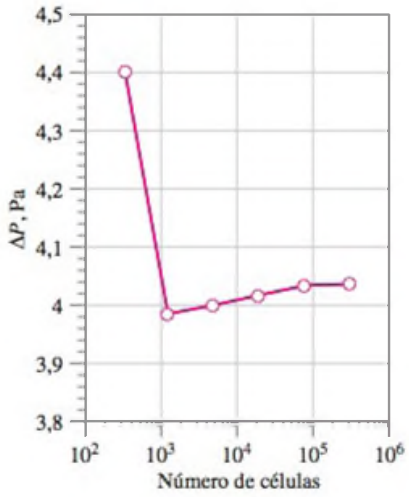


FIGURA 15–30
Queda de pressão calculada de $x/D = 1$ a 20 na região de escoamento de entrada do escoamento de tubo axissimétrico como função do número de células.

Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular em Re = 150

Para ilustrar que os resultados CFD confiáveis exigem a formulação correta do problema, considere o problema aparentemente simples do escoamento permanente,

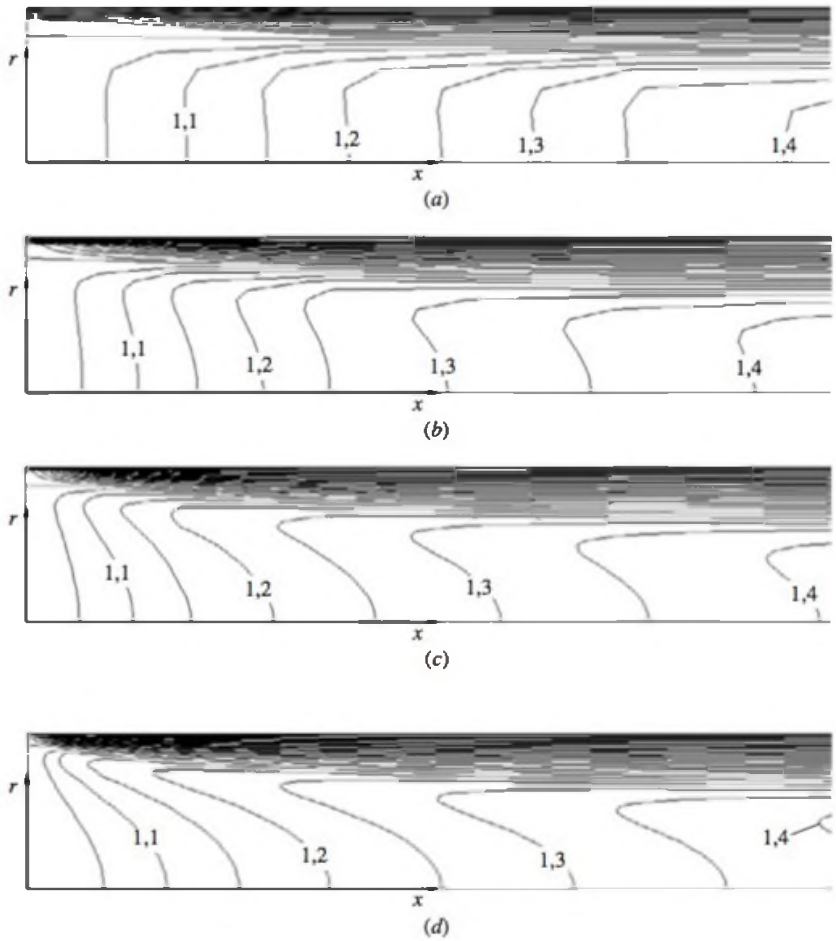


FIGURA 15–31
Contornos da velocidade axial normalizada (u/V) para o exemplo de escoamento em tubo laminar. Uma visão detalhada da região de entrada do tubo para cada uma das quatro primeiras malhas é mostrada: (*a*) muito grosseiras (40 × 8), (*b*) grosseiras (80 × 16), (*c*) médias (160 × 32) e (*d*) finas (320 × 64).

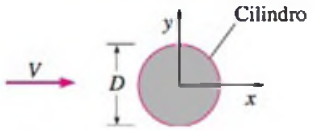


FIGURA 15–32
Escoamento de fluido à velocidade de corrente livre V em um cilindro circular bidimensional de diâmetro D.

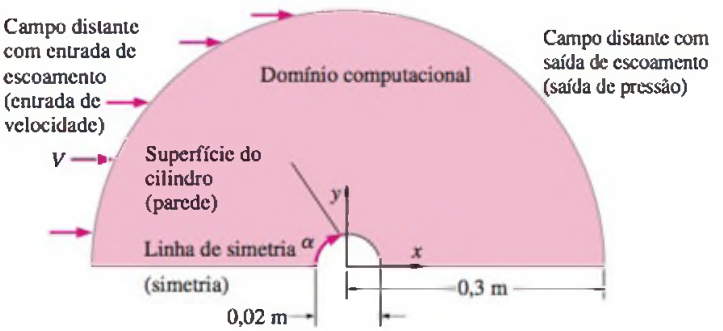
incompressível e bidimensional ao redor de um cilindro circular de diâmetro $D = 2{,}0$ cm (Figura 15–32). Os dois domínios computacionais bidimensionais desta simulação estão representados na Figura 15–33. Apenas a metade superior do campo de escoamento é solucionada, devido à simetria ao longo da parte inferior do domínio computacional; uma condição de contorno de simetria é especificada ao longo desse lado para garantir que nenhum escoamento cruze o plano de simetria. Com essa condição de contorno imposta, o tamanho do domínio computacional necessário é reduzido por um fator 2. Uma condição de contorno de parede sem escorregamento e fixa é aplicada à superfície cilíndrica. A metade esquerda do lado externo do campo distante do domínio tem uma condição de contorno de entrada de velocidade, na qual os componentes da velocidade $u = V$ e $v = 0$ são especificados. Uma condição de contorno de saída de pressão é especificada ao longo da metade direita do lado externo do domínio. (A pressão manométrica é definida como zero, mas como o campo de velocidade de um código CFD incompressível depende apenas das *diferenças* de pressão, e não do valor absoluto da pressão, o valor da pressão especificado para a condição de contorno de saída de pressão é irrelevante.)

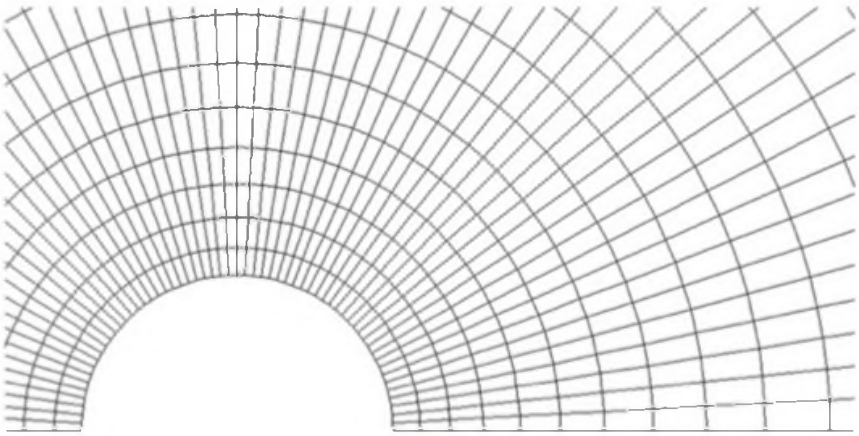
Três malhas estruturadas bidimensionais são geradas para comparação: *grosseiras* (30 intervalos radiais × 60 intervalos ao longo da superfície cilíndrica = 1.800 células), *médias* (60 × 120 = 7.200 células) e *finas* (120 × 240 = 28.800 células), como pode ser visto na Figura 15–34. Observe que apenas uma pequena parte do domínio computacional é mostrada aqui; o domínio total se estende a 15 diâmetros do cilindro para fora da origem, e as células ficam progressivamente maiores ao se distanciarem do cilindro.

Aplicamos um escoamento de corrente livre de ar a uma temperatura de 25°C, à pressão atmosférica padrão, e à velocidade $V = 0{,}1096$ m/s da esquerda para a direita em torno desse cilindro circular. O número de Reynolds do escoamento, com base no diâmetro do cilindro ($D = 2{,}0$ cm), portanto, é $\text{Re} = \rho VD/\mu = 150$. Experimentos com esse número de Reynolds revelam que a camada limite é laminar e se separa quase a 10° *antes* da parte superior do cilindro, a $\alpha \cong 82°$ do ponto de estagnação frontal. A esteira também permanece laminar. Os valores experimentalmente medidos do coeficiente de arrasto desse número de Reynolds mostram grande discrepância com a literatura; o intervalo vai de $C_D \cong 1{,}1$ até 1,4, e as diferenças devem-se muito provavelmente à qualidade dos efeitos da corrente livre e tridimensionais (desprendimento de vórtice oblíquo etc.). (Lembre-se de que $C_D = 2F_D/\rho V^2 A$, onde A é a área frontal do cilindro e $A = D$ vezes a extensão do cilindro, considerada unidade de comprimento em um cálculo bidimensional do CFD.)

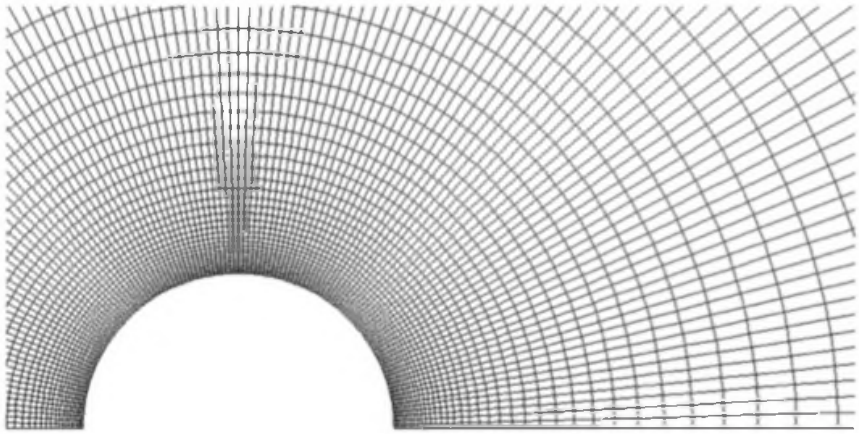
As soluções CFD são obtidas para cada uma das três malhas mostradas na Figura 15–34, considerando o escoamento laminar permanente. Todos os três casos convergem sem problemas, mas os resultados não correspondem necessariamente com a intuição física ou com os dados experimentais. As linhas de corrente são mostradas na Figura 15–35 para as três resoluções de malha. Em todos os casos, a imagem é espelhada com relação à linha de simetria, de modo que embora apenas a metade superior do campo de escoamento seja solucionada, o campo de escoamento completo é exibido.

FIGURA 15–33
Domínio computacional (região sombreada em azul-claro) usado para simular o escoamento bidimensional permanente em um cilindro circular (fora de escala). Considera-se que o escoamento seja simétrico com relação ao eixo x. As condições de contorno aplicadas são mostradas para cada aresta entre parênteses. Definimos também α, o ângulo medido ao longo da superfície cilíndrica do ponto de estagnação frontal.

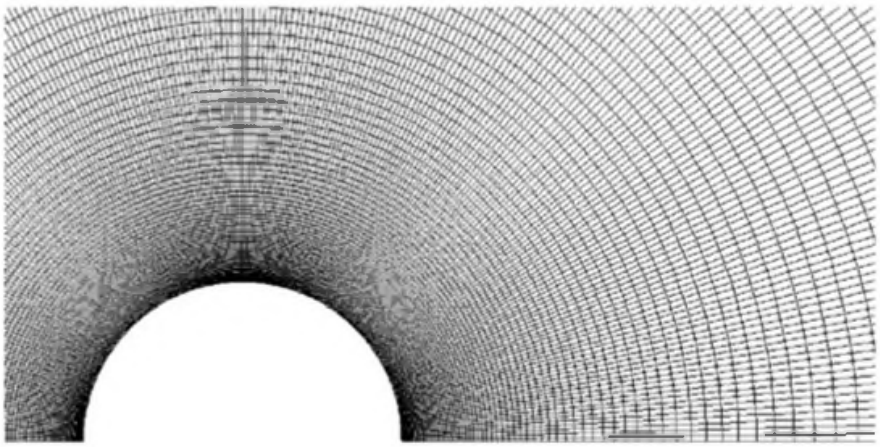




(*a*)



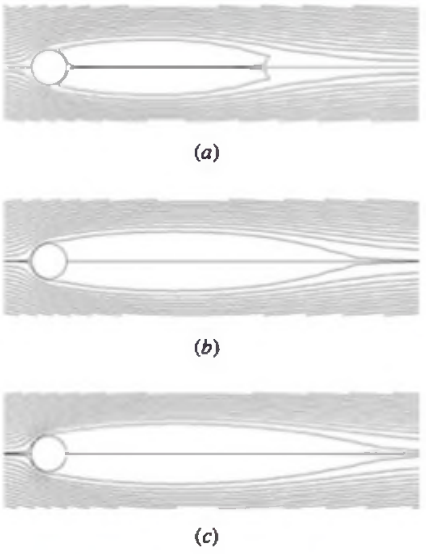
(*b*)



(*c*)

FIGURA 15–34
Malhas bidimensionais estruturadas em torno da metade superior de um cilindro circular: (*a*) grosseiras (30 × 60), (*b*) médias (60 × 120) e (*c*) finas (120 × 240). A aresta inferior é uma linha de simetria. Apenas parte de cada domínio computacional é mostrada — o domínio se estende bem além da parte aqui mostrada.

Para o caso de resolução de malha grosseira (Figura 15–35*a*), a camada limite se separa a $\alpha = 120°$, bem além da parte superior do cilindro e C_D é 1,00. A camada limite não está suficientemente bem resolvida para resultar no ponto de separação de camada limite adequado, e o arrasto de certa forma é menor do que deveria ser. Duas bolhas de separação grandes com giro contrário são vistas na esteira; elas se esticam vários diâmetros de cilindro a jusante. Para o caso da resolução média (Figura 15–35*b*), o campo de escoamento é significativamente diferente. A camada limite separa-se um pouco mais a montante em $\alpha = 110°$, que está muito mais alinhado com os resultados experimentais, mas C_D diminuiu para cerca de 0,982 — muito longe do valor experimental. As bolhas de separação da esteira



(*a*)

(*b*)

(*c*)

FIGURA 15–35
As linhas de corrente produzidas pelos cálculos CFD no estado permanente do escoamento em um cilindro circular em Re = 150: (*a*) malha grosseira (30 × 60), (*b*) malha média (60 × 120) e (*c*) malha fina (120 × 240). Observe que apenas a metade superior do escoamento é calculada — a metade inferior é exibida como uma imagem-espelho da parte superior.

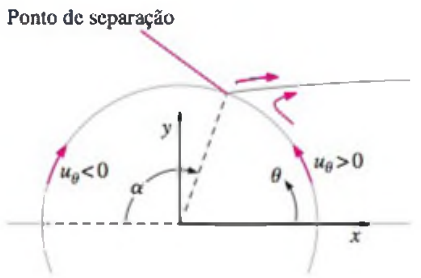


FIGURA 15–36
O traçado de curva do componente de velocidade tangencial u_θ para escoamento em um cilindro circular a Re = 150 e para o caso da resolução de malha média (60 × 120). Os valores do intervalo $-10^{-4} < u_\theta < 10^{-4}$ m/s são traçados para revelar o local exato da separação da camada limite, ou seja, onde u_θ muda o sinal apenas fora da parede do cilindro, como foi representado. Neste caso, o escoamento se separa em $\alpha = 110°$.

do cilindro ficaram muito maiores do que aquelas do caso da malha grosseira. Uma malha mais refinada melhora os resultados numéricos? A Figura 15–35*c* mostra linhas de corrente para o caso de resolução fina. Os resultados parecem qualitativamente semelhantes àqueles do caso de resolução média, com $\alpha = 109°$, mas o coeficiente de arrasto é menor ainda ($C_D = 0{,}977$), e as bolhas de separação são mais longas ainda. Um quarto cálculo (não mostrado aqui) com resolução de malha mais fina ainda mostra a mesma tendência — as bolhas de separação se esticam a jusante e o coeficiente de arrasto diminui um pouco.

A Figura 15–36 mostra uma representação gráfica de curva do componente de velocidade tangencial (u_θ) para o caso da resolução média. Nós traçamos valores de u_θ em um intervalo muito pequeno em torno de zero, para vermos claramente onde o escoamento muda de direção ao longo do cilindro. Essa é uma maneira inteligente de localizar o ponto de separação ao longo de uma parede de cilindro. Observe que isso funciona apenas para um cilindro circular por causa de sua geometria exclusiva. Um modo mais geral de determinar o ponto de separação é identificar o ponto ao longo da parede, no qual a tensão de cisalhamento τ_w é zero; essa técnica funciona para corpos de qualquer forma. Na Figura 15–36, vemos que a camada limite separa-se a um ângulo $\alpha = 110°$ do ponto de estagnação frontal, muito além a jusante do que o valor obtido experimentalmente de 82°. Na verdade, todos os nossos resultados CFD prevêem a separação da camada limite no lado *traseiro* e não no lado frontal do cilindro.

Esses resultados CFD não são físicos — as bolhas de separação alongadas não permaneceriam estáveis em uma situação real de escoamento, o ponto de separação está muito longe a jusante, e o coeficiente de arrasto é muito baixo comparado aos dados experimentais. Além disso, o refinamento repetido de malha *não* leva a melhores resultados como seria de esperar; ao contrário, *os resultados ficam piores com o refinamento da malha*. Por que as simulações do CFD e o experimento não coincidem? A resposta tem duas partes:

1. Nós forçamos a solução CFD a ser estável, quando na verdade o escoamento sobre um cilindro circular com esse número de Reynolds *não* é estável. Os experimentos mostram que uma **esteira de vórtices periódica de Kármán** forma-se atrás do cilindro (Tritton, 1977; consulte também a Figura 4–25 deste livro.)
2. Todos os três casos da Figura 15–35 são solucionados apenas para a metade superior do plano, e a simetria é implantada com relação ao eixo *x*. Na verdade, o escoamento em um cilindro circular é altamente não simétrico; os vórtices são derramados alternadamente das partes superior e inferior do cilindro, formando o vórtice alternado de Kármán.

Para corrigirmos ambos esses problemas, precisamos realizar uma simulação CFD *temporária* com uma malha *completa* (partes superior e inferior) — sem impor a condição de simetria. Realizamos a simulação como um escoamento laminar bidimensional não permanente, usando o domínio computacional representado na Figura 15–37. As arestas superior e inferior (campo distante) são especificados como um par de condições de contorno periódicas, para que as oscilações não simétricas da esteira não sejam suprimidas (o escoamento pode cruzar essas fronteiras se necessário). As fronteiras do campo distante também estão muito longe (75 a 200 diâmetros do cilindro), de modo que seus efeitos sobre os cálculos são insignificantes.

A malha perto do cilindro é muito fina para resolver a camada limite. A malha também é fina na região da esteira para resolver os vórtices derramados à medida que eles percorrem uma trajetória a jusante. Nesta simulação em particular, usamos uma malha híbrida parecida com aquela da Figura 15–14. O fluido é o ar, o diâmetro do cilindro é 1,0 m, e a velocidade do ar da corrente livre é definida como 0,00219 m/s. Esses valores produzem um número de Reynolds de 150 com base no diâmetro do cilindro. Observe que o número de Reynolds é o parâmetro importante deste problema — as opções *D*, *V*, e o tipo de fluido não são críticos, desde que produzam o número de Reynolds desejado (Figura 15–38).

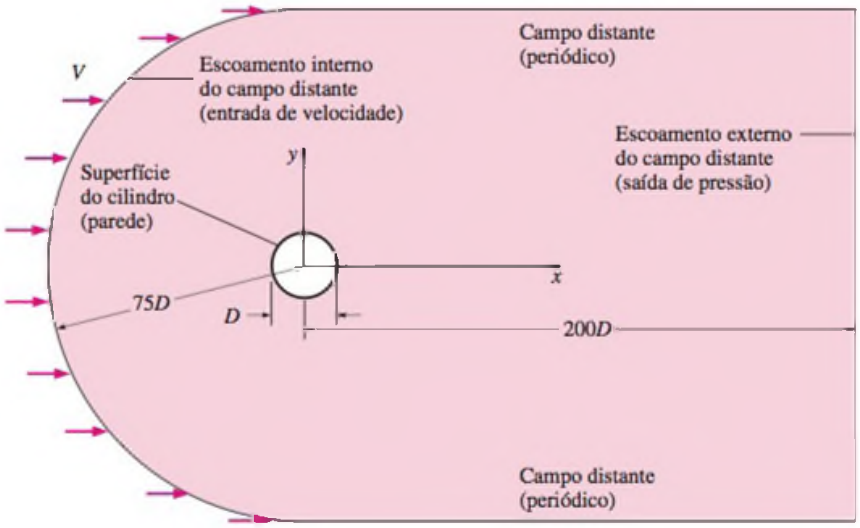


FIGURA 15–37
Domínio computacional (região sombreada de azul-claro) utilizado para simular o escoamento laminar, bidimensional e não permanente em um cilindro circular (fora de escala). As condições de contorno aplicadas estão entre parênteses.

Ao avançarmos no tempo, pequenas faltas de uniformidade no campo de escoamento aumentam, e o escoamento torna-se não permanente e anti-simétrico com relação ao eixo x. Um vórtice alternado de Kármán forma-se naturalmente. Após tempo de CPU suficiente, o escoamento simulado se estabiliza em um padrão de desprendimento de vórtice periódico, de forma muito parecida com o escoamento real. Uma representação gráfica de curva da vorticidade em determinado momento é mostrada na Figura 15–39, juntamente com uma foto mostrando as linhas de emissão do mesmo escoamento obtidas experimentalmente em um túnel de vento. Fica claro pela simulação CFD que os vórtices de Kármán diminuem a jusante, uma vez que a magnitude da vorticidade dos vórtices diminui com a distância a jusante. Essa diminuição é parcialmente física (viscosa) e parcialmente artificial (dissipação numérica). No entanto, experimentos físicos verificam o decaimento dos vórtices de Kármán. A queda não é tão óbvia na figura das linhas de emissão (Figura 15–39*b*); isso se deve à propriedade de integração de tempo das linhas de emissão, como foi indicado no Capítulo 4. Uma visão detalhada do desprendimento dos vórtices do cilindro em determinado momento é mostrada na Figura 15–40, novamente com uma comparação entre os resultados CFD e os resultados experimentais — desta vez de experimentos em um canal de água. O site na Internet deste livro oferece uma versão animada e colorida da Figura 15–40, para que você possa observar o processo dinâmico do desprendimento de vórtice.

Número de Reynolds é definido como

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu}$$

para escoamento em uma velocidade de corrente livre V sobre um cilindro circular de diâmetro D em um fluido de densidade ρ e viscosidade dinâmica μ (viscosidade cinemática ν).

FIGURA 15–38
Em uma simulação CFD incompressível do escoamento em torno de um cilindro, a escolha da velocidade da corrente livre, do diâmetro do cilindro ou mesmo do tipo de fluido não é crítica, desde que o número de Reynolds seja atingido.

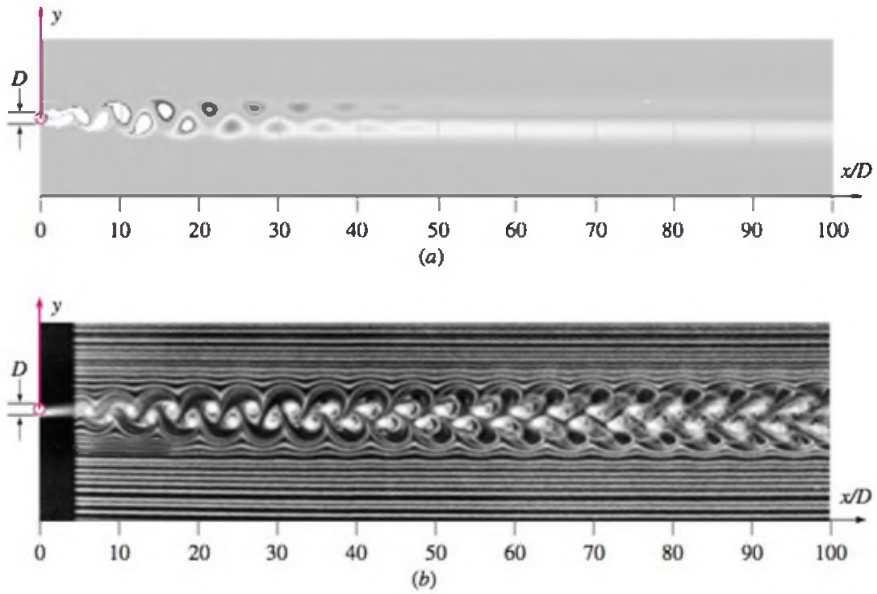


FIGURA 15–39
O escoamento laminar na esteira de um cilindro circular a Re ≅ 150: (*a*) um instantâneo das curves de vorticidade produzidas pela CFD e (*b*) as linhas de emissão integradas por tempo produzidas por um fio de fumaça localizado em $x/D = 5$. As curvas de vorticidade mostram que os vórtices de Kármán diminuem rapidamente na esteira, enquanto as linhas de emissão conservam uma "memória" de seu histórico a montante, fazendo com que os vórtices pareçam continuar por uma grande distância a jusante.
Foto de Cimbala et al., 1988.

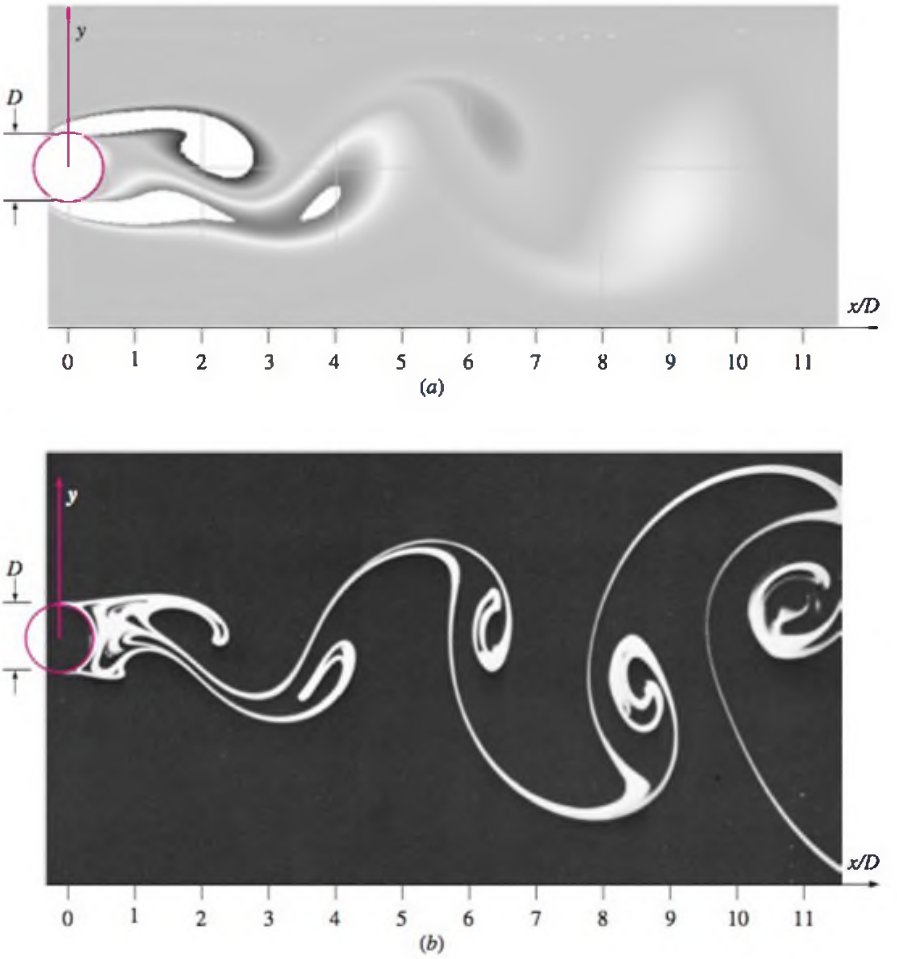


FIGURA 15–40
Vista detalhada do desprendimento de vórtices de um cilindro circular: (*a*) traçado da curva de vorticidade instantânea produzida pela CFD a Re = 150 e (*b*) linhas de emissão de tinta produzidas por tinta introduzida na superfície do cilindro a Re = 140. Uma versão animada dessa figura do CFD está disponível no site na Internet deste livro.

Foto (b) reimpressa com permissão de Sadatoshi Taneda.

TABELA 15–2

Comparação entre os resultados CFD e experimentais para o escoamento laminar não estacionário em um cilindro circular a Re = 150*

	C_D	St
Experimento	1,1 a 1,4	0,18
CFD	1,14	0,16

* A principal causa de desacordo muito provavelmente deve-se aos efeitos tridimensionais, em vez da resolução de malha ou da questão numérica.

Comparamos os resultados da CFD com os resultados experimentais da Tabela 15–2. O coeficiente de arrasto com média de tempo do cilindro é 1,14. Como já foi mencionado, os valores experimentais de C_D neste número de Reynolds variam de cerca de 1,1 até 1,4 e, portanto, a coincidência está dentro da dispersão experimental. Observe que esta simulação é bidimensional, inibindo qualquer tipo de desprendimento de vórtice oblíquo ou outras faltas de uniformidade tridimensional. Esse pode ser o motivo pelo qual nosso coeficiente de arrasto calculado está no lado inferior do intervalo experimental reportado. O número de Strouhal do vórtice alternado de Kármán é definido como

Número de Strouhal:
$$\mathrm{St} = \frac{f_{\text{desprendimento}} D}{V} \tag{15–4}$$

onde $f_{\text{desprendimento}}$ é a freqüência de desprendimento do vórtice alternado. De nossa simulação CFD, calculamos St = 0,16. O valor obtido experimentalmente do número de Strouhal neste número de Reynolds é de cerca de 0,18 (Williamson, 1989), de modo que a comparação é razoável, embora os resultados da CFD sejam um pouco baixos comparados ao experimento. Talvez uma malha mais fina ajudasse um pouco, mas o principal motivo para a discrepância muito provavelmente é devido a efeitos tridimensionais inevitáveis dos experimentos, que não estão presentes nessas simulações bidimensionais. Em geral esta simulação CFD é um sucesso, uma vez que captura todos os principais fenômenos físicos no campo de escoamento.

Este exercício com o escoamento laminar "simples" em um cilindro circular demonstrou algumas das capacidades da CFD, mas também revelou vários aspectos da CFD com relação aos quais é preciso tomar cuidado. Uma resolução de malha ruim pode levar a soluções incorretas, particularmente com relação à separação da camada limite, mas o refinamento contínuo da malha não leva a resultados mais

corretos fisicamente se as condições de contorno não forem definidas apropriadamente (Figura 15–41). Por exemplo, a simetria de escoamento numérica forçada nem sempre é sólida, mesmo nos casos em que a geometria física é totalmente simétrica.

A geometria simétrica não garante o escoamento simétrico.

Além disso, o escoamento permanente forçado pode trazer resultados incorretos quando o escoamento é inerentemente instável e/ou oscilatório. Da mesma forma, a bidimensionalidade forçada pode trazer resultados incorretos quando o escoamento é inerentemente tridimensional.

Como então podemos garantir que um cálculo CFD laminar esteja correto? Apenas por meio do estudo sistemático dos efeitos do tamanho do domínio computacional, da resolução de malha, das condições de contorno, do regime do escoamento (permanente ou não permanente, 2-D ou 3-D etc.), juntamente com a validação experimental. Assim como na maioria das outras áreas da engenharia, a *experiência* é fundamental.

FIGURA 15–41
Uma resolução de malha ruim pode levar a resultados incorretos da CFD, mas uma malha mais fina não garante uma solução fisicamente mais correta. Se as condições de contorno não forem especificadas adequadamente, os resultados podem ser não físicos, independentemente da resolução da malha.

15–3 • CÁLCULOS CFD TURBULENTOS

As simulações CFD do escoamento turbulento são muito mais difíceis do que aquelas do escoamento laminar, mesmo nos casos em que o campo de escoamento é permanente na média (os estatísticos se referem a essa condição como **estacionária**). O motivo é que as características de menor escala do campo de escoamento turbulento *sempre* são temporárias e tridimensionais — as estruturas de vórtice, de turbilhão e aleatórias chamadas de **vórtices turbulentos** de todas as orientações surgem em um escoamento turbulento (Figura 15–42). Alguns cálculos CFD utilizam uma técnica chamada de **simulação numérica direta (DNS)**, na qual se tenta resolver o movimento não estacionário de *todas* as escalas do escoamento turbulento. Entretanto, a diferença de tamanho e a diferença da escala de tempo entre os vórtices maiores e menores podem ter várias ordens de magnitude ($L >> \eta$ na Figura 15–42). Além disso, essas diferenças aumentam com o número de Reynolds (Tennekes e Lumley, 1972), tornando os cálculos DNS de escoamentos turbulentos mais difíceis ainda à medida que o número de Reynolds aumenta. As soluções DNS exigem malhas extremamente finas, totalmente tridimensionais, computadores grandes e uma quantidade enorme de tempo de CPU. Com os computadores atuais, os resultados do DNS ainda não são possíveis para escoamentos práticos, turbulentos e com números de Reynolds altos e que tenham interesse para a engenharia, como o escoamento em um avião em escala completa. Não se espera que essa situação mude nas próximas décadas, mesmo que a taxa fantástica de aperfeiçoamentos de computadores continue no ritmo atual.

Assim, achamos que é necessário criar algumas hipóteses de simplificação para simular campos de escoamento complexos, com números de Reynolds altos e turbulentos. O próximo nível abaixo do DNS é a **simulação das grandes escalas (LES)**. Com essa técnica, os grandes recursos não permanentes dos vórtices turbulentos são resolvidos, enquanto os vórtices turbulentos dissipativos em pequena escala são *modelados* (Figura 15–43). A hipótese básica é que os vórtices turbulentos menores são **isotrópicos**; ou seja, considera-se que os vórtices pequenos não dependem da orientação do sistema de coordenadas e sempre se comportam de forma estatisticamente similar e previsível, independentemente do campo de escoamento turbulento. O LES exige recursos de computador significativamente menores do que o DNS, porque eliminamos a necessidade de resolver os vórtices menores do campo de escoamento. Apesar disso, os requisitos de computador para a análise de engenharia prática e o projeto ainda são enormes mesmo usando a tecnologia atual. Maiores discussões sobre o DNS e o LES estão além do escopo deste texto, mas essas são as áreas nas quais a pesquisa está mais atualizada.

O próximo nível mais baixo de sofisticação é modelar *todos* os vórtices turbulentos não permanentes com algum tipo de **modelo de turbulência**. Não tentamos

FIGURA 15–42
Todos os escoamentos turbulentos, até mesmo aqueles que são estáveis na média (*fixos*), contêm *vórtices turbulentos* tridimensionais e não permanentes de diversos tamanhos. A figura mostra o perfil de velocidade média e alguns dos vórtices; os vórtices turbulentos menores (*tamanho* η) são ordens de magnitude menores do que os vortices turbulentos maiores (*tamanho L*). A *simulação numérica direta* (DNS) é uma técnica CFD que simula todos os vórtices turbulentos relevantes do escoamento.

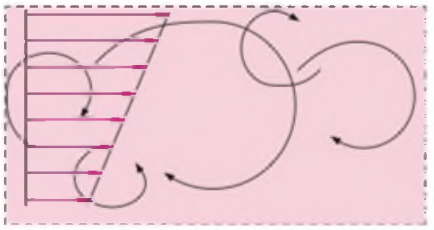


FIGURA 15–43
A *simulação de vórtices grandes* (LES) é uma simplificação da simulação numérica direta na qual apenas os vórtices turbulentos grandes são resolvidos — os vórtices pequenos são *modelados*, reduzindo significativamente os requisitos de computador. A figura mostra o perfil de velocidade media e os vórtices resolvidos.

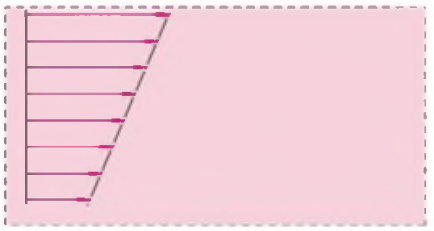


FIGURA 15–44
Quando um *modelo de turbulência* é usado em um cálculo do CFD, *todos* os vórtices turbulentos são modelados, e apenas as propriedades de escoamento médias de Reynolds são calculadas. A figura mostra o perfil de velocidade média. *Não* existem vortices turbulentos resolvidos.

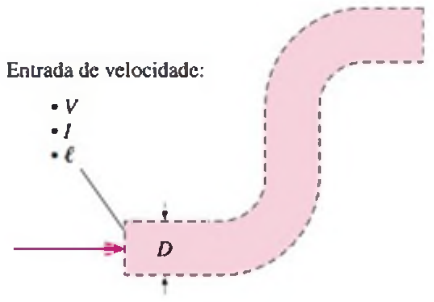


FIGURA 15–45
Uma regra útil para as propriedades de turbulência a uma condição de contorno de entrada de pressão ou de velocidade é especificar uma densidade de turbulência de 10% e uma escala de comprimento turbulento de metade de alguma escala de comprimento característica do problema ($\ell = D/2$).

resolver os recursos não permanentes de *nenhum* vórtice turbulento, nem mesmo dos maiores (Figura 15–44). Em vez disso, os modelos matemáticos são empregados para levar em conta a combinação aperfeiçoada e a difusão causada por vórtices turbulentos. Por questões de simplicidade, consideramos apenas o escoamento incompressível e permanente (ou seja, *estacionário*). Ao utilizar um modelo de turbulência, a equação de Navier–Stokes permanente (Equação 15–2) é substituída por aquilo que é chamado de equação **de Navier–Stokes média de Reynolds (RANS)**, mostrada aqui para o escoamento permanente (estacionário), incompressível e turbulento

$$\textit{Equação de RANS permanente:}\quad (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' + \nu\nabla^2\vec{V} + \vec{\nabla}\cdot(\tau_{ij,\,\text{turbulento}}) \qquad (15\text{–}5)$$

Comparada à Equação 15–2, existe um termo adicional no lado direito da Equação 15–5 que considera as flutuações turbulentas. $\tau_{ij,\,\text{turbulento}}$ é um tensor conhecido como o **tensor de tensão específico de Reynolds**, que recebeu esse nome porque age de modo semelhante ao tensor de tensão viscosa τ_{ij} (Capítulo 9). Em coordenadas cartesianas, $\tau_{ij,\text{turbulento}}$ é

$$\tau_{ij,\text{turbulento}} = -\begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \qquad (15\text{–}6)$$

onde a barra superior indica a média de tempo do produto de dois componentes de velocidade flutuante e os números primos indicam os componentes da velocidade flutuante. Como a tensão de Reynolds é simétrica, seis incógnitas adicionais são introduzidas no problema. Essas novas incógnitas são modeladas de várias maneiras pelos modelos de turbulência Uma descrição detalhada dos modelos de turbulência está além do escopo deste livro; você deve consultar Wilcox (1998) ou Chen e Jaw (1998) para obter maiores detalhes.

Existem muitos modelos de turbulência em uso hoje em dia, incluindo modelos algébricos, equação de um, equação de dois e modelos de tensão de Reynolds. Três dos modelos de turbulência mais conhecidos são o modelo k-ε, o modelo k-ω e o modelo q-ω. Esses chamados **modelos de turbulência de duas equações** adicionam outras duas equações de transporte, as quais devem ser resolvidas simultaneamente com as equações de massa e do momento linear (e também da energia caso esta equação seja utilizada). Juntamente com as duas equações de transporte adicionais que devem ser solucionadas quando se usa o modelo de turbulência de duas equações, duas *condições de contorno* adicionais devem ser especificadas para as propriedades de turbulência nas entradas e nas saídas. (Observe que as propriedades especificadas nas saídas não são usadas, a menos que o escoamento reverso seja encontrado na saída.) Por exemplo, no modelo k-ε você pode especificar k (**energia cinética turbulenta**) e ε (**taxa de dissipação turbulenta**). Entretanto, os valores apropriados dessas variáveis nem sempre são conhecidos. Uma opção mais útil é especificar a **intensidade da turbulência** I (relação entre a velocidade de vórtice turbulenta e a velocidade de corrente livre ou alguma outra característica ou velocidade média) e a **escala de comprimento turbulento** ℓ (a escala de comprimento característica dos vórtices turbulentos que contêm a energia). Se os dados detalhados da turbulência não estiverem disponíveis, uma boa regra prática nas entradas é definir I como 10% e definir ℓ como metade da escala de comprimento característica no campo de escoamento (Figura 15–45).

Enfatizamos que os modelos de turbulência são *aproximações* que dependem bastante de constantes empíricas para o fechamento matemático das equações. Os modelos são calibrados com o auxílio de simulação numérica direta e dados experimentais obtidos de campos de escoamento simples, como camadas limites de placa plana, camadas de cisalhamento e queda isotrópica da turbulência a jusante das telas. Infelizmente, nenhum modelo de turbulência é **universal**. Isso significa que embora o modelo funcione bem para escoamentos semelhantes àqueles utilizados para a calibração, não é garantido que ele resulte em uma solução fisicamente cor-

reta quando aplicado a campos de escoamento turbulento geral, particularmente aqueles que envolvem a separação de escoamento e o recolamento e/ou transitoriedade em grande escala.

As soluções CFD para o escoamento turbulento são tão boas quanto à adequação e validade do modelo de turbulência utilizado nos cálculos.

Enfatizamos também que essas afirmações continuam verdadeiras, independentemente da espessura que podemos dar à malha computacional. Ao aplicarmos CFD aos escoamentos laminares, podemos aperfeiçoar a exatidão física da simulação refinando a malha. Isso *nem* sempre acontece para as análises de CFD do escoamento turbulento usando os modelos de turbulência. Embora uma malha refinada produza melhor *exatidão numérica*, e a *exatidão física* da solução sempre é limitada pela exatidão física do próprio modelo de turbulência.

Tendo em mente essas advertências, agora apresentamos exemplos mais práticos de cálculos de CFD para os campos de escoamento turbulento. Em todos os exemplos de escoamento turbulento discutidos neste capítulo, empregamos o modelo de turbulência k-ε com as funções de parede. Esse é o modelo de turbulência padrão de muitos códigos CFD comerciais como o FLUENT. Em todos os casos consideramos o escoamento permanente; nenhuma tentativa é feita de modelar os recursos não permanentes do escoamento, como o desprendimento de vórtice na esteira de um corpo rombudo. *Assume-se que o modelo de turbulência representa toda a oscilação inerente devida aos vórtices turbulentos do campo de escoamento.* Observe que os escoamentos turbulentos não permanentes também podem ser solucionados com modelos de turbulência, com o uso de esquemas de avanço de tempo (cálculos RANS não permanentes), mas apenas quando a escala de tempo da variação temporal é muito maior do que aquela dos vórtices turbulentos individuais. Por exemplo, suponhamos que você esteja calculando as forças e os momentos de um pequeno dirigível durante uma rajada de vento (Figura 15–46). Na fronteira da entrada, você imporia a velocidade do vento variável com o tempo e os níveis de turbulência, e uma solução de escoamento turbulento não permanente poderia então ser calculada usando os modelos de turbulência. As características gerais em grande escala do escoamento (separação do escoamento, forças e momentos sobre o corpo etc.) seriam não permanentes, mas as características das pequenas escalas da camada limite turbulenta, por exemplo, seria modelada pelo modelo de turbulência quase permanente.

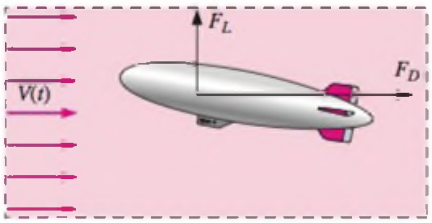


FIGURA 15–46
Embora a maioria dos cálculos CFD com modelos de turbulência seja permanente em média, também é possível calcular campos de escoamento turbulentos *não permanentes* usando modelos de turbulência. No caso do escoamento sobre um corpo, podemos impor condições de contorno não permanentes e avançar no tempo para prever as características globais do campo de escoamento não permanente.

Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular em Re = 10.000

Como nosso primeiro exemplo de uma solução CFD para o escoamento turbulento, calculamos o escoamento em um cilindro circular a Re = 10.000. Com finalidades de ilustração, usamos o mesmo domínio computacional bidimensional usado para os cálculos do escoamento em cilindro laminar, como representa a Figura 15–33. Assim como no cálculo do escoamento laminar, apenas a metade superior do campo de escoamento é solucionada aqui, devido à simetria ao longo da aresta inferior do domínio computacional. Utilizamos as mesmas três malhas usadas para o caso do escoamento laminar — resoluções grosseira, média e fina (Figura 15–34). Destacamos, porém, que as malhas criadas para os cálculos do escoamento turbulento (particularmente aquelas que empregam modelos de turbulência com funções de parede) em geral não são iguais àquelas criadas para o escoamento laminar de mesma geometria, particularmente perto de paredes.

Aplicamos um escoamento de corrente livre de ar a uma temperatura de 25°C e à velocidade V = 7,304 m/s da esquerda para a direita em torno desse cilindro circular. O número de Reynolds do escoamento, com base no diâmetro do cilindro (D = 2,0 cm) é Re = 10.000. Experimentos com esse número de Reynolds revelam que a camada limite é laminar e se separa vários graus a montante da parte superior do cilindro, (a $\alpha \cong 82°$). A esteira, porém, é turbulenta e, portanto, uma mistura de escoamento laminar e turbulento é particularmente difícil para os códi-

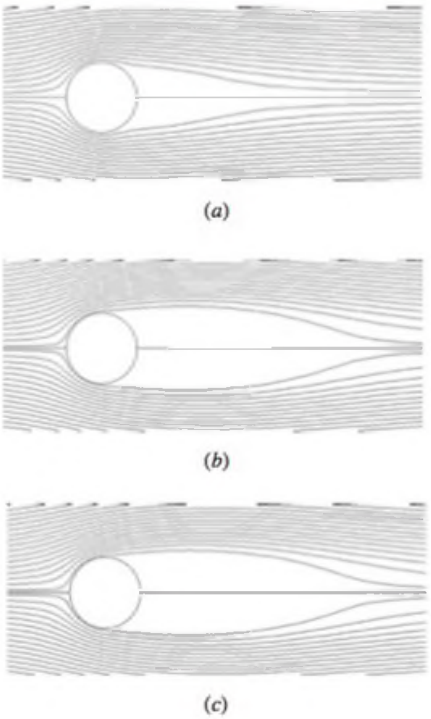


FIGURA 15–47
As linhas de corrente produzidas pelos cálculos CFD do escoamento turbulento fixo em um cilindro circular a Re = 10.000: (*a*) malha grosseira (30 × 60), (*b*) malha média (60 × 120) e (*c*) malha fina (120 × 240). Observe que apenas a metade superior do escoamento é calculada — a metade inferior é exibida como uma imagem de espelho da parte superior.

gos CFD. O coeficiente de arrasto medido a esse número de Reynolds é $C_D \cong 1{,}15$ (Tritton, 1977). As soluções CFD são obtidas para cada uma das três malhas, considerando o escoamento turbulento fixo (não permanente na média). Empregamos o modelo de turbulência k-ε com as funções de parede. O nível de turbulência na entrada é definido como 10% com uma escala de comprimento de 0,01 m (metade do diâmetro do cilindro). Todos os três casos convergem muito bem. As linhas de corrente são traçadas na Figura 15–47 para os três casos de resolução de malha. Em cada um deles, a imagem é espelhada com relação à linha de simetria, de modo que embora apenas a metade superior do campo de escoamento é solucionada, o campo de escoamento completo é visualizado.

Para o caso de resolução de malha grosseira (Figura 15–47*a*), a camada limite se separa bem depois da parte superior do cilindro a $\alpha \approx 140°$. Além disso, o coeficiente de arrasto C_D é de apenas 0,647, quase um fator 2 menor do que deveria ser. Vejamos se uma malha mais fina melhora a coincidência com os dados experimentais. Para o caso da resolução média (Figura 15–47*b*), o campo de escoamento é significativamente diferente. A camada limite separa-se próximo da parte superior do cilindro a $\alpha = 104°$, e C_D diminuiu para cerca de 0,742 — mais perto, mas ainda significativamente menos do que o valor experimental. Também observamos que os vórtices recirculantes da esteira do cilindro aumentaram de comprimento em quase um fator 2 comparados àqueles do caso da malha grosseira. A Figura 15–47*c* mostra linhas de corrente para o caso da resolução fina. Os resultados parecem muito semelhantes àqueles do caso da resolução média, e o coeficiente de arrasto aumentou apenas ligeiramente ($C_D = 0{,}753$). O ponto de separação da camada limite neste caso está a $\alpha = 102°$.

Um maior refinamento da malha (não mostrado) não altera os resultados significativamente em comparação àqueles do caso de malha fina. Em outras palavras, a malha fina parece estar suficientemente resolvida, embora os resultados não coincidam com o experimento. Por quê? Existem vários problemas com nossos cálculos: estamos modelando um escoamento permanente, embora o escoamento físico real seja não permanente; estamos implantando a simetria com relação ao eixo x, embora o escoamento físico não seja simétrico (uma esteira periódica de Kármán pode ser observada nos experimentos com esse número de Reynolds); e estamos usando um modelo de turbulência em vez de resolver todos os pequenos vórtices do escoamento turbulento. Outra fonte de erros significativa em nossos cálculos é que o código CFD é executado com a turbulência ligada, para modelar de forma pertinente a região de esteira, que é turbulenta. Entretanto, a camada limite da superfície do cilindro ainda é realmente *laminar*. O local previsto do ponto de separação a jusante da parte superior do cilindro está mais alinhado à separação da camada limite *turbulenta*, que não corre até valores muito mais altos do que o número de Reynolds (após a "crise de arrasto" a um Re maior do que 2×10^5).

O resultado é que os códigos CFD têm problemas no regime de transição entre os escoamentos laminar e turbulento, e quando há uma combinação entre o escoamento laminar e o turbulento no mesmo domínio computacional. Na verdade, a maioria dos códigos CFD permite que o usuário tenha uma opção entre laminar e turbulento — não há "meio-termo". Nos cálculos atuais, modelamos uma camada limite turbulenta, embora a camada limite física seja laminar; não é surpresa, então, que os resultados de nossos cálculos não coincidam com o experimento. Se, por outro lado, especificássemos o escoamento laminar em todo o domínio computacional, os resultados do CFD teriam sido piores ainda (menos físicos).

Existe algum modo de contornar esse problema de má exatidão física no caso de escoamento misto laminar e turbulento? Talvez. Em alguns códigos CFD você pode especificar o escoamento como laminar ou turbulento em diferentes regiões do escoamento. Mas mesmo assim, o processo de transição entre os escoamentos laminar e turbulento é meio brusco, e novamente não é fisicamente correto. Além disso, você precisaria saber com antecedência onde ocorre a transição — isso destrói a finalidade de um cálculo CFD independente para previsão do escoamento do fluido. Modelos avançados de tratamento de parede estão sendo gerados, e algum dia farão

um trabalho melhor na região de transição. Além disso, alguns novos modelos de turbulência estão em desenvolvimento. Eles estão mais bem sintonizados com a turbulência do número de Reynolds baixo.

Em resumo, não podemos modelar com exatidão o problema do escoamento laminar/turbulento misto em um cilindro circular a Re ~ 10.000 usando modelos de turbulência padrão e a equação de Navier–Stokes (RANS) com média de Reynolds. Parece que resultados precisos só podem ser obtidos com o uso de soluções DNS, LES com exatidão de tempo (RANS temporárias) que são ordens de magnitude mais exigentes em termos computacionais.

Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular em Re = 10^7

Com exemplo final de cilindro, usamos a CFD para calcular o escoamento em um cilindro circular a Re = 10^7 — bem além da crise de arrasto. O cilindro neste caso tem 1,0 m de diâmetro e o fluido é a água. A velocidade de corrente livre é 10,05 m/s. Nesse valor do número de Reynolds o valor medido experimentalmente do coeficiente de arrasto está em torno de 0,7 (Tritton, 1977). A camada limite é turbulenta no ponto de separação que ocorre em torno de 120°. Assim, não temos o problema da camada limite laminar e turbulenta mista, como no exemplo do número de Reynolds baixo — a camada limite é turbulenta em todas as partes, exceto perto do nariz do cilindro, e devemos esperar melhores resultados das previsões da CFD. Usamos uma meia malha bidimensional semelhante àquela do caso da resolução fina dos exemplos anteriores, mas a malha próxima à parede do cilindro está adaptada apropriadamente para esse número de Reynolds alto. Como antes, usamos o modelo de turbulência k-ε com as funções de parede. O nível de turbulência na entrada é definido como 10% com uma escala de comprimento de 0,5 m. Infelizmente, o coeficiente de arrasto é calculado como 0,262 — menos da metade do valor experimental com esse número de Reynolds. As linhas de corrente são mostradas na Figura 15–48. A camada limite separa-se um pouco a jusante a $\alpha = 129°$. Existem vários motivos para a discrepância. Estamos forçando o escoamento simulado a ser permanente e simétrico, enquanto o escoamento real não é nem um dos dois, devido ao desprendimento de vórtices. (Os vórtices são desprendidos a números de Reynolds altos.) Além disso, o modelo de turbulência e seu tratamento para a parede próxima (funções de parede) podem não estar capturando a física adequada do campo de escoamento. Novamente devemos concluir que resultados exatos para o escoamento em um cilindro circular só podem ser obtidos com o uso de uma malha completa e não com metade da malha, e com soluções com boa discretização temporal como RANS não permanentes, LES ou DNS, que são ordens de magnitude mais exigentes em termos computacionais.

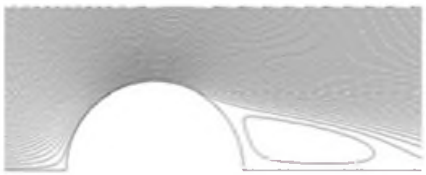


FIGURA 15–48
Linhas de corrente produzidas pelos cálculos da CFD para o escoamento turbulento fixo em um cilindro circular a Re = 10^7. Infelizmente, o coeficiente de arrasto previsto ainda não é preciso neste caso.

Projeto do Estator de um Ventilador Axial com Pás Direcionais

O próximo exemplo de CFD para escoamento turbulento envolve o projeto do estator de um ventilador axial com pás direcionais que deve ser usado em um túnel de vento. O diâmetro geral do ventilador é $D = 1{,}0$ m, e o ponto de projeto do ventilador está a uma velocidade de escoamento axial $V = 50$ m/s. As pás do estator se estendem do raio $r = r_{cubo} = 0{,}25$ m no cubo até $r = r_{ponta} = 0{,}50$ m na ponta. As pás do estator estão a montante das pás do rotor neste projeto (Figura 15–49). A forma preliminar da pá do estator selecionada tem um ângulo de bordo de fuga de $\beta_{es} = 63°$ e um comprimento de corda de 20 cm. A qualquer valor do raio r, a quantidade real de giro depende do número de pás do estator — esperamos que quanto menor for o número de pás, maior será o ângulo *médio* com o qual o escoamento é girado pelas pás do estator, por causa do maior espaçamento entre elas. Nosso objetivo é determinar o número mínimo de pás do estator necessário para que o escoamento imposto aos bordos de ataque das pás do rotor (localizadas ao comprimento de uma corda a jusante dos bordos de fuga da pá do estator) gira a um

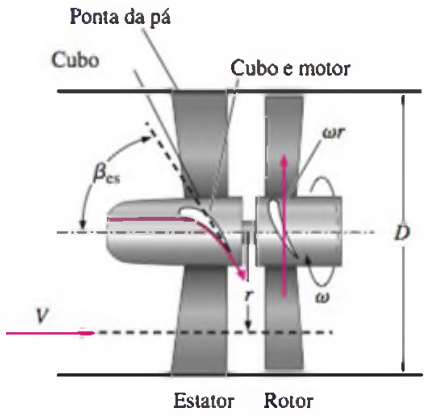


FIGURA 15–49
Diagrama esquemático do ventilador com escoamento axial por pás que está sendo projetado. O estator precede o rotor, e o escoamento através das pás do estator deve ser modelado com a CFD.

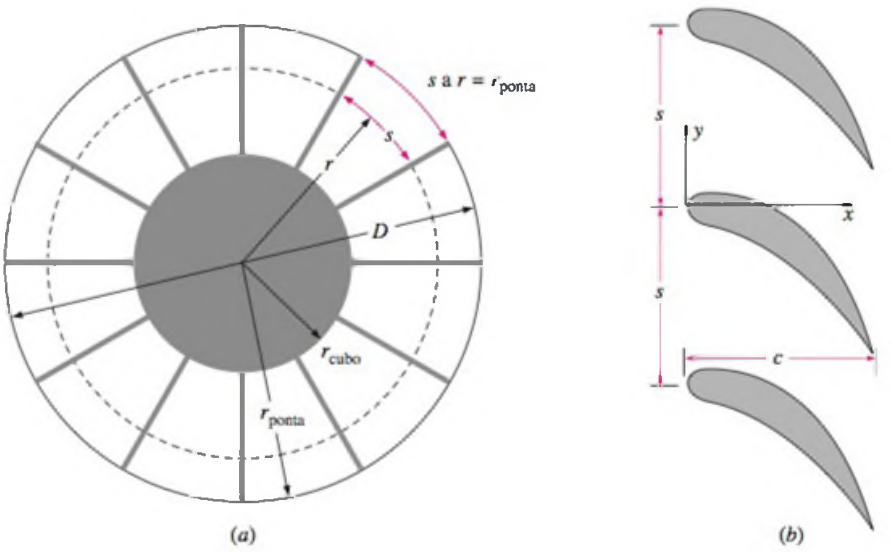


FIGURA 15–50
Definição de *espaçamento de lâmina s*: (*a*) vista frontal do estator e (*b*) o estator modelado como uma vista lateral em cascata bidimensional. Doze pás do estator radial são mostradas na vista frontal, mas o número real de pás deve ser determinado. Três pás de estator são mostradas em cascata, mas a cascata real consiste em um número infinito de pás, cada uma deslocada pelo espaçamento de pás *s*, que diminui com o raio *r*. A cascata bidimensional é uma aproximação do escoamento tridimensional a um valor de raio *r* e espaçamento de lâminas *s*. O comprimento de corda *c* é definido como o comprimento horizontal da pá do estator.

ângulo médio de pelo menos 45°. Também precisamos que não haja separação de escoamento significativa da superfície da pá do estator.

Como primeira aproximação, modelamos as pás do estator com qualquer valor desejado de *r* como uma *cascata* de pás bidimensional (consulte o Capítulo 14). Cada pá é separada pelo **espaçamento de lâmina** *s* a esse raio, como define a Figura 15–50. Nós usamos a CFD para prever o valor máximo permitido de *s*, do qual estimamos o número mínimo de pás do estator que atendem os requisitos dados no projeto.

Como o escoamento através da cascata bidimensional das pás do estator é infinitamente periódico na direção *y*, precisamos modelar apenas *uma* passagem de escoamento através das pás, especificando dois pares de condições de contorno periódicas nas partes superior e inferior do domínio computacional (Figura 15–51). Executamos seis casos, cada um deles com um valor diferente para o espaçamento de lâminas. Selecionamos s = 10, 20, 30, 40, 50 e 60 cm e geramos uma malha estruturada para cada um desses valores de espaçamento de lâmina. A malha no caso de s = 10 cm é mostrada na Figura 15–52; as outras malhas são semelhantes, mas mais intervalos são especificados na direção *y* à medida que *s* aumenta. Observe como fizemos o espaçamento de malha mais fino próximo às superfícies de pressão e sucção, para que a camada limite dessa superfície pudesse ser mais bem resolvida. Especificamos V = 50 m/s na entrada de velocidade, pressão manométrica zero e a condição de parede uniforme, sem nenhum escorregamento nas superfícies de pressão e sucção. Como estamos modelando o escoamento com um modelo de turbulência (k-ε com funções de parede), devemos também especificar as propriedades de turbulência na entrada de velocidade. Para essas simulações especificamos uma intensidade de turbulência de 10% e uma escala de comprimento de turbulência de 0,01 m (1,0 cm).

Executamos os cálculos CFD por tempo suficiente para convergir o máximo possível para todos os seis casos e plotamos as linhas de corrente da Figura 15–53 para seis espaçamentos de lâmina: s = 10, 20, 30, 40, 50 e 60 cm. Embora solucionemos o escoamento através de apenas uma passagem de escoamento, desenhamos várias passagens de escoamento em *duplicata*, empilhadas umas sobre as outras, para visualizar o campo de escoamento como uma cascata periódica. As linhas de corrente para os três primeiros casos parecem muito semelhantes a princípio, mas uma inspeção mais detalhada revela que o ângulo médio do escoamento a jusante do bordo de fuga da pá do estator *diminui* com *s*. (Nós definimos o ângulo de escoamento β com relação à direção horizontal como está representado na Figura 15–53*a*.) Da mesma forma, a lacuna (o espaço em branco) entre a parede e a linha de corrente mais próxima à superfície de sucção aumenta de tamanho à medida que *s*

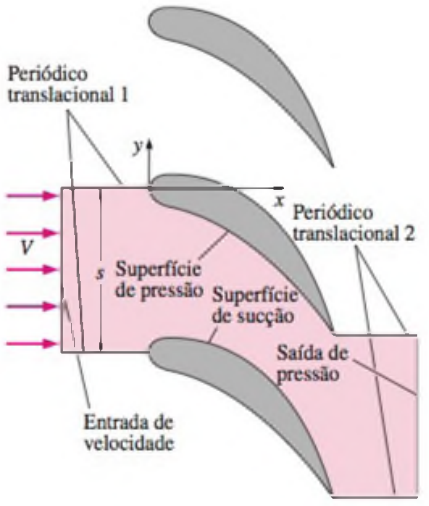


FIGURA 15–51
O domínio computacional (região sombreada em azul-claro) definida por uma passagem de escoamento através de duas pás do estator. A parede superior da passagem é a superfície de pressão e a parede inferior é a superfície de sucção. Dois pares translacionalmente periódicos são definidos: periódico 1 a montante e periódico 2 a jusante.

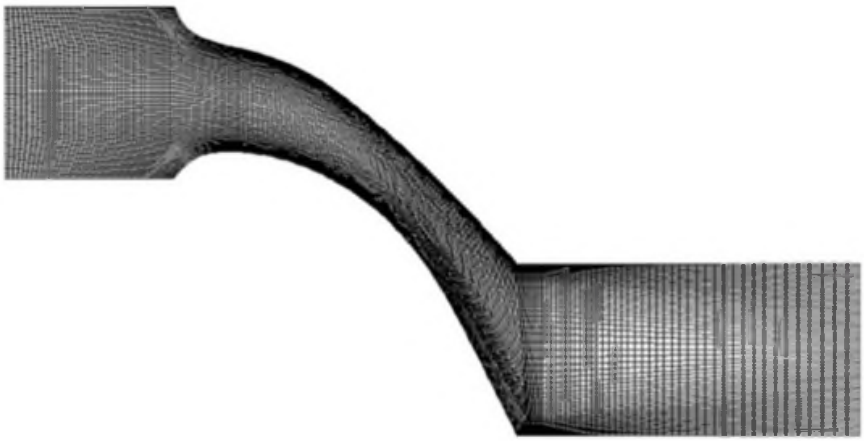


FIGURA 15–52
A malha estruturada para a cascata de pá bidimensional em cascata com espaçamento entre as lâminas de $s = 10$ cm. A região de escoamento de saída na esteira das pás é intencionalmente mais longa do que aquela na entrada para evitar o escoamento reverso na saída de pressão no caso da separação de escoamento na superfície de sucção da pá do estator. A saída está a um comprimento de corda a jusante dos bordos de fuga da pá do estator; a saída também é o local dos bordos de ataque das lâminas do rotor (não mostrado na figura).

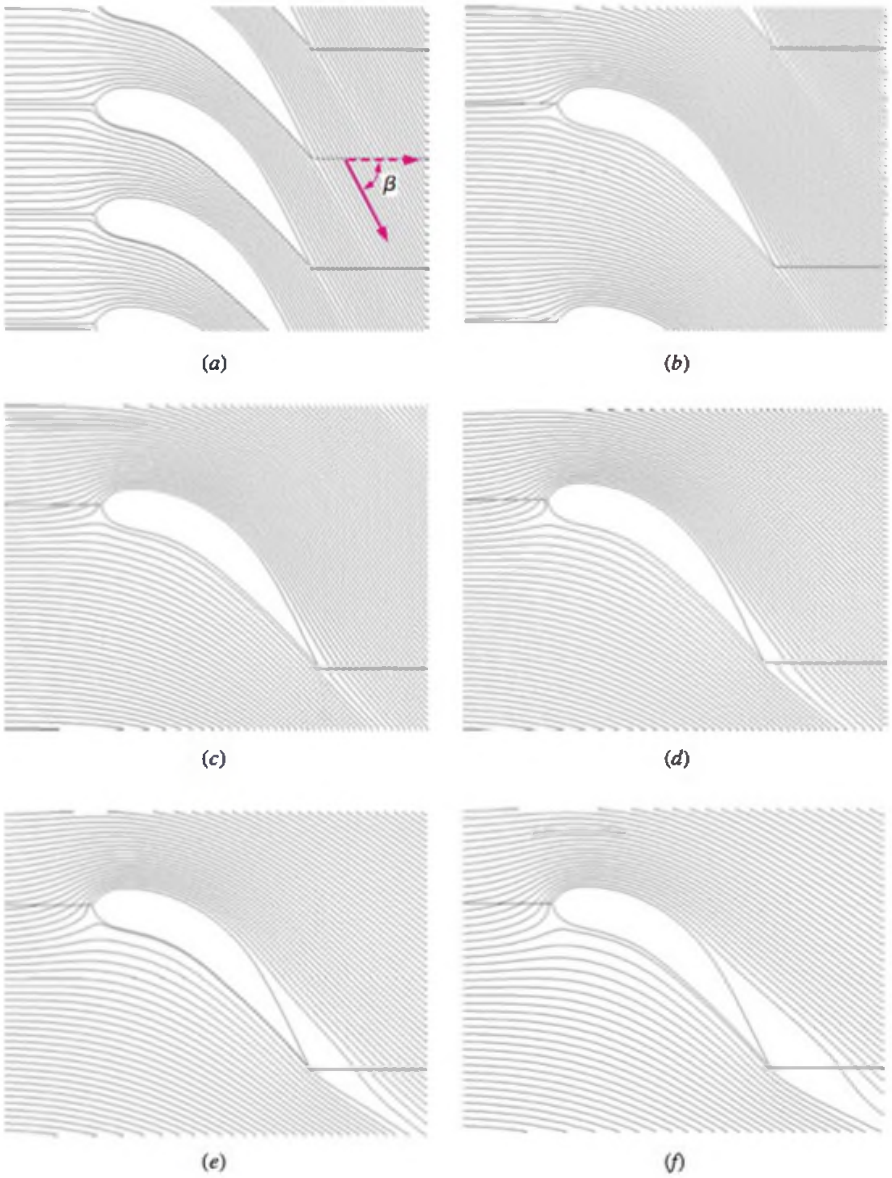


FIGURA 15–53
As linhas de corrente produzidas pelos cálculos CFD do escoamento turbulento através de uma passagem de escoamento de pá do estator: (*a*) espaçamento de pá $s = 10$, (*b*) 20, (*c*) 30, (*d*) 40, (*e*) 50 e (*f*) 60 cm. Os cálculos CFD são realizados usando o modelo de turbulência k-ε com funções de parede. O ângulo de escoamento β é definido na imagem (*a*) como o ângulo médio do escoamento, com relação à direção horizontal, a jusante do bordo de fuga da pá do estator.

aumenta, indicando que a velocidade do escoamento naquela região diminui. Na verdade, a camada limite da superfície de sucção da pá do estator deve resistir a um gradiente de pressão cada vez mais adverso (desacelerando a velocidade de escoamento e o gradiente de pressão positivo) à medida que o espaçamento de lâmina aumenta.

A um s suficientemente grande, a camada limite na superfície de sucção não pode suportar o gradiente de pressão seriamente adverso e se separa da parede. Para s = 40, 50 e 60 cm (Figura 15–53*d* a *f*), a separação de escoamento da superfície de sucção é vista claramente nessas representações gráficas de linha de corrente. Além disso, a seriedade da separação de escoamento aumenta com s. Isso não é inesperado se imaginarmos o limite como $s \to \infty$. Nesse caso, a pá do estator é isolada de seus vizinhos, e certamente esperamos uma separação de escoamento maciça, uma vez que a pá tem um grau alto de curvatura.

Listamos o ângulo de escoamento de saída médio $\beta_{méd}$, a velocidade do escoamento de saída média $V_{méd}$ e a força de arrasto prevista em uma pá de estator por unidade de profundidade F_D/b na Tabela 15–3 como função do espaçamento de lâmina s. (A profundidade b está para dentro na Figura 15–53 e é considerada 1 m em cálculos bidimensionais como estes.) Embora $\beta_{méd}$ e $V_{méd}$ diminuam continuamente com s, F_D/b primeiro se eleva até um máximo para o caso de s = 20 cm e, em seguida, diminui a partir desse valor.

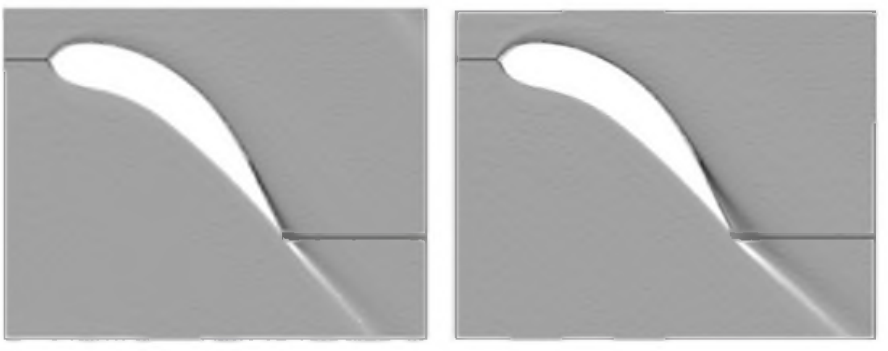
Você deve se lembrar dos critérios de projeto que foram enumerados anteriormente que o ângulo de escoamento de saída médio deve ser maior do que 45°, e não deve haver nenhuma separação de escoamento significativa. Dos nossos resultados da CFD, parece que ambos esses critérios ficam em algum lugar entre s = 30 cm e 40 cm. Obtemos um quadro melhor da separação do escoamento traçando as curvas de vorticidade (Figura 15–54). Nessas representações de curva em escala de cinza, o preto representa grande vorticidade negativa (rotação no sentido horário), o branco representa grande vorticidade positiva (rotação no sentido anti-horário) e o cinza médio é a vorticidade zero. Se a camada limite permanecer colada, esperamos que a vorticidade se concentre dentro de camadas limites finas ao longo das superfícies das pás do estator, como é o caso da Figura 15–54*a* para s = 30 cm. Se a camada limite se separar, porém, a vorticidade repentinamente se espalha para longe da superfície de sucção, como pode ser visto na Figura 15–54*b* para s = 40 cm. Esses resultados verificam se a separação de escoamento significativa ocorre em algum lugar entre s = 30 cm e 40 cm. Observe como a vorticidade está concentrada não apenas na camada limite, mas também na *esteira* em ambos os casos mostrados na Figura 15–54.

TABELA 15–3

Variação do ângulo de saída de escoamento médio $\beta_{méd}$, velocidade média de saída do escoamento $V_{méd}$ e força de arrasto prevista por unidade de profundidade F_D/b como funções do espaçamento de lâmina s*

s, cm	$\beta_{méd}$, graus	$V_{méd}$, m/s	F_D/b, N/m
10	60,8	103	554
20	56,1	89,6	722
30	49,7	77,4	694
40	43,2	68,6	612
50	37,2	62,7	538
60	32,3	59,1	489

* Todos os valores calculados estão dados com três algarismos significativos. Os cálculos CFD foram feitos usando o modelo de turbulência k-ε com funções de parede.



(*a*) (*b*)

FIGURA 15–54
As representações gráficas de curva de vorticidade produzidas pelos cálculos CFD do escoamento turbulento fixo através de uma passagem de escoamento de pá do estator: espaçamento de lâmina (*a*) s = 30 cm e (*b*) s = 40 cm. O campo de escoamento é altamente irrotacional (vorticidade zero), exceto na fina camada limite ao longo das paredes e na região de esteira. Entretanto, quando a camada limite se separa, como no caso (*b*), a vorticidade se espalha em toda a região de escoamento separada.

Finalmente, comparamos os traçados do vetor de velocidade da Figura 15–55 dos três casos: s = 20 cm, 40 cm e 60 cm. Geramos várias linhas paralelas espaçadas uniformemente no domínio computacional; cada linha é inclinada a 45° da horizontal. Em seguida, os vetores de velocidade são traçados ao longo de cada uma dessas linhas paralelas. Quando s = 20 cm (Figura 15–55*a*), a camada limite permanece anexada nas superfícies de sucção e pressão da pá do estator até o seu bordo de fuga. Quando s = 40 cm (Figura 15–55*b*), a separação de escoamento e o escoamento reverso ao longo da superfície de sucção aparecem. Quando s = 60 cm (Figura 15–55*c*), a bolha de separação e a região de escoamento reverso cresceram — essa é uma região de escoamento "morta", na qual as velocidades do ar são muito pequenas. Em todos os casos, o escoamento sobre a superfície de pressão da pá do estator permanece colado.

Quantas pás (N) representam um espaçamento de lâmina s = 30 cm? Podemos calcular N facilmente, observando que na ponta da pá ($r = r_{\text{ponta}} = D/2$ = 50 cm), onde s é maior, a circunferência disponível total (C) é

Circunferência disponível: $$C = 2\pi r_{\text{ponta}} = \pi D \qquad \textbf{(15–7)}$$

Assim, o número de pás que pode ser colocado dentro dessa circunferência com um espaçamento de pá s = 30 cm é

Número máximo de pás: $$N = \frac{C}{s} = \frac{\pi D}{s} = \frac{\pi(100\text{ cm})}{30\text{ cm}} = 10{,}5 \qquad \textbf{(15–8)}$$

Obviamente podemos ter apenas um valor inteiro de N, e concluímos de nossa análise preliminar que devemos ter pelo menos 10 ou 11 pás do estator.

Nossa aproximação do estator como uma cascata bidimensional de pás é boa? Para respondermos a essa pergunta, realizamos uma análise CFD tridimensional do estator. Aproveitamos novamente a periodicidade modelando apenas uma passagem de escoamento — uma passagem tridimensional entre duas pás do estator radial (Figura 15–56). Selecionamos N = 10 pás do estator, especificando um ângulo de periodicidade de 360/10 = 36°. Na Equação 15–8, isso representa s = 31,4 nas pontas da pá e s = 15,7 no cubo, para um valor médio de $s_{\text{méd}}$ 23,6. Geramos uma malha estruturada hexagonal em um domínio computacional ligado por uma entrada de velocidade, uma saída de escoamento de saída, uma seção da parede cilíndrica no cubo e outra na ponta, a superfície de pressão da pá, a superfície de sucção na pá e dois pares de condições de contorno periódicas. Neste caso tridimensional, as fronteiras periódicas são *rotacionalmente* periódicas, em vez de serem translacionalmente periódicas. Observe que usamos uma condição de contorno com escoamento de saída em vez de uma condição de contorno com saída de pressão, porque esperamos que o movimento de turbilhão produza uma distribuição da pressão radial na face da saída. A malha é mais fina perto das paredes do que em outra parte (como sempre), para melhor resolver a camada limite. A velocidade de entrada, o nível de turbulência, o modelo de turbulência etc. são todos iguais àqueles usados para a aproximação bidimensional. O número total de células computacionais é quase 800.000.

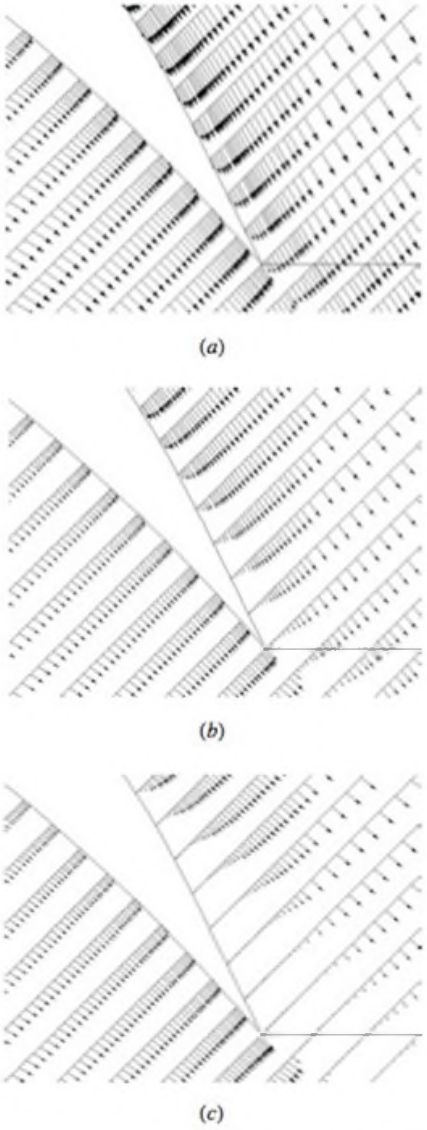


FIGURA 15–55
Os vetores de velocidade produzidos pelos cálculos CFD do escoamento turbulento através de uma passagem de escoamento de pá do estator: espaçamento da lâmina (*a*) s = 20 cm, (*b*) 40 cm e (*c*) 60 cm.

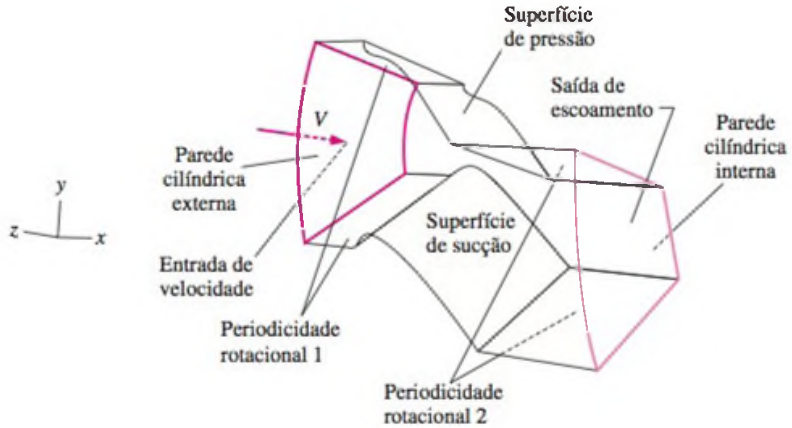


FIGURA 15–56
Domínio computacional tridimensional definido por uma passagem de escoamento através de duas pás do estator para N = 10 (ângulo entre as pás = 36°). O volume do domínio computacional é definido entre as superfícies de pressão e sucção das pás do estator, entre as paredes interna e externa do cilindro e da entrada para a saída. Dois pares de condições de contorno rotacionalmente periódicas são definidos como mostra a figura.

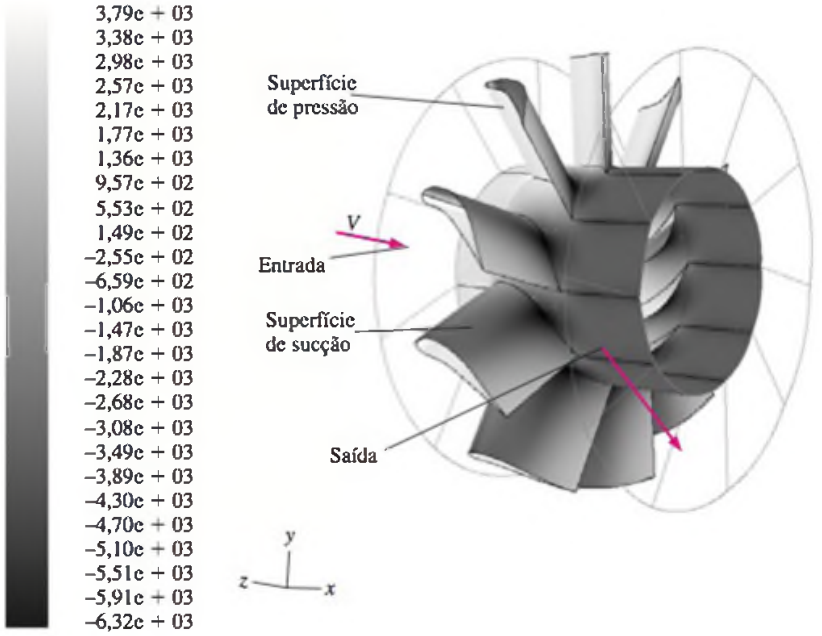


FIGURA 15–57
O traçado de contornos de pressão pelos cálculos CFD tridimensionais para o escoamento turbulento fixo através de uma passagem de escoamento de pá do estator. Agora a pressão é mostrada em N/m^2 nas superfícies da pá e na parede cilíndrica interna (o cubo). Os contornos da entrada e saída também são mostrados por questões de clareza. Embora apenas uma passagem de escoamento seja modelada nos cálculos do CFD, duplicamos a imagem circunferencialmente ao redor do eixo x nove vezes, para visualizar todo o campo de escoamento do estator. Nesta imagem de escala de cinza, as pressões altas (como nas superfícies de pressão das pás) são claras, enquanto as pressões baixas (como nas superfícies de sucção das pás, particularmente perto do cubo) são escuras.

As curvas de pressão sobre as superfícies de pá do estator e na parede cilíndrica interna são traçadas na Figura 15–57. Essa visão tem o mesmo ângulo daquela da Figura 15–56, mas nós demos zoom e duplicamos o domínio computacional nove vezes circunferencialmente com relação ao eixo de rotação (o eixo x) para um total de 10 passagens de escoamento para auxiliar a visualização do campo de escoamento. É possível ver que a pressão é mais alta (sombreado mais claro de cinza) sobre a superfície de pressão do que sobre a superfície de sucção. Também é possível ver uma queda geral na pressão ao longo da superfície do cubo de montante a jusante do estator. A variação na pressão média da entrada para a saída é calculada como 3,29 kPa.

Para comparar nossos resultados tridimensionais diretamente com a aproximação bidimensional, realizamos um caso bidimensional adicional no espaçamento de lâmina médio, $s = s_{méd} = 23{,}6$ cm. Uma comparação entre os casos bi e tridimensionais é mostrada na Tabela 15–4. Do cálculo tridimensional, a próxima força axial em uma pá do estator é $F_D = 183$ N. Comparamos isso ao valor bidimensional, convertendo em força por unidade de profundidade (força por unidade de extensão da pá do estator). Como a pá do estator abrange 0,25 m, $F_D/b = (183\text{ N})/(0{,}25\text{ m}) = 732$ N/m. O valor bidimensional correspondente da Tabela 15–4 é $F_D/b = 724$ N/m, de modo que o acerto é muito bom (≅ diferença de 1%). A velocidade média na saída do domínio tridimensional é $V_{méd} = 84{,}7$ m/s, quase idêntica ao valor bidimensional de 84,8 m/s da Tabela 15–4. A aproximação bidimensional difere em menos de 1%. Finalmente, o ângulo de escoamento de saída médio $\beta_{méd}$ obtido de todo o cálculo tridimensional é 53,3°, que facilmente atende o critério de projeto de 45°. Comparamos isso à aproximação bidimensional de 53,9° da Tabela 15–4; o acerto novamente está em torno de 1%.

As curvas do componente da velocidade tangencial na saída do domínio computacional são traçadas na Figura 15–58. Vemos que a distribuição da velocidade tangencial não é uniforme; ela diminui à medida que nos movemos rapidamente para fora do cubo até a ponta, com era de esperar, uma vez que o espaçamento das lâminas s aumenta do cubo para a ponta. Também encontramos (não mostrado aqui) que a pressão do escoamento de saída aumenta radialmente do cubo para a ponta. Isso também coincide com nossa intuição, uma vez que sabemos que um gradiente de pressão radial é necessário para sustentar um escoamento tangencial — a elevação de pressão com raio crescente oferece a aceleração centrípeta necessária para girar o escoamento ao redor do eixo x.

TABELA 15–4
Resultados da CFD para o escoamento através de uma passagem de escoamento da pá do estator: a aproximação em cascata bidimensional no espaçamento médio de lâmina ($s = s_{méd} = 23{,}6$ cm) é comparada ao cálculo tridimensional completo*

	2-D, $s = 23{,}6$ cm	3-D completo
β_{med}	53,9°	53,3°
V_{med}, m/s	84,8	84,7
F_D/b, N/m	724	732

* Os valores são dados até três algarismos significativos.

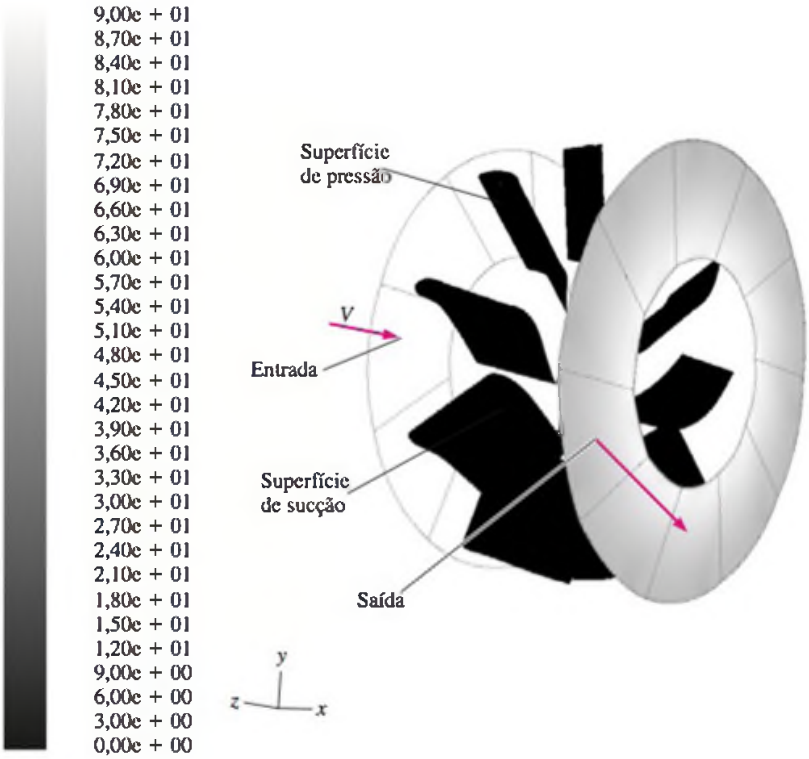


FIGURA 15–58
O traçado de contornos da velocidade tangencial em escala de cinza produzido pelos cálculos CFD tridimensionais para o escoamento turbulento fixo através de uma passagem de escoamento de pá do estator. O componente da velocidade tangencial é mostrado em m/s na saída do domínio computacional (e também nas superfícies da pá, onde a velocidade é zero). Um contorno da entrada do domínio computacional também é mostrado por questões de clareza. Embora apenas uma passagem de escoamento seja modelada, duplicamos a imagem circunferencialmente ao redor do eixo x nove vezes, para visualizar todo o campo de escoamento do estator. Nessa imagem em escala de cinza, a velocidade tangencial varia de 0 (preto) até 90 m/s (branco).

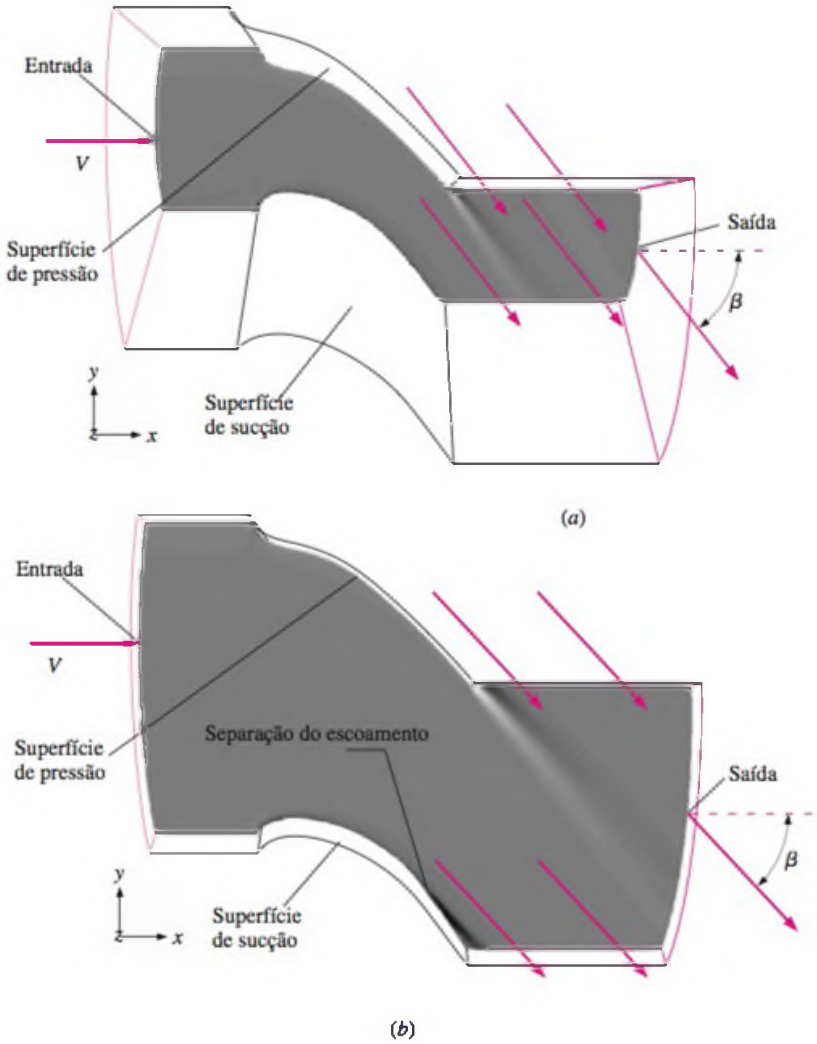


FIGURA 15–59
Os traçados de contornos de vorticidade produzidos pelos cálculos CFD tridimensionais turbulentos e fixos para o escoamento através de uma passagem de escoamento de pá do estator. (*a*) uma fatia perto do cubo ou raiz das pás e (*b*) uma fatia perto da ponta das pás. As curvas de vorticidade z são traçadas, uma vez que as faces são quase perpendiculares ao eixo z. Nessas imagens de escala de cinza, regiões muito escuras (como na metade superior da esteira e na zona de separação do escoamento) representam a vorticidade z negativa (direção horária), enquanto as regiões muito claras (como na metade inferior da esteira) representam a vorticidade z (direção anti-horária). Perto do cubo, não há sinal de separação de escoamento, mas perto da ponta há alguma indicação de separação do escoamento próxima ao bordo de fuga do lado de sucção da pá. Da mesma forma, a figura mostra setas indicando como funciona a condição de contorno periódica. O escoamento que sai da parte *inferior* da fronteira periódica entra a mesma velocidade e direção na parte *superior* da fronteira periódica. O ângulo de escoamento de saída β é maior perto do cubo do que da ponta das pás do estator, porque o espaçamento de lâmina s é menor no cubo do que a ponta, e também devido à separação de escoamento suave perto da ponta.

Outra comparação pode ser feita entre os cálculos tri e bidimensionais pelo traçado das curvas de vorticidade em uma fatia através do domínio computacional, e dentro da passagem de escoamento entre as pás. Duas dessas fatias são criadas — uma próxima ao cubo e uma próxima à ponta, e as curvas de vorticidade são traçadas na Figura 15–59. Em ambas as fatias, a vorticidade é confinada à camada fina de fronteira e à esteira. Não há separação de escoamento perto do cubo, mas vemos que perto da ponta, o escoamento está começando a se separar da superfície de sucção perto do bordo de fuga da pá do estator. Observe que o ar sai do bordo de fuga da pá a um ângulo mais agudo no cubo do que na ponta. Isso também está de acordo com nossa aproximação bidimensional (e com nossa intuição), uma vez que o espaçamento da lâmina s no cubo (15,7 cm) é menor do que na ponta (31,4 cm).

Concluindo, a aproximação desse estator tridimensional como uma cascata bidimensional de pás do estator é muito boa no geral, particularmente para a análise preliminar. A discrepância entre os cálculos bi e tridimensionais para os recursos de escoamento bruto, como a força sobre a pá, o ângulo de escoamento de saída etc. está em torno de 1% ou menos para todas as quantidades reportadas. Assim, não é surpresa que a abordagem da cascata bidimensional seja uma aproximação tão conhecida no projeto de turbomaquinaria. Quanto mais detalhada for a análise tridimensional, maior será a confiança que teremos de que um estator com 10 pás é suficiente para atender os critérios impostos pelo projeto para este ventilador de escoamento axial. Entretanto, nossos cálculos tridimensionais revelaram uma pequena região separada perto da ponta da pá do estator. Talvez seja sensato aplicar alguma **torção** às pás do estator (reduzindo o ângulo de inclinação ou o ângulo de ataque na direção da ponta) para evitar essa separação. (A torção é discutida com mais detalhes no Capítulo 14.) Como alternativa, podemos aumentar o número das pás do estator para 11 ou 12 e esperar que a separação do escoamento nas pontas das pás seja eliminada.

Um comentário final para este campo de escoamento de exemplo: todos os cálculos foram realizados em um sistema de coordenadas fixo. Os modernos códigos CFD contêm opções para a modelagem de zonas do campo de escoamento com *sistemas de coordenadas giratórias*, para que análises similares sejam realizadas em pás de *rotor* como nas pás do estator.

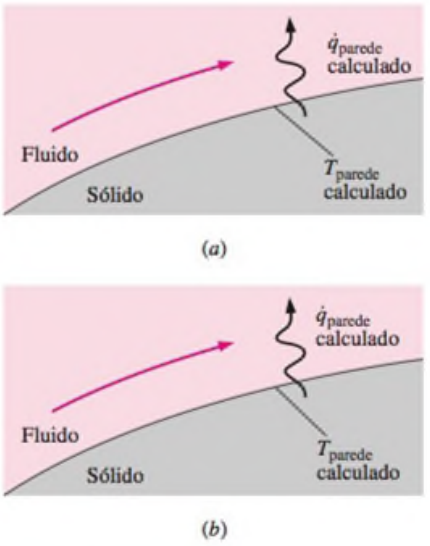


FIGURA 15–60
Em uma fronteira de parede, podemos especificar (*a*) a temperatura da parede ou (*b*) o fluxo do calor da parede, mas não ambos, uma vez que isso seria excesso de especificação em termos matemáticos.

15–4 ▪ CFD COM TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Combinando a forma diferencial da equação da energia às equações do movimento de fluido, podemos usar um código de dinâmica dos fluidos computacional para calcular as propriedades associadas à **transferência de calor** (por exemplo, as distribuições de temperatura ou a taxa de transferência de calor de uma superfície sólida para um fluido). Como a equação da energia é uma equação escalar, apenas *uma* equação de transporte extra (em geral para temperatura ou entalpia) é necessária, e os gastos computacionais (tempo de CPU e requisitos de RAM) não aumentam de forma significativa. Os recursos de transferência de calor estão incorporados à maioria dos códigos CFD comerciais disponíveis, uma vez que muitos problemas práticos da engenharia envolvem tanto o escoamento de fluidos quanto a transferência de calor. Como já foi mencionado, as condições de contorno adicionais relacionadas à transferência de calor precisam ser especificadas. Nas fronteiras de parede sólida, podemos especificar a temperatura da parede T_{parede} (K) ou o *fluxo de calor da parede* $\dot{q}_{\text{parede}}$ (W/m^2), definidos como a taxa de transferência de calor por unidade de área da parede para o fluido (mas não *ambos* ao mesmo tempo, como ilustra a Figura 15–60). Quando modelamos uma zona em um domínio computacional como um corpo rígido que envolve a geração da energia térmica por meio do aquecimento elétrico (como nos componentes eletrônicos) ou as reações químicas ou nucleares (como nas barras de combustível nuclear), podemos, em vez disso, especificar a taxa de geração de calor por unidade de volume $\dot{g}$ (W/m^3) dentro do sólido, uma vez que a relação entre a taxa total de geração de calor e a área de superfície exposta deve ser igual ao fluxo médio de calor da parede. Nesse caso,

nem T_{parede} ou $\dot{q}_{parede}$ são especificados; ambos convergem para valores que correspondem à taxa de geração de calor especificada. Além disso, a distribuição da temperatura dentro do objeto sólido propriamente dita pode ser calculada. Outras condições de contorno (como aquelas associadas à transferência de calor por radiação) também podem ser aplicadas aos códigos CFD.

Nesta seção não entramos em detalhes sobre as equações do movimento ou as técnicas numéricas usadas para solucioná-las. Em vez disso, mostramos alguns exemplos básicos que ilustram os recursos da CFD de calcular escoamentos práticos de interesse para a engenharia envolvendo a transferência de calor.

Elevação de Temperatura por meio de um Trocador de Calor com Escoamento Cruzado

Considere o escoamento de ar frio através de uma série de tubos quentes, como mostra a Figura 15–61. Na terminologia dos trocadores de calor, essa configuração geométrica é chamada de **trocador de calor com escoamento cruzado**. Se o escoamento de ar tivesse que entrar sempre na direção horizontal ($\alpha = 0$), nós poderíamos cortar o domínio computacional pela metade e aplicar as condições de contorno de simetria nas arestas superior e inferior do domínio (consultar a Figura 15–23). Neste caso, porém, permitimos que o escoamento de ar entre no domínio computacional com algum ângulo ($\alpha \neq 0$). Assim, impomos condições de contorno *translacionalmente periódicas* nas arestas superior e inferior do domínio, como está representado na Figura 15–61. Tomamos a temperatura do ar de entrada como 300 K e a temperatura de superfície de cada tubo como 500 K. O diâmetro dos tubos e a velocidade do ar são selecionados de forma que o número de Reynolds seja aproximadamente 1×10^5 com base no diâmetro do tubo. As superfícies do tubo são assumidas como sendo hidrodinamicamente lisas (rugosidade zero) no primeiro conjunto de cálculos. Os tubos quentes são distribuídos como na Figura 15–61 e espaçados com três diâmetros de distância das direções horizontal e vertical. Assumimos que o escoamento seja turbulento permanente bidimensional sem efeitos da gravidade e definimos a intensidade da turbulência da entrada de ar como 10%. Executamos dois casos para comparar: $\alpha = 0$ e 10°. Nosso objetivo é ver se a transferência de calor para o ar aumenta ou diminui com um valor diferente de zero para α. Qual caso você acha que produzirá a maior transferência de calor?

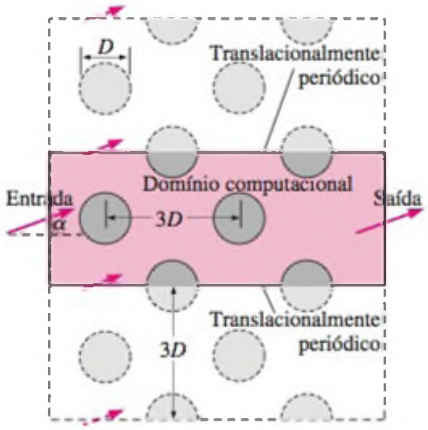


FIGURA 15–61
O domínio computacional (região sombreada em azul claro) utilizado para modelar o escoamento turbulento através de um trocador de calor com escoamento cruzado. O escoamento entra da esquerda a um ângulo α da horizontal.

Geramos uma malha bidimensional, multiblocos e estruturada com resolução muito fina próximo das paredes do tubo, como mostra a Figura 15–62, e executamos o código CFD para a convergência em ambos os casos. As curvas de contorno de temperatura são mostradas para o caso de $\alpha = 0°$ na Figura 15–63, e para o caso de $\alpha = 10°$ na Figura 15–64. A elevação média da temperatura do ar na saída do volume de controle no caso de $\alpha = 0°$ é 5,51 K, enquanto para $\alpha = 10°$ ela é 5,65 K. Assim, concluímos que o escoamento com a entrada fora do eixo leva ao aquecimento mais efetivo do ar, embora o aperfeiçoamento seja de apenas 2,5%. Calculamos um terceiro caso (não mostrado aqui) no qual $\alpha = 0°$, mas a intensidade da turbulência do ar de entrada aumenta para 25%. Isso leva a uma mistura maior, e a elevação média da temperatura do ar da entrada para a saída aumenta em cerca de 6,5%, correspondendo a 5,87 K.

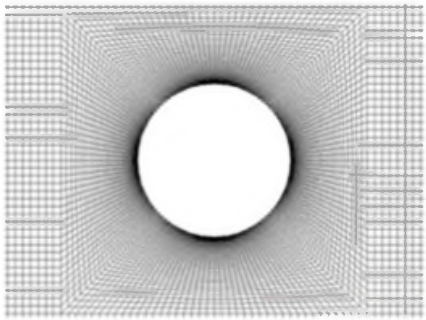


FIGURA 15–62
Vista detalhada da malha estruturada próxima a um dos tubos do trocador de calor com escoamento cruzado. A malha é fina perto das paredes do tubo, de modo que a camada limite da parede possa ter melhor resolução.

Finalmente, estudamos os efeitos das superfícies do tubo serem rugosas. Modelamos as paredes do tubo como superfícies rugosas com uma altura de rugosidade característica de 0,01 m (1% do diâmetro do cilindro). Observe que tivemos que engrossar um pouco a malha perto de cada tubo, para que a distância entre o centro da célula computacional mais próxima e a parede seja maior do que a altura da rugosidade, caso contrário o modelo de rugosidade do código CFD não seria físico. O ângulo de entrada do escoamento é definido como $\alpha = 0°$ neste caso, e as condições de escoamento são idênticas àquelas da Figura 15–63. As curvas de contornos de temperatura são traçadas na Figura 15–65. As regiões em branco puro da representação gráfica de contornos representam as posições onde a temperatura do ar é maior do que 315 K. A elevação média da temperatura do ar

entre a entrada e a saída é 14,48 K, representando um aumento de 163% com relação ao caso da parede lisa a $\alpha = 0°$. Assim, vemos que a rugosidade da parede é um parâmetro crítico nos escoamentos turbulentos. Este exemplo oferece uma idéia sobre por que os tubos dos trocadores de calor quase sempre são propositalmente rugosos.

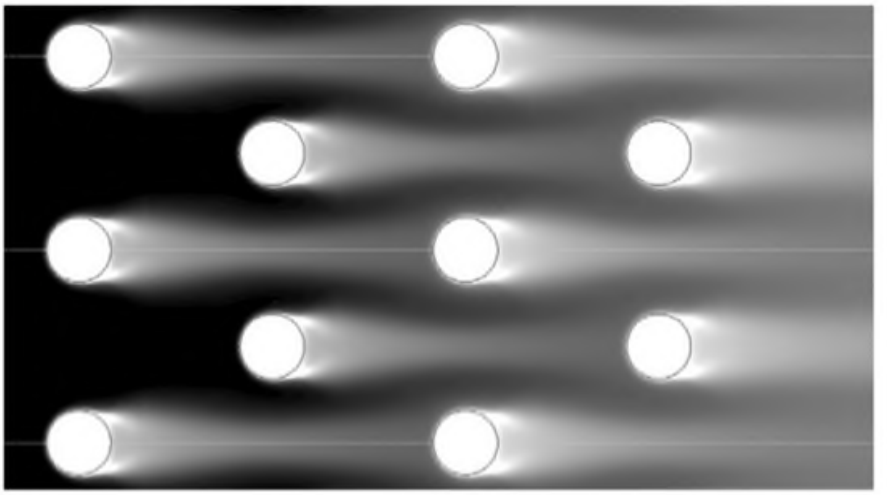


FIGURA 15–63
Os diagramas de contorno de temperatura produzidos pelos cálculos da CFD para o escoamento turbulento permanente fixo através de um trocador de calor com escoamento cruzado a $\alpha = 0°$ com tubos lisos. As curvas de contorno em escala de cinza variam de 300 K (mais escuras) até 315 K ou mais (mais claras). A temperatura média do ar na saída aumenta em 5,51 K comparada à temperatura do ar na entrada. Observe que embora os cálculos sejam realizados no domínio computacional da Figura 15–61, a imagem é duplicada três vezes a título de ilustração.

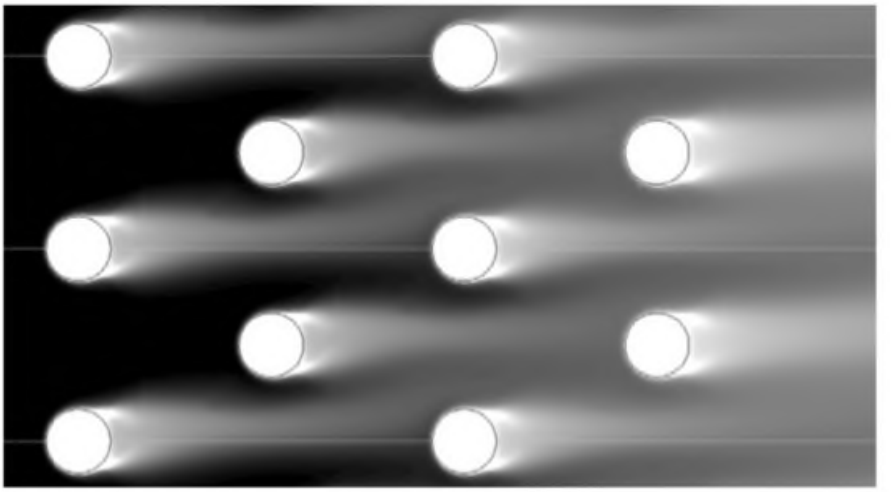


FIGURA 15–64
Os diagramas de contorno de temperatura produzidos pelos cálculos da CFD para o escoamento turbulento permanente fixo através de um trocador de calor com escoamento cruzado a $\alpha = 10°$ com tubos uniformes. As curvas em escala de cinza variam de 300 K (mais escuras) até 315 K ou mais (mais claras). A temperatura média do ar na saída aumenta em 5,65 K comparada à temperatura do ar na entrada. Assim, o escoamento de entrada fora do eixo ($\alpha = 10°$) resulta em uma ΔT que é 2,5% mais alta do que aquela do escoamento de entrada no eixo ($\alpha = 0°$).

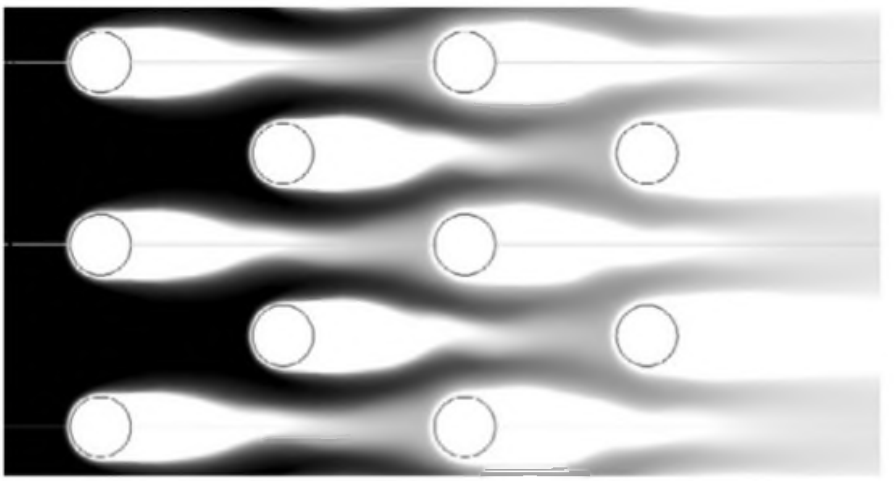
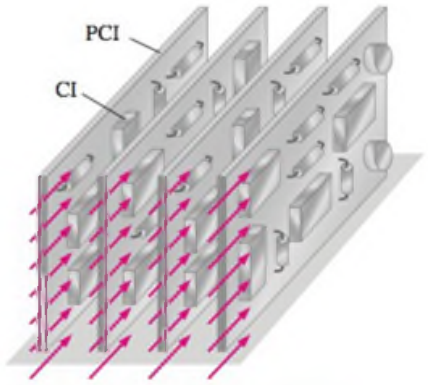


FIGURA 15–65
Os diagramas de contorno de temperatura produzidos pelos cálculos da CFD do escoamento turbulento permanente através de um trocador de calor com escoamento cruzado e $\alpha = 0°$ com tubos rugosos (rugosidade média da parede igual a 1% do diâmetro do tubo; funções de parede utilizadas nos cálculos da CFD). As curvas de contornos em escala de cinza variam de 300 K (mais escuros) até 315 K ou mais (mais claros). A temperatura média do ar na saída aumenta em 14,48 K comparada à temperatura do ar na entrada. Assim, mesmo esta pequena quantidade de rugosidade de superfície resulta em uma ΔT que é 163% mais alta do que aquela do caso dos tubos lisos.

Resfriamento de um Conjunto de Chips de Circuito Integrado

Em equipamento eletrônico, instrumentação e computadores, os componentes eletrônicos, como **circuitos integrados** (**CIs** ou "chips"), resistores, transistores, diodos e capacitores são soldados em **placas de circuito impresso** (**PCIs**). As PCIs são, em geral, empilhadas em fileiras como na Figura 15–66. Devido ao fato de muitos desses componentes eletrônicos precisarem dissipar calor, em geral é soprado ar resfriado através da lacuna de ar que existe entre cada par de PCIs, para evitar que os componentes se aqueçam demais. Pense no projeto de uma PCI para aplicação no espaço. Várias PCIs idênticas devem ser empilhadas como na Figura 15–66. Cada PCI tem 10 cm de altura e 30 cm de comprimento, e o espaçamento entre as placas é de 2,0 cm. O ar para resfriamento entra na lacuna entre as PCIs a uma velocidade de 2,60 m/s e temperatura de 30°C. Os engenheiros elétricos devem colocar oito CIs idênticos em uma parte com 10 cm × 15 cm de cada placa. Cada um dos CIs dissipa 6,24 W de calor: 5,40 W de sua superfície superior e 0,84 W de suas laterais. (Supõe-se que não haja transferência de calor da parte inferior do chip para a PCI.) O restante dos componentes da placa tem transferência de calor desprezível em comparação com a transferência dos oito CIs. Para garantir o desempenho adequado, a temperatura média na superfície do chip não deve exceder 150°C, e a temperatura máxima em qualquer parte da superfície do chip não deve exceder 180°C. Cada chip tem 2,5 cm de largura, 4,5 cm de comprimento e 0,50 cm de espessura. Os engenheiros elétricos têm duas possíveis configurações para os oito chips da PCI, como mostra a Figura 15–67: na configuração longa, os chips são alinhados com sua dimensão *longa* paralela ao escoamento, e na configuração curta, os chips são alinhados com sua dimensão *curta* paralela ao escoamento. Os chips são distribuídos em ambos os casos para aumentar o resfriamento. Devemos determinar qual arranjo leva à temperatura de superfície máxima mais baixa nos chips, e se os engenheiros elétricos irão satisfazer às especificações de temperatura de superfície.

Para cada configuração, definimos um domínio computacional tridimensional que consiste em uma passagem de escoamento única através da lacuna de ar entre as duas PCIs (Figura 15–68). Geramos uma malha hexagonal estruturada com 267.520 células para cada configuração. O número de Reynolds com base na lacuna de 2,0 cm entre as placas é cerca de 3.600. Se esse fosse um simples escoamento de canal bidimensional, esse número de Reynolds mal seria alto o suficiente para estabelecer o escoamento turbulento. Entretanto, como as superfícies que levam até a entrada de velocidade são muito rugosas, o escoamento muito provavelmente é turbulento. Observamos que os escoamentos turbulentos com número de Reynolds baixo são um desafio para a maioria dos modelos de turbulência, uma vez que os modelos são calibrados a números de Reynolds altos. No entanto, consideramos o escoamento turbulento fixo e usamos o modelo de turbulência k-ε com as funções de parede. Embora a exatidão absoluta desses cálculos possa ser suspeita por conta do baixo número de Reynolds, as comparações entre as configurações longa e curta



Ar de resfriamento, com V = 2,60 m/s e T_∞ = 30°C

FIGURA 15–66
Quatro placas de circuito impresso (PCIs) empilhadas em filas, com o ar soprado entre cada PCI para provocar o resfriamento.

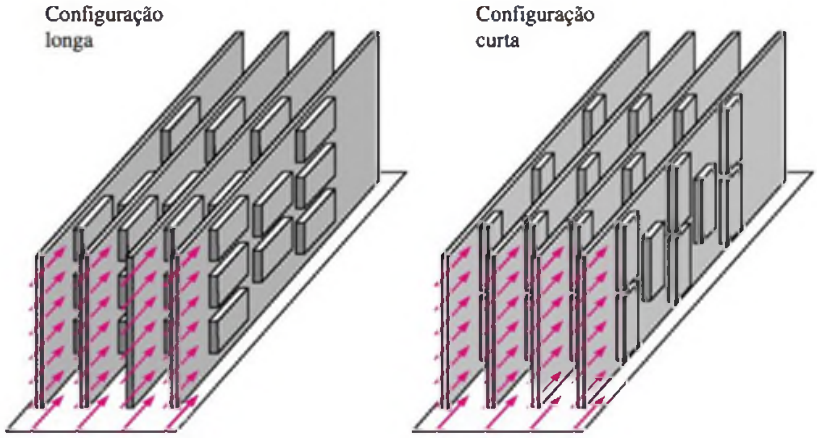


FIGURA 15–67
Duas configurações possíveis para os oito CIs da PCI: configuração longa e configuração curta. Sem verificar mais adiante, qual configuração você acha que oferecerá o melhor resfriamento para os chips?

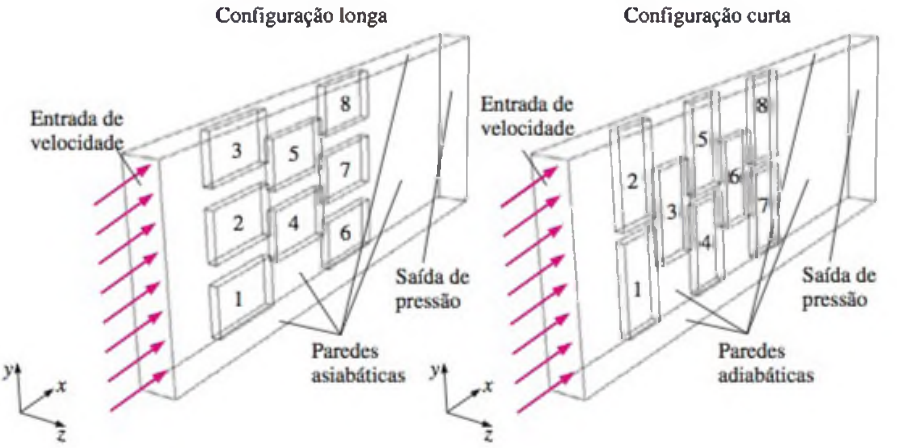


FIGURA 15–68
Domínios computacionais para o exemplo de resfriamento do chip. O ar que escoa através da lacuna entre as duas PCIs é modelado. Duas malhas separadas são geradas, uma para a configuração longa e outra para a configuração curta. Os chips 1 a 8 são rotulados para referência. As superfícies desses chips transferem calor para o ar; todas as outras paredes são adiabáticas.

devem ser razoáveis. Ignoramos os efeitos da flutuação nos cálculos, já que essa é uma aplicação espacial. A entrada é especificada a uma entrada de velocidade (ar) com $V = 2{,}60$ m/s e $T_\infty = 30°C$; tomamos a intensidade da turbulência de entrada como 20% e a escala de comprimento turbulento como 1,0 mm. A saída é uma saída de pressão à pressão manométrica zero. A PCI é modelada como uma parede adiabática lisa (transferência de calor zero da parede para o ar). As faces superiores e laterais do domínio computacional também são aproximadas como paredes adiabáticas lisas.

Com base nas dimensões dadas para os chips, a área da superfície na parte superior de um chip é 4,5 cm × 2,5 cm = 11,25 cm^2. A área total de superfície dos quatro lados dos chips é 7,0 cm^2. Com as taxas de transferência de calor dadas, calculamos a taxa de transferência de calor por unidade de área na superfície superior de cada chip,

$$\dot{q}_{\text{superior}} = \frac{5{,}4 \text{ W}}{11{,}25 \text{ cm}^2} = 0{,}48 \text{ W/cm}^2$$

Assim, modelamos a superfície superior de cada chip como uma parede lisa com um fluxo de calor de superfície de 4.800 W/m^2 da parede para o ar. Da mesma forma, a taxa de transferência de calor por unidade de área das laterais de cada chip é

$$\dot{q}_{\text{laterais}} = \frac{0{,}84 \text{ W}}{7{,}0 \text{ cm}^2} = 0{,}12 \text{ W/cm}^2$$

Como as laterais do chip têm fios elétricos, modelamos cada superfície lateral de cada chip como uma parede rugosa com uma altura de rugosidade equivalente de 0,50 mm e um fluxo de calor de superfície de 1.200 W/m^2 da parede para o ar.

O código CFD FLUENT é executado para cada caso até a convergência. Os resultados estão resumidos na Tabela 15–5, e as curvas de contorno de temperatura são traçadas nas Figuras 15–69 e 15–70. A temperatura média das superfícies superiores dos chips é mais ou menos igual para todas as configurações (144,4°C para o caso longo e 144,7°C para o caso curto) e está abaixo do limite recomendado de 150°C. Existe uma diferença grande na temperatura média das superfícies *laterais* dos chips (84,2°C para o caso longo e 91,4°C para o caso curto), embora esses valores estejam bem abaixo do limite. As temperaturas máximas, porém, são preocupantes. Para a configuração longa, $T_{\text{máx}} = 187{,}5°C$ e ocorre na superfície superior do chip 7 (o chip do meio da última fila). Para a configuração curta, $T_{\text{máx}} = 182{,}1°C$ e ocorre perto da metade da placa nas superfícies superior dos chips 7 e 8 (os dois chips da última fila). Em ambas as configurações esses valores excedem o limite recomendado de 180°C, embora não por muito. A configuração curta resfria melhor as superfícies superiores dos chips, mas à custa de uma queda de pressão ligeiramente maior e resfriamento pior ao longo das superfícies laterais dos chips.

TABELA 15–5

Comparação entre os resultados da CFD para o exemplo de resfriamento de chip, configurações longa e curta

	Longo	Curto
$T_{máx}$, superfícies superiores dos chips	187,5°C	182,1°C
$T_{méd}$, superfícies superiores dos chips	144,5°C	144,7°C
$T_{máx}$, superfícies laterais dos chips	154,0°C	170,6°C
$T_{méd}$, superfícies laterais dos chips	84,2°C	91,4°C
ΔT, média, da entrada para a saída	7,83°C	7,83°C
ΔP, média, da entrada para a saída	−5,14 Pa	−5,58 Pa

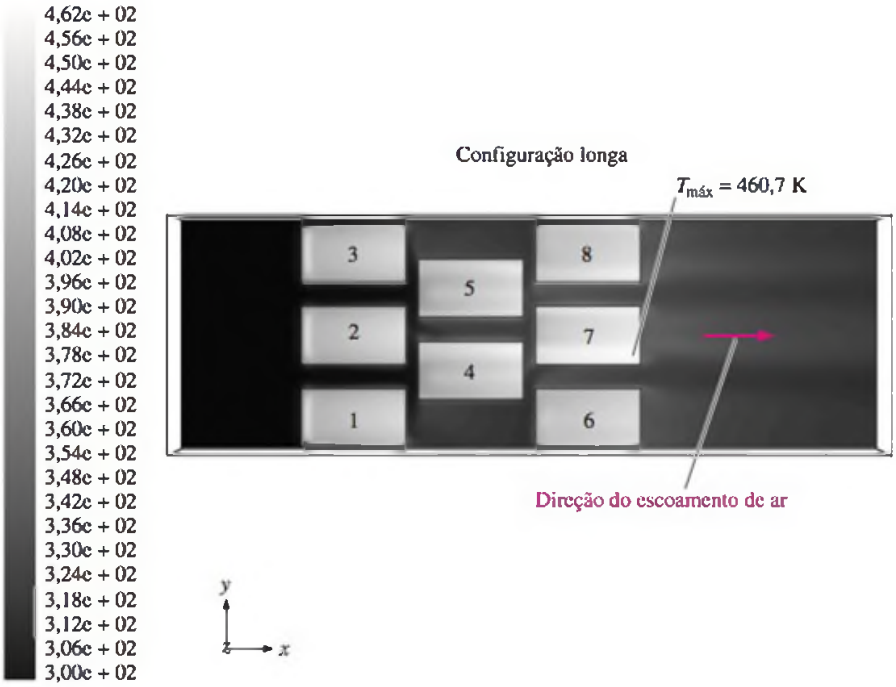


FIGURA 15–69
Resultados da CFD para o exemplo do resfriamento de chip, configuração longa: as curvas de contornos de temperatura em escala de cinza são vistas diretamente de cima das superfícies do chip, com os valores T em K na legenda. A localização da temperatura superficial máxima é indicada, ela ocorre perto da extremidade do chip 7. As regiões claras perto dos bordos de ataque dos chips 1, 2 e 3 também são vistas, indicando temperaturas de superfície altas nessas posições.

Observe na Tabela 15–5 que a variação média na temperatura do ar entre a entrada e a saída é idêntica para ambas as configurações (7,83°C). Isso não deve ser surpresa, porque a taxa total de calor transferido dos chips para o ar é igual independentemente da configuração do chip. Na verdade, em uma análise da CFD é sensato verificar valores como esses — se a ΔT média *não* for igual nas duas configurações, devemos suspeitar que há algum tipo de erro em nossos cálculos.

Existem muitas outras características interessantes nesses campos de escoamento que podemos destacar. Para ambas as configurações, a temperatura média de superfície nos chips a jusante é maior do que aquela dos chips a montante. Isso faz sentido fisicamente, uma vez que os primeiros chips recebem o ar mais frio, enquanto os chips a jusante são resfriados pelo ar que já foi um pouco aquecido. Observamos que os chips da frente (1, 2 e 3 na configuração longa e 1 e 2 na configura curta) têm regiões de alta temperatura logo montante de seus bordos de ataque. Uma vista detalhada da distribuição da temperatura em um desses chips é mostrada na Figura 15–71*a*. Por que a temperatura é tão alta nesse ponto? Acontece que o escoamento se separa do canto agudo na frente do chip e forma um turbilhão de recirculação chamado de **bolha de separação** na parte superior do chip (Figura 15–71*b*). A velocidade do ar é lenta nessa região, particularmente ao longo da **linha de reconexão** onde o escoamento se cola novamente à superfície. A velocidade lenta do ar leva a um "ponto quente" local naquela região da superfície do chip,

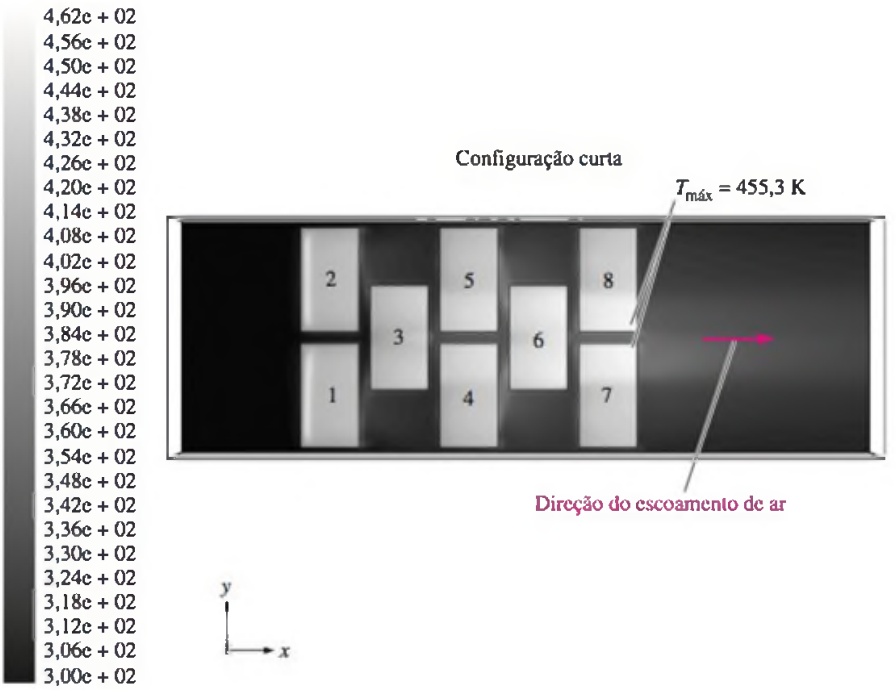
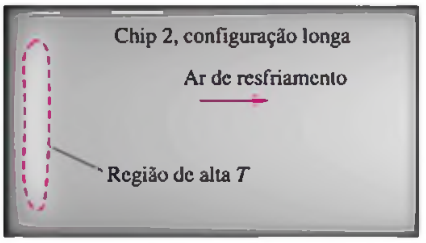
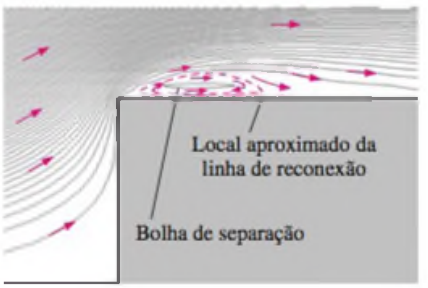


FIGURA 15–70
Resultados da CFD para o exemplo de resfriamento de chip, configuração curta: as curvas de contornos de temperatura em escala de cinza são vistas diretamente de cima das superfícies do chip, com os valores T em K na legenda. É usada a mesma escala de temperatura da Figura 15–69. As posições da temperatura de superfície máxima são indicadas; elas ocorrem perto da extremidade dos chips 7 e 8 próximas ao centro da PCI. As regiões claras perto dos bordos de ataque dos chips 1 e 2 também são vistas, indicando temperaturas superficiais altas nessas posições.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 15–71
(*a*) Vista superior detalhada das curvas de temperatura em escala de cinza na superfície do chip 2 da configuração longa. A região de temperatura alta está destacada. Os níveis da curva de temperatura são iguais aos da Figura 15–69. (*b*) Uma vista mais detalhada ainda (uma vista lateral) das linhas de corrente destacando a bolha de separação naquela região. O local aproximado da linha de reconexão na superfície do chip também é mostrado.

uma vez que o resfriamento convectivo é mínimo. Finalmente, observamos na Figura 15–71*a* que a jusante da bolha de separação, T aumenta abaixo na superfície do chip. Existem dois motivos para isso: (1) o ar se aquece à medida que passa pelo chip e (2) a camada limite na superfície do chip aumenta a jusante. Quanto maior for a espessura da camada limite, mais lenta será a velocidade do ar perto da superfície e, portanto, menor será a quantidade de resfriamento convectivo na superfície.

Em resumo, nossos cálculos da CFD previram que a configuração curta leva a um valor mais baixo para a temperatura máxima nas superfícies do chip e, à primeira vista, parece ser a configuração preferida para a transferência de calor. Entretanto, a configuração curta exige uma queda de pressão maior na mesma vazão em volume (Tabela 15–5). Para um dado ventilador, essa queda adicional da pressão mudaria o ponto operacional do ventilador para uma vazão em volume mais baixa (Capítulo 14), diminuindo o efeito de resfriamento. Não se sabe se essa mudança seria suficiente para a escolha da configuração longa — mais informações sobre o ventilador e mais análises seriam necessárias. O resultado em ambos os casos é que *não há resfriamento suficiente para manter a temperatura da superfície do chip abaixo de 180°C em todas as partes de cada chip.* Para corrigirmos a situação, recomendamos que os projetistas espalhem os oito chips quentes em toda a PCI, em vez de fazer isso na área limitada de 10 cm × 15 cm da placa. O espaço maior entre os chips resultaria em resfriamento suficiente para a vazão dada. Outra opção seria instalar um ventilador mais poderoso que aumentaria a velocidade da entrada de ar.

15–5 • CÁLCULOS DA CFD PARA O ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

Todos os exemplos discutidos neste capítulo até agora se referiam ao escoamento incompressível (ρ = constante). Quando o escoamento é *compressível,* a densidade não é mais uma constante e torna-se uma variável adicional do conjunto de equações. Limitamos nossa discussão aqui aos *gases ideais.* Quando aplicamos a lei dos gases ideais, introduzimos mais *outra incógnita,* a temperatura T. Assim, a equação da energia deve ser resolvida juntamente com as formas compressíveis das equações da conservação de massa e da conservação do momento (Figura 15–72). Além disso, as propriedades dos fluidos, como a viscosidade e a condutividade térmica, não são mais tratadas necessariamente como constantes, uma vez que elas são

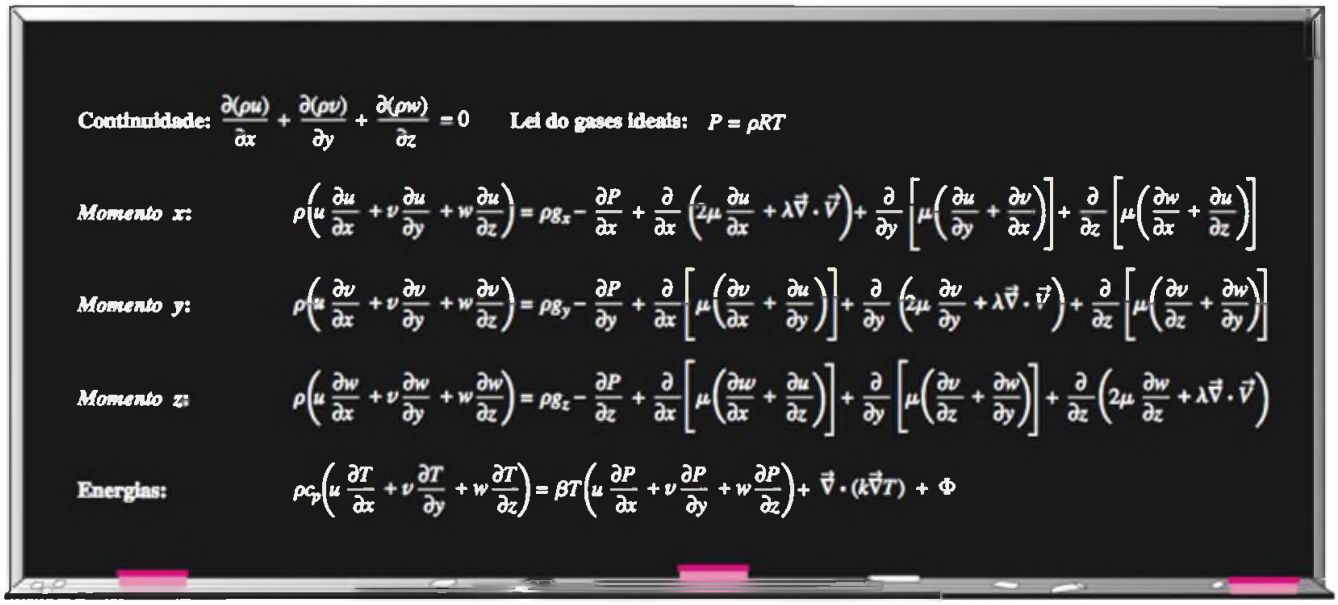


FIGURA 15–72

As equações de movimento no caso do escoamento permanente, compressível e laminar de um fluido newtoniano em coordenadas cartesianas. Existem seis equações e seis incógnitas: ρ, u, v, w, T e P. Cinco das equações são equações diferenciais parciais não lineares, enquanto a lei dos gases ideais é uma equação algébrica. R é a constante do gás ideal específica, l é o segundo coeficiente de viscosidade, quase sempre definido como $-2\mu/3$; c_p é o calor específico a pressão constante; k é a condutividade térmica; β é o coeficiente da expansão térmica e Φ é a função da dissipação dada por White (1991) como

$$\Phi = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

funções da temperatura. Desse modo, aparecem dentro dos operadores de derivação nas equações diferenciais da Figura 15–72. Embora o conjunto de equações pareça ameaçador, muitos códigos CFD comerciais podem processar problemas de escoamento compressível, incluindo as ondas de choque.

Ao resolver problemas de escoamento compressível com a CFD, as condições de contorno são um pouco diferentes daquelas do escoamento incompressível. Por exemplo, em uma entrada de pressão precisamos especificar tanto a pressão de estagnação quanto a pressão estática, juntamente com a temperatura de estagnação. Uma condição de contorno especial (chamada *pressure far field — pressão do campo distante* no FLUENT) também está disponível para os escoamentos compressíveis. Com essa condição de contorno, especificamos o número de Mach, a pressão estática e a temperatura; ela pode ser aplicada a entradas *e* saídas e é adequada para os escoamentos externos supersônicos.

As equações da Figura 15–72 servem para o escoamento laminar, enquanto muitos problemas de escoamento compressível acontecem com velocidades de escoamento altas nas quais o escoamento é *turbulento*. Assim, as equações da Figura 15–72 devem ser modificadas adequadamente (para o conjunto de equações RANS) para incluir um modelo de turbulência, e mais equações de transporte devem ser adicionadas, como já foi discutido. Assim, as equações ficam mais longas e complicadas e não são incluídas aqui. Felizmente, em muitas situações, podemos aproximar o escoamento como *sem viscosidade*, eliminando os termos viscosos das equações da Figura 15–72 (a equação de Navier–Stokes se reduz à equação de Euler). Como veremos, a aproximação do escoamento sem viscosidade é boa para muitos escoamentos práticos com velocidade alta, uma vez que as camadas limites ao longo das paredes são muito finas a números de Reynolds altos. Na verdade, os cálculos da CFD compressíveis podem prever características do escoamento que são muito difíceis de obter experimentalmente. Por exemplo,

muitas técnicas de medição experimental exigem acesso ótico, que é eliminado nos escoamentos tridimensionais e até mesmo em alguns escoamentos axissimétricos. A CFD não é limitada dessa forma.

Escoamento Compressível através de um Bocal Convergente-Divergente

Para nosso primeiro exemplo, consideramos o escoamento compressível do ar através de um bocal convergente-divergente axissimétrico. O domínio computacional é mostrado na Figura 15–73. O raio de entrada é 0,10 m, o raio da garganta é 0,075m e o raio de saída é 0,12 m. A distância axial da entrada até a garganta é 0,30 m — igual à distância axial da garganta até a saída. Uma malha estruturada com aproximadamente 12.000 células quadrilaterais é usada nos cálculos. Na fronteira de entrada de pressão, a pressão de estagnação $P_{0,\text{entrada}}$ é tomada como 220 kPa (absoluta), a pressão estática P_{entrada} é tomada como 210 kPa e a temperatura de estagnação $T_{0,\text{entrada}}$ é definida como 300 K. No primeiro caso, tomamos a pressão estática P_b na fronteira da entrada de pressão como 50,0 kPa ($P_b/P_{0,\text{entrada}} = 0{,}227$) — baixa o suficiente para que o escoamento seja supersônico em toda a seção divergente do bocal, sem nenhum choque normal no bocal. Essa razão de contrapressão corresponde a um valor entre os casos E e F da Figura 12–27, na qual um padrão de choque complexo ocorre a jusante da saída do bocal; essas ondas de choque não influenciam o escoamento no bocal propriamente dito, uma vez que o escoamento que sai do bocal é supersônico. Nós não tentamos modelar o escoamento a jusante da saída do bocal.

O código CFD é executado para convergir em seu modo de escoamento permanente, não viscoso e compressível. Os valores médios do número de Mach e da razão de pressão $P/P_{0,\text{entrada}}$ são calculados em 25 posições axiais ao longo do bocal convergente-divergente (a cada 0,025 m) e estão representados graficamente na Figura 15–74*a*. Os resultados coincidem quase perfeitamente com as previsões do

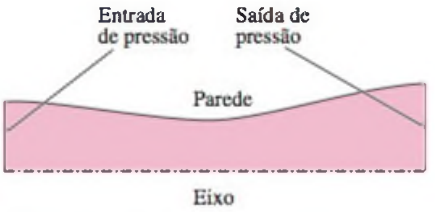
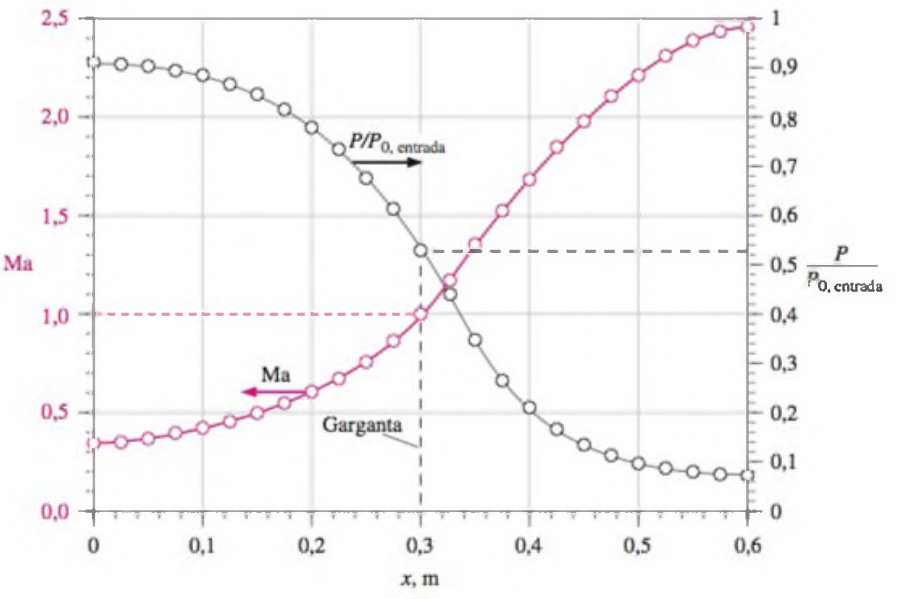


FIGURA 15–73
O domínio computacional do escoamento compressível através de um bocal convergente-divergente. Como o escoamento é axissimétrico, apenas uma fatia bidimensional é necessária para a solução CFD



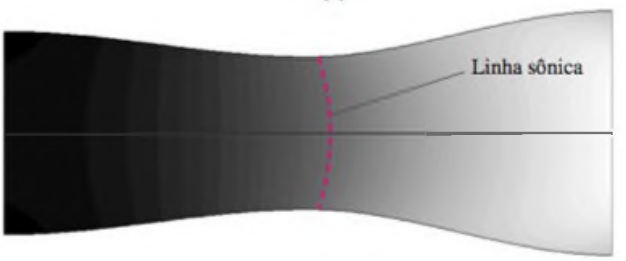


FIGURA 15–74
Os resultados da CFD para o escoamento permanente, adiabático, não viscoso e compressível através de um bocal axissimétrico convergente-divergente: (*a*) número de Mach médio calculado e razão de pressão em 25 posições axiais (círculos), comparados às previsões da teoria do escoamento compressível, unidimensional e isentrópico (linhas sólidas); (*b*) curvas de contornos do número de Mach em escala de cinza, variando de Ma = 0,3 (mais escuro) até 2,7 (mais claro). Embora apenas a metade superior seja calculada, uma imagem espelhada em relação ao eixo x é mostrada por clareza. A linha sônica (Ma = 1) também está destacada. Ela é parabólica e não reta neste escoamento axissimétrico, devido à componente radial da velocidade, como foi discutido em Schreier (1982).

escoamento isentrópico unidimensional (Capítulo 12). Na garganta (x = 0,30 m), o número de Mach médio é 0,997 e o valor médio de $P/P_{0,\text{entrada}}$ é 0,530. Uma teoria do escoamento isentrópico unidimensional prevê um Ma = 1 e $P/P_{0,\text{entrada}}$ = 0,528 na garganta. As pequenas discrepâncias entre o CFD e a teoria ocorrem em virtude de o escoamento calculado *não* ser unidimensional, uma vez que há um componente radial da velocidade e, portanto, uma variação radial do número de Mach e da pressão estática. Um exame cuidadoso das curvas de contorno do número de Mach na Figura 15–74*b* revela que elas são encurvadas e não retas, como seria previsto pela teoria isentrópica unidimensional. A linha sônica (Ma = 1) é identificada por questões de clareza na figura. Embora Ma = 1 bem na parede da garganta, as condições sônicas ao longo do eixo do bocal não são atingidas até mais ou menos a jusante da garganta.

A seguir, executamos uma série de casos nos quais a contrapressão P_b é variada, mantendo todas as outras condições de contorno fixas. Os resultados dos três casos são mostrados na Figura 15–75: P_b = (*a*) 100, (*b*) 150 e (*c*) 200 kPa, ou seja, $P_b/P_{0,\text{entrada}}$ = (*a*) 0,455, (*b*) 0,682 e (*c*) 0,909, respectivamente. Em todos os três casos, um choque normal ocorre na parte divergente do bocal. Além disso, à medida que a contrapressão aumenta, o choque se movimenta a montante na direção da garganta e sua força diminui. Como o escoamento é estrangulado na garganta, a vazão em massa é idêntica em todos os três casos (e também no caso anterior mostrado na Figura 15–74). Observamos que o choque normal não é reto, mas sim curvo devido ao componente radial da velocidade, como já foi mencionado.

No caso (*b*), no qual $P_b/P_{0,\text{entrada}}$ = 0,682, os valores médios do número de Mach e a relação de pressão $P/P_{0,\text{entrada}}$ são calculados em 25 posições axiais ao longo do bocal convergente-divergente (a cada 0,025 m), e são representados graficamente na Figura 15–76. Para estar de acordo com a teoria, as relações do escoamento isentrópico unidimensional são usadas a montante e a jusante do choque, e as

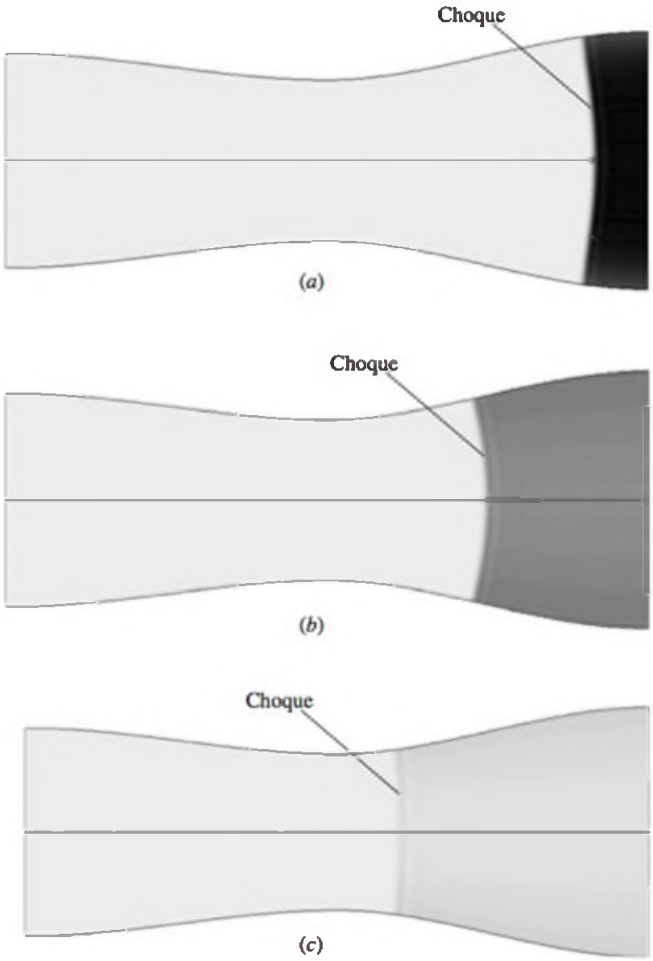


FIGURA 15–75
Os resultados da CFD para o escoamento permanente, adiabático, não viscoso e compressível através de um bocal convergente-divergente: as curvas de contornos em escala de cinza da relação de pressão de estagnação $P_0/P_{0,\text{entrada}}$ são mostradas para $P_0/P_{0,\text{entrada}}$ = (*a*) 0,455; (*b*) 0,682 e (*c*) 0,909. Como a pressão de estagnação é constante a montante do choque e diminui repentinamente através do choque, ela é um indicador conveniente da posição e da força do choque normal no bocal. Nesses diagramas de contornos, $P_0/P_{0,\text{entrada}}$ varia de 0,5 (mais escuro) até 1,05 (mais claro). Os níveis em escala de cinza a jusante deixam claro que quanto mais a jusante for o choque, mais forte ele será (maior módulo da queda da pressão de estagnação através do choque). Observamos também a forma dos choques — curva em vez de reta, por causa da componente radial da velocidade.

relações de choque normais são usadas para calcular o salto de pressão *através* do choque (Capítulo 12). Para comparar a contrapressão especificada, uma análise unidimensional exige que o choque normal esteja localizado em $x = 0{,}4436$ m, representando a variação tanto de P_0 quanto de A^* através do choque. Novamente, o resultado da comparação entre os cálculos CFD e a teoria unidimensional é excelente. A pequena discrepância na pressão e no número de Mach a jusante do choque é atribuída à forma curva do choque (Figura 15–75*b*), como já foi discutido. Além disso, o choque nos cálculos do CFD não é infinitesimalmente fino, como é previsto pela teoria unidimensional, mas se espalha em algumas das células computacionais. Esta última inexatidão pode ser um pouco reduzida quando a malha é refinada na área da onda de choque (isto não é mostrado).

Os cálculos CFD anteriores dizem respeito ao escoamento permanente, não viscoso e adiabático. Quando não há ondas de choque (Figura 15–74), o escoamento também é *isentrópico,* uma vez que ele é adiabático e reversível (sem perdas irreversíveis). Entretanto, quando existe uma onda de choque no campo de escoamento (Figura 15–75), o escoamento não é mais isentrópico, já que existem perdas irreversíveis através do choque, embora ele ainda seja adiabático.

Um último caso CFD é executado no qual duas irreversibilidades adicionais são incluídas: *atrito* e *turbulência*. Modificamos o caso (*b*) da Figura 15–75 executando um caso permanente, adiabático e turbulento usando o modelo de turbulência k-ε com as funções de parede. A intensidade da turbulência na entrada é tomada como 10% com uma escala de comprimento de turbulência de 0,050 m. Um diagrama de cortorno de curva de $P/P_{0\,\text{entrada}}$ é mostrado na Figura 15–77, usando o mesmo intervalo de escala de cinza da Figura 15–75. Uma comparação entre as Figuras 15–75*b* e 15–77 revela que a onda de choque do caso turbulento ocorre mais a montante e, portanto, é um pouco mais fraca. Além disso, a pressão de estagnação é pequena em uma região muito fina ao longo das paredes do canal. Isso se deve às perdas por atrito da fina camada limite. As irreversibilidades turbulentas e viscosas da região da camada limite são responsáveis por essa diminuição da pressão de estagnação. Além disso, a camada limite separa-se apenas a jusante do choque, levando a mais irreversibilidades. Uma vista detalhada dos vetores de velocidade na vizinhança do ponto de separação ao longo da parede é mostrada na Figura 15–78. Observamos que este caso não converge bem e é inerentemente não permanente; a interação entre as ondas de choque e as camadas limites é uma tarefa muito difícil para a CFD. Como usamos as funções de parede, os detalhes do escoamento dentro da camada limite turbulenta não são resolvidos neste cálculo da CFD. Entretanto, experiências revelam que a onda de choque interage de forma muito mais significativa com a camada limite, produzindo "λ-pés", como é discutido no quadro Aplicação em Foco do Capítulo 12.

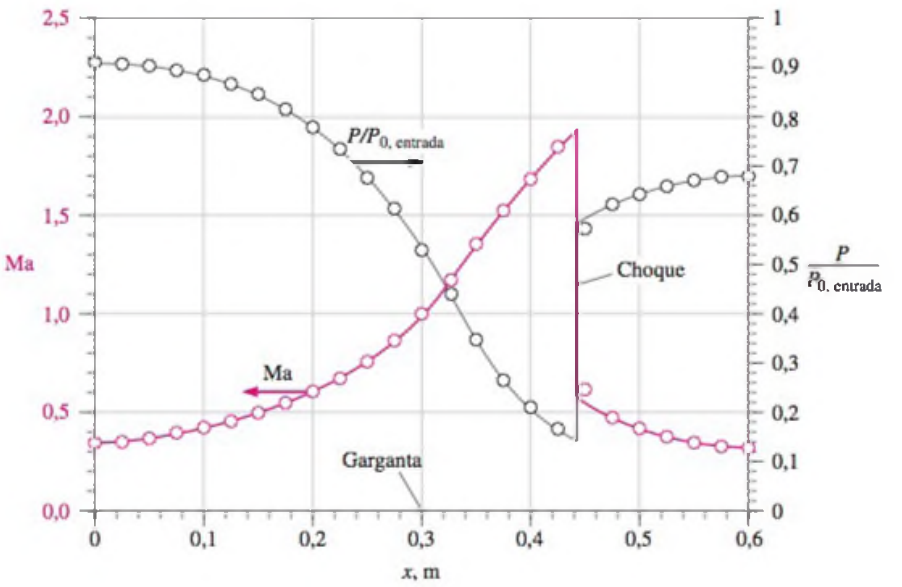


FIGURA 15–76
O número de Mach e a razão de pressão como funções da distância axial ao longo de um bocal convergente-divergente no caso em que $P_b/P_{0,\,\text{entrada}} = 0{,}682$. Os resultados médios da CFD em 25 posições axiais (círculos) para o escoamento permanente, não viscoso, adiabático, compressível são comparados às previsões da teoria do escoamento compressível unidimensional (linhas sólidas).

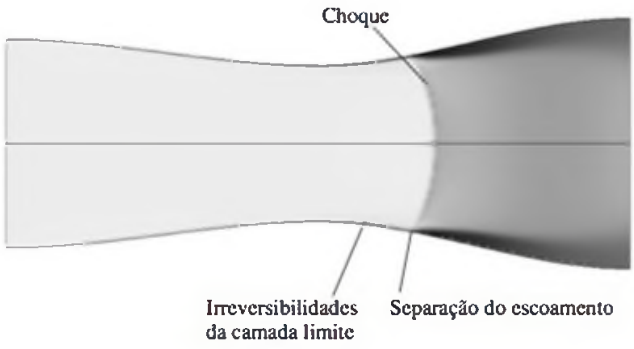


FIGURA 15–77
Os resultados da CFD para o escoamento permanente, adiabático, turbulento e compressível através de um bocal convergente-divergente. As curvas de contornos em escala de cinza da relação da razão de estagnação $P_0/P_{0,\text{entrada}}$ são mostradas no caso com $P_0/P_{0,\text{entrada}} = 0{,}682$, a mesma contrapressão da Figura 15–75b. A separação do escoamento e as irreversibilidades na camada limite são identificadas.

Finalmente, comparamos vazão em massa deste caso viscoso e turbulento com aquela do caso sem viscosidade, e descobrimos que $\dot{m}$ diminuiu cerca de 0,7%. Por quê? Conforme foi discutido no Capítulo 10, uma camada limite ao longo de uma parede afeta o escoamento exterior de forma que a parede pareça ser mais espessa em uma quantidade igual à espessura de deslocamento δ^*. *A área de garganta efetiva é, portanto, um pouco reduzida pela presença da camada limite,* levando a uma redução na vazão em massa através do bocal convergente-divergente. O efeito é pequeno neste exemplo, uma vez que as camadas limites são tão finas com relação às dimensões do bocal, e a aproximação não viscosa é muito boa (erro menor do que 1%).

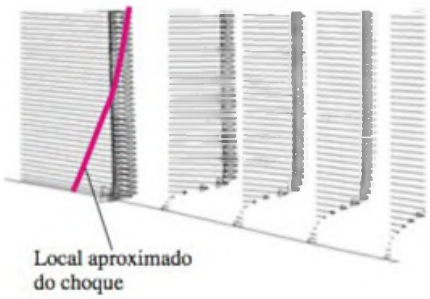


FIGURA 15–78
Vista detalhada dos vetores velocidade na vizinhança da região de escoamento separado da Figura 15–77. A repentina diminuição no módulo da velocidade através do choque pode ser vista, assim como a região de escoamento reverso a jusante do choque.

Choques Oblíquos sobre uma Cunha

Em nosso exemplo final de escoamento compressível, modelamos o escoamento de ar permanente, adiabático, bidimensional, sem viscosidade e compressível sobre uma cunha com semi-ângulo θ (Figura 15–79). Como o escoamento tem simetria de cima para baixo, modelamos apenas a metade superior do escoamento e usamos a condição de contorno de simetria ao longo da aresta inferior. Executamos os três casos: $\theta = 10°$, 20° e 30° em um número de Mach na entrada de 2,0. Os resultados da CFD são mostrados na Figura 15–80 para todos os três casos. Nos gráficos da CFD, uma imagem-espelhada do domínio computacional é projetada em relação à reta de simetria por questões de clareza.

Para o caso de 10° (Figura 15–80*a*), um choque oblíquo reto que se origina no ápice da cunha é observado, como também prevê a teoria da não viscosidade. O escoamento gira através do choque oblíquo em 10°, de modo que fica paralelo à parede da cunha. O ângulo de choque β previsto pela teoria da não viscosidade é 39,31°, e o número de Mach previsto a jusante do choque é 1,64. As medições com um prolongador da Figura 15–80*a* resultam em $\beta \cong 40°$, e o cálculo da CFD para o número de Mach a jusante do choque é 1,64; assim, a concordância com a teoria é excelente.

Para o caso de 20° (Figura 15–80*b*), os cálculos do CFD resultam em um número de Mach 1,21 a jusante do choque. O ângulo de choque medido pelos cálculos do CFD é de cerca de 54°. A teoria da não viscosidade prevê um número de Mach 1,21 e um ângulo de choque de 53,4°, de modo que novamente a concordância entre teoria e CFD é excelente. Como o choque para o caso de 20° está a um ângulo mais agudo (mais perto de um choque normal), ele é mais forte do que o choque para o caso de 10°, como indica a coloração mais escura das curvas de Mach a jusante do choque para o caso de 20°.

A um número de Mach 2,0 no ar, a teoria da não-viscosidade prevê que um choque oblíquo reto pode formar um semi-ângulo de cunha máximo de até cerca de 23° (Capítulo 12). A semi-ângulos de cunha maiores do que isso, o choque deve mover-se a montante da cunha (tornar-se destacado), formando um **choque destacado**, que assume a forma de uma **onda curva** (Capítulo 12). Os resultados da CFD a $\theta = 30°$ (Figura 15–80*c*) mostram que esse, sem dúvida, é o caso. A parte do

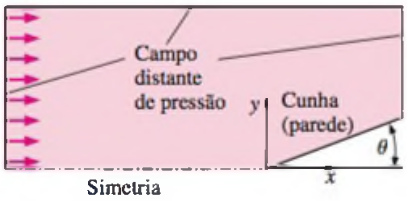


FIGURA 15–79
O domínio computacional e as condições de contorno para o escoamento compressível sobre uma cunha de semi-ângulo θ. Como o escoamento é simétrico com relação ao eixo x, apenas a metade superior é modelada na análise da CFD.

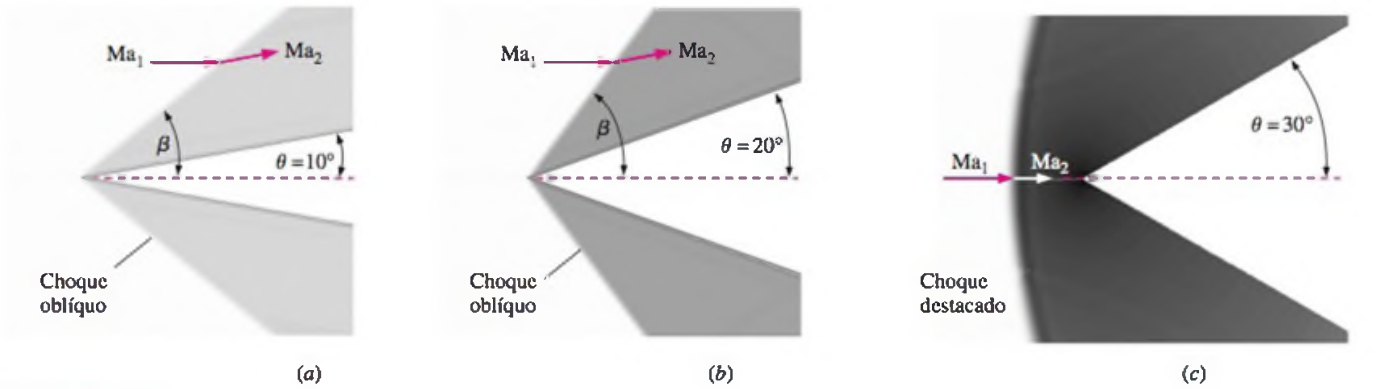


FIGURA 15–80
Os resultados da CFD (curvas do número de Mach em escala de cinza) do escoamento permanente, adiabático, não viscoso e compressível a $Ma_1 = 2{,}0$ sobre uma cunha de semi-ângulo θ = (*a*) 10°, (*b*) 20° e (*c*) 30°. Os contornos do número de Mach variam de Ma = 0,2 (mais escuro) até 2,0 (mais claro) em todos os casos. Para os dois semi-ângulos de cunha menores, um choque oblíquo fraco conectado se forma no bordo de ataque da cunha, mas para o caso de 30°, um choque destacado (onda curva) forma-se à frente da cunha. A força do choque aumenta com θ, como indica o sombreado mais escuro da corrente a jusante cinza do choque à medida que θ aumenta.

choque destacado a montante do bordo de ataque é um choque normal e, portanto, o escoamento a jusante daquela parte do choque é subsônico. À medida que o choque se curva para trás, ele se torna progressivamente mais fraco, e o número de Mach a jusante do choque aumenta, como indica o sombreado cinza mais claro.

15–6 ▪ CÁLCULOS DA CFD PARA O ESCOAMENTO EM CANAL ABERTO

Até agora, todos os nossos exemplos se relacionaram a um fluido de única fase (ar ou água). Entretanto, muitos códigos CFD comerciais podem processar o escoamento de uma mistura de gases (por exemplo, o monóxido de carbono do ar), o escoamento com duas fases do mesmo fluido (por exemplo, vapor e água líquida), e até mesmo o escoamento de dois fluidos em fases diferentes (por exemplo, água líquida e ar gasoso). Este último caso tem interesse para esta seção, a saber, o escoamento da água com uma superfície livre, acima da qual o ar é gasoso, ou seja, o escoamento em canal aberto. Apresentamos aqui alguns exemplos simples de soluções CFD de escoamentos de canal aberto.

Escoamento sobre uma Saliência na Parte Inferior de um Canal

Considere um canal bidimensional com fundo plano e horizontal. Em determinada localização ao longo da parte inferior do canal existe uma protuberância, com 1,0 m de comprimento e 0,10 m de altura no centro (Figura 15–81). A entrada de

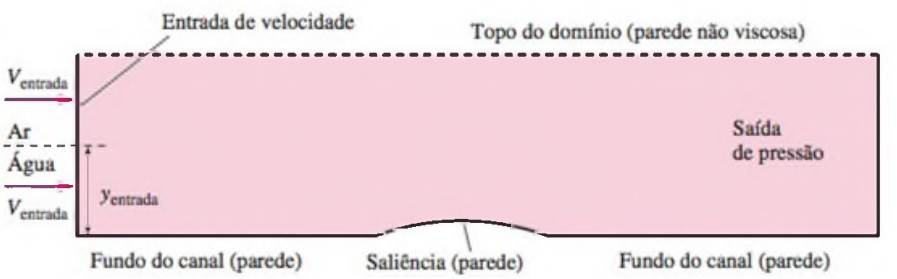


FIGURA 15–81
O domínio computacional do escoamento permanente, incompressível, bidimensional da água sobre uma saliência no fundo de um canal, com as condições de contorno identificadas. Dois fluidos são modelados no campo de escoamento — a água líquida e o ar acima da superfície livre da água. A profundidade do líquido $y_{entrada}$ e a velocidade de entrada $V_{entrada}$ são especificadas.

velocidade é dividida em duas partes — a parte inferior para a água líquida e a parte superior para o ar. Nos cálculos da CFD, a velocidade de entrada tanto do ar quanto da água é especificada como V_{entrada}. A profundidade da água na entrada do domínio computacional é especificada como y_{entrada}, mas a posição da superfície da água no restante do domínio é calculada. O escoamento é modelado como não viscoso.

Consideramos casos com entradas subcríticas e supercríticas (Capítulo 13). Os resultados dos cálculos CFD são mostrados na Figura 15–82 em três casos para comparação. No primeiro caso (Figura 15–82*a*), y_{entrada} é especificada como 0,30 m e V_{entrada} é especificada como 0,50 m/s. O número de Froude correspondente é calculado como

Número de Froude:
$$\text{Fr} = \frac{V_{\text{entrada}}}{\sqrt{g y_{\text{entrada}}}} = \frac{0{,}50 \text{ m/s}}{\sqrt{(9{,}81 \text{ m/s}^2)(0{,}30 \text{ m})}} = 0{,}291$$

Como Fr < 1, o escoamento na entrada é *subcrítico*, e a superfície do líquido se abaixa ligeiramente sobre a saliência (Figura 15–82*a*). O escoamento permanece subcrítico a jusante da saliência, e a altura da superfície do líquido se eleva ligeiramente de volta ao nível que tinha antes da saliência. O escoamento, portanto, é subcrítico em todas as partes.

No segundo caso (Figura 15–82*a*), y_{entrada} é especificada como 0,50 m e V_{entrada} é especificada como 4,0 m/s. O número de Froude correspondente é calculado como 1,81. Como Fr > 1, o escoamento na entrada é *supercrítico*, e a superfície do líquido se *eleva* sobre a saliência (Figura 15–82*b*). A jusante a profundidade do líquido retorna a 0,50 m, e a velocidade média retorna a 4,0 m/s, resultando em Fr = 1,81 — a mesma da entrada. Assim, esse escoamento é supercrítico em todas as partes.

Finalmente, mostramos os resultados de um terceiro caso (Figura 15–82*c*) no qual o escoamento que entra no canal é subcrítico (y_{entrada} = 0,50 m, V_{entrada} = 1,0 m/s e Fr = 0,452). Neste caso, a superfície da água diminui sobre a saliência, como era de esperar para o escoamento subcrítico. Entretanto, no lado a jusante da saliência, $y_{\text{saída}}$ = 0,25 m, $V_{\text{saída}}$ = 2,0 m/s e Fr = 1,28. Assim, esse escoamento começa subcrítico, mas muda para supercrítico a jusante da saliência. Se o domínio se estendesse mais a jusante, provavelmente veríamos um *salto hidráulico* que traria o número de Froude de volta para abaixo da unidade (subcrítico).

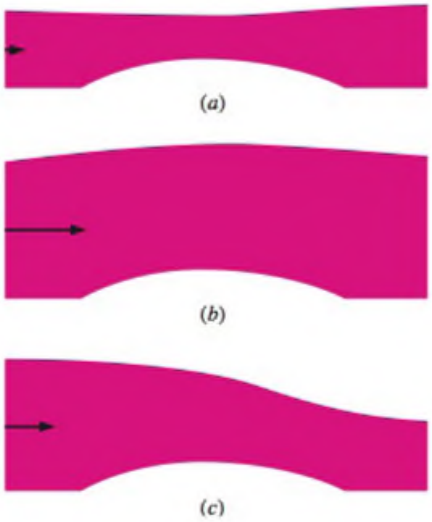


FIGURA 15–82
Os resultados da CFD para o escoamento incompressível e bidimensional da água sobre uma saliência ao longo no fundo do canal. Os contornos de fase estão traçados; o azul indica a água líquida e o branco indica o ar gasoso: (*a*) subcrítico a subcrítico (*b*) supercrítico a supercrítico e (*c*) subcrítico a supercrítico.

Escoamento através de uma Comporta Basculante (Salto Hidráulico)

Como último exemplo, consideramos um canal bidimensional com um fundo plano e horizontal, mas desta vez com uma comporta basculante (Figura 15–83). A profundidade da água na entrada do domínio computacional é especificada como y_{entrada} e a velocidade do escoamento de entrada é especificada como V_{entrada}. A parte inferior da comporta basculante está a uma distância a do fundo do canal. O escoamento é modelado como não viscoso.

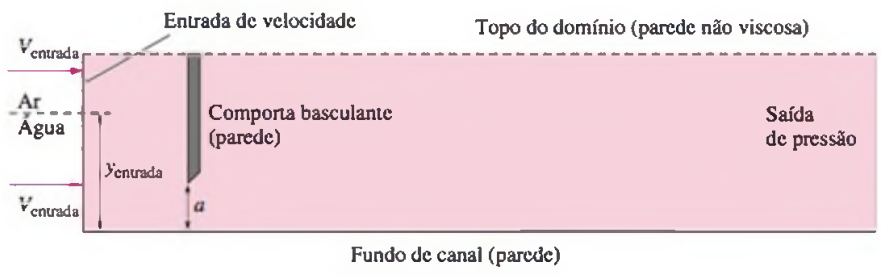


FIGURA 15–83
Domínio computacional do escoamento permanente, incompressível, bidimensional da água através de uma comporta basculante, com as condições de contorno identificadas. Dois fluidos são modelados no campo de escoamento — a água líquida e o ar acima da superfície livre da água. A profundidade do líquido y_{entrada} e a velocidade de entrada V_{entrada} são especificadas.

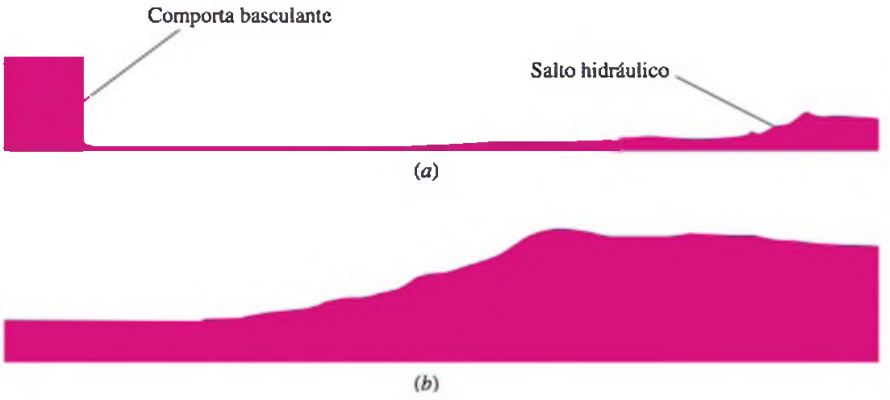


FIGURA 15–84
Os resultados da CFD para o escoamento incompressível, bidimensional da água através de uma comporta basculante em um canal aberto. Os contornos das fases estão traçados; o azul indica a água líquida e o branco indica o ar gasoso: (*a*) vista geral da comporta basculante e do salto hidráulico e (*b*) vista detalhada do salto hidráulico. O escoamento é altamente não permanente, e esses são instantâneos em um instante arbitrário.

Executamos o código CFD com $y_{\text{entrada}} = 12{,}0$ m e $V_{\text{entrada}} = 0{,}833$ m/s, resultando em um número de Froude de entrada de $\text{Fr}_{\text{entrada}} = 0{,}0768$ (subcrítico). A parte inferior da comporta basculante está a uma distância $a = 0{,}125$ m do fundo do canal. Os resultados dos cálculos CFD são mostrados na Figura 15–84. Após a passagem da água sob a comporta basculante, sua velocidade média aumenta para 12,8 m/s, e sua profundidade diminui para $y = 0{,}78$ m. Assim, Fr = 4,63 (supercrítico) a jusante da comporta basculante e a montante do salto hidráulico. A alguma distância a jusante, vemos um salto hidráulico no qual a profundidade média da água aumenta para $y = 3{,}54$ m e a velocidade média da água diminui para 2,82 m/s. Assim, o número de Froude a jusante do salto hidráulico é Fr = 0,478 (subcrítico). Observamos que a profundidade da água a jusante é significativamente mais baixa do que aquela a montante da comporta basculante, indicando uma dissipação relativamente grande em todo o salto hidráulico e a correspondente diminuição da energia específica do escoamento (Capítulo 13). A analogia entre a perda da energia específica através de um salto hidráulico no escoamento em canal aberto e a perda da pressão de estagnação através de uma onda de choque no escoamento compressível é reforçada.

APLICAÇÃO EM FOCO ■ Um Estômago Virtual

Autores Convidados: James G. Brasseur e Anupam Pal, Universidade do Estado da Pensilvânia

A função mecânica do estômago (chamada "motilidade" gástrica) é fundamental para a nutrição adequada, o fornecimento adequado de medicamentos e muitas disfunções gástricas como a gastroparesia. A Figura 15–85 mostra uma imagem de ressonância magnética (IRM) do estômago. O estômago é um misturador, um moedor, uma câmara de armazenamento e uma sofisticada bomba que controla a liberação do conteúdo gástrico líquido e sólido para o intestino delgado, onde ocorre o aproveitamento dos nutrientes. A liberação dos nutrientes é controlada pela abertura e pelo fechamento de uma válvula no final do estômago (o piloro) e pelas variações no tempo da diferença de pressão entre o estômago e o duodeno. A pressão gástrica é controlada pela tensão muscular acima da parede do estômago e pelas ondas de contração peristáltica que passam através do antro (Figura 15–85). Essas ondas de contração peristáltica do antro também quebram as partículas de alimentos e misturam o material dentro do estômago, seja alimento ou medicação. Entretanto, no momento não é possível medir os movimentos da mistura de fluido no estômago humano. A IRM, por exemplo, permite apenas um *esboço* do fluido magnetizado especial dentro do estômago. Para estudar esses movimentos invisíveis dos fluidos e seus efeitos, desenvolvemos um modelo do estômago em computador, usando a dinâmica dos fluidos computacional.

A matemática básica de nosso modelo computacional é deduzida das leis da mecânica dos fluidos. O modelo é uma forma de estender as medições da IRM da evolução temporal da geometria do estômago para os movimentos de fluidos dentro dele. Embora os modelos computacionais não possam descrever totalmente a complexidade da fisiologia gástrica, eles têm a grande vantagem de permitir a variação sistemática controlada dos parâmetros e, assim, as suscetibilidades que não podem ser medidas experimentalmente podem ser estudadas computacionalmente. Nosso estômago virtual aplica um método numérico chamado algoritmo de "rede de Boltzmann" que é adequado aos escoamentos de fluido das geometrias complexas, e às condições de contorno obtidas dos dados da IRM. Na Figura 15–86 prevemos os movimentos, a divisão e a mistura no estômago de comprimidos de medicamento de liberação estendida com 1 cm. Nessa experiência numérica o medicamento é mais denso do que o alimento altamente viscoso que está ao redor. Prevemos que as ondas peristálticas do antro geram redemoinhos recirculantes e "jatos" retropropulsivos dentro do estômago, os quais, por sua vez, geram altas tensões de cisalhamento que corroem a superfície do comprimido e liberam a medicação. Em seguida, a medicação se mistura pelos mesmos movimentos de fluido que a liberam. Descobrimos que os movimentos e a mistura do fluido gástrico dependem dos detalhes da variação de tempo na geometria do estômago e no piloro.

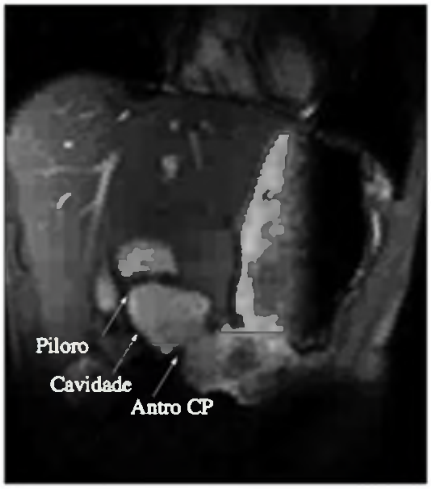


FIGURA 15–85
A imagem por ressonância magnética do estômago humano ao vivo em um instante mostrando as ondas de contração peristáltica (ou seja, a propagação) na região final do estômago (o antro). O piloro é um esfíncter, ou válvula, que permite a entrada dos nutrientes no duodeno (intestino delgado).
Desenvolvida por Anupam Pal e James Brasseur. Usada com permissão.

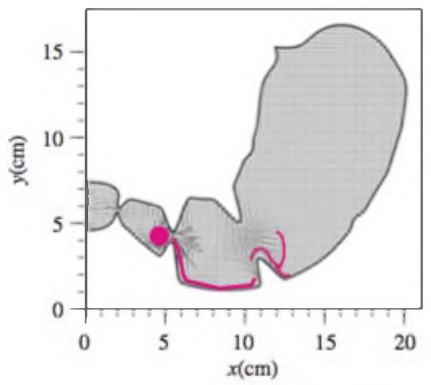


FIGURA 15–86
Simulação em computador dos movimentos do fluido dentro do estômago (vetores velocidade) com base nas ondas de contração peristálticas do antro (Figura 15–85), e liberação de um medicamento (trilha azul) de um comprimido de liberação prolongada (círculo azul).
Desenvolvida por Anupam Pal e James Brasseur. Usada com permissão.

Referências

Indireshkumar, K., Brasseur, J. G., Faas, H., Hebbard, G. S., Kunz, P., Dent, J., Boesinger, P., Feinle, C., Fried, M., Li, M. e Schwizer, W. "Relative Contribution of 'Pressure Pump' and 'Peristaltic Pump' to Slowed Gastric Emptying", *Amer J Physiol*, 278, p. G604–616, 2000.

Pal, A., Indireshkumar, K., Schwizer, W., Abrahamsson, B., Fried, M., Brasseur, J. G. "2004 Gastric Flow and Mixing Studied Using Computer Simulation", In Press, *Proc. Royal Soc. London. Biological Sciences*, outubro.

RESUMO

Embora não sejam tão onipresentes quanto as planilhas, nem tão fáceis de usar quanto os softwares de resolução matemáticos, os códigos da dinâmica dos fluidos computacional estão sempre melhorando e se tornando cada vez mais comuns. No passado, eles pertenciam ao domínio de cientistas especializados que escreviam seus próprios códigos e utilizavam supercomputadores, mas agora os códigos CFD comerciais com inúmeros recursos e interfaces amigáveis ao usuário podem ser obtidos para computadores pessoais a um custo razoável e estão disponíveis para engenheiros de todas as disciplinas. Porém, como mostra este capítulo, uma malha ruim, a escolha inadequada entre o escoamento laminar ou turbulento, as condições de contorno inapropriadas e/ou um dentre vários outros enganos podem levar a soluções CFD fisicamente incorretas, embora a saída colorida do gráfico sempre pareça boa. Assim, é imperativo que os usuários da CFD tenham um bom conhecimento dos fundamentos da mecânica dos fluidos para evitar respostas erradas de uma simulação. Além disso, comparações adequadas devem ser feitas com dados experimentais sempre que possível para validar as previsões da CFD. Tendo isso em mente, a CFD tem um potencial enorme para várias aplicações que envolvem os escoamentos de fluidos.

Mostramos exemplos das soluções CFD para os escoamentos laminar e turbulento. Para o escoamento laminar incompressível, a dinâmica dos fluidos computacional realiza um excelente trabalho, mesmo nos escoamentos não permanentes com separação. Na verdade, as soluções CFD laminares são "exatas" na medida que são limitadas pela resolução de malha e pelas condições de contorno. Infelizmente, muitos escoamentos de interesse prático para a engenharia são *turbulentos* e não laminares. A *simulação numérica direta* (DNS) tem grande potencial para a simulação de campos de escoamento turbulentos complexos, e os algoritmos para solucionar as equações do movimento (continuidade tridimensional e equações de Navier-Stokes) estão bem estabelecidos. Entretanto, a resolução de todas as escalas finas de um escoamento turbulento complexo com número de Reynolds alto exige computadores que são ordens de grandeza mais rápidos do que as máquinas mais rápidas de hoje. Ainda serão necessárias décadas de aperfeiçoamentos dos computadores, para que o DNS seja útil para os problemas práticos da engenharia. Nesse meio tempo, o melhor que podemos fazer é empregar *modelos de turbulência,* que são equações de transporte semi-empíricas que modelam (em vez de resolver) a mistura e difusão cada vez maior causada pelos redemoinhos turbulentos. Ao executarmos códigos CFD que utilizam modelos de turbulência, devemos observar se temos uma malha suficientemente fina e se todas as condições de contorno foram aplicadas adequadamente. Ao final, porém, independentemente da malha, ou da validade das condições de contorno, *os resultados CFD turbulentos só são bons se o modelo de turbulência usado for bom.* No entanto, embora nenhum modelo de turbulência seja *universal* (aplicável a *todos* os escoamentos turbulentos), obtemos um desempenho razoável para muitas simulações de escoamento práticas.

Demonstramos também neste capítulo que a CFD pode fornecer resultados úteis para escoamentos com transferência de calor, escoamentos compressíveis e escoamentos de canal aberto. Em todos os casos, porém, os usuários da CFD devem tomar cuidado ao escolher um domínio computacional apropriado, aplicar as condições de contorno adequadas, gerar uma boa malha e utilizar modelos e aproximações adequados. À medida que os computadores continuarem a se tornar mais rápidos e poderosos, a CFD assumirá um papel cada vez maior no projeto e na análise dos sistemas de engenharia complexos.

Nós apenas arranhamos a superfície da dinâmica dos fluidos computacional neste pequeno capítulo. Para tornar-se proficiente e competente na CFD, você deve freqüentar cursos avançados nas áreas dos métodos numéricos, mecânica dos fluidos, turbulência e transferência de calor. Esperamos que, no mínimo, este capítulo o tenha incentivado a estudar mais sobre este interessante assunto.

REFERÊNCIAS E SUGESTÕES DE LEITURA

1. C-J. Chen e S-Y. Jaw. *Fundamentals of Turbulence Modeling*. Washington, DC, 1994. Taylor, Brook, 1998
2. J. M. Cimbala, H. Nagib e A. Roshko. "Large Structure in the Far Wakes of Two-Dimensional Bluff Bodies", *Journal of Fluid Mechanics,* 190, p. 265–298, 1988.
3. S. Schreier. *Compressible Flow*. Nova Iorque: Wiley-Interscience, capítulo 6 (Transonic Flow), p. 285–293, 1982.
4. J. C. Tannehill, D. A. Anderson e R. H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2. ed. Washington, DC: Taylor, Brook, 1997
5. H. Tennekes e J. L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1972.
6. D. J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Nova Iorque: Van Nostrand Reinhold Co., 1977.
7. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.
8. F. M. White. *Viscous Fluid Flow*, 2. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1991.
9. D. C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*, 2. ed. La Cañada, CA: DCW Industries, Inc., 1998.
10. C. H. K. Williamson. "Oblique and Parallel Modes of Vortex Shedding in the Wake of a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers", *J. Fluid Mech.*, 206, p. 579–627, 1989.

PROBLEMAS*

Fundamentos, Geração de Malha e Condições de Contorno

15–1C Um código CFD é usado para solucionar um escoamento bidimensional (x e y), incompressível e laminar sem superfícies livres. O fluido é newtoniano. São usadas condições de contorno apropriadas. Liste as variáveis (incógnitas) do problema, e liste as equações correspondentes a serem solucionadas pelo computador.

15–2C Dê uma breve definição (algumas linhas) e a descrição de cada um dos itens a seguir e forneça exemplo(s) se for útil: (*a*) domínio computacional, (*b*) malha, (*c*) equação de transporte, (*d*) equações combinadas.

15–3C Qual é a diferença entre um *nó* e um *intervalo* e como eles se relacionam às *células*? Na Figura P15–3C, quantos nós e quantos intervalos há em cada lado?

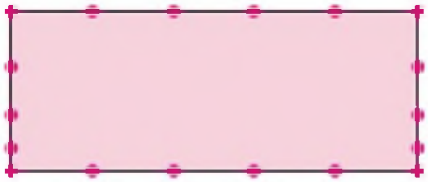


FIGURA P15–3C

15–4C Para o domínio computacional bidimensional da Figura P15–3C, com a distribuição de nós dada, represente uma malha estruturada simples usando células de quatro lados, e represente uma malha não estruturada simples usando células de três lados. Quantas células há em cada uma? Discuta.

15–5C Resuma as oito etapas envolvidas em uma análise típica da CFD para um campo de escoamento laminar e permanente.

15–6C Suponhamos que você use a CFD para simular o escoamento através de um duto no qual há um cilindro circular como na Figura P15–6C. O duto é longo, mas para economizar recursos computacionais você escolhe um domínio computacional apenas na vizinhança do cilindro. Explique por que o lado a jusante do domínio computacional deve estar mais adiante do cilindro do que do lado a montante.

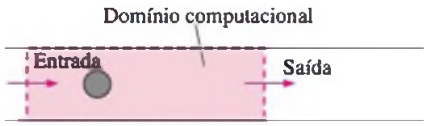


FIGURA P15–6C

15–7C Escreva uma breve discussão (algumas linhas) sobre o significado de cada um dos itens a seguir com relação a uma solução CFD iterativa: (*a*) condições iniciais (*b*) resíduo, (*c*) iteração, (*d*) pós-processamento.

15–8C Discuta brevemente como cada um dos itens a seguir é usado pelos códigos CFD para agilizar o processo de iteração: (*a*) multimalha e (*b*) tempo artificial.

15–9C Das condições de contorno discutidas neste capítulo, liste todas aquelas que podem ser aplicadas ao lado direito do domínio computacional bidimensional representados na Figura P15–9C. Por que as *outras* condições de contorno não podem ser aplicadas a este lado?

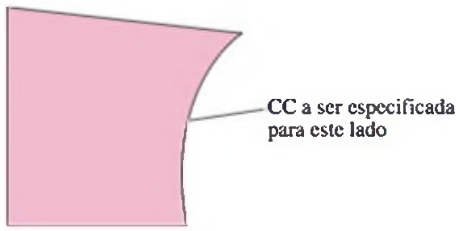


FIGURA P15–9C

15–10C Qual é o método padrão para testar a resolução de malha adequada usando a CFD?

15–11C Qual é a diferença entre uma entrada de pressão e uma condição de contorno de entrada de velocidade? Explique por que você não pode especificar a pressão e a velocidade a uma condição de contorno de entrada de velocidade ou a uma condição de contorno de entrada de pressão.

15–12C Um código CFD incompressível é usado para simular o escoamento do ar através de um canal retangular bidimensional (Figura P15–12C). O domínio computacional consiste em quatro blocos, como está indicado. O escoamento entra no bloco 4 do canto superior direito e sai do bloco 1 à esquerda como está mostrado. A velocidade de entrada V é conhecida e a pressão de saída P_s também é conhecida. Rotule as condições de contorno que devem ser aplicadas a cada lado de cada bloco desse domínio computacional.

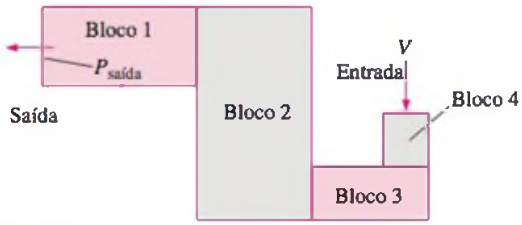


FIGURA P15–12C

15–13C Considere o Problema 15–12C novamente, exceto que a condição de contorno no lado comum entre os blocos 1 e 2 será um *ventilador* com uma elevação de pressão especificada da direita para a esquerda do ventilador. Suponhamos que um código CFD incompressível seja executado em ambos os casos (com e sem o ventilador). Com todas as condições iguais, a pressão na entrada aumentará ou diminuirá? Por quê? O que acontecerá à velocidade da saída? Explique.

15–14C Liste seis condições de contorno que são usadas com a CFD para solucionar os problemas de escoamento de fluido incompressível. Para cada um, dê uma breve descrição e um exemplo de como essa condição de contorno é usada.

15–15 Um código CFD é usado para simular o escoamento sobre um aerofólio bidimensional a um ângulo de ataque. Uma parte do domínio computacional perto do aerofólio é representada na Figura P15–15 (o domínio computacional se estende bem além da região representada pela linha tracejada). Represente

* Problemas identificados com a letra "C" são questões conceituais e encorajamos os estudantes a responder a todos eles. Problemas com o ícone são abrangentes e devem ser resolvidos com um computador, usando preferencialmente o programa EES.

uma malha estruturada grosseira usando células de quatro lados, e represente uma malha não estruturada grosseira usando células de três lados na região mostrada. Verifique se agrupou as células nos locais apropriados. Discuta as vantagens e desvantagens de cada tipo de malha.

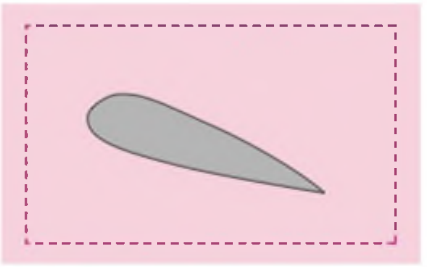


FIGURA P15–15

15–16 Para o aerofólio do Problema 15–15 represente uma malha híbrida grosseira e explique as vantagens de tal malha.

15–17 Um código CFD incompressível é usado para simular o escoamento da água através de um canal retangular bidimensional no qual existe um cilindro circular (Figura P15–17). Um escoamento turbulento com média de tempo é gerado usando um modelo de turbulência. A simetria horizontal com relação ao cilindro é considerada. O escoamento entra da esquerda e sai para a direita como mostra a figura. A velocidade de entrada V é conhecida e a pressão de saída P_s também é conhecida. Gere o bloqueio de uma malha estruturada usando blocos de quatro lados, e represente uma malha grosseira usando células de quatro lados, tomando o cuidado de agrupar as células perto da parede. Tome cuidado também para evitar células com inclinação alta. Rotule as condições de contorno que devem ser aplicadas a cada lado de cada bloco do seu domínio computacional. (Sugestão: seis a sete blocos são suficientes.)

FIGURA P15–17

15–18 Um código CFD incompressível é usado para simular o escoamento da gasolina através de um canal retangular bidimensional no qual existe um cilindro circular grande (Figura P15–18). O escoamento entra da esquerda e sai para a direita como mostra a figura. Um escoamento turbulento com média de tempo é gerado usando um modelo de turbulência. A simetria vertical é considerada. A velocidade de entrada V é conhecida e a pressão de saída P_s também é conhecida. Gere o bloqueio de uma malha estruturada usando blocos de quatro lados, e represente uma malha grosseira usando células de quatro lados, tomando o cuidado de agrupar as células perto da parede. Tome cuidado também para evitar células com inclinação alta. Rotule as condições de contorno que devem ser aplicadas a cada lado de cada bloco do seu domínio computacional.

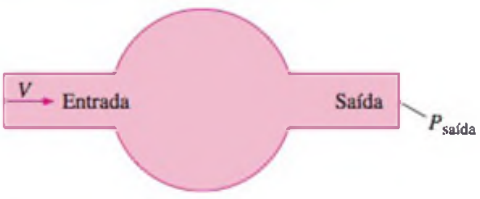


FIGURA P15–18

15–19 Desenhe novamente a malha multiblocos estruturada da Figura 15–12*b* para o caso no qual seu código CFD pode processar apenas *blocos elementares*. Renumere todos os blocos e indique quantos intervalos i e j estão contidos em cada bloco. Com quantos blocos elementares você fica? Some todas as células e verifique se o número total de células não mudou.

15–20 Suponha que nosso código CFD possa processar blocos *não elementares*. Combine o maior número de blocos da Figura 15–12*b* que puder. A única restrição é que em qualquer bloco, o número de intervalos i e o número de intervalos j devem ser constantes. Mostre que você pode criar uma malha estruturada com apenas *três* blocos não elementares. Renumere todos os blocos e indique quantos intervalos i e j estão contidos em cada bloco. Some todas as células e verifique se o número total de células não mudou.

15–21 Um novo trocador de calor está sendo projetado com o objetivo de misturar o fluido a jusante de cada estágio do modo mais completo possível. Anita cria um projeto cuja seção transversal para um estágio está representada na Figura P15–21. A geometria se estende periodicamente acima e abaixo além da região mostrada. Ela utiliza várias dezenas de tubos retangulares inclinados com um ângulo de ataque alto para garantir que o escoamento se separe e se combine nas esteiras. O desempenho dessa geometria deve ser testado usando simulações CFD com média de tempo e bidimensionais com um modelo de turbulência, e os resultados serão comparados àqueles das geometrias concorrentes. Represente o domínio computacional mais simples possível que pode ser usado para simular esse escoamento. Rotule e indique todas as condições de contorno do seu diagrama. Discuta.

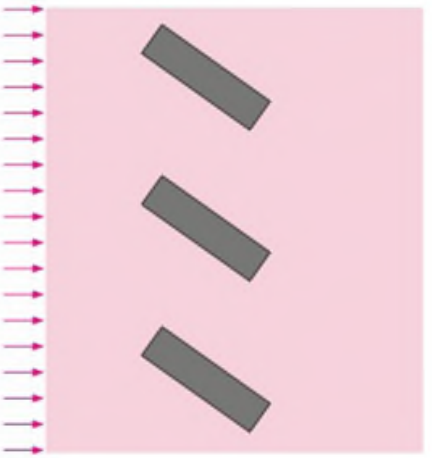


FIGURA P15–21

15–22 Represente uma malha multiblocos estruturada grosseira com quatro blocos elementares de quatro lados e quatro células de quatro lados para o domínio computacional do Problema 15–21.

15–23 Anita executa um código CFD usando o domínio computacional e a malha desenvolvida nos Problemas 15–21 e 15–22. Infelizmente, o código CFD tem dificuldade em convergir, e Anita percebe que existe um *escoamento reverso* na saída (extrema direita do domínio computacional). Explique por que existe o escoamento reverso e discuta o que Anita deve fazer para corrigir o problema.

15–24 Como acompanhamento do projeto do trocador de calor do Problema 15–21, suponhamos que o projeto de Anita seja selecionado com base nos resultados de uma análise da CFD de único estágio. Agora ela deve simular *dois* estágios do trocador

de calor. A segunda linha dos tubos retangulares é defasada e inclinada na direção oposta da primeira linha para promover a mistura (Figura P15–24). A geometria se estende periodicamente acima e abaixo além da região mostrada. Represente o domínio computacional que pode ser usado para simular esse escoamento. Rotule e indique todas as condições de contorno do seu diagrama. Discuta.

FIGURA P15–24

15–25 Represente uma malha multiblocos estruturada com blocos elementares de quatro lados para o domínio computacional do Problema 15–24. Cada bloco deve ter células estruturadas de quatro lados, mas você não precisa representar a malha, apenas a topologia do bloco. Tente deixar todos os blocos com a forma mais retangular possível para evitar células com inclinação alta nos cantos. Suponha que o código CFD exija que a distribuição de nós nos pares periódicos dos lados seja idêntico (os dois lados de um par periódico estão "ligados" no processo de geração de malha). Considere também que o código CFD não permita que os lados de um bloco se dividam para a aplicação das condições de contorno.

Problemas Gerais em CFD*

15–26 Considere o ipsílon bidimensional da Figura P15–26. As dimensões estão em metros e o desenho não está em escala. O escoamento incompressível entra da esquerda e se divide em duas partes. Gere três malhas grosseiras, com distribuições de nós idênticas em todos os lados do domínio computacional: (*a*) malha multibloco estruturada, (*b*) malha triangular não estruturada e (c) malha quadrilateral não estruturada. Compare o número de células de cada caso e comente a qualidade da malha em cada caso.

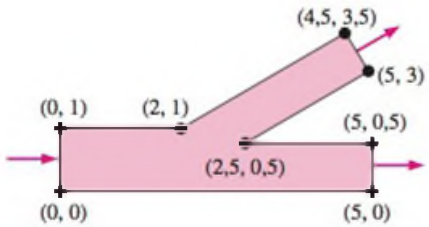


FIGURA P15–26

15–27 Selecione uma das malhas geradas no Problema. 15–16 e execute uma solução CFD para o escoamento laminar do ar com uma velocidade de entrada uniforme de 0,02 m/s. Defina a pressão de saída em ambas as saídas com o mesmo valor e calcule a queda de pressão através do ipsílon. Calcule também a porcentagem do escoamento de entrada que sai de cada ramal. Gere um gráfico das linhas de corrente.

15–28 Repita o Problema 15–27, exceto pelo escoamento *turbulento* do ar com uma velocidade de entrada uniforme de 10,0 m/s. Além disso, defina a intensidade de turbulência na entrada como 10% com uma escala de comprimento turbulento de 0,5 m. Use o modelo de turbulência k-ε com as funções de parede. Defina a pressão de saída em ambas as saídas com o mesmo valor e calcule a queda da pressão através do ipsílon. Calcule também a porcentagem do escoamento de entrada que sai de cada ramal. Gere um gráfico das linhas de corrente. Compare os resultados com aqueles do escoamento laminar (Problema 15–27).

15–29 Gere um domínio computacional para estudar o crescimento da camada limite laminar em uma placa a Re = 10.000. Gere uma malha bastante grosseira e, em seguida, refine continuamente essa malha até que a solução se torne independente da malha. Discuta.

15–30 Repita o Problema 15–29, exceto para uma camada limite *turbulenta* a Re = 10^6. Discuta.

15–31 Gere um domínio computacional para estudar a ventilação de uma sala (Figura P15–31). Especificamente, gere uma sala retangular com uma entrada de velocidade no teto para modelar o fornecimento de ar, e uma saída de pressão no teto para modelar o retorno do ar. Você pode fazer uma aproximação bidimensional para simplificar (a sala é infinitamente longa na direção normal à página na Figura P15–31). Use uma malha retangular estruturada. Trace as linhas de corrente e os vetores de velocidade. Discuta.

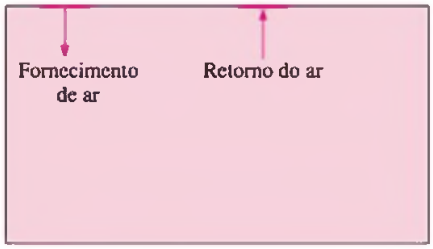


FIGURA P15–31

15–32 Repita o Problema 15–31, exceto pelo uso de uma malha triangular não estruturada, mantendo todo o restante igual. Você obtém os mesmos resultados do Problema 15–31? Compare e discuta.

15–33 Repita o Problema 15–31, exceto pela mudança das ventilações de fornecimento e/ou retorno do ar nas diversas localizações do teto. Compare e discuta.

15–34 Selecione uma das geometrias de sala dos Problemas 15–31 e 15–33, e adicione a equação da energia aos cálculos. Em particular, modele uma sala com *condicionamento de ar*, especificando o suprimento de ar como frio (T = 18°C), enquanto as paredes, o piso e o teto estão quentes (T = 26°C). Ajuste a velocidade do suprimento de ar até que a temperatura média da sala esteja o mais próximo possível de 22°C. Quanta ventilação (em termos do número de mudanças do volume de ar na sala por hora) é necessária para resfriar esta sala até uma temperatura média de 22°C? Discuta.

15–35 Repita o Problema 15–34, exceto pela criação de uma sala *tridimensional*, com fornecimento e retorno do ar no teto.

* Estes problemas exigem um software CFD, embora esta não seja nenhuma marca em particular.

Compare com os dois resultados bidimensionais do Problema 15–34 com os resultados tridimensionais mais realistas deste problema. Discuta.

15–36 Gere um domínio computacional para estudar o escoamento compressível do ar através de um bocal convergente com pressão atmosférica na saída do bocal (Figura P15–36). As paredes do bocal podem ser aproximadas como não viscosas (tensão de cisalhamento zero). Execute vários casos com diversos valores de pressão de entrada. Quanta pressão de entrada é necessária para estrangular o escoamento? O que acontece se a pressão de entrada é mais alta do que esse valor? Discuta.

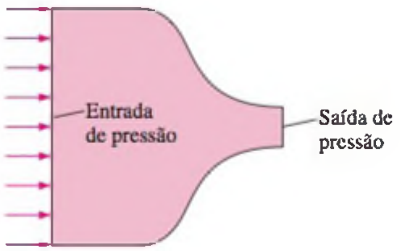


FIGURA P15–36

15–37 Repita o Problema 15–36, exceto pela remoção da aproximação do escoamento não viscoso. Em vez disso, deixe que o escoamento seja turbulento, com paredes uniformes e sem deslizamento. Compare seus resultados com aqueles do Problema 15–36. Qual é o principal efeito do atrito neste problema? Discuta.

15–38 Gere um domínio computacional para estudar o escoamento laminar e incompressível sobre um corpo aerodinâmico bidimensional (Figura P15–38). Gere diversas formas de corpo e calcule o coeficiente de arrasto para cada forma. Qual é o menor valor de C_D que pode ser atingido? (Observação: Por diversão, este problema pode ser transformado em um concurso entre os alunos. Quem pode gerar a forma de corpo com menor arrasto?)

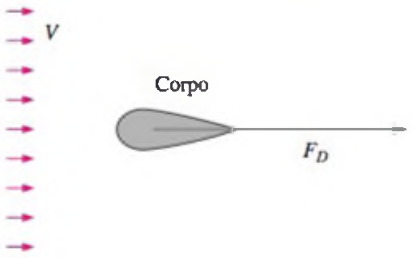


FIGURA P15–38

15–39 Repita o Problema 15–38, exceto pelo corpo *axissimétrico* e não bidimensional. Compare com o caso bidimensional. Qual caso tem o menor coeficiente de arrasto? Discuta.

15–40 Repita o Problema 15–39, exceto pelo escoamento *turbulento* e não laminar. Compare com o caso laminar. Qual caso tem o menor coeficiente de arrasto? Discuta.

15–41 Gere um domínio computacional para estudar as ondas de Mach em um canal supersônico bidimensional (Figura P15–41). Especificamente, o domínio deve consistir em um canal retangular simples com uma entrada supersônica (Ma = 2,0), e com uma saliência muito pequena na parede inferior. Usando o ar com a aproximação de escoamento não viscoso, gere uma onda de Mach, como foi representado. Meça o ângulo de Mach, e compare com a teoria (Capítulo 12). Discuta também o que acontece quando a onda de Mach atinge a parede

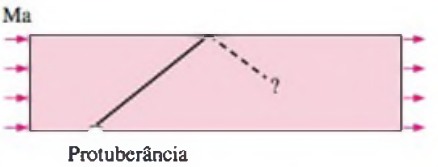


FIGURA P15–41

15–42 Repita o Problema 15–41, exceto pelos diversos valores do número de Mach, variando entre 1,10 e 3,0. Trace o ângulo de Mach calculado como uma função do número de Mach e compare com o ângulo teórico de Mach (Capítulo 12). Discuta.

Problemas de Revisão

15–43C Para cada declaração selecione se ela é verdadeira ou falsa, e discuta sua resposta rapidamente.

(*a*) A validade física da solução CFD sempre melhora à medida que a malha é refinada.

(*b*) O componente x da equação de Navier–Stokes é um exemplo de uma equação de transporte.

(*c*) Para o mesmo número de nós de uma malha bidimensional, uma malha estruturada geralmente tem menos células do que uma malha triangular não estruturada.

(*d*) Uma solução CFD para um escoamento turbulento com média de tempo é tão boa quanto o modelo de turbulência usado nos cálculos.

15–44 No Problema 15–18 aproveitamos a simetria vertical ao construirmos nosso domínio computacional e malha. Por que também não aproveitamos a simetria lateral neste exercício? Repita a discussão para o caso do escoamento potencial.

15–45C Alfredo cria o domínio computacional representado na Figura P15–45C para simular o escoamento através de uma contração repentina em um duto bidimensional. Ele está interessado na queda de pressão com média de tempo (coeficiente de perda menor) criada pela contração repentina. Alfredo gera uma malha e calcula o escoamento com um código CFD, considerando o escoamento permanente, turbulento e incompressível (com um modelo de turbulência).

(*a*) Discuta uma forma pela qual ele poderia melhorar esse domínio computacional e malha, para obtermos os *mesmos* resultados com aproximadamente metade do tempo de computador.

(*b*) Pode haver uma falha fundamental no modo como Alfredo definiu seu domínio computacional. Qual é essa falha? Discuta o que seria diferente na definição de Alfredo.

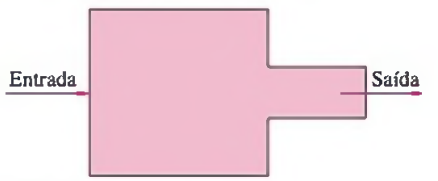


FIGURA P15–45C

15–46C Pense nos modernos sistemas computacionais com memória grande e alta velocidade. Qual recurso de tais computadores se presta a solucionar os problemas CFD usando uma malha multibloco com números aproximadamente iguais de células em cada bloco individual? Discuta.

15–47C Qual é a diferença entre *multimalha* e *multibloco*? Discuta como cada um pode ser usado para agilizar um cálculo CFD. Eles podem ser aplicados juntos?

15–48C Suponhamos que você tenha uma geometria bastante complexa e um código CFD que pode processar malhas não estruturadas com células triangulares. Seu código de geração de malha pode criar uma malha não estruturada de forma muito rápida. Dê alguns motivos pelos quais seria mais sensato criar uma malha estruturada multibloco em vez disso. Em outras palavras, isso vale o esforço? Discuta.

15–49 Gere um domínio computacional e uma malha, e calcule o escoamento através do trocador de calor de único estágio do Problema 15–21, com os elementos de aquecimento definidos a um ângulo de ataque de 45° com relação à direção horizontal. Defina a temperatura do ar de entrada como 20°C, e a temperatura da parede dos elementos de aquecimento como 120°C. Calcule a temperatura média do ar na saída.

15–50 Repita os cálculos do Problema. 15–49 para diversos ângulos de ataque dos elementos de aquecimento de 0 (horizontal) até 90° (vertical). Use condições de entrada e de parede idênticas em cada caso. Qual ângulo de ataque oferece a maior transferência de calor para o ar? Especificamente, qual ângulo de ataque resulta na maior temperatura média de saída?

15–51 Gere um domínio computacional e uma malha, e calcule o escoamento através do trocador de calor de dois estágios do Problema 15–24, com os elementos de aquecimento do primeiro estágio definidos a um ângulo de ataque de 45° com relação à horizontal, e os elementos do segundo estágio definidos com um ângulo de ataque de –45°. Defina a temperatura do ar de entrada como 20°C, e a temperatura da parede dos elementos de aquecimento como 120°C. Calcule a temperatura média do ar na saída.

15–52 Repita os cálculos do Problema. 15–51 para diversos ângulos de ataque dos elementos de aquecimento de 0 (horizontal) até 90° (vertical). Use condições de entrada e de parede idênticas em cada caso. Observe que o segundo estágio dos elementos de aquecimento sempre deve ser definido com um ângulo de ataque que é o negativo daquele do primeiro estágio. Qual ângulo de ataque oferece a maior transferência de calor para o ar? Especificamente, qual ângulo de ataque resulta na maior temperatura média de saída? Esse é o mesmo ângulo calculado para o trocador de calor de estágio único do Problema 15–50? Discuta.

15–53 Gere um domínio computacional e uma malha, e calcule o escoamento turbulento permanente fixo sobre um cilindro circular que gira (Figura P15–53). Em qual direção a força lateral age sobre o corpo — acima ou abaixo? Explique. Trace as linhas de corrente do escoamento. Onde está o ponto de estagnação a montante?

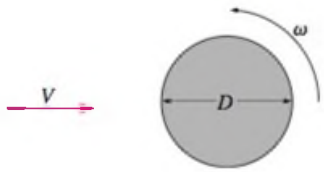


FIGURA P15–53

15–54 Para o cilindro giratório da Figura P15–53, gere um parâmetro sem dimensão para a velocidade rotacional com relação à velocidade de corrente livre (combine as variáveis ω, D e V em um grupo Pi não dimensional). Repita os cálculos do Problema 15–53 para diversos valores de velocidade angular ω. Use condições de entrada idênticas em cada caso. Trace os coeficientes de elevação e arrasto como funções do seu parâmetro sem dimensão. Discuta.

15–55 Considere o escoamento do ar em um rebaixamento bidimensional ao longo do piso de uma sala grande, onde o escoamento coincide com o eixo x (Figura P15–55). Gere um domínio computacional e uma malha apropriados. Usando a aproximação do escoamento não viscoso, calcule o componente da velocidade vertical y como função da distância para longe do rebaixamento e ao longo do eixo y. Compare com os resultados do escoamento potencial do Capítulo 10 para o escoamento em um sumidouro de linha. Discuta.

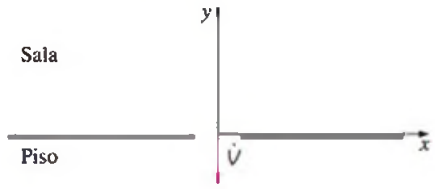


FIGURA P15–55

15–56 Para o rebaixamento do Problema 15–55, altere o escoamento para laminar em vez de não-viscoso e calcule o campo de escoamento. Compare seus resultados com o caso do escoamento não viscoso e com o caso do escoamento potencial do Capítulo 10. Trace as curvas de vorticidade. Onde a aproximação de escoamento irrotacional é apropriada? Discuta.

15–57 Gere um domínio computacional e uma malha, e calcule o escoamento do ar em uma entrada de aspirador de pó bidimensional (Figura P15–57), usando a aproximação de escoamento não viscoso. Compare seus resultados com aqueles previstos no Capítulo 10 para o escoamento potencial. Discuta.

15–58 Para o aspirador de pó do Problema 15–57, altere o escoamento para laminar em vez de não-viscoso e recalcule o campo de escoamento. Compare seus resultados com o caso do escoamento não viscoso e com o caso do escoamento potencial do Capítulo 10. Discuta.

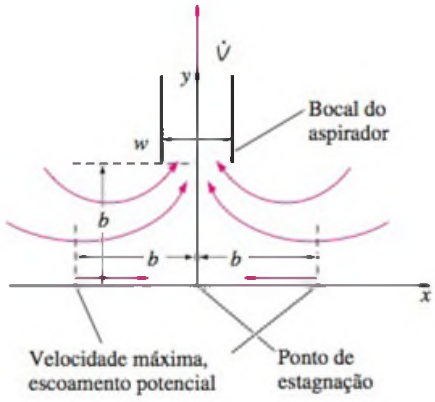


FIGURA P15–57

APÊNDICE

TABELAS E DIAGRAMAS DE PROPRIEDADES (EM UNIDADES SI)*

TABELA A–1 Massa molar, constante de gás e calores específicos dos gases de algumas substâncias

TABELA A–2 Propriedades dos pontos de ebulição e congelamento

TABELA A–3 Propriedades da água saturada

TABELA A–4 Propriedades do refrigerante saturado 134a

TABELA A–5 Propriedades da amônia saturada

TABELA A–6 Propriedades do propano saturado

TABELA A–7 Propriedades dos líquidos

TABELA A–8 Propriedades dos metais líquidos

TABELA A–9 Propriedades do ar à pressão de 1 atm

TABELA A–10 Propriedades dos gases à pressão de 1 atm

TABELA A–11 Propriedades da atmosfera a grandes altitudes

FIGURA A–12 O diagrama de Moody para o fator de atrito do escoamento completamente desenvolvido em tubos circulares

TABELA A–13 Funções de escoamento compressível isentrópico unidimensional de um gás ideal com $k = 1{,}4$

TABELA A–14 Funções de choque normal unidimensional para um gás ideal com $k = 1{,}4$

TABELA A–15 Funções de escoamento de Rayleigh para um gás ideal com $k = 1{,}4$

TABELA A–16 Funções de escoamento de Fanno para um gás ideal com $k = 1{,}4$

* A maioria das propriedades das tabelas foi obtida do banco de dados de propriedades do EES, e as fontes originais estão listadas abaixo das tabelas. As propriedades quase sempre são listadas até dígitos mais significativos do que a exatidão alegada, com a finalidade de minimizar o erro de arredondamento acumulado dos cálculos feitos à mão, e para garantir uma coincidência mais exata com os resultados obtidos com o EES.

TABELA A–1

Massa molar, constante de gás e calores específicos dos gases de algumas substâncias

Substância	Massa Molar M, kg/kmol	Constante de Gás R, kJ/kg · K*	Dados de Calor Específico a 25°C c_p, kJ/kg · K	c_v, kJ/kg · K	$k = c_p/c_v$
Ar	28,97	0,2870	1,005	0,7180	1,400
Amônia, NH_3	17,03	0,4882	2,093	1,605	1,304
Argônio, Ar	39,95	0,2081	0,5203	0,3122	1,667
Bromo, Br_2	159,81	0,05202	0,2253	0,1732	1,300
Isobutano, C_4H_{10}	58,12	0,1430	1,663	1,520	1,094
n-Butano, C_4H_{10}	58,12	0,1430	1,694	1,551	1,092
Dióxido de carbono, CO_2	44,01	0,1889	0,8439	0,6550	1,288
Monóxido de carbono, CO	28,01	0,2968	1,039	0,7417	1,400
Cloro, Cl_2	70,905	0,1173	0,4781	0,3608	1,325
Clorodifluorometano (R-22), $CHClF_2$	86,47	0,09615	0,6496	0,5535	1,174
Etano, C_2H_6	30,070	0,2765	1,744	1,468	1,188
Etileno, C_2H_4	28,054	0,2964	1,527	1,231	1,241
Flúor, F_2	38,00	0,2187	0,8237	0,6050	1,362
Hélio, He	4,003	2,077	5,193	3,116	1,667
n-Heptano, C_7H_{16}	100,20	0,08297	1,649	1,566	1,053
n-Hexano, C_6H_{14}	86,18	0,09647	1,654	1,558	1,062
Hidrogênio, H_2	2,016	4,124	14,30	10,18	1,405
Criptônio, Kr	83,80	0,09921	0,2480	0,1488	1,667
Metano, CH_4	16,04	0,5182	2,226	1,708	1,303
Néon, Ne	20,183	0,4119	1,030	0,6180	1,667
Nitrogênio, N_2	28,01	0,2968	1,040	0,7429	1,400
Óxido nítrico, NO	30,006	0,2771	0,9992	0,7221	1,384
Dióxido de nitrogênio, NO_2	46,006	0,1889	0,8060	0,6171	1,306
Oxigênio, O_2	32,00	0,2598	0,9180	0,6582	1,395
n-Pentano, C_5H_{12}	72,15	0,1152	1,664	1,549	1,074
Propano, C_3H_8	44,097	0,1885	1,669	1,480	1,127
Propileno, C_3H_6	42,08	0,1976	1,531	1,333	1,148
Vapor, H_2O	18,015	0,4615	1,865	1,403	1,329
Dióxido de enxofre, SO_2	64,06	0,1298	0,6228	0,4930	1,263
Tetraclorometano, CCl_4	153,82	0,05405	0,5415	0,4875	1,111
Tetrafluoretano (R-134a), $C_2H_2F_4$	102,03	0,08149	0,8334	0,7519	1,108
Trifluoretano (R-143a), $C_2H_3F_3$	84,04	0,09893	0,9291	0,8302	1,119
Xenônio, Xe	131,30	0,06332	0,1583	0,09499	1,667

* A unidade kJ/kg · K equivale a kPa · m^3/kg · K. A constante de gás é calculada de $R = R_u/M$, onde $R_u = 8,31447$ kJ/kmol · K é a constante de gás universal e M é a massa molar.

Fonte: Os valores de calor específico são obtidos primariamente das rotinas de propriedades preparadas pelo The National Institute of Standards and Technology (NIST), Gaithersburg, MD.

TABELA A–2

Propriedades dos pontos de ebulição e congelamento

	Dados de Ebulição a 1 atm		Dados de Congelamento		Propriedades Líquidas		
Substância	Ebulição Normal Ponto, °C	Calor Latente de Vaporização h_{fg}, kJ/kg	Congelamento Ponto, °C	Calor Latente de Fusão h_{if}, kJ/kg	Temperatura, °C	Densidade ρ, kg/m^3	Calor Específico c_p, kJ/kg · K
Amônia	−33,3	1357	−77,7	322,4	−33,3	682	4,43
					−20	665	4,52
					0	639	4,60
					25	602	4,80
Argônio	−185,9	161,6	−189,3	28	−185,6	1394	1,14
Benzeno	80,2	394	5,5	126	20	879	1,72
Água salgada (20% de cloreto de sódio por massa)	103,9	—	−17,4	—	20	1150	3,11
n-Butano	−0,5	385,2	−138,5	80,3	−0,5	601	2,31
Dióxido de Carbono	−78,4*	230,5 (a 0°C)	−56,6		0	298	0,59
Etanol	78,2	838,3	−114,2	109	25	783	2,46
Álcool etílico	78,6	855	−156	108	20	789	2,84
Etileno glicol	198,1	800,1	−10,8	181,1	20	1109	2,84
Glicerina	179,9	974	18,9	200,6	20	1261	2,32
Hélio	−268,9	22,8	—	—	−268,9	146,2	22,8
Hidrogênio	−252,8	445,7	−259,2	59,5	−252,8	70,7	10,0
Isobutano	−11,7	367,1	−160	105,7	−11,7	593,8	2,28
Querosene	204–293	251	−24,9	—	20	820	2,00
Mercúrio	356,7	294,7	−38,9	11,4	25	13.560	0,139
Metano	−161,5	510,4	−182,2	58,4	−161,5	423	3,49
					−100	301	5,79
Metanol	64,5	1100	−97,7	99,2	25	787	2,55
Nitrogênio	−195,8	198,6	−210	25,3	−195,8	809	2,06
					−160	596	2,97
Octano	124,8	306,3	−57,5	180,7	20	703	2,10
Óleo (leve)					25	910	1,80
Oxigênio	−183	212,7	−218,8	13,7	−183	1141	1,71
Petróleo	—	230–384			20	640	2,0
Propano	−42,1	427,8	−187,7	80,0	−42,1	581	2,25
					0	529	2,53
					50	449	3,13
Refrigerante-134a	−26,1	216,8	−96,6	—	−50	1443	1,23
					−26,1	1374	1,27
					0	1295	1,34
					25	1207	1,43
Água	100	2257	0,0	333,7	0	1000	4,22
					25	997	4,18
					50	988	4,18
					75	975	4,19
					100	958	4,22

* Temperatura de sublimação. (A pressões abaixo da pressão do ponto triplo de 518 kPa, o dióxido de carbono existe como um sólido ou um gás. Da mesma forma, a temperatura de ponto de congelamento do dióxido de carbono é a temperatura de ponto triplo de −56,5°C.)

TABELA A–3

Propriedades da água saturada

Temp. T, °C	Pressão de Saturação P_{sat}, kPa	Densidade ρ, kg/m³ Líquido	Densidade ρ, kg/m³ Vapor	Entalpia de Vaporização h_{fg}, kJ/kg	Calor Específico c_p, J/kg · K Líquido	Calor Específico c_p, J/kg · K Vapor	Condutividade Térmica k, W/m · K Líquido	Condutividade Térmica k, W/m · K Vapor	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s Líquido	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s Vapor	Número de Prandtl Pr Líquido	Número de Prandtl Pr Vapor	Coeficiente de Expansão Volumétrica β, 1/K Líquido
0,01	0,6113	999,8	0,0048	2501	4217	1854	0,561	0,0171	$1,792 \times 10^{-3}$	$0,922 \times 10^{-5}$	13,5	1,00	$-0,068 \times 10^{-3}$
5	0,8721	999,9	0,0068	2490	4205	1857	0,571	0,0173	$1,519 \times 10^{-3}$	$0,934 \times 10^{-5}$	11,2	1,00	$0,015 \times 10^{-3}$
10	1,2276	999,7	0,0094	2478	4194	1862	0,580	0,0176	$1,307 \times 10^{-3}$	$0,946 \times 10^{-5}$	9,45	1,00	$0,733 \times 10^{-3}$
15	1,7051	999,1	0,0128	2466	4186	1863	0,589	0,0179	$1,138 \times 10^{-3}$	$0,959 \times 10^{-5}$	8,09	1,00	$0,138 \times 10^{-3}$
20	2,339	998,0	0,0173	2454	4182	1867	0,598	0,0182	$1,002 \times 10^{-3}$	$0,973 \times 10^{-5}$	7,01	1,00	$0,195 \times 10^{-3}$
25	3,169	997,0	0,0231	2442	4180	1870	0,607	0,0186	$0,891 \times 10^{-3}$	$0,987 \times 10^{-5}$	6,14	1,00	$0,247 \times 10^{-3}$
30	4,246	996,0	0,0304	2431	4178	1875	0,615	0,0189	$0,798 \times 10^{-3}$	$1,001 \times 10^{-5}$	5,42	1,00	$0,294 \times 10^{-3}$
35	5,628	994,0	0,0397	2419	4178	1880	0,623	0,0192	$0,720 \times 10^{-3}$	$1,016 \times 10^{-5}$	4,83	1,00	$0,337 \times 10^{-3}$
40	7,384	992,1	0,0512	2407	4179	1885	0,631	0,0196	$0,653 \times 10^{-3}$	$1,031 \times 10^{-5}$	4,32	1,00	$0,377 \times 10^{-3}$
45	9,593	990,1	0,0655	2395	4180	1892	0,637	0,0200	$0,596 \times 10^{-3}$	$1,046 \times 10^{-5}$	3,91	1,00	$0,415 \times 10^{-3}$
50	12,35	988,1	0,0831	2383	4181	1900	0,644	0,0204	$0,547 \times 10^{-3}$	$1,062 \times 10^{-5}$	3,55	1,00	$0,451 \times 10^{-3}$
55	15,76	985,2	0,1045	2371	4183	1908	0,649	0,0208	$0,504 \times 10^{-3}$	$1,077 \times 10^{-5}$	3,25	1,00	$0,484 \times 10^{-3}$
60	19,94	983,3	0,1304	2359	4185	1916	0,654	0,0212	$0,467 \times 10^{-3}$	$1,093 \times 10^{-5}$	2,99	1,00	$0,517 \times 10^{-3}$
65	25,03	980,4	0,1614	2346	4187	1926	0,659	0,0216	$0,433 \times 10^{-3}$	$1,110 \times 10^{-5}$	2,75	1,00	$0,548 \times 10^{-3}$
70	31,19	977,5	0,1983	2334	4190	1936	0,663	0,0221	$0,404 \times 10^{-3}$	$1,126 \times 10^{-5}$	2,55	1,00	$0,578 \times 10^{-3}$
75	38,58	974,7	0,2421	2321	4193	1948	0,667	0,0225	$0,378 \times 10^{-3}$	$1,142 \times 10^{-5}$	2,38	1,00	$0,607 \times 10^{-3}$
80	47,39	971,8	0,2935	2309	4197	1962	0,670	0,0230	$0,355 \times 10^{-3}$	$1,159 \times 10^{-5}$	2,22	1,00	$0,653 \times 10^{-3}$
85	57,83	968,1	0,3536	2296	4201	1977	0,673	0,0235	$0,333 \times 10^{-3}$	$1,176 \times 10^{-5}$	2,08	1,00	$0,670 \times 10^{-3}$
90	70,14	965,3	0,4235	2283	4206	1993	0,675	0,0240	$0,315 \times 10^{-3}$	$1,193 \times 10^{-5}$	1,96	1,00	$0,702 \times 10^{-3}$
95	84,55	961,5	0,5045	2270	4212	2010	0,677	0,0246	$0,297 \times 10^{-3}$	$1,210 \times 10^{-5}$	1,85	1,00	$0,716 \times 10^{-3}$
100	101,33	957,9	0,5978	2257	4217	2029	0,679	0,0251	$0,282 \times 10^{-3}$	$1,227 \times 10^{-5}$	1,75	1,00	$0,750 \times 10^{-3}$
110	143,27	950,6	0,8263	2230	4229	2071	0,682	0,0262	$0,255 \times 10^{-3}$	$1,261 \times 10^{-5}$	1,58	1,00	$0,798 \times 10^{-3}$
120	198,53	943,4	1,121	2203	4244	2120	0,683	0,0275	$0,232 \times 10^{-3}$	$1,296 \times 10^{-5}$	1,44	1,00	$0,858 \times 10^{-3}$
130	270,1	934,6	1,496	2174	4263	2177	0,684	0,0288	$0,213 \times 10^{-3}$	$1,330 \times 10^{-5}$	1,33	1,01	$0,913 \times 10^{-3}$
140	361,3	921,7	1,965	2145	4286	2244	0,683	0,0301	$0,197 \times 10^{-3}$	$1,365 \times 10^{-5}$	1,24	1,02	$0,970 \times 10^{-3}$
150	475,8	916,6	2,546	2114	4311	2314	0,682	0,0316	$0,183 \times 10^{-3}$	$1,399 \times 10^{-5}$	1,16	1,02	$1,025 \times 10^{-3}$
160	617,8	907,4	3,256	2083	4340	2420	0,680	0,0331	$0,170 \times 10^{-3}$	$1,434 \times 10^{-5}$	1,09	1,05	$1,145 \times 10^{-3}$
170	791,7	897,7	4,119	2050	4370	2490	0,677	0,0347	$0,160 \times 10^{-3}$	$1,468 \times 10^{-5}$	1,03	1,05	$1,178 \times 10^{-3}$
180	1002,1	887,3	5,153	2015	4410	2590	0,673	0,0364	$0,150 \times 10^{-3}$	$1,502 \times 10^{-5}$	0,983	1,07	$1,210 \times 10^{-3}$
190	1254,4	876,4	6,388	1979	4460	2710	0,669	0,0382	$0,142 \times 10^{-3}$	$1,537 \times 10^{-5}$	0,947	1,09	$1,280 \times 10^{-3}$
200	1553,8	864,3	7,852	1941	4500	2840	0,663	0,0401	$0,134 \times 10^{-3}$	$1,571 \times 10^{-5}$	0,910	1,11	$1,350 \times 10^{-3}$
220	2318	840,3	11,60	1859	4610	3110	0,650	0,0442	$0,122 \times 10^{-3}$	$1,641 \times 10^{-5}$	0,865	1,15	$1,520 \times 10^{-3}$
240	3344	813,7	16,73	1767	4760	3520	0,632	0,0487	$0,111 \times 10^{-3}$	$1,712 \times 10^{-5}$	0,836	1,24	$1,720 \times 10^{-3}$
260	4688	783,7	23,69	1663	4970	4070	0,609	0,0540	$0,102 \times 10^{-3}$	$1,788 \times 10^{-5}$	0,832	1,35	$2,000 \times 10^{-3}$
280	6412	750,8	33,15	1544	5280	4835	0,581	0,0605	$0,094 \times 10^{-3}$	$1,870 \times 10^{-5}$	0,854	1,49	$2,380 \times 10^{-3}$
300	8581	713,8	46,15	1405	5750	5980	0,548	0,0695	$0,086 \times 10^{-3}$	$1,965 \times 10^{-5}$	0,902	1,69	$2,950 \times 10^{-3}$
320	11.274	667,1	64,57	1239	6540	7900	0,509	0,0836	$0,078 \times 10^{-3}$	$2,084 \times 10^{-5}$	1,00	1,97	
340	14.586	610,5	92,62	1028	8240	11.870	0,469	0,110	$0,070 \times 10^{-3}$	$2,255 \times 10^{-5}$	1,23	2,43	
360	18.651	528,3	144,0	720	14.690	25.800	0,427	0,178	$0,060 \times 10^{-3}$	$2,571 \times 10^{-5}$	2,06	3,73	
374,14	22.090	317,0	317,0	0	—	—	—	—	$0,043 \times 10^{-3}$	$4,313 \times 10^{-5}$			

Nota 1: A viscosidade cinemática ν e a difusividade térmica α podem ser calculadas de suas definições, $\nu = \mu/\rho$ e $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. As temperaturas 0,01°C, 100°C, e 374,14°C são as temperaturas tripla, de ebulição e de ponto crítico da água respectivamente. As propriedades listadas acima (exceto pela densidade do vapor) podem ser usadas a qualquer pressão com erro desprezível, exceto a temperaturas próximas do valor do ponto crítico.

Nota 2: A unidade kJ/kg · °C do calor específico é equivalente a kJ/kg · K, e a unidade W/m · °C da condutividade térmica é equivalente a W/m · K.

Fonte: Os dados de viscosidade e condutividade térmica são de J. V. Sengers e J. T. R. Watson, *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 15 (1986), pp. 1291–1322. Os outros dados foram obtidos de diversas fontes ou foram calculados.

TABELA A–4

Propriedades do refrigerante saturado-134a

Temp. T, °C	Pressão de Saturação P, kPa	Densidade ρ, kg/m³ Líquido	Densidade ρ, kg/m³ Vapor	Entalpia de Vaporização h_{fg}, kJ/kg	Calor Específico c_p, J/kg · K Líquido	Calor Específico c_p, J/kg · K Vapor	Condutividade Térmica k, W/m · K Líquido	Condutividade Térmica k, W/m · K Vapor	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s Líquido	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s Vapor	Número Prandtl Pr Líquido	Número Prandtl Pr Vapor	Coeficiente de Expansão Volumétrica β, 1/K Líquido	Tensão de Superfície, N/m
−40	51,2	1418	2,773	225,9	1254	748,6	0,1101	0,00811	$4,878 \times 10^{-4}$	$2,550 \times 10^{-6}$	5,558	0,235	0,00205	0,01760
−35	66,2	1403	3,524	222,7	1264	764,1	0,1084	0,00862	$4,509 \times 10^{-4}$	$3,003 \times 10^{-6}$	5,257	0,266	0,00209	0,01682
−30	84,4	1389	4,429	219,5	1273	780,2	0,1066	0,00913	$4,178 \times 10^{-4}$	$3,504 \times 10^{-6}$	4,992	0,299	0,00215	0,01604
−25	106,5	1374	5,509	216,3	1283	797,2	0,1047	0,00963	$3,882 \times 10^{-4}$	$4,054 \times 10^{-6}$	4,757	0,335	0,00220	0,01527
−20	132,8	1359	6,787	213,0	1294	814,9	0,1028	0,01013	$3,614 \times 10^{-4}$	$4,651 \times 10^{-6}$	4,548	0,374	0,00227	0,01451
−15	164,0	1343	8,288	209,5	1306	833,5	0,1009	0,01063	$3,371 \times 10^{-4}$	$5,295 \times 10^{-6}$	4,363	0,415	0,00233	0,01376
−10	200,7	1327	10,04	206,0	1318	853,1	0,0989	0,01112	$3,150 \times 10^{-4}$	$5,982 \times 10^{-6}$	4,198	0,459	0,00241	0,01302
−5	243,5	1311	12,07	202,4	1330	873,8	0,0968	0,01161	$2,947 \times 10^{-4}$	$6,709 \times 10^{-6}$	4,051	0,505	0,00249	0,01229
0	293,0	1295	14,42	198,7	1344	895,6	0,0947	0,01210	$2,761 \times 10^{-4}$	$7,471 \times 10^{-6}$	3,919	0,553	0,00258	0,01156
5	349,9	1278	17,12	194,8	1358	918,7	0,0925	0,01259	$2,589 \times 10^{-4}$	$8,264 \times 10^{-6}$	3,802	0,603	0,00269	0,01084
10	414,9	1261	20,22	190,8	1374	943,2	0,0903	0,01308	$2,430 \times 10^{-4}$	$9,081 \times 10^{-6}$	3,697	0,655	0,00280	0,01014
15	488,7	1244	23,75	186,6	1390	969,4	0,0880	0,01357	$2,281 \times 10^{-4}$	$9,915 \times 10^{-6}$	3,604	0,708	0,00293	0,00944
20	572,1	1226	27,77	182,3	1408	997,6	0,0856	0,01406	$2,142 \times 10^{-4}$	$1,075 \times 10^{-5}$	3,521	0,763	0,00307	0,00876
25	665,8	1207	32,34	177,8	1427	1028	0,0833	0,01456	$2,012 \times 10^{-4}$	$1,160 \times 10^{-5}$	3,448	0,819	0,00324	0,00808
30	770,6	1188	37,53	173,1	1448	1061	0,0808	0,01507	$1,888 \times 10^{-4}$	$1,244 \times 10^{-5}$	3,383	0,877	0,00342	0,00742
35	887,5	1168	43,41	168,2	1471	1098	0,0783	0,01558	$1,772 \times 10^{-4}$	$1,327 \times 10^{-5}$	3,328	0,935	0,00364	0,00677
40	1017,1	1147	50,08	163,0	1498	1138	0,0757	0,01610	$1,660 \times 10^{-4}$	$1,408 \times 10^{-5}$	3,285	0,995	0,00390	0,00613
45	1160,5	1125	57,66	157,6	1529	1184	0,0731	0,01664	$1,554 \times 10^{-4}$	$1,486 \times 10^{-5}$	3,253	1,058	0,00420	0,00550
50	1318,6	1102	66,27	151,8	1566	1237	0,0704	0,01720	$1,453 \times 10^{-4}$	$1,562 \times 10^{-5}$	3,231	1,123	0,00456	0,00489
55	1492,3	1078	76,11	145,7	1608	1298	0,0676	0,01777	$1,355 \times 10^{-4}$	$1,634 \times 10^{-5}$	3,223	1,193	0,00500	0,00429
60	1682,8	1053	87,38	139,1	1659	1372	0,0647	0,01838	$1,260 \times 10^{-4}$	$1,704 \times 10^{-5}$	3,229	1,272	0,00554	0,00372
65	1891,0	1026	100,4	132,1	1722	1462	0,0618	0,01902	$1,167 \times 10^{-4}$	$1,771 \times 10^{-5}$	3,255	1,362	0,00624	0,00315
70	2118,2	996,2	115,6	124,4	1801	1577	0,0587	0,01972	$1,077 \times 10^{-4}$	$1,839 \times 10^{-5}$	3,307	1,471	0,00716	0,00261
75	2365,8	964	133,6	115,9	1907	1731	0,0555	0,02048	$9,891 \times 10^{-5}$	$1,908 \times 10^{-5}$	3,400	1,612	0,00843	0,00209
80	2635,2	928,2	155,3	106,4	2056	1948	0,0521	0,02133	$9,011 \times 10^{-5}$	$1,982 \times 10^{-5}$	3,558	1,810	0,01031	0,00160
85	2928,2	887,1	182,3	95,4	2287	2281	0,0484	0,02233	$8,124 \times 10^{-5}$	$2,071 \times 10^{-5}$	3,837	2,116	0,01336	0,00114
90	3246,9	837,7	217,8	82,2	2701	2865	0,0444	0,02357	$7,203 \times 10^{-5}$	$2,187 \times 10^{-5}$	4,385	2,658	0,01911	0,00071
95	3594,1	772,5	269,3	64,9	3675	4144	0,0396	0,02544	$6,190 \times 10^{-5}$	$2,370 \times 10^{-5}$	5,746	3,862	0,03343	0,00033
100	3975,1	651,7	376,3	33,9	7959	8785	0,0322	0,02989	$4,765 \times 10^{-5}$	$2,833 \times 10^{-5}$	11,77	8,326	0,10047	0,00004

Nota 1: A viscosidade cinemática ν e a difusividade térmica α podem ser calculadas de suas definições, $\nu = \mu/\rho$ e $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. As propriedades listadas acima (exceto pela densidade do vapor) podem ser usadas a qualquer pressão com erro desprezível, exceto a temperaturas próximas do valor do ponto crítico.

Nota 2: A unidade kJ/kg · °C do calor específico é equivalente a kJ/kg · K, e a unidade W/m · °C da condutividade térmica é equivalente a W/m · K.

Fonte: Dados gerados pelo software EES desenvolvido pela S. A. Klein e F. L. Alvarado. Fontes originais: R. Tillner-Roth e H. D. Baehr, "An International Standard Formulation for the Thermodynamic Properties of 1,1,1,2-Tetrafluoroethane (HFC-134a) for Temperatures from 170 K to 455 K and Pressures up to 70 MPa," *J. Phys. Chem, Ref. Data*, Vol. 23, No. 5, 1994; M. J. Assael, N. K. Dalaouti, A. A. Griva, e J. H. Dymond, "Viscosity and Thermal Conductivity of Halogenated Methane and Ethane Refrigerants," *IJR*, Vol. 22, pp. 525–535, 1999; programa NIST REFPROP 6 (M. O. McLinden, S. A. Klein, E. W. Lemmon e A. P. Peskin, Physical and Chemical Properties Division, National Institute of Standards and Technology, Boulder, CO 80303, 1995).

TABELA A–5

Propriedades da amônia saturada

Temp. T, °C	Pressão de Saturação P, kPa	Densidade ρ, kg/m³ Líquido	Densidade ρ, kg/m³ Vapor	Entalpia de Vaporização h_{fg}, kJ/kg	Calor Específico c_p, J/kg · K Líquido	Calor Específico c_p, J/kg · K Vapor	Condutividade Térmica k, W/m · K Líquido	Condutividade Térmica k, W/m · K Vapor	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s Líquido	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s Vapor	Número Prandtl Pr Líquido	Número Prandtl Pr Vapor	Coeficiente de Expansão Volumétrica β, 1/K Líquido	Tensão de Superfície, N/m
−40	71,66	690,2	0,6435	1389	4414	2242	—	0,01792	$2,926 \times 10^{-4}$	$7,957 \times 10^{-6}$	—	0,9955	0,00176	0,03565
−30	119,4	677,8	1,037	1360	4465	2322	—	0,01898	$2,630 \times 10^{-4}$	$8,311 \times 10^{-6}$	—	1,017	0,00185	0,03341
−25	151,5	671,5	1,296	1345	4489	2369	0,5968	0,01957	$2,492 \times 10^{-4}$	$8,490 \times 10^{-6}$	1,875	1,028	0,00190	0,03229
−20	190,1	665,1	1,603	1329	4514	2420	0,5853	0,02015	$2,361 \times 10^{-4}$	$8,669 \times 10^{-6}$	1,821	1,041	0,00194	0,03118
−15	236,2	658,6	1,966	1313	4538	2476	0,5737	0,02075	$2,236 \times 10^{-4}$	$8,851 \times 10^{-6}$	1,769	1,056	0,00199	0,03007
−10	290,8	652,1	2,391	1297	4564	2536	0,5621	0,02138	$2,117 \times 10^{-4}$	$9,034 \times 10^{-6}$	1,718	1,072	0,00205	0,02896
−5	354,9	645,4	2,886	1280	4589	2601	0,5505	0,02203	$2,003 \times 10^{-4}$	$9,218 \times 10^{-6}$	1,670	1,089	0,00210	0,02786
0	429,6	638,6	3,458	1262	4617	2672	0,5390	0,02270	$1,896 \times 10^{-4}$	$9,405 \times 10^{-6}$	1,624	1,107	0,00216	0,02676
5	516	631,7	4,116	1244	4645	2749	0,5274	0,02341	$1,794 \times 10^{-4}$	$9,593 \times 10^{-6}$	1,580	1,126	0,00223	0,02566
10	615,3	624,6	4,870	1226	4676	2831	0,5158	0,02415	$1,697 \times 10^{-4}$	$9,784 \times 10^{-6}$	1,539	1,147	0,00230	0,02457
15	728,8	617,5	5,729	1206	4709	2920	0,5042	0,02492	$1,606 \times 10^{-4}$	$9,978 \times 10^{-6}$	1,500	1,169	0,00237	0,02348
20	857,8	610,2	6,705	1186	4745	3016	0,4927	0,02573	$1,519 \times 10^{-4}$	$1,017 \times 10^{-5}$	1,463	1,193	0,00245	0,02240
25	1003	602,8	7,809	1166	4784	3120	0,4811	0,02658	$1,438 \times 10^{-4}$	$1,037 \times 10^{-5}$	1,430	1,218	0,00254	0,02132
30	1167	595,2	9,055	1144	4828	3232	0,4695	0,02748	$1,361 \times 10^{-4}$	$1,057 \times 10^{-5}$	1,399	1,244	0,00264	0,02024
35	1351	587,4	10,46	1122	4877	3354	0,4579	0,02843	$1,288 \times 10^{-4}$	$1,078 \times 10^{-5}$	1,372	1,272	0,00275	0,01917
40	1555	579,4	12,03	1099	4932	3486	0,4464	0,02943	$1,219 \times 10^{-4}$	$1,099 \times 10^{-5}$	1,347	1,303	0,00287	0,01810
45	1782	571,3	13,8	1075	4993	3631	0,4348	0,03049	$1,155 \times 10^{-4}$	$1,121 \times 10^{-5}$	1,327	1,335	0,00301	0,01704
50	2033	562,9	15,78	1051	5063	3790	0,4232	0,03162	$1,094 \times 10^{-4}$	$1,143 \times 10^{-5}$	1,310	1,371	0,00316	0,01598
55	2310	554,2	18,00	1025	5143	3967	0,4116	0,03283	$1,037 \times 10^{-4}$	$1,166 \times 10^{-5}$	1,297	1,409	0,00334	0,01493
60	2614	545,2	20,48	997,4	5234	4163	0,4001	0,03412	$9,846 \times 10^{-5}$	$1,189 \times 10^{-5}$	1,288	1,452	0,00354	0,01389
65	2948	536,0	23,26	968,9	5340	4384	0,3885	0,03550	$9,347 \times 10^{-5}$	$1,213 \times 10^{-5}$	1,285	1,499	0,00377	0,01285
70	3312	526,3	26,39	939,0	5463	4634	0,3769	0,03700	$8,879 \times 10^{-5}$	$1,238 \times 10^{-5}$	1,287	1,551	0,00404	0,01181
75	3709	516,2	29,90	907,5	5608	4923	0,3653	0,03862	$8,440 \times 10^{-5}$	$1,264 \times 10^{-5}$	1,296	1,612	0,00436	0,01079
80	4141	505,7	33,87	874,1	5780	5260	0,3538	0,04038	$8,030 \times 10^{-5}$	$1,292 \times 10^{-5}$	1,312	1,683	0,00474	0,00977
85	4609	494,5	38,36	838,6	5988	5659	0,3422	0,04232	$7,645 \times 10^{-5}$	$1,322 \times 10^{-5}$	1,338	1,768	0,00521	0,00876
90	5116	482,8	43,48	800,6	6242	6142	0,3306	0,04447	$7,284 \times 10^{-5}$	$1,354 \times 10^{-5}$	1,375	1,871	0,00579	0,00776
95	5665	470,2	49,35	759,8	6561	6740	0,3190	0,04687	$6,946 \times 10^{-5}$	$1,389 \times 10^{-5}$	1,429	1,999	0,00652	0,00677
100	6257	456,6	56,15	715,5	6972	7503	0,3075	0,04958	$6,628 \times 10^{-5}$	$1,429 \times 10^{-5}$	1,503	2,163	0,00749	0,00579

Nota 1: A viscosidade cinemática ν e a difusividade térmica α podem ser calculadas de suas definições, $\nu = \mu/\rho$ e $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. As propriedades listadas acima (exceto pela densidade do vapor) podem ser usadas a qualquer pressão com erro desprezível, exceto a temperaturas próximas do valor do ponto crítico.

Nota 2: A unidade kJ/kg · °C do calor específico é equivalente a kJ/kg · K, e a unidade W/m · °C da condutividade térmica é equivalente a W/m · K.

Fonte: Dados gerados pelo software EES desenvolvido pela S. A. Klein e F. L. Alvarado. Fontes originais: Tillner-Roth, Harms-Watzenberg e Baehr, "Eine neue Fundamentalgleichung fur Ammoniak", DKV-Tagungsbericht 20:167–181, 1993; Liley e Desai, "Thermophysical Properties of Refrigerants" *ASHRAE*, 1993, ISBN 1-1883413-10-9.

TABELA A–6

Propriedades do propano saturado

Temp. T, °C	Pressão de Saturação P, kPa	Densidade ρ, kg/m³ Líquido	Densidade ρ, kg/m³ Vapor	Entalpia de Vaporização h_{fg}, kJ/kg	Calor Específico c_p, J/kg · K Líquido	Calor Específico c_p, J/kg · K Vapor	Condutividade Térmica k, W/m · K Líquido	Condutividade Térmica k, W/m · K Vapor	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s Líquido	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s Vapor	Número Prandtl Pr Líquido	Número Prandtl Pr Vapor	Coeficiente de Expansão Volumétrica β, 1/K Líquido	Tensão de Superfície, N/m
−120	0,4053	664,7	0,01408	498,3	2003	1115	0,1802	0,00589	$6,136 \times 10^{-4}$	$4,372 \times 10^{-6}$	6,820	0,827	0,00153	0,02630
−110	1,157	654,5	0,03776	489,3	2021	1148	0,1738	0,00645	$5,054 \times 10^{-4}$	$4,625 \times 10^{-6}$	5,878	0,822	0,00157	0,02486
−100	2,881	644,2	0,08872	480,4	2044	1183	0,1672	0,00705	$4,252 \times 10^{-4}$	$4,881 \times 10^{-6}$	5,195	0,819	0,00161	0,02344
−90	6,406	633,8	0,1870	471,5	2070	1221	0,1606	0,00769	$3,635 \times 10^{-4}$	$5,143 \times 10^{-6}$	4,686	0,817	0,00166	0,02202
−80	12,97	623,2	0,3602	462,4	2100	1263	0,1539	0,00836	$3,149 \times 10^{-4}$	$5,409 \times 10^{-6}$	4,297	0,817	0,00171	0,02062
−70	24,26	612,5	0,6439	453,1	2134	1308	0,1472	0,00908	$2,755 \times 10^{-4}$	$5,680 \times 10^{-6}$	3,994	0,818	0,00177	0,01923
−60	42,46	601,5	1,081	443,5	2173	1358	0,1407	0,00985	$2,430 \times 10^{-4}$	$5,956 \times 10^{-6}$	3,755	0,821	0,00184	0,01785
−50	70,24	590,3	1,724	433,6	2217	1412	0,1343	0,01067	$2,158 \times 10^{-4}$	$6,239 \times 10^{-6}$	3,563	0,825	0,00192	0,01649
−40	110,7	578,8	2,629	423,1	2258	1471	0,1281	0,01155	$1,926 \times 10^{-4}$	$6,529 \times 10^{-6}$	3,395	0,831	0,00201	0,01515
−30	167,3	567,0	3,864	412,1	2310	1535	0,1221	0,01250	$1,726 \times 10^{-4}$	$6,827 \times 10^{-6}$	3,266	0,839	0,00213	0,01382
−20	243,8	554,7	5,503	400,3	2368	1605	0,1163	0,01351	$1,551 \times 10^{-4}$	$7,136 \times 10^{-6}$	3,158	0,848	0,00226	0,01251
−10	344,4	542,0	7,635	387,8	2433	1682	0,1107	0,01459	$1,397 \times 10^{-4}$	$7,457 \times 10^{-6}$	3,069	0,860	0,00242	0,01122
0	473,3	528,7	10,36	374,2	2507	1768	0,1054	0,01576	$1,259 \times 10^{-4}$	$7,794 \times 10^{-6}$	2,996	0,875	0,00262	0,00996
5	549,8	521,8	11,99	367,0	2547	1814	0,1028	0,01637	$1,195 \times 10^{-4}$	$7,970 \times 10^{-6}$	2,964	0,883	0,00273	0,00934
10	635,1	514,7	13,81	359,5	2590	1864	0,1002	0,01701	$1,135 \times 10^{-4}$	$8,151 \times 10^{-6}$	2,935	0,893	0,00286	0,00872
15	729,8	507,5	15,85	351,7	2637	1917	0,0977	0,01767	$1,077 \times 10^{-4}$	$8,339 \times 10^{-6}$	2,909	0,905	0,00301	0,00811
20	834,4	500,0	18,13	343,4	2688	1974	0,0952	0,01836	$1,022 \times 10^{-4}$	$8,534 \times 10^{-6}$	2,886	0,918	0,00318	0,00751
25	949,7	492,2	20,68	334,8	2742	2036	0,0928	0,01908	$9,702 \times 10^{-5}$	$8,738 \times 10^{-6}$	2,866	0,933	0,00337	0,00691
30	1076	484,2	23,53	325,8	2802	2104	0,0904	0,01982	$9,197 \times 10^{-5}$	$8,952 \times 10^{-6}$	2,850	0,950	0,00358	0,00633
35	1215	475,8	26,72	316,2	2869	2179	0,0881	0,02061	$8,710 \times 10^{-5}$	$9,178 \times 10^{-6}$	2,837	0,971	0,00384	0,00575
40	1366	467,1	30,29	306,1	2943	2264	0,0857	0,02142	$8,240 \times 10^{-5}$	$9,417 \times 10^{-6}$	2,828	0,995	0,00413	0,00518
45	1530	458,0	34,29	295,3	3026	2361	0,0834	0,02228	$7,785 \times 10^{-5}$	$9,674 \times 10^{-6}$	2,824	1,025	0,00448	0,00463
50	1708	448,5	38,79	283,9	3122	2473	0,0811	0,02319	$7,343 \times 10^{-5}$	$9,950 \times 10^{-6}$	2,826	1,061	0,00491	0,00408
60	2110	427,5	49,66	258,4	3283	2769	0,0765	0,02517	$6,487 \times 10^{-5}$	$1,058 \times 10^{-5}$	2,784	1,164	0,00609	0,00303
70	2580	403,2	64,02	228,0	3595	3241	0,0717	0,02746	$5,649 \times 10^{-5}$	$1,138 \times 10^{-5}$	2,834	1,343	0,00811	0,00204
80	3127	373,0	84,28	189,7	4501	4173	0,0663	0,03029	$4,790 \times 10^{-5}$	$1,249 \times 10^{-5}$	3,251	1,722	0,01248	0,00114
90	3769	329,1	118,6	133,2	6977	7239	0,0595	0,03441	$3,807 \times 10^{-5}$	$1,448 \times 10^{-5}$	4,465	3,047	0,02847	0,00037

Nota 1: A viscosidade cinemática ν e a difusividade térmica α podem ser calculadas de suas definições, $\nu = \mu/\rho$ e $\alpha = k/\rho c_p = \nu/Pr$. As propriedades listadas acima (exceto pela densidade do vapor) podem ser usadas a qualquer pressão com erro desprezível, exceto a temperaturas próximas do valor do ponto crítico.

Nota 2: A unidade kJ/kg · °C do calor específico é equivalente a kJ/kg · K, e a unidade W/m · °C da condutividade térmica é equivalente a W/m · K.

Fonte: Dados gerados pelo software EES desenvolvido pela S. A. Klein e F. L. Alvarado. Fontes originais: Reiner Tillner-Roth, "Fundamental Equations of State", Shaker, Verlag, Aachan, 1998; B. A. Younglove e J. F. Ely, "Thermophysical Properties of Fluids". II Methane, Ethane, Propane, Isobutane, and Normal Butane", *J. Phys. Chem. Ref. Data*, Vol. 16, No. 4, 1987; G.R. Somayajulu, "A Generalized Equation for Surface Tension from the Triple-Point to the Critical-Point," *International Journal of Thermophysics*, Vol. 9, No. 4, 1988.

TABELA A–7

Propriedades dos líquidos

Temp. T, °C	Densidade ρ, kg/m^3	Calor Específico c_p, J/kg · K	Condutividade Térmica k, W/m · K	Difusividade Térmica α, m^2/s	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s	Viscosidade Cinemática ν, m^2/s	Número de Prandtl Pr	Coeficiente de de Expansão Volumétrica β, 1/K
				Metano (CH_4)				
−160	420,2	3492	0,1863	$1{,}270 \times 10^{-7}$	$1{,}133 \times 10^{-4}$	$2{,}699 \times 10^{-7}$	2,126	0,00352
−150	405,0	3580	0,1703	$1{,}174 \times 10^{-7}$	$9{,}169 \times 10^{-5}$	$2{,}264 \times 10^{-7}$	1,927	0,00391
−140	388,8	3700	0,1550	$1{,}077 \times 10^{-7}$	$7{,}551 \times 10^{-5}$	$1{,}942 \times 10^{-7}$	1,803	0,00444
−130	371,1	3875	0,1402	$9{,}749 \times 10^{-8}$	$6{,}288 \times 10^{-5}$	$1{,}694 \times 10^{-7}$	1,738	0,00520
−120	351,4	4146	0,1258	$8{,}634 \times 10^{-8}$	$5{,}257 \times 10^{-5}$	$1{,}496 \times 10^{-7}$	1,732	0,00637
−110	328,8	4611	0,1115	$7{,}356 \times 10^{-8}$	$4{,}377 \times 10^{-5}$	$1{,}331 \times 10^{-7}$	1,810	0,00841
−100	301,0	5578	0,0967	$5{,}761 \times 10^{-8}$	$3{,}577 \times 10^{-5}$	$1{,}188 \times 10^{-7}$	2,063	0,01282
−90	261,7	8902	0,0797	$3{,}423 \times 10^{-8}$	$2{,}761 \times 10^{-5}$	$1{,}055 \times 10^{-7}$	3,082	0,02922
				Metanol [$CH_3(OH)$]				
20	788,4	2515	0,1987	$1{,}002 \times 10^{-7}$	$5{,}857 \times 10^{-4}$	$7{,}429 \times 10^{-7}$	7,414	0,00118
30	779,1	2577	0,1980	$9{,}862 \times 10^{-8}$	$5{,}088 \times 10^{-4}$	$6{,}531 \times 10^{-7}$	6,622	0,00120
40	769,6	2644	0,1972	$9{,}690 \times 10^{-8}$	$4{,}460 \times 10^{-4}$	$5{,}795 \times 10^{-7}$	5,980	0,00123
50	760,1	2718	0,1965	$9{,}509 \times 10^{-8}$	$3{,}942 \times 10^{-4}$	$5{,}185 \times 10^{-7}$	5,453	0,00127
60	750,4	2798	0,1957	$9{,}320 \times 10^{-8}$	$3{,}510 \times 10^{-4}$	$4{,}677 \times 10^{-7}$	5,018	0,00132
70	740,4	2885	0,1950	$9{,}128 \times 10^{-8}$	$3{,}146 \times 10^{-4}$	$4{,}250 \times 10^{-7}$	4,655	0,00137
				Isobutano (R600a)				
−100	683,8	1881	0,1383	$1{,}075 \times 10^{-7}$	$9{,}305 \times 10^{-4}$	$1{,}360 \times 10^{-6}$	12,65	0,00142
−75	659,3	1970	0,1357	$1{,}044 \times 10^{-7}$	$5{,}624 \times 10^{-4}$	$8{,}531 \times 10^{-7}$	8,167	0,00150
−50	634,3	2069	0,1283	$9{,}773 \times 10^{-8}$	$3{,}769 \times 10^{-4}$	$5{,}942 \times 10^{-7}$	6,079	0,00161
−25	608,2	2180	0,1181	$8{,}906 \times 10^{-8}$	$2{,}688 \times 10^{-4}$	$4{,}420 \times 10^{-7}$	4,963	0,00177
0	580,6	2306	0,1068	$7{,}974 \times 10^{-8}$	$1{,}993 \times 10^{-4}$	$3{,}432 \times 10^{-7}$	4,304	0,00199
25	550,7	2455	0,0956	$7{,}069 \times 10^{-8}$	$1{,}510 \times 10^{-4}$	$2{,}743 \times 10^{-7}$	3,880	0,00232
50	517,3	2640	0,0851	$6{,}233 \times 10^{-8}$	$1{,}155 \times 10^{-4}$	$2{,}233 \times 10^{-7}$	3,582	0,00286
75	478,5	2896	0,0757	$5{,}460 \times 10^{-8}$	$8{,}785 \times 10^{-5}$	$1{,}836 \times 10^{-7}$	3,363	0,00385
100	429,6	3361	0,0669	$4{,}634 \times 10^{-8}$	$6{,}483 \times 10^{-5}$	$1{,}509 \times 10^{-7}$	3,256	0,00628
				Glicerina				
0	1276	2262	0,2820	$9{,}773 \times 10^{-8}$	10,49	$8{,}219 \times 10^{-3}$	84,101	
5	1273	2288	0,2835	$9{,}732 \times 10^{-8}$	6,730	$5{,}287 \times 10^{-3}$	54,327	
10	1270	2320	0,2846	$9{,}662 \times 10^{-8}$	4,241	$3{,}339 \times 10^{-3}$	34,561	
15	1267	2354	0,2856	$9{,}576 \times 10^{-8}$	2,496	$1{,}970 \times 10^{-3}$	20,570	
20	1264	2386	0,2860	$9{,}484 \times 10^{-8}$	1,519	$1{,}201 \times 10^{-3}$	12,671	
25	1261	2416	0,2860	$9{,}388 \times 10^{-8}$	0,9934	$7{,}878 \times 10^{-4}$	8,392	
30	1258	2447	0,2860	$9{,}291 \times 10^{-8}$	0,6582	$5{,}232 \times 10^{-4}$	5,631	
35	1255	2478	0,2860	$9{,}195 \times 10^{-8}$	0,4347	$3{,}464 \times 10^{-4}$	3,767	
40	1252	2513	0,2863	$9{,}101 \times 10^{-8}$	0,3073	$2{,}455 \times 10^{-4}$	2,697	
				Óleo de motor (novo)				
0	899,0	1797	0,1469	$9{,}097 \times 10^{-8}$	3,814	$4{,}242 \times 10^{-3}$	46,636	0,00070
20	888,1	1881	0,1450	$8{,}680 \times 10^{-8}$	0,8374	$9{,}429 \times 10^{-4}$	10,863	0,00070
40	876,0	1964	0,1444	$8{,}391 \times 10^{-8}$	0,2177	$2{,}485 \times 10^{-4}$	2,962	0,00070
60	863,9	2048	0,1404	$7{,}934 \times 10^{-8}$	0,07399	$8{,}565 \times 10^{-5}$	1,080	0,00070
80	852,0	2132	0,1380	$7{,}599 \times 10^{-8}$	0,03232	$3{,}794 \times 10^{-5}$	499,3	0,00070
100	840,0	2220	0,1367	$7{,}330 \times 10^{-8}$	0,01718	$2{,}046 \times 10^{-5}$	279,1	0,00070
120	828,9	2308	0,1347	$7{,}042 \times 10^{-8}$	0,01029	$1{,}241 \times 10^{-5}$	176,3	0,00070
140	816,8	2395	0,1330	$6{,}798 \times 10^{-8}$	0,006558	$8{,}029 \times 10^{-6}$	118,1	0,00070
150	810,3	2441	0,1327	$6{,}708 \times 10^{-8}$	0,005344	$6{,}595 \times 10^{-6}$	98,31	0,00070

Fonte: Dados gerados pelo software EES desenvolvido pela S. A. Klein e F. L. Alvarado. Originalmente com base em diversas fontes.

TABELA A–8

Propriedades dos metais líquidos

Temp. T, °C	Densidade ρ, kg/m^3	Calor Específico c_p, J/kg · K	Condutividade Térmica k, W/m · K	Difusividade Térmica α, m^2/s	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s	Viscosidade Cinemática ν, m^2/s	Número de Prandtl Pr	Coeficiente de Expansão Volumétrica β, 1/K
Mercúrio (Hg) Ponto de Fusão: −39°C								
0	13595	140,4	8,18200	$4,287 \times 10^{-6}$	$1,687 \times 10^{-3}$	$1,241 \times 10^{-7}$	0,0289	$1,810 \times 10^{-4}$
25	13534	139,4	8,51533	$4,514 \times 10^{-6}$	$1,534 \times 10^{-3}$	$1,133 \times 10^{-7}$	0,0251	$1,810 \times 10^{-4}$
50	13473	138,6	8,83632	$4,734 \times 10^{-6}$	$1,423 \times 10^{-3}$	$1,056 \times 10^{-7}$	0,0223	$1,810 \times 10^{-4}$
75	13412	137,8	9,15632	$4,956 \times 10^{-6}$	$1,316 \times 10^{-3}$	$9,819 \times 10^{-8}$	0,0198	$1,810 \times 10^{-4}$
100	13351	137,1	9,46706	$5,170 \times 10^{-6}$	$1,245 \times 10^{-3}$	$9,326 \times 10^{-8}$	0,0180	$1,810 \times 10^{-4}$
150	13231	136,1	10,07780	$5,595 \times 10^{-6}$	$1,126 \times 10^{-3}$	$8,514 \times 10^{-8}$	0,0152	$1,810 \times 10^{-4}$
200	13112	135,5	10,65465	$5,996 \times 10^{-6}$	$1,043 \times 10^{-3}$	$7,959 \times 10^{-8}$	0,0133	$1,815 \times 10^{-4}$
250	12993	135,3	11,18150	$6,363 \times 10^{-6}$	$9,820 \times 10^{-4}$	$7,558 \times 10^{-8}$	0,0119	$1,829 \times 10^{-4}$
300	12873	135,3	11,68150	$6,705 \times 10^{-6}$	$9,336 \times 10^{-4}$	$7,252 \times 10^{-8}$	0,0108	$1,854 \times 10^{-4}$
Bismuto (Bi) Ponto de Fusão: 271°C								
350	9969	146,0	16,28	$1,118 \times 10^{-5}$	$1,540 \times 10^{-3}$	$1,545 \times 10^{-7}$	0,01381	
400	9908	148,2	16,10	$1,096 \times 10^{-5}$	$1,422 \times 10^{-3}$	$1,436 \times 10^{-7}$	0,01310	
500	9785	152,8	15,74	$1,052 \times 10^{-5}$	$1,188 \times 10^{-3}$	$1,215 \times 10^{-7}$	0,01154	
600	9663	157,3	15,60	$1,026 \times 10^{-5}$	$1,013 \times 10^{-3}$	$1,048 \times 10^{-7}$	0,01022	
700	9540	161,8	15,60	$1,010 \times 10^{-5}$	$8,736 \times 10^{-4}$	$9,157 \times 10^{-8}$	0,00906	
Chumbo (Pb) Ponto de Fusão: 327°C								
400	10506	158	15,97	$9,623 \times 10^{-6}$	$2,277 \times 10^{-3}$	$2,167 \times 10^{-7}$	0,02252	
450	10449	156	15,74	$9,649 \times 10^{-6}$	$2,065 \times 10^{-3}$	$1,976 \times 10^{-7}$	0,02048	
500	10390	155	15,54	$9,651 \times 10^{-6}$	$1,884 \times 10^{-3}$	$1,814 \times 10^{-7}$	0,01879	
550	10329	155	15,39	$9,610 \times 10^{-6}$	$1,758 \times 10^{-3}$	$1,702 \times 10^{-7}$	0,01771	
600	10267	155	15,23	$9,568 \times 10^{-6}$	$1,632 \times 10^{-3}$	$1,589 \times 10^{-7}$	0,01661	
650	10206	155	15,07	$9,526 \times 10^{-6}$	$1,505 \times 10^{-3}$	$1,475 \times 10^{-7}$	0,01549	
700	10145	155	14,91	$9,483 \times 10^{-6}$	$1,379 \times 10^{-3}$	$1,360 \times 10^{-7}$	0,01434	
Sódio (Na) Ponto de Fusão: 98°C								
100	927,3	1378	85,84	$6,718 \times 10^{-5}$	$6,892 \times 10^{-4}$	$7,432 \times 10^{-7}$	0,01106	
200	902,5	1349	80,84	$6,639 \times 10^{-5}$	$5,385 \times 10^{-4}$	$5,967 \times 10^{-7}$	0,008987	
300	877,8	1320	75,84	$6,544 \times 10^{-5}$	$3,878 \times 10^{-4}$	$4,418 \times 10^{-7}$	0,006751	
400	853,0	1296	71,20	$6,437 \times 10^{-5}$	$2,720 \times 10^{-4}$	$3,188 \times 10^{-7}$	0,004953	
500	828,5	1284	67,41	$6,335 \times 10^{-5}$	$2,411 \times 10^{-4}$	$2,909 \times 10^{-7}$	0,004593	
600	804,0	1272	63,63	$6,220 \times 10^{-5}$	$2,101 \times 10^{-4}$	$2,614 \times 10^{-7}$	0,004202	
Potássio (K) Ponto de Fusão: 64°C								
200	795,2	790,8	43,99	$6,995 \times 10^{-5}$	$3,350 \times 10^{-4}$	$4,213 \times 10^{-7}$	0,006023	
300	771,6	772,8	42,01	$7,045 \times 10^{-5}$	$2,667 \times 10^{-4}$	$3,456 \times 10^{-7}$	0,004906	
400	748,0	754,8	40,03	$7,090 \times 10^{-5}$	$1,984 \times 10^{-4}$	$2,652 \times 10^{-7}$	0,00374	
500	723,9	750,0	37,81	$6,964 \times 10^{-5}$	$1,668 \times 10^{-4}$	$2,304 \times 10^{-7}$	0,003309	
600	699,6	750,0	35,50	$6,765 \times 10^{-5}$	$1,487 \times 10^{-4}$	$2,126 \times 10^{-7}$	0,003143	
Sódio–Potássio (%22Na-%78K) Ponto de Fusão: −11°C								
100	847,3	944,4	25,64	$3,205 \times 10^{-5}$	$5,707 \times 10^{-4}$	$6,736 \times 10^{-7}$	0,02102	
200	823,2	922,5	26,27	$3,459 \times 10^{-5}$	$4,587 \times 10^{-4}$	$5,572 \times 10^{-7}$	0,01611	
300	799,1	900,6	26,89	$3,736 \times 10^{-5}$	$3,467 \times 10^{-4}$	$4,339 \times 10^{-7}$	0,01161	
400	775,0	879,0	27,50	$4,037 \times 10^{-5}$	$2,357 \times 10^{-4}$	$3,041 \times 10^{-7}$	0,00753	
500	751,5	880,1	27,89	$4,217 \times 10^{-5}$	$2,108 \times 10^{-4}$	$2,805 \times 10^{-7}$	0,00665	
600	728,0	881,2	28,28	$4,408 \times 10^{-5}$	$1,859 \times 10^{-4}$	$2,553 \times 10^{-7}$	0,00579	

Fonte: Dados gerados pelo software EES desenvolvido pela S. A. Klein e F. L. Alvarado. Originalmente com base em diversas fontes.

TABELA A–9

Propriedades do ar à pressão de 1 atm

Temp. T, °C	Densidade ρ, kg/m³	Calor Específico c_p J/kg · K	Condutividade Térmica k, W/m · K	Difusividade Térmica α, m²/s	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s	Viscosidade Cinemática ν, m²/s	Número de Prandtl Pr
−150	2,866	983	0,01171	$4,158 \times 10^{-6}$	$8,636 \times 10^{-6}$	$3,013 \times 10^{-6}$	0,7246
−100	2,038	966	0,01582	$8,036 \times 10^{-6}$	$1,189 \times 10^{-6}$	$5,837 \times 10^{-6}$	0,7263
−50	1,582	999	0,01979	$1,252 \times 10^{-5}$	$1,474 \times 10^{-5}$	$9,319 \times 10^{-6}$	0,7440
−40	1,514	1002	0,02057	$1,356 \times 10^{-5}$	$1,527 \times 10^{-5}$	$1,008 \times 10^{-5}$	0,7436
−30	1,451	1004	0,02134	$1,465 \times 10^{-5}$	$1,579 \times 10^{-5}$	$1,087 \times 10^{-5}$	0,7425
−20	1,394	1005	0,02211	$1,578 \times 10^{-5}$	$1,630 \times 10^{-5}$	$1,169 \times 10^{-5}$	0,7408
−10	1,341	1006	0,02288	$1,696 \times 10^{-5}$	$1,680 \times 10^{-5}$	$1,252 \times 10^{-5}$	0,7387
0	1,292	1006	0,02364	$1,818 \times 10^{-5}$	$1,729 \times 10^{-5}$	$1,338 \times 10^{-5}$	0,7362
5	1,269	1006	0,02401	$1,880 \times 10^{-5}$	$1,754 \times 10^{-5}$	$1,382 \times 10^{-5}$	0,7350
10	1,246	1006	0,02439	$1,944 \times 10^{-5}$	$1,778 \times 10^{-5}$	$1,426 \times 10^{-5}$	0,7336
15	1,225	1007	0,02476	$2,009 \times 10^{-5}$	$1,802 \times 10^{-5}$	$1,470 \times 10^{-5}$	0,7323
20	1,204	1007	0,02514	$2,074 \times 10^{-5}$	$1,825 \times 10^{-5}$	$1,516 \times 10^{-5}$	0,7309
25	1,184	1007	0,02551	$2,141 \times 10^{-5}$	$1,849 \times 10^{-5}$	$1,562 \times 10^{-5}$	0,7296
30	1,164	1007	0,02588	$2,208 \times 10^{-5}$	$1,872 \times 10^{-5}$	$1,608 \times 10^{-5}$	0,7282
35	1,145	1007	0,02625	$2,277 \times 10^{-5}$	$1,895 \times 10^{-5}$	$1,655 \times 10^{-5}$	0,7268
40	1,127	1007	0,02662	$2,346 \times 10^{-5}$	$1,918 \times 10^{-5}$	$1,702 \times 10^{-5}$	0,7255
45	1,109	1007	0,02699	$2,416 \times 10^{-5}$	$1,941 \times 10^{-5}$	$1,750 \times 10^{-5}$	0,7241
50	1,092	1007	0,02735	$2,487 \times 10^{-5}$	$1,963 \times 10^{-5}$	$1,798 \times 10^{-5}$	0,7228
60	1,059	1007	0,02808	$2,632 \times 10^{-5}$	$2,008 \times 10^{-5}$	$1,896 \times 10^{-5}$	0,7202
70	1,028	1007	0,02881	$2,780 \times 10^{-5}$	$2,052 \times 10^{-5}$	$1,995 \times 10^{-5}$	0,7177
80	0,9994	1008	0,02953	$2,931 \times 10^{-5}$	$2,096 \times 10^{-5}$	$2,097 \times 10^{-5}$	0,7154
90	0,9718	1008	0,03024	$3,086 \times 10^{-5}$	$2,139 \times 10^{-5}$	$2,201 \times 10^{-5}$	0,7132
100	0,9458	1009	0,03095	$3,243 \times 10^{-5}$	$2,181 \times 10^{-5}$	$2,306 \times 10^{-5}$	0,7111
120	0,8977	1011	0,03235	$3,565 \times 10^{-5}$	$2,264 \times 10^{-5}$	$2,522 \times 10^{-5}$	0,7073
140	0,8542	1013	0,03374	$3,898 \times 10^{-5}$	$2,345 \times 10^{-5}$	$2,745 \times 10^{-5}$	0,7041
160	0,8148	1016	0,03511	$4,241 \times 10^{-5}$	$2,420 \times 10^{-5}$	$2,975 \times 10^{-5}$	0,7014
180	0,7788	1019	0,03646	$4,593 \times 10^{-5}$	$2,504 \times 10^{-5}$	$3,212 \times 10^{-5}$	0,6992
200	0,7459	1023	0,03779	$4,954 \times 10^{-5}$	$2,577 \times 10^{-5}$	$3,455 \times 10^{-5}$	0,6974
250	0,6746	1033	0,04104	$5,890 \times 10^{-5}$	$2,760 \times 10^{-5}$	$4,091 \times 10^{-5}$	0,6946
300	0,6158	1044	0,04418	$6,871 \times 10^{-5}$	$2,934 \times 10^{-5}$	$4,765 \times 10^{-5}$	0,6935
350	0,5664	1056	0,04721	$7,892 \times 10^{-5}$	$3,101 \times 10^{-5}$	$5,475 \times 10^{-5}$	0,6937
400	0,5243	1069	0,05015	$8,951 \times 10^{-5}$	$3,261 \times 10^{-5}$	$6,219 \times 10^{-5}$	0,6948
450	0,4880	1081	0,05298	$1,004 \times 10^{-4}$	$3,415 \times 10^{-5}$	$6,997 \times 10^{-5}$	0,6965
500	0,4565	1093	0,05572	$1,117 \times 10^{-4}$	$3,563 \times 10^{-5}$	$7,806 \times 10^{-5}$	0,6986
600	0,4042	1115	0,06093	$1,352 \times 10^{-4}$	$3,846 \times 10^{-5}$	$9,515 \times 10^{-5}$	0,7037
700	0,3627	1135	0,06581	$1,598 \times 10^{-4}$	$4,111 \times 10^{-5}$	$1,133 \times 10^{-4}$	0,7092
800	0,3289	1153	0,07037	$1,855 \times 10^{-4}$	$4,362 \times 10^{-5}$	$1,326 \times 10^{-4}$	0,7149
900	0,3008	1169	0,07465	$2,122 \times 10^{-4}$	$4,600 \times 10^{-5}$	$1,529 \times 10^{-4}$	0,7206
1000	0,2772	1184	0,07868	$2,398 \times 10^{-4}$	$4,826 \times 10^{-5}$	$1,741 \times 10^{-4}$	0,7260
1500	0,1990	1234	0,09599	$3,908 \times 10^{-4}$	$5,817 \times 10^{-5}$	$2,922 \times 10^{-4}$	0,7478
2000	0,1553	1264	0,11113	$5,664 \times 10^{-4}$	$6,630 \times 10^{-5}$	$4,270 \times 10^{-4}$	0,7539

Nota: Para os gases ideais, as propriedades c_p, k, μ, e Pr não dependem da pressão. As propriedades ρ, ν, e α a uma pressão P (em atm) diferente de 1 atm são determinadas pela multiplicação dos valores de ρ a determinada temperatura por P e dividindo ν e α por P.

Fonte: Dados gerados pelo software EES desenvolvido pela S. A. Klein e F. L. Alvarado. Fontes originais: Keenan, Chao, Keyes, Gas Tables, Wiley, 198; e "Thermophysical Properties of Matter", Vol. 3: "Thermal Conductivity", Y. S. Touloukian, P. E. Liley, S. C. Saxena, Vol. 11: "Viscosity", Y. S. Touloukian, S. C. Saxena e P. Hestermans, IFI/Plenun, NY, 1970, ISBN 0-306067020-8.

TABELA A–10

Propriedades dos gases à pressão de 1 atm

Temp. T, °C	Densidade ρ, kg/m³	Calor Específico c_p J/kg · K	Condutividade Térmica k, W/m · K	Difusividade Térmica α, m²/s	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s	Viscosidade Cinemática ν, m²/s	Número de Prandtl Pr
			Dióxido de Carbono, CO_2				
−50	2,4035	746	0,01051	$5{,}860 \times 10^{-6}$	$1{,}129 \times 10^{-5}$	$4{,}699 \times 10^{-6}$	0,8019
0	1,9635	811	0,01456	$9{,}141 \times 10^{-6}$	$1{,}375 \times 10^{-5}$	$7{,}003 \times 10^{-6}$	0,7661
50	1,6597	866,6	0,01858	$1{,}291 \times 10^{-5}$	$1{,}612 \times 10^{-5}$	$9{,}714 \times 10^{-6}$	0,7520
100	1,4373	914,8	0,02257	$1{,}716 \times 10^{-5}$	$1{,}841 \times 10^{-5}$	$1{,}281 \times 10^{-5}$	0,7464
150	1,2675	957,4	0,02652	$2{,}186 \times 10^{-5}$	$2{,}063 \times 10^{-5}$	$1{,}627 \times 10^{-5}$	0,7445
200	1,1336	995,2	0,03044	$2{,}698 \times 10^{-5}$	$2{,}276 \times 10^{-5}$	$2{,}008 \times 10^{-5}$	0,7442
300	0,9358	1060	0,03814	$3{,}847 \times 10^{-5}$	$2{,}682 \times 10^{-5}$	$2{,}866 \times 10^{-5}$	0,7450
400	0,7968	1112	0,04565	$5{,}151 \times 10^{-5}$	$3{,}061 \times 10^{-5}$	$3{,}842 \times 10^{-5}$	0,7458
500	0,6937	1156	0,05293	$6{,}600 \times 10^{-5}$	$3{,}416 \times 10^{-5}$	$4{,}924 \times 10^{-5}$	0,7460
1000	0,4213	1292	0,08491	$1{,}560 \times 10^{-4}$	$4{,}898 \times 10^{-5}$	$1{,}162 \times 10^{-4}$	0,7455
1500	0,3025	1356	0,10688	$2{,}606 \times 10^{-4}$	$6{,}106 \times 10^{-5}$	$2{,}019 \times 10^{-4}$	0,7745
2000	0,2359	1387	0,11522	$3{,}521 \times 10^{-4}$	$7{,}322 \times 10^{-5}$	$3{,}103 \times 10^{-4}$	0,8815
			Monóxido de Carbono, CO				
−50	1,5297	1081	0,01901	$1{,}149 \times 10^{-5}$	$1{,}378 \times 10^{-5}$	$9{,}012 \times 10^{-6}$	0,7840
0	1,2497	1048	0,02278	$1{,}739 \times 10^{-5}$	$1{,}629 \times 10^{-5}$	$1{,}303 \times 10^{-5}$	0,7499
50	1,0563	1039	0,02641	$2{,}407 \times 10^{-5}$	$1{,}863 \times 10^{-5}$	$1{,}764 \times 10^{-5}$	0,7328
100	0,9148	1041	0,02992	$3{,}142 \times 10^{-5}$	$2{,}080 \times 10^{-5}$	$2{,}274 \times 10^{-5}$	0,7239
150	0,8067	1049	0,03330	$3{,}936 \times 10^{-5}$	$2{,}283 \times 10^{-5}$	$2{,}830 \times 10^{-5}$	0,7191
200	0,7214	1060	0,03656	$4{,}782 \times 10^{-5}$	$2{,}472 \times 10^{-5}$	$3{,}426 \times 10^{-5}$	0,7164
300	0,5956	1085	0,04277	$6{,}619 \times 10^{-5}$	$2{,}812 \times 10^{-5}$	$4{,}722 \times 10^{-5}$	0,7134
400	0,5071	1111	0,04860	$8{,}628 \times 10^{-5}$	$3{,}111 \times 10^{-5}$	$6{,}136 \times 10^{-5}$	0,7111
500	0,4415	1135	0,05412	$1{,}079 \times 10^{-4}$	$3{,}379 \times 10^{-5}$	$7{,}653 \times 10^{-5}$	0,7087
1000	0,2681	1226	0,07894	$2{,}401 \times 10^{-4}$	$4{,}557 \times 10^{-5}$	$1{,}700 \times 10^{-4}$	0,7080
1500	0,1925	1279	0,10458	$4{,}246 \times 10^{-4}$	$6{,}321 \times 10^{-5}$	$3{,}284 \times 10^{-4}$	0,7733
2000	0,1502	1309	0,13833	$7{,}034 \times 10^{-4}$	$9{,}826 \times 10^{-5}$	$6{,}543 \times 10^{-4}$	0,9302
			Metano, CH_4				
−50	0,8761	2243	0,02367	$1{,}204 \times 10^{-5}$	$8{,}564 \times 10^{-6}$	$9{,}774 \times 10^{-6}$	0,8116
0	0,7158	2217	0,03042	$1{,}917 \times 10^{-5}$	$1{,}028 \times 10^{-5}$	$1{,}436 \times 10^{-5}$	0,7494
50	0,6050	2302	0,03766	$2{,}704 \times 10^{-5}$	$1{,}191 \times 10^{-5}$	$1{,}969 \times 10^{-5}$	0,7282
100	0,5240	2443	0,04534	$3{,}543 \times 10^{-5}$	$1{,}345 \times 10^{-5}$	$2{,}567 \times 10^{-5}$	0,7247
150	0,4620	2611	0,05344	$4{,}431 \times 10^{-5}$	$1{,}491 \times 10^{-5}$	$3{,}227 \times 10^{-5}$	0,7284
200	0,4132	2791	0,06194	$5{,}370 \times 10^{-5}$	$1{,}630 \times 10^{-5}$	$3{,}944 \times 10^{-5}$	0,7344
300	0,3411	3158	0,07996	$7{,}422 \times 10^{-5}$	$1{,}886 \times 10^{-5}$	$5{,}529 \times 10^{-5}$	0,7450
400	0,2904	3510	0,09918	$9{,}727 \times 10^{-5}$	$2{,}119 \times 10^{-5}$	$7{,}297 \times 10^{-5}$	0,7501
500	0,2529	3836	0,11933	$1{,}230 \times 10^{-4}$	$2{,}334 \times 10^{-5}$	$9{,}228 \times 10^{-5}$	0,7502
1000	0,1536	5042	0,22562	$2{,}914 \times 10^{-4}$	$3{,}281 \times 10^{-5}$	$2{,}136 \times 10^{-4}$	0,7331
1500	0,1103	5701	0,31857	$5{,}068 \times 10^{-4}$	$4{,}434 \times 10^{-5}$	$4{,}022 \times 10^{-4}$	0,7936
2000	0,0860	6001	0,36750	$7{,}120 \times 10^{-4}$	$6{,}360 \times 10^{-5}$	$7{,}395 \times 10^{-4}$	1,0386
			Hidrogênio, H_2				
−50	0,11010	12635	0,1404	$1{,}009 \times 10^{-4}$	$7{,}293 \times 10^{-6}$	$6{,}624 \times 10^{-5}$	0,6562
0	0,08995	13920	0,1652	$1{,}319 \times 10^{-4}$	$8{,}391 \times 10^{-6}$	$9{,}329 \times 10^{-5}$	0,7071
50	0,07603	14349	0,1881	$1{,}724 \times 10^{-4}$	$9{,}427 \times 10^{-6}$	$1{,}240 \times 10^{-4}$	0,7191
100	0,06584	14473	0,2095	$2{,}199 \times 10^{-4}$	$1{,}041 \times 10^{-5}$	$1{,}582 \times 10^{-4}$	0,7196
150	0,05806	14492	0,2296	$2{,}729 \times 10^{-4}$	$1{,}136 \times 10^{-5}$	$1{,}957 \times 10^{-4}$	0,7174
200	0,05193	14482	0,2486	$3{,}306 \times 10^{-4}$	$1{,}228 \times 10^{-5}$	$2{,}365 \times 10^{-4}$	0,7155
300	0,04287	14481	0,2843	$4{,}580 \times 10^{-4}$	$1{,}403 \times 10^{-5}$	$3{,}274 \times 10^{-4}$	0,7149
400	0,03650	14540	0,3180	$5{,}992 \times 10^{-4}$	$1{,}570 \times 10^{-5}$	$4{,}302 \times 10^{-4}$	0,7179
500	0,03178	14653	0,3509	$7{,}535 \times 10^{-4}$	$1{,}730 \times 10^{-5}$	$5{,}443 \times 10^{-4}$	0,7224
1000	0,01930	15577	0,5206	$1{,}732 \times 10^{-3}$	$2{,}455 \times 10^{-5}$	$1{,}272 \times 10^{-3}$	0,7345
1500	0,01386	16553	0,6581	$2{,}869 \times 10^{-3}$	$3{,}099 \times 10^{-5}$	$2{,}237 \times 10^{-3}$	0,7795
2000	0,01081	17400	0,5480	$2{,}914 \times 10^{-3}$	$3{,}690 \times 10^{-5}$	$3{,}414 \times 10^{-3}$	1,1717

(*Continuação*)

TABELA A–10

Propriedades dos gases à pressão de 1 atm (*Continuação*)

Temp. T, °C	Densidade ρ, kg/m³	Calor Específico c_p J/kg · K	Condutividade Térmica k, W/m · K	Difusividade Térmica α, m²/s	Viscosidade Dinâmica μ, kg/m · s	Viscosidade Cinemática ν, m²/s	Número de Prandtl Pr
			Nitrogênio, N_2				
−50	1,5299	957,3	0,02001	$1,366 \times 10^{-5}$	$1,390 \times 10^{-5}$	$9,091 \times 10^{-6}$	0,6655
0	1,2498	1035	0,02384	$1,843 \times 10^{-5}$	$1,640 \times 10^{-5}$	$1,312 \times 10^{-5}$	0,7121
50	1,0564	1042	0,02746	$2,494 \times 10^{-5}$	$1,874 \times 10^{-5}$	$1,774 \times 10^{-5}$	0,7114
100	0,9149	1041	0,03090	$3,244 \times 10^{-5}$	$2,094 \times 10^{-5}$	$2,289 \times 10^{-5}$	0,7056
150	0,8068	1043	0,03416	$4,058 \times 10^{-5}$	$2,300 \times 10^{-5}$	$2,851 \times 10^{-5}$	0,7025
200	0,7215	1050	0,03727	$4,921 \times 10^{-5}$	$2,494 \times 10^{-5}$	$3,457 \times 10^{-5}$	0,7025
300	0,5956	1070	0,04309	$6,758 \times 10^{-5}$	$2,849 \times 10^{-5}$	$4,783 \times 10^{-5}$	0,7078
400	0,5072	1095	0,04848	$8,727 \times 10^{-5}$	$3,166 \times 10^{-5}$	$6,242 \times 10^{-5}$	0,7153
500	0,4416	1120	0,05358	$1,083 \times 10^{-4}$	$3,451 \times 10^{-5}$	$7,816 \times 10^{-5}$	0,7215
1000	0,2681	1213	0,07938	$2,440 \times 10^{-4}$	$4,594 \times 10^{-5}$	$1,713 \times 10^{-4}$	0,7022
1500	0,1925	1266	0,11793	$4,839 \times 10^{-4}$	$5,562 \times 10^{-5}$	$2,889 \times 10^{-4}$	0,5969
2000	0,1502	1297	0,18590	$9,543 \times 10^{-4}$	$6,426 \times 10^{-5}$	$4,278 \times 10^{-4}$	0,4483
			Oxigênio, O_2				
−50	1,7475	984,4	0,02067	$1,201 \times 10^{-5}$	$1,616 \times 10^{-5}$	$9,246 \times 10^{-6}$	0,7694
0	1,4277	928,7	0,02472	$1,865 \times 10^{-5}$	$1,916 \times 10^{-5}$	$1,342 \times 10^{-5}$	0,7198
50	1,2068	921,7	0,02867	$2,577 \times 10^{-5}$	$2,194 \times 10^{-5}$	$1,818 \times 10^{-5}$	0,7053
100	1,0451	931,8	0,03254	$3,342 \times 10^{-5}$	$2,451 \times 10^{-5}$	$2,346 \times 10^{-5}$	0,7019
150	0,9216	947,6	0,03637	$4,164 \times 10^{-5}$	$2,694 \times 10^{-5}$	$2,923 \times 10^{-5}$	0,7019
200	0,8242	964,7	0,04014	$5,048 \times 10^{-5}$	$2,923 \times 10^{-5}$	$3,546 \times 10^{-5}$	0,7025
300	0,6804	997,1	0,04751	$7,003 \times 10^{-5}$	$3,350 \times 10^{-5}$	$4,923 \times 10^{-5}$	0,7030
400	0,5793	1025	0,05463	$9,204 \times 10^{-5}$	$3,744 \times 10^{-5}$	$6,463 \times 10^{-5}$	0,7023
500	0,5044	1048	0,06148	$1,163 \times 10^{-4}$	$4,114 \times 10^{-5}$	$8,156 \times 10^{-5}$	0,7010
1000	0,3063	1121	0,09198	$2,678 \times 10^{-4}$	$5,732 \times 10^{-5}$	$1,871 \times 10^{-4}$	0,6986
1500	0,2199	1165	0,11901	$4,643 \times 10^{-4}$	$7,133 \times 10^{-5}$	$3,243 \times 10^{-4}$	0,6985
2000	0,1716	1201	0,14705	$7,139 \times 10^{-4}$	$8,417 \times 10^{-5}$	$4,907 \times 10^{-4}$	0,6873
			Vapor d'água, H_2O				
−50	0,9839	1892	0,01353	$7,271 \times 10^{-6}$	$7,187 \times 10^{-6}$	$7,305 \times 10^{-6}$	1,0047
0	0,8038	1874	0,01673	$1,110 \times 10^{-5}$	$8,956 \times 10^{-6}$	$1,114 \times 10^{-5}$	1,0033
50	0,6794	1874	0,02032	$1,596 \times 10^{-5}$	$1,078 \times 10^{-5}$	$1,587 \times 10^{-5}$	0,9944
100	0,5884	1887	0,02429	$2,187 \times 10^{-5}$	$1,265 \times 10^{-5}$	$2,150 \times 10^{-5}$	0,9830
150	0,5189	1908	0,02861	$2,890 \times 10^{-5}$	$1,456 \times 10^{-5}$	$2,806 \times 10^{-5}$	0,9712
200	0,4640	1935	0,03326	$3,705 \times 10^{-5}$	$1,650 \times 10^{-5}$	$3,556 \times 10^{-5}$	0,9599
300	0,3831	1997	0,04345	$5,680 \times 10^{-5}$	$2,045 \times 10^{-5}$	$5,340 \times 10^{-5}$	0,9401
400	0,3262	2066	0,05467	$8,114 \times 10^{-5}$	$2,446 \times 10^{-5}$	$7,498 \times 10^{-5}$	0,9240
500	0,2840	2137	0,06677	$1,100 \times 10^{-4}$	$2,847 \times 10^{-5}$	$1,002 \times 10^{-4}$	0,9108
1000	0,1725	2471	0,13623	$3,196 \times 10^{-4}$	$4,762 \times 10^{-5}$	$2,761 \times 10^{-4}$	0,8639
1500	0,1238	2736	0,21301	$6,288 \times 10^{-4}$	$6,411 \times 10^{-5}$	$5,177 \times 10^{-4}$	0,8233
2000	0,0966	2928	0,29183	$1,032 \times 10^{-3}$	$7,808 \times 10^{-5}$	$8,084 \times 10^{-4}$	0,7833

Nota: Para os gases ideais, as propriedades c_p, k, μ, e Pr não dependem da pressão. As propriedades ρ, ν, e α a uma pressão P (em atm) diferente de 1 atm são determinadas pela multiplicação dos valores de ρ a determinada temperatura por P e dividindo ν e α por P.

Fonte: Dados gerados pelo software EES desenvolvido pela S. A. Klein e F. L. Alvarado. Originalmente com base em diversas fontes.

TABELA A–11

Propriedades da atmosfera a grandes altitudes

Altitude, m	Temperatura, °C	Pressão, kPa	Gravidade g, m/s^2	Velocidade do Som, m/s	Densidade, kg/m^3	Condutividade Viscosidade μ, kg/m · s	Térmica, W/m · K
0	15,00	101,33	9,807	340,3	1,225	$1,789 \times 10^{-5}$	0,0253
200	13,70	98,95	9,806	339,5	1,202	$1,783 \times 10^{-5}$	0,0252
400	12,40	96,61	9,805	338,8	1,179	$1,777 \times 10^{-5}$	0,0252
600	11,10	94,32	9,805	338,0	1,156	$1,771 \times 10^{-5}$	0,0251
800	9,80	92,08	9,804	337,2	1,134	$1,764 \times 10^{-5}$	0,0250
1000	8,50	89,88	9,804	336,4	1,112	$1,758 \times 10^{-5}$	0,0249
1200	7,20	87,72	9,803	335,7	1,090	$1,752 \times 10^{-5}$	0,0248
1400	5,90	85,60	9,802	334,9	1,069	$1,745 \times 10^{-5}$	0,0247
1600	4,60	83,53	9,802	334,1	1,048	$1,739 \times 10^{-5}$	0,0245
1800	3,30	81,49	9,801	333,3	1,027	$1,732 \times 10^{-5}$	0,0244
2000	2,00	79,50	9,800	332,5	1,007	$1,726 \times 10^{-5}$	0,0243
2200	0,70	77,55	9,800	331,7	0,987	$1,720 \times 10^{-5}$	0,0242
2400	−0,59	75,63	9,799	331,0	0,967	$1,713 \times 10^{-5}$	0,0241
2600	−1,89	73,76	9,799	330,2	0,947	$1,707 \times 10^{-5}$	0,0240
2800	−3,19	71,92	9,798	329,4	0,928	$1,700 \times 10^{-5}$	0,0239
3000	−4,49	70,12	9,797	328,6	0,909	$1,694 \times 10^{-5}$	0,0238
3200	−5,79	68,36	9,797	327,8	0,891	$1,687 \times 10^{-5}$	0,0237
3400	−7,09	66,63	9,796	327,0	0,872	$1,681 \times 10^{-5}$	0,0236
3600	−8,39	64,94	9,796	326,2	0,854	$1,674 \times 10^{-5}$	0,0235
3800	−9,69	63,28	9,795	325,4	0,837	$1,668 \times 10^{-5}$	0,0234
4000	−10,98	61,66	9,794	324,6	0,819	$1,661 \times 10^{-5}$	0,0233
4200	−12,3	60,07	9,794	323,8	0,802	$1,655 \times 10^{-5}$	0,0232
4400	−13,6	58,52	9,793	323,0	0,785	$1,648 \times 10^{-5}$	0,0231
4600	−14,9	57,00	9,793	322,2	0,769	$1,642 \times 10^{-5}$	0,0230
4800	−16,2	55,51	9,792	321,4	0,752	$1,635 \times 10^{-5}$	0,0229
5000	−17,5	54,05	9,791	320,5	0,736	$1,628 \times 10^{-5}$	0,0228
5200	−18,8	52,62	9,791	319,7	0,721	$1,622 \times 10^{-5}$	0,0227
5400	−20,1	51,23	9,790	318,9	0,705	$1,615 \times 10^{-5}$	0,0226
5600	−21,4	49,86	9,789	318,1	0,690	$1,608 \times 10^{-5}$	0,0224
5800	−22,7	48,52	9,785	317,3	0,675	$1,602 \times 10^{-5}$	0,0223
6000	−24,0	47,22	9,788	316,5	0,660	$1,595 \times 10^{-5}$	0,0222
6200	−25,3	45,94	9,788	315,6	0,646	$1,588 \times 10^{-5}$	0,0221
6400	−26,6	44,69	9,787	314,8	0,631	$1,582 \times 10^{-5}$	0,0220
6600	−27,9	43,47	9,786	314,0	0,617	$1,575 \times 10^{-5}$	0,0219
6800	−29,2	42,27	9,785	313,1	0,604	$1,568 \times 10^{-5}$	0,0218
7000	−30,5	41,11	9,785	312,3	0,590	$1,561 \times 10^{-5}$	0,0217
8000	−36,9	35,65	9,782	308,1	0,526	$1,527 \times 10^{-5}$	0,0212
9000	−43,4	30,80	9,779	303,8	0,467	$1,493 \times 10^{-5}$	0,0206
10,000	−49,9	26,50	9,776	299,5	0,414	$1,458 \times 10^{-5}$	0,0201
12,000	−56,5	19,40	9,770	295,1	0,312	$1,422 \times 10^{-5}$	0,0195
14,000	−56,5	14,17	9,764	295,1	0,228	$1,422 \times 10^{-5}$	0,0195
16,000	−56,5	10,53	9,758	295,1	0,166	$1,422 \times 10^{-5}$	0,0195
18,000	−56,5	7,57	9,751	295,1	0,122	$1,422 \times 10^{-5}$	0,0195

Fonte: U.S. Standard Atmosphere Supplements, U.S. Government Printing Office, 1966. Com base em condições de média anual a 45° de latitude e variações com a época do ano e os padrões meteorológicos. As condições no nível do mar ($z = 0$) foram assumidas como $P = 101{,}325$ kPa, $T = 15$°C, $\rho = 1{,}2250$ kg/m^3, $g = 9{,}80665$ m^2/s.

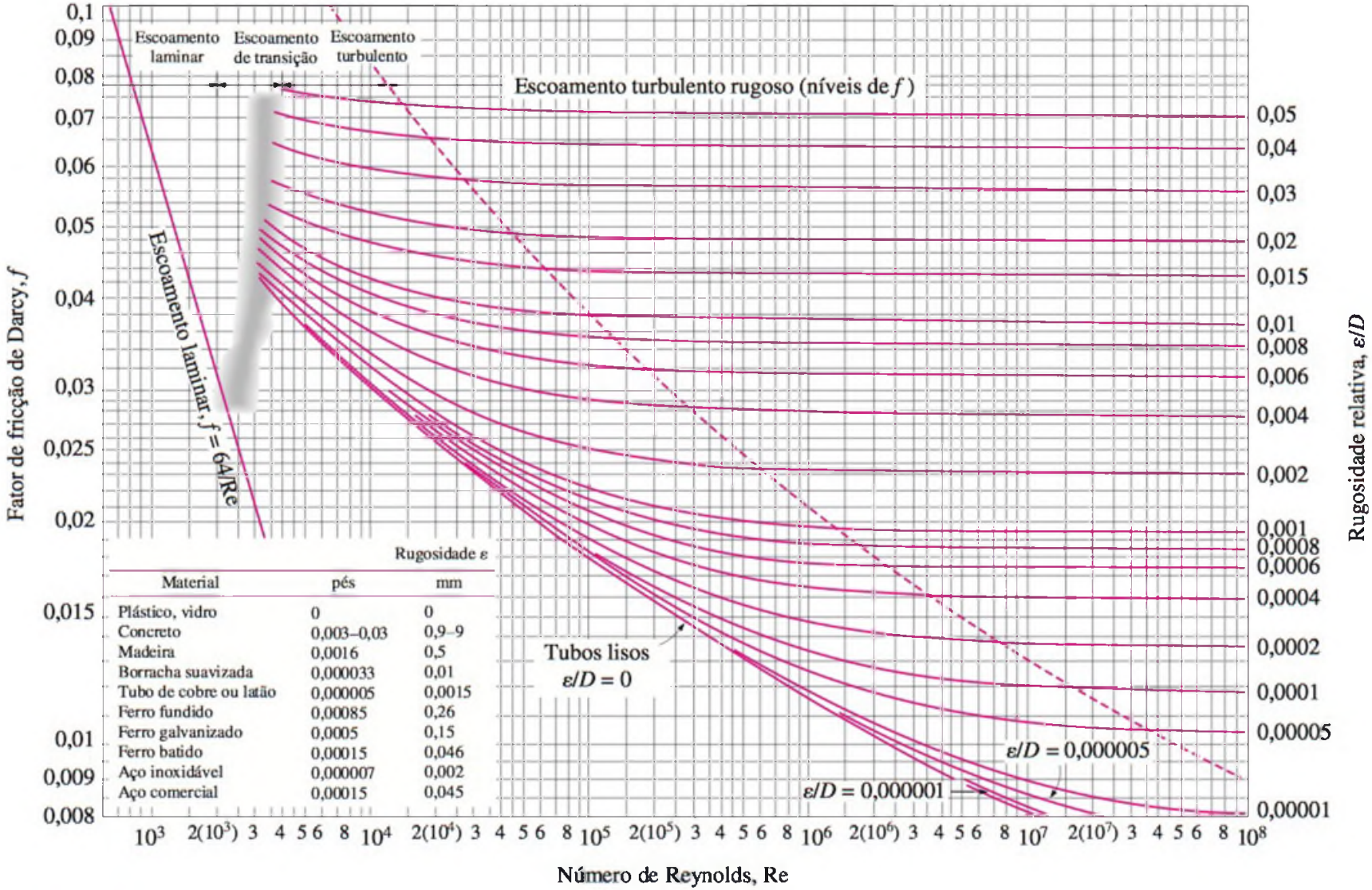


FIGURA A–12

O diagrama de Moody para o fator de atrito do escoamento completamente desenvolvido em tubos circulares para uso na relação de perda de carga $h_L = f\dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$. Os fatores de atrito do escoamento turbulento são avaliados com a equação de Colebrook $\dfrac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \dfrac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$.

$$\mathrm{Ma}^* = \mathrm{Ma}\sqrt{\frac{k+1}{2+(k-1)\mathrm{Ma}^2}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)\right]^{0{,}5(k+1)/(k-1)}$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{-k/(k-1)}$$

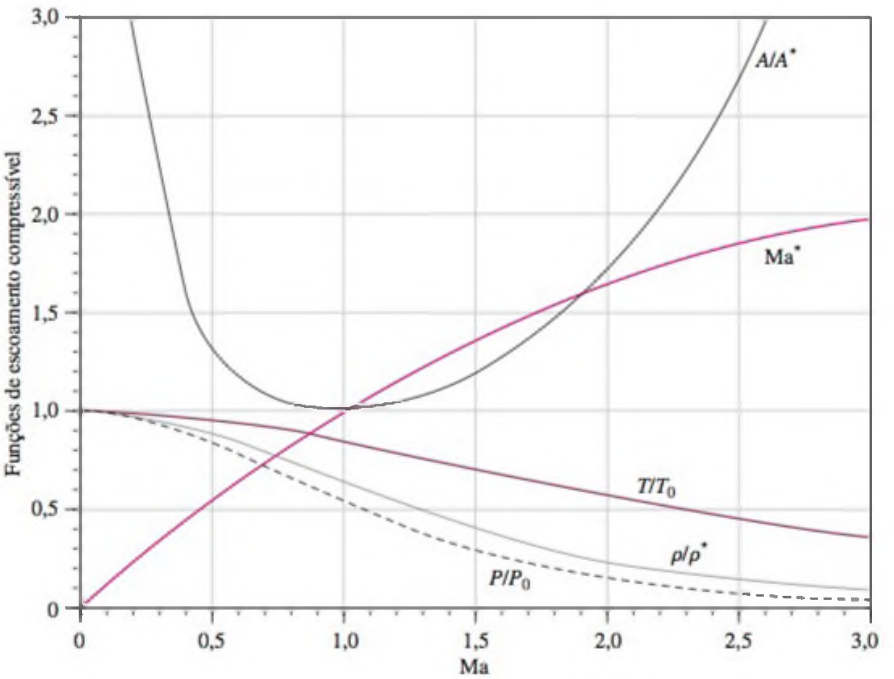
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{-1/(k-1)}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{-1}$$

TABELA A–13

Funções de escoamento compressível isentrópico unidimensional para um gás ideal com $k = 1{,}4$

Ma	Ma*	A/A^*	P/P_0	ρ/ρ_0	T/T_0
0	0	∞	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,1094	5,8218	0,9930	0,9950	0,9980
0,2	0,2182	2,9635	0,9725	0,9803	0,9921
0,3	0,3257	2,0351	0,9395	0,9564	0,9823
0,4	0,4313	1,5901	0,8956	0,9243	0,9690
0,5	0,5345	1,3398	0,8430	0,8852	0,9524
0,6	0,6348	1,1882	0,7840	0,8405	0,9328
0,7	0,7318	1,0944	0,7209	0,7916	0,9107
0,8	0,8251	1,0382	0,6560	0,7400	0,8865
0,9	0,9146	1,0089	0,5913	0,6870	0,8606
1,0	1,0000	1,0000	0,5283	0,6339	0,8333
1,2	1,1583	1,0304	0,4124	0,5311	0,7764
1,4	1,2999	1,1149	0,3142	0,4374	0,7184
1,6	1,4254	1,2502	0,2353	0,3557	0,6614
1,8	1,5360	1,4390	0,1740	0,2868	0,6068
2,0	1,6330	1,6875	0,1278	0,2300	0,5556
2,2	1,7179	2,0050	0,0935	0,1841	0,5081
2,4	1,7922	2,4031	0,0684	0,1472	0,4647
2,6	1,8571	2,8960	0,0501	0,1179	0,4252
2,8	1,9140	3,5001	0,0368	0,0946	0,3894
3,0	1,9640	4,2346	0,0272	0,0760	0,3571
5,0	2,2361	25,000	0,0019	0,0113	0,1667
∝	2,2495	∝	0	0	0



$$T_{01} = T_{02}$$

$$\text{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\text{Ma}_1^2 + 2}{2k\text{Ma}_1^2 - k + 1}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} = \frac{2k\text{Ma}_1^2 - k + 1}{k+1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2/P_1}{T_2/T_1} = \frac{(k+1)\text{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\text{Ma}_1^2} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + \text{Ma}_1^2(k-1)}{2 + \text{Ma}_2^2(k-1)}$$

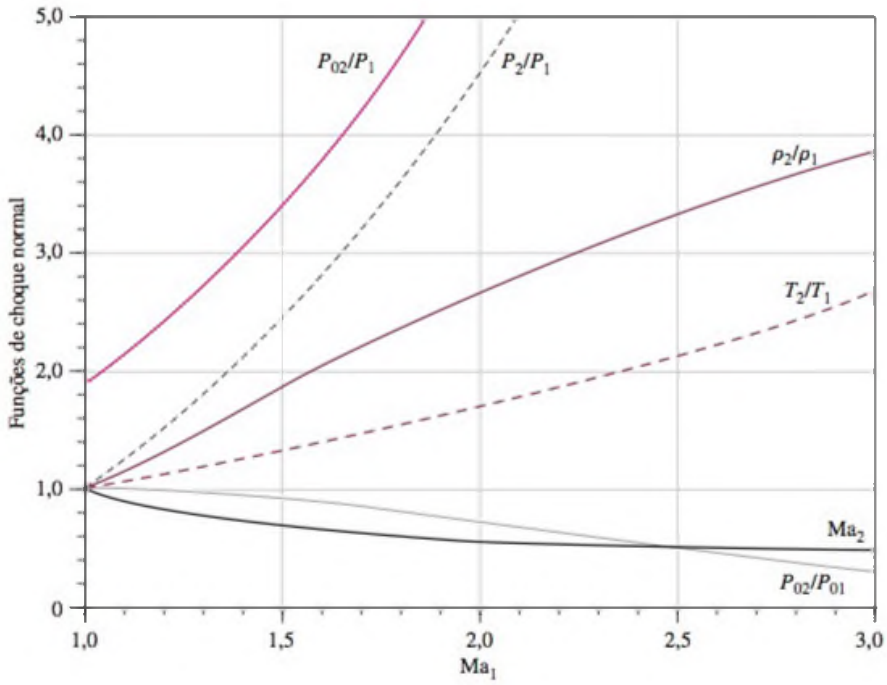
$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\text{Ma}_1}{\text{Ma}_2}\left[\frac{1 + \text{Ma}_2^2(k-1)/2}{1 + \text{Ma}_1^2(k-1)/2}\right]^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

$$\frac{P_{02}}{P_1} = \frac{(1 + k\text{Ma}_1^2)[1 + \text{Ma}_2^2(k-1)/2]^{k/(k-1)}}{1 + k\text{Ma}_2^2}$$

TABELA A–14

Funções de choque normal unidimensional para um gás ideal com $k = 1,4$

Ma_1	Ma_2	P_2/P_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	P_{02}/P_{01}	P_{02}/P_1
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,8929
1,1	0,9118	1,2450	1,1691	1,0649	0,9989	2,1328
1,2	0,8422	1,5133	1,3416	1,1280	0,9928	2,4075
1,3	0,7860	1,8050	1,5157	1,1909	0,9794	2,7136
1,4	0,7397	2,1200	1,6897	1,2547	0,9582	3,0492
1,5	0,7011	2,4583	1,8621	1,3202	0,9298	3,4133
1,6	0,6684	2,8200	2,0317	1,3880	0,8952	3,8050
1,7	0,6405	3,2050	2,1977	1,4583	0,8557	4,2238
1,8	0,6165	3,6133	2,3592	1,5316	0,8127	4,6695
1,9	0,5956	4,0450	2,5157	1,6079	0,7674	5,1418
2,0	0,5774	4,5000	2,6667	1,6875	0,7209	5,6404
2,1	0,5613	4,9783	2,8119	1,7705	0,6742	6,1654
2,2	0,5471	5,4800	2,9512	1,8569	0,6281	6,7165
2,3	0,5344	6,0050	3,0845	1,9468	0,5833	7,2937
2,4	0,5231	6,5533	3,2119	2,0403	0,5401	7,8969
2,5	0,5130	7,1250	3,3333	2,1375	0,4990	8,5261
2,6	0,5039	7,7200	3,4490	2,2383	0,4601	9,1813
2,7	0,4956	8,3383	3,5590	2,3429	0,4236	9,8624
2,8	0,4882	8,9800	3,6636	2,4512	0,3895	10,5694
2,9	0,4814	9,6450	3,7629	2,5632	0,3577	11,3022
3,0	0,4752	10,3333	3,8571	2,6790	0,3283	12,0610
4,0	0,4350	18,5000	4,5714	4,0469	0,1388	21,0681
5,0	0,4152	29,000	5,0000	5,8000	0,0617	32,6335
∞	0,3780	∞	6,0000	∞	0	∞



$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\text{Ma}^2[2+(k-1)\text{Ma}^2]}{(1+k\text{Ma}^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1+k\text{Ma}^2}\left(\frac{2+(k-1)\text{Ma}^2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{\text{Ma}(1+k)}{1+k\text{Ma}^2}\right)^2$$

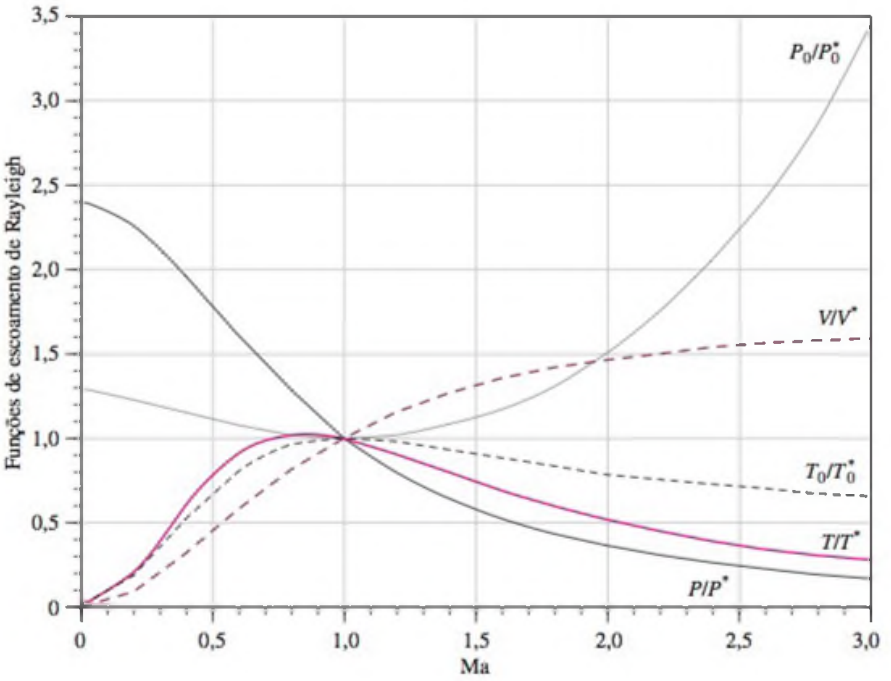
$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+k}{1+k\text{Ma}^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1+k)\text{Ma}^2}{1+k\text{Ma}^2}$$

TABELA A–15

Funções de escoamento de Rayleigh para um gás ideal com $k = 1,4$

Ma	T_0/T_0^*	P_0/P_0^*	T/T^*	P/P^*	V/V^*
0,0	0,0000	1,2679	0,0000	2,4000	0,0000
0,1	0,0468	1,2591	0,0560	2,3669	0,0237
0,2	0,1736	1,2346	0,2066	2,2727	0,0909
0,3	0,3469	1,1985	0,4089	2,1314	0,1918
0,4	0,5290	1,1566	0,6151	1,9608	0,3137
0,5	0,6914	1,1141	0,7901	1,7778	0,4444
0,6	0,8189	1,0753	0,9167	1,5957	0,5745
0,7	0,9085	1,0431	0,9929	1,4235	0,6975
0,8	0,9639	1,0193	1,0255	1,2658	0,8101
0,9	0,9921	1,0049	1,0245	1,1246	0,9110
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,2	0,9787	1,0194	0,9118	0,7958	1,1459
1,4	0,9343	1,0777	0,8054	0,6410	1,2564
1,6	0,8842	1,1756	0,7017	0,5236	1,3403
1,8	0,8363	1,3159	0,6089	0,4335	1,4046
2,0	0,7934	1,5031	0,5289	0,3636	1,4545
2,2	0,7561	1,7434	0,4611	0,3086	1,4938
2,4	0,7242	2,0451	0,4038	0,2648	1,5252
2,6	0,6970	2,4177	0,3556	0,2294	1,5505
2,8	0,6738	2,8731	0,3149	0,2004	1,5711
3,0	0,6540	3,4245	0,2803	0,1765	1,5882



$$T_0 = T_0^*$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left(\frac{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left(\frac{k+1}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}\right)^{1/2}$$

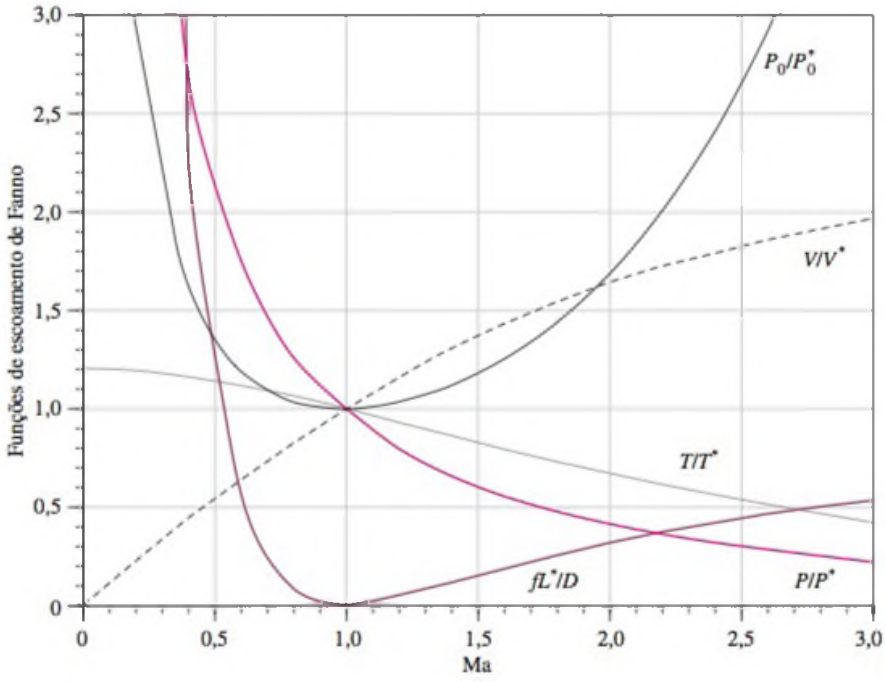
$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \mathrm{Ma}\left(\frac{k+1}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{fL^*}{D} = \frac{1 - \mathrm{Ma}^2}{k\mathrm{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}$$

TABELA A–16

Funções de escoamento de Fanno para um gás ideal com $k = 1,4$

Ma	P_0/P_0^*	T/T^*	P/P^*	V/V^*	fL^*/D
0,0	∞	1,2000	∞	0,0000	∞
0,1	5,8218	1,1976	10,9435	0,1094	66,9216
0,2	2,9635	1,1905	5,4554	0,2182	14,5333
0,3	2,0351	1,1788	3,6191	0,3257	5,2993
0,4	1,5901	1,1628	2,6958	0,4313	2,3085
0,5	1,3398	1,1429	2,1381	0,5345	1,0691
0,6	1,1882	1,1194	1,7634	0,6348	0,4908
0,7	1,0944	1,0929	1,4935	0,7318	0,2081
0,8	1,0382	1,0638	1,2893	0,8251	0,0723
0,9	1,0089	1,0327	1,1291	0,9146	0,0145
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
1,2	1,0304	0,9317	0,8044	1,1583	0,0336
1,4	1,1149	0,8621	0,6632	1,2999	0,0997
1,6	1,2502	0,7937	0,5568	1,4254	0,1724
1,8	1,4390	0,7282	0,4741	1,5360	0,2419
2,0	1,6875	0,6667	0,4082	1,6330	0,3050
2,2	2,0050	0,6098	0,3549	1,7179	0,3609
2,4	2,4031	0,5576	0,3111	1,7922	0,4099
2,6	2,8960	0,5102	0,2747	1,8571	0,4526
2,8	3,5001	0,4673	0,2441	1,9140	0,4898
3,0	4,2346	0,4286	0,2182	1,9640	0,5222



GLOSSÁRIO

Autor Convidado: James G. Brasseur, Universidade do Estado da Pensilvânia

Observação: os termos do glossário que aparecem em azul correspondem aos termos em negrito azul do texto. O tipo *itálico* indica um termo definido em outra parte do glossário.

Os termos em negrito são conceitos que não são definidos no texto, mas que são definidos ou têm referência cruzada no glossário para que os alunos revisem.

aceleração advectiva Para reduzir a confusão de terminologia nos escoamentos onde *forças de flutuação* geram movimentos convectivos de fluidos, o termo "aceleração convectiva" é freqüentemente substituído pelo termo "aceleração advectiva".

aceleração centrípeta A aceleração associada a mudança de direção da velocidade (vetor) de uma partícula material.

aceleração convectiva Sinônimo de *aceleração advectiva,* este termo deve ser adicionado à derivada parcial em relação ao tempo da velocidade para quantificar adequadamente a aceleração de uma *partícula de fluido* em um sistema de referência *euleriano*. Por exemplo, uma partícula de fluido que se movimenta através de uma contração de um *escoamento em regime permanente* acelera ao se movimentar, embora a derivada de tempo seja zero. O termo aceleração convectiva adicional necessário para quantificar a aceleração do fluido (por exemplo, na *Segunda Lei de Newton*) é chamada de *derivada convectiva.* Ver também *descrição euleriana, descrição lagrangiana, derivada material* e *escoamento em regime permanente.*

aceleração material A aceleração de uma *partícula de fluido* no ponto (x, y, z) em um escoamento no instante t. Ela é dada pela *derivada material* da velocidade do fluido: $D\vec{V}(x, y, z, t)/Dt$

adimensionalização O processo de transformar uma variável dimensional em uma variável adimensional dividindo a variável por um *parâmetro de escala* (uma única variável ou combinação de variáveis) que tem as mesmas dimensões. Por exemplo, a pressão na superfície de uma bola em movimento pode ser adimensionalizada dividindo-a por ρV^2, onde ρ é a densidade do fluido e V é a velocidade da corrente livre. Ver também *normalização.*

aerodinâmica A aplicação da *dinâmica dos fluidos* aos veículos que transitam no ar, na terra e na água. Com freqüência o termo é aplicado especificamente ao escoamento em torno, a forças e momentos de veículos que voam no ar, ao contrário dos veículos na água ou em outros líquidos (*hidrodinâmica*).

análise diferencial A análise em um ponto do escoamento (em oposição à análise do *volume de controle*).

análise dimensional Um processo de análise com base exclusivamente nas variáveis que são relevantes para o sistema de escoamento em estudo, nas dimensões das variáveis e na homogeneidade dimensional. Após determinar as outras variáveis das quais uma variável de interesse depende (por exemplo, o arrasto de um carro depende da velocidade e do tamanho do carro, da viscosidade do fluido e da rugosidade da superfície), aplica-se o princípio da homogeneidade dimensional com o *teorema Pi de Buckingham* para relacionar apropriadamente uma variável adequadamente adimensionalizada de interesse (por exemplo, o arrasto) com outras variáveis adequadamente adimensionalizadas (por exemplo, os números de Reynolds, a razão de rugosidade e o número de Mach).

anemômetro de filme quente Semelhante a um *anemômetro de fio quente,* exceto pelo uso de um filme metálico em vez de um fio; utilizado principalmente para escoamentos de líquidos. A parte da medição de uma sonda de filme quente geralmente é maior e mais rugosa do que aquela de uma sonda de fio quente.

anemômetro de fio quente Um dispositivo usado para medir uma componente da velocidade localmente em um escoamento de gás com base na relação entre o escoamento ao redor de um fio fino aquecido (o fio quente), a temperatura do fio e o aquecimento do fio resultante de uma corrente. Ver também *anemômetro de filme quente.*

ângulo de ataque O ângulo entre um aerofólio ou asa e o vetor velocidade do escoamento de corrente livre.

aproximação da camada limite Ver *camada limite.*

arrasto induzido Ver *força de arrasto.*

atrito/por atrito Ver *fluido newtoniano, viscosidade e força viscosa.*

atrito superficial A tensão de cisalhamento superficial τw adimensionalizada por uma *pressão dinâmica* apropriada $\frac{1}{2}\rho V^2$. Também chamada de coeficiente de atrito superficial, Cf.

barômetro Um dispositivo que mede a pressão atmosférica.

bidimensional Ver *dimensionalidade.*

calor Ver *energia.*

camada intermediária A parte de uma camada limite turbulenta, próxima à parede, que fica entre as *subcamadas viscosa* e *inercial.* Essa fina camada é uma transição entre a camada dominada pelo atrito, adjacente à parede, na qual as *tensões viscosas* são grandes, e a camada inercial na qual as *tensões turbulentas* são grandes comparadas às tensões viscosas.

camada limite Para números de Reynolds altos existem "camadas limites" relativamente finas no escoamento adjacente às superfícies nas quais é imposto que o escoamento esteja em repouso (ver *condição de não escorregamento*). As camadas limites se caracterizam por cisalhamento alto, com as maiores velocidades longe da superfície. A *força de atrito, tensão viscosa* e *vorticidade* são significativas nas camadas limites. A forma aproximada das duas componentes da equação de Navier–Stokes, simplificada desprezando os termos que são pequenos dentro da camada limite, são chamadas de *equações da camada limite*. A aproximação associada, com base na existência das camadas limite finas cercadas por escoamento irrotacional ou não viscoso é chamada de *aproximação da camada limite.*

campo A representação de uma variável de escoamento como uma função das coordenadas eulerianas (x, y, z). Por exemplo, os *campos de velocidade* e *aceleração* são os vetores velocidade e aceleração do fluido $\vec{V}$, $\vec{a}$ como funções da posição (x,y,z) na *descrição euleriana* em um instante especificado t.

Observação: Este glossário aborda os termos em **negrito colorido** encontrados nos Capítulos 1 a 11.

campo de escoamento O campo das variáveis de escoamento. Em geral, este termo se refere ao campo de velocidade, mas também pode englobar todas as variáveis de campo de um escoamento de fluido.

campo de aceleração Ver *campo.*

campo de velocidade Ver *campo.*

carga Uma quantidade (pressão, energia cinética etc.) expressa como o equivalente em altura de coluna de um fluido. A *conservação da energia* para *escoamento em regime permanente* escrita para um *volume de controle* que cerca uma *linha de corrente* central com uma entrada e uma saída, ou encolhido para uma linha de corrente, pode ser escrita de forma que cada termo tenha as *dimensões* de comprimento. Cada um destes termos é chamado de carga:

carga de elevação O termo na forma de carga na equação de *conservação de energia* (ver *carga*) que envolve a distância na direção oposta ao vetor gravitacional com relação a um plano de referência predefinido (z).

carga de pressão O termo na forma de carga na equação de *conservação de energia* (ver *carga*) que envolve a pressão ($P/\rho g$).

carga de velocidade O termo (*energia cinética*) na forma de carga na equação de *conservação de energia* (ver *carga*) que envolve a velocidade ($V^2/2g$).

perda de carga O termo na forma de carga na equação de *conservação de energia* (ver *carga*) que contém as perdas por atrito e outras irreversibilidades. Sem este termo, a equação da energia para as linhas de corrente torna-se a *equação de Bernoulli* na forma de carga.

cavitação A formação das bolhas de vapor em um líquido como resultado da queda da pressão abaixo da *pressão de vapor.*

centro de pressão O ponto efetivo de aplicação da pressão distribuída ao longo de uma superfície. Esse é o ponto no qual uma força contrária (igual a integral da pressão) deve ser colocada para que o torque resultante em relação àquele ponto seja zero.

cinemática ao contrário da *dinâmica,* os aspectos da cinemática de um escoamento de fluido são aqueles que não envolvem diretamente o balanço de forças da Segunda Lei de Newton. A cinemática se refere às descrições e deduções matemáticas com base apenas na conservação de massa (continuidade) e nas definições relacionadas ao escoamento e à deformação.

cisalhamento Diz respeito aos gradientes (derivadas) das componentes da velocidade nas direções normal à componente da velocidade.

camada de cisalhamento Uma região de escoamento quase bidimensional com gradiente alto na componente da velocidade na direção da corrente na direção transversal ao escoamento. As camadas de cisalhamento são inerentemente *viscosas* e *turbilhonar* por natureza.

força de cisalhamento Consultar *tensão, tensão de cisalhamento.*

taxa de cisalhamento O gradiente da velocidade na direção da corrente na direção perpendicular à velocidade. Assim, se a velocidade u na direção da corrente (x) varia em y, a taxa de cisalhamento é du/dy. O termo é aplicado aos *escoamentos de cisalhamento,* nos quais a taxa de cisalhamento é o dobro da *taxa de deformação por cisalhamento.* Ver também *taxa de deformação.*

taxa de cisalhamento Ver *taxa de tensão.*

tensão de cisalhamento Ver *tensão, tensão de cisalhamento.*

coeficiente de arrasto Arrasto adimensional dado como a *força de arrasto* de um objeto adimensionalizada pela *pressão dinâmica* do escoamento de corrente livre vezes a área frontal do objeto:

$$C_D \equiv \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

Observe que para alto número de Reynolds ($\mathrm{Re} \gg 1$), C_D é uma variável normalizada, enquanto que para $\mathrm{Re} \ll 1$, C_D é adimensional, mas não é normalizado (ver *normalização*). Ver também *coeficiente de sustentação.*

coeficiente de compressibilidade Ver *compressibilidade.*

coeficiente de sustentação Sustentação adimensional dada pela força de sustentação em um objeto em sustentação (como um aerofólio ou uma asa) adimensionalizado pela pressão dinâmica do escoamento de corrente livre vezes a área planiforme do objeto:

completamente desenvolvido Usado sozinho, o termo é em geral compreendido como hidrodinamicamente completamente desenvolvido, uma região do escoamento na qual o campo de velocidade é constante ao longo de uma direção especificada no escoamento. Na região completamente desenvolvida do escoamento em um tubo ou duto, o campo de velocidade é constante na direção axial, x (ou seja, ele independe de x), de modo que as derivadas da velocidade em relação a variável x sejam zero na região de escoamento completamente desenvolvida. Também existe o conceito de "termicamente completamente desenvolvido" para o campo de temperatura; entretanto, ao contrário das regiões hidrodinamicamente completamente desenvolvidas onde o módulo e a forma do perfil de velocidade são constantes em x, nas regiões termicamente completamente desenvolvidas apenas a forma do perfil de temperatura é constante em x. Ver também *comprimento de entrada.*

compressibilidade A medida de quanto uma *partícula de fluido* varia de volume quando é submetida a uma variação de pressão ou de temperatura.

coeficiente de compressibilidade A razão entre a variação de pressão e a variação relativa do volume de uma *partícula de fluido.* Esse coeficiente quantifica a compressibilidade em resposta à variação da pressão, um efeito importante nos escoamentos com alto números de Mach.

coeficiente de expansão de volume A razão entre a variação relativa da densidade e a variação da temperatura de uma *partícula de fluido.* Esse coeficiente quantifica a compressibilidade em resposta a variação de temperatura.

módulo de compressibilidade Sinônimo de *coeficiente de compressibilidade.*

comprimento de entrada A região do escoamento na entrada de um tubo ou duto onde as camadas limite da parede aumentam de espessura na direção do centro com a distância axial x no duto, de modo que as derivadas axiais são diferentes de zero. Assim como acontece com a região *completamente desenvolvida,* o *comprimento de entrada hidrodinâmica* envolve o crescimento de uma camada limite de velocidade, e o *comprimento de entrada térmica* envolve o crescimento de uma camada limite de temperatura.

comprimento da entrada hidrodinâmica Ver *comprimento de entrada.*

comprimento de mistura Ver *modelos de turbulência.*

condição de contorno Para determinar as variáveis do campo de escoamento (velocidade, temperatura) a partir das equações que regem o escoamento é necessário especificar matematicamente uma função das variáveis nas fronteiras do escoamento. Essas condições matemáticas são chamadas de condições de contorno. A condição de

não escorregamento que afirma que a velocidade do escoamento deve ser igual à velocidade da superfície (parede) é um exemplo de uma condição de contorno usada com a equação de Navier–Stokes para determinar o campo de velocidade.

condição de não-escorregamento O requisito de que na interface entre um fluido e uma superfície sólida, a velocidade do fluido e a velocidade da superfície sejam iguais. Assim, se a superfície é fixa, o fluido deve obedecer à *condição de contorno* de que a velocidade do fluido = 0 na superfície.

contínuo Tratamento da matéria como uma distribuição contínua (sem buracos) de elementos de *volume infinitesimais* com massa finita. Cada elemento de volume deve conter números enormes de moléculas, para que o efeito macroscópico das moléculas possa ser modelado sem levar em conta as moléculas individualmente.

corpo rombudo Um objeto móvel com a parte traseira achatada, não carenada. Corpos rombudos apresentam *esteiras* resultantes da *separação maçica de escoamento* na parte traseira do corpo.

deformação Ver *taxa de deformação.*

derivada convectiva: Ver *derivada material* e *aceleração convectiva.*

derivada de partícula Ver *derivada material.*

derivada euleriana Ver *derivada material.*

derivada lagrangiana Ver *derivada material.*

derivada material Os sinônimos são *derivada total, derivada substancial* e *derivada de partícula.* Esses termos significam a taxa de variação no tempo das variáveis de fluido (temperatura, velocidade etc.) que se movimentam com uma *partícula de fluido.* Assim, a derivada material da temperatura em um ponto (x,y,z) no instante t é a derivada no tempo da temperatura associada a uma *partícula de fluido* em movimento localizada no ponto (x,y,z) do escoamento no instante t. Em um sistema de referência *lagrangiano* (ou seja, um sistema de referência anexo à partícula em movimento), a temperatura da partícula $T_{\text{partícula}}$ depende apenas do tempo, de modo que uma derivada no tempo é uma derivada total $dT_{\text{partícula}}(t)/dt$. Em um sistema de referência euleriano, o *campo* de temperatura $T(x,y,z,t)$ depende da posição (x, y, z) e do instante t, de modo que a *derivada material* deve incluir uma derivada parcial no tempo e uma *derivada convectiva:* $dT_{\text{partícula}}(t)/dt \equiv DT(x, y, z, t)/Dt = \partial T/\partial t + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T$. Ver também *campo.*

derivada substancial Ver *derivada material.*

derivada total Ver *derivada material.*

descrição euleriana Ao contrário de uma *descrição lagrangiana,* uma análise euleriana do escoamento de fluido é desenvolvida a partir de um sistema de referência em relação ao qual as *partículas de fluido* se movimentam. Nesse sistema de referência a aceleração das partículas de fluido não é apenas a derivada em relação ao tempo da velocidade do fluido e deve incluir outro termo, chamado *aceleração convectiva,* para descrever a variação da velocidade das partículas de fluido à medida que elas se movimentam através de um *campo de velocidade.* Observe que os campos de velocidade sempre são definidos em relação a um sistema euleriano de referência.

descrição lagrangiana Em comparação com a descrição euleriana, uma análise lagrangiana é desenvolvida a partir de um sistema de referência ligado às partículas materiais em movimento. Por exemplo, a aceleração de uma partícula sólida na forma padrão da segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$ é escrita em relação a um sistema de coordenadas que se movimenta com a partícula de modo que a aceleração $\vec{a}$ é dada pela derivada no tempo da velocidade da partícula. Esta é a abordagem analítica típica usada para a análise do movimento dos objetos sólidos.

diagrama de contorno Também chamada de *diagrama de isocontorno,* essa é uma maneira de representar graficamente os dados como curvas onde a variável é constante em um *campo* de escoamento. As *linhas de corrente,* por exemplo, podem ser identificadas como curvas onde a *função de corrente é constante* em escoamentos em regime permanente, incompressíveis e *bidimensionais.*

diagrama de isocontorno Ver *diagrama de contorno.*

diagrama de Moody Um gráfico muito usado do *fator de atrito* como função do número de Reynolds e do parâmetro de rugosidade para o escoamento completamente desenvolvido em tubos. O diagrama é uma combinação de teoria de escoamento para o escoamento laminar com uma representação gráfica de uma fórmula empírica de Colebrook obtida a partir de um amplo conjunto de dados experimentais de escoamento turbulento em tubos para diversos valores de rugosidade de uma "lixa".

diagrama de perfil Uma representação gráfica da variação espacial de uma propriedade de fluido (temperatura, pressão, taxa de deformação etc.) emuma região de um escoamento de fluido. Um diagrama de perfil define as variações da propriedade em parte de um *campo* (por exemplo, um perfil de temperatura pode definir a variação da temperatura ao longo de uma reta dentro do campo de temperatura).

- **perfil de velocidade** A variação espacial de uma componente da velocidade ou do vetor velocidade em uma região de um escoamento de fluido. Por exemplo, em um escoamento em tubo, o perfil de velocidade em geral define a variação da velocidade axial com o raio ao longo da seção transversal do tubo, enquanto que um perfil de velocidade de *camada limite* em geral define a variação da velocidade axial normal à superfície. O perfil de velocidade faz parte de um *campo* de velocidade.

dimensão primária Ver *dimensões.*

dimensionalidade O número de coordenadas espaciais em cuja direção as componentes da velocidade e/ou outras variáveis variam em um sistema de coordenadas especificado. Por exemplo, o escoamento *completamente desenvolvido* em um tubo é unidimensional (1-D) na direção radial r, uma vez que a única componente de velocidade diferente de zero (a componente axial ou na direção x) é constante nas direções x e θ, mas varia na direção r. Os *escoamentos planares* são bidimensionais (2-D).
Os escoamentos sobre os *corpos rombudos* como automóveis e prédios são tridimensionais (3-D). As derivadas espaciais são diferentes de zero apenas nas direções de dimensionalidade.

dimensões A especificação necessária de uma quantidade física além de seu valor numérico. Ver também *unidades.*

- **dimensões derivadas (ou secundárias)** Combinações de dimensões fundamentais. Exemplos de dimensões derivadas são: velocidade (L/t), tensão ou pressão ($F/L^2 = m/(Lt^2)$), energia ou trabalho ($mL^2/t^2 = FL$), densidade (m/L^3), peso específico (F/L^3) e gravidade específica (sem unidade).
- **dimensões fundamentais (primárias, básicas)** Massa (m), comprimento (L), tempo (t), temperatura (T), corrente elétrica (I), quantidade de luz (C) e quantidade de matéria (N) sem referência a um sistema específico de unidades. Observe que a dimensão da força é obtida pela lei de Newton como $F = mL/t^2$ (portanto, a dimensão de massa pode ser substituída por uma dimensão de força, substituindo m por Ft^2/L).

dimensões básicas Ver *dimensões.*

dimensões derivadas Ver *dimensões.*

dimensões fundamentais Ver *dimensões.*

dimensões secundárias Ver *dimensões.*

dinâmica Quando comparada com a *estática,* o termo se refere à aplicação da segunda lei de Newton à matéria em movimento. Quando comparada com a *cinemática,* o termo se refere às forças ou acelerações através da lei de Newton para balanço de forças.

dinâmica dos fluidos computacional (DFC — Computational Fluid Dynamics) A aplicação das leis de conservação com condições de contorno e inicial na forma matematicamente discretizada para estimar quantitativamente as variáveis de campo em uma malha (ou rede) discreta que abrange parte do campo de escoamento.

dinâmica dos gases O estudo e a análise dos gases e vapores por meio das leis de conservação macroscópicas da física (ver *mecânica/dinâmica dos fluidos*).

eficiência Uma razão que descreve os níveis de perdas da potência útil obtida de um dispositivo. Valor de eficiência igual a 1 significa nenhuma perda na função particular do dispositivo para a qual a definição de eficiência foi aplicada. Por exemplo, a eficiência mecânica de uma bomba é definida como a razão entre a potência mecânica útil transferida para o escoamento pela bomba e a energia mecânica, ou trabalho de eixo, necessária para mover a bomba. A eficiência do conjunto motor-bomba é definida como a razão entre a potência mecânica útil transferida para o escoamento e a energia elétrica necessária para fazer funcionar a bomba. A eficiência do conjunto motor-bomba, porém, inclui perdas adicionais e, portanto, é menor do que a eficiência mecânica da bomba.

energia Um estado da matéria descrito pela Primeira Lei da Termodinâmica que pode ser alterado no nível macroscópico pelo trabalho, e no nível microscópico através de ajustes na energia térmica.

- **calor (transferência)** O termo "calor" em geral é usado como sinônimo de energia térmica. A transferência de calor é a transferência da energia térmica de um local físico para outro.
- **energia cinética** Forma macroscópica (ou mecânica) de energia que surge da velocidade da matéria com relação a um sistema de referência inercial.
- **energia de escoamento** Sinônimo de *trabalho de escoamento.* O trabalho associado à *pressão* que age sobre um *fluido* em escoamento.
- **energia de trabalho** A integral da força ao longo da distância na qual uma massa é movimentada pela força. O trabalho é a energia associada ao movimento da matéria por uma força.
- **energia interna** Formas de energia que surgem dos movimentos microscópicos das moléculas e átomos e da estrutura e dos movimentos das partículas subatômicas que formam os átomos e as moléculas que existem dentro da matéria.
- **energia mecânica** As componentes não térmicas de energia; os exemplos incluem a energia cinética e potencial.
- **energia potencial** Uma forma mecânica de energia que varia como resultado do deslocamento macroscópico da matéria com relação ao vetor gravitacional.
- **energia térmica** Energia interna associada aos movimentos microscópicos das moléculas e átomos. Nos sistemas de fase única, essa é a energia representada pela temperatura.
- **energia total** Soma de todas as formas de energia. A energia total é a soma das energias cinética, potencial e interna. De modo equivalente, a energia total é a soma das energias mecânica e térmica.

energia cinética Ver *energia.*

energia interna Ver *energia.*

energia mecânica Ver *energia.*

energia potencial Ver *energia.*

energia térmica Ver *energia.*

energia total Ver *energia.*

equação da continuidade Forma matemática da *conservação de massa* aplicada a uma *partícula de fluido* em um escoamento.

equação de Bernoulli Uma simplificação útil da *conservação do momento* (e da *conservação da energia*) que descreve o balanço entre pressão (*trabalho do escoamento*), velocidade (*energia cinética*) e posição das *partículas de fluido* com relação ao vetor gravidade (energia potencial) nas regiões de um fluido onde a força do atrito sobre as partículas do fluido é desprezível comparada à força da pressão naquela região do escoamento (consulte *escoamento não viscoso*). Existem várias formas da equação de Bernoulli para escoamento incompressível *versus* compressível, em regime permanente *versus* em regime não permanente e deduções através da *lei de Newton versus* a *Primeira Lei da Termodinâmica.* As formas mais usadas são aquelas para o escoamento permanente de fluido incompressível deduzidas através da conservação do momento.

equação de Navier–Stokes A *segunda lei de Newton* do movimento de fluidos (ou a *conservação do momento*) escrita para uma partícula de fluido (na forma *diferencial*) com o *tensor de tensão viscosa* substituído pela relação constitutiva entre a *tensão* e a *taxa de deformação* dos fluidos newtonianos. Assim, a equação de Navier–Stokes é simplesmente a lei de Newton escrita para os fluidos newtonianos.

equações constitutivas Uma relação empírica entre uma variável física em uma *lei da conservação da física* e outras variáveis físicas na equação que devem ser previstas. Por exemplo, a equação da energia escrita para a temperatura inclui o vetor fluxo de *calor.* Sabe-se, por experiências, que o fluxo de calor na maioria dos materiais comuns é aproximado com exatidão como proporcional ao gradiente da temperatura (isso é chamado de lei de Fourier). Na *lei de Newton* escrita para uma *partícula de fluido,* o *tensor de tensão viscosa* (ver *tensão*) deve ser escrito como uma função da velocidade para resolver a equação. A relação constitutiva mais comum para a tensão viscosa é aquele de um *fluido newtoniano.* Ver também *reologia.*

equações da camada limite Ver *camada limite.*

escoamento axissimétrico Um escoamento que quando especificado apropriadamente usando coordenadas cilíndricas (r, θ, x) não varia na direção azimutal (θ). Assim, todas as derivadas parciais em relação a θ são nulas. Portanto, o escoamento é unidimensional ou bidimensional (consulte também *dimensionalidade* e *escoamento planar*).

escoamento de Hagen–Poiseuille Ver *escoamento de Poiseuille.*

escoamento de Poiseuille *Escoamento laminar completamente desenvolvido* em um tubo ou duto. Também chamado de *escoamento de Hagen–Poiseuille.* As relações do modelo matemático para o escoamento de Poiseuille que relacionam a vazão e/ou o perfil de velocidade à queda de pressão ao longo do tubo ou duto, à viscosidade do fluido e à geometria, também são as vezes chamados de *lei de Poiseuille* (embora essa não seja estritamente uma "lei" da Mecânica). O perfil de velocidade de todos os escoamentos de Poiseuille é parabólico, e a taxa da queda da pressão axial é constante.

escoamento (em regime) permanente Um escoamento no qual todas as variáveis do fluido (velocidade, pressão, densidade, temperatura etc.) em todos os pontos fixos do escoamento são constantes com o tempo (mas em geral variam de um lugar para outro). Assim, nos escoamentos permanentes todas as derivadas parciais em relação ao tempo são zero. Os escoamentos que não são precisamente permanentes, mas que variam de forma suficientemente lenta com o tempo a ponto dos termos de derivada em relação ao

tempo poderem ser desprezados com erro relativamente pequeno são chamados de *quase permanentes.*

escoamento irrotacional (região de) Região de um escoamento com *vorticidade* (ou seja, rotação de *partícula de fluido*) desprezível. Também chamado de *escoamento potencial.* Uma região irrotacional de escoamento também é *não viscosa.*

escoamento não viscoso (região de) Região de escoamento de um fluido onde as forças viscosas são suficientemente pequenas com relação a outras forças (em geral, a força de pressão) exercidas sobre as *partículas de fluido*, de modo que nessa região do escoamento as forças viscosas podem ser desprezadas na *segunda lei de Newton* do movimento com um bom nível de aproximação (comparar com *escoamento viscoso*). Ver também *escoamento sem atrito.* Uma região não viscosa do escoamento não é necessariamente *irrotacional.*

escoamento viscoso (região de) Regiões de escoamento de um fluido nas quais as *forças viscosas* são significativas com relação a outras forças (em geral, força de pressão) exercidas sobre as *partículas de fluido* nessas região do escoamento e, portanto, não podem ser desprezadas na *segunda lei de Newton* do movimento (comparar com *escoamento não viscoso*).

escoamento forçado O escoamento resultante de uma força aplicada externamente. Os exemplos incluem o escoamento de líquido forçado por uma bomba através de tubos, e o escoamento de ar forçado por ventilador para resfriar os componentes do computador. Os *escoamentos naturais,* por outro lado, resultam de forças internas de flutuação devido a variações de temperatura (ou seja, de densidade) dentro de um fluido na presença de um campo gravitacional. Os exemplos incluem convecção natural ao redor de um corpo humano ou na atmosfera.

escoamento incompressível Um escoamento de fluido no qual as variações da densidade são suficientemente pequenas para serem desprezadas. Os escoamentos geralmente são incompressíveis ou porque o fluido é incompressível (líquidos) ou porque o número de Mach é baixo (aproximadamente $< 0{,}3$).

escoamento laminar Um estado estável e bem ordenado de escoamento de fluido no qual todos os pares de *partículas de fluido* adjacentes se movimentam ao lado uma da outra formando laminados. Um escoamento que não é laminar é *turbulento* ou *de transição* à turbulência, a qual ocorre acima de um *número de Reynolds crítico.*

escoamento lento Escoamento de fluido no qual as forças de atrito dominam as acelerações do fluido até o ponto em que o escoamento possa ser bem modelado com o termo de aceleração da Segunda Lei de Newton igualado a zero. Tais escoamentos são caracterizados por números de Reynolds pequenos comparados a 1 ($Re \ll 1$). Como o número de Reynolds em geral pode ser escrito como velocidade característica vezes comprimento característico dividido pela viscosidade cinemática (VL/ν), os escoamentos lentos em geral são escoamentos que se movem lentamente ao redor de objetos muito pequenos (por exemplo, sedimentação de partículas de poeira no ar ou movimento de espermatozóides na água), ou com fluidos muito viscosos (por exemplo, escoamentos de geleiras e alcatrão). Também chamado de escoamento de Stokes.

escoamento natural Contrastar com *escoamento forçado.*

escoamento não permanente Escoamento no qual pelo menos uma variável em um ponto fixo do escoamento varia com o tempo. Assim, nos escoamentos não permanentes uma derivada parcial em relação ao tempo é diferente de zero para pelo menos um ponto do escoamento.

escoamento planar Um escoamento *bidimensional* com duas componentes não nulas da velocidade em coordenadas cartesianas, que variam apenas nas direções das duas coordenadas do escoamento. Assim, todas as derivadas parciais perpendiculares ao plano do escoamento são nulas. Ver também *escoamento axissimétrico* e *dimensionalidade.*

escoamento potencial Sinônimo de *escoamento irrotacional.* Essa é uma região de um escoamento com *vorticidade* (ou seja, a rotação das *partículas de fluido*) desprezível. Em tais regiões existe uma *função potencial* da velocidade (motivo do nome).

escoamento quase permanente Ver *escoamento permanente.*

escoamento rotacional Sinônimo de *escoamento turbilhonar*; este termo descreve um campo de escoamento, ou uma região de um campo de escoamento, com níveis significativos de *vorticidade.*

escoamento sem atrito Tratamento matemático dos escoamentos de fluidos às vezes usam as equações de conservação do momento e da energia sem os termos do atrito. Tais tratamentos matemáticos "assumem" que o escoamento "não tem atrito", implicando em nenhuma *força viscosa* (*Segunda lei de Newton*) e em nenhuma *dissipação viscosa* (*Primeira Lei da Termodinâmica*). Entretanto, nenhum escoamento real de fluido com interesse para a engenharia pode existir sem as forças viscosas, dissipação e/ou perdas de carga nas regiões de importância prática. O engenheiro sempre deve identificar as regiões de escoamento onde os efeitos do atrito se concentram. Ao desenvolver modelos de previsão, o engenheiro deve considerar o papel dessas regiões viscosas na previsão das variáveis de interesse e deve estimar níveis de erro nos tratamentos simplificados das regiões viscosas. Em escoamentos com *números de Reynolds* altos, as regiões de atrito incluem camadas limites, *esteiras, jatos, camadas de cisalhamento* e regiões de escoamento ao redor de *vórtices.*

escoamento transicional Um escoamento de fluido *turbilhonar* instável com um número de Reynolds acima de um valor crítico que é grande com relação a 1, mas não é suficientemente alto para que o escoamento tenha atingido um estado de *escoamento completamente turbulento.* Os escoamentos transicionais quase sempre oscilam aleatoriamente entre os estados *laminar* e turbulento.

escoamento turbilhonar Sinônimo de *escoamento rotacional,* este termo descreve um campo de escoamento, ou uma região de um campo de escoamento, com níveis significativos de *vorticidade.*

escoamento turbulento Um estado de desordem instável do escoamento de fluido *turbilhonar* que é inerentemente *não permanente* e que contém movimentos em redemoinho em uma ampla gama de tamanhos (ou escalas). O número de Reynolds para escoamentos turbulentos é sempre acima de um valor crítico que é grande com relação a 1. A mistura é muito ampliada, as tensões de cisalhamento de superfície são muito superiores e a perda de carga é grandemente aumentada nos escoamentos turbulentos em comparação com os *escoamentos laminares* correspondentes.

estabilidade Um termo geral que se refere à tendência de uma partícula ou objeto material (fluido ou sólido) se distanciar ou retornar quando ligeiramente deslocado de sua posição original.

- **estável** Ver *estabilidade.* Quando ligeiramente deslocada, a partícula ou o objeto retornará à sua posição original.
- **instável** Ver *estabilidade.* Quando ligeiramente deslocada, a partícula ou o objeto continuará se distanciando de sua posição original.
- **neutramente estável** Ver *estabilidade.* Quando ligeiramente deslocada, a partícula ou o objeto permanecerá em sua posição deslocada.

estática O estudo e a análise mecânica de material que está completamente em repouso em relação a um sistema de referência específico.

esteira A região dominada pelo atrito localizada atrás de um corpo formada pelas camadas limites da superfície que são levadas para trás pela velocidade de corrente livre. As esteiras são caracterizadas pelo alto *cisalhamento* com as velocidades mais baixas no centro da esteira e as velocidades mais altas nas laterais. A *força de atrito, tensão viscosa* e *vorticidade* são significativas nas esteiras.

esteira de vórtices de Kármán O padrão *bidimensional* não permanente alternado dos *vórtices* que normalmente é observado atrás dos cilindros circulares em um escoamento (por exemplo, a esteira de vórtice atrás dos fios ao vento é responsável pelo tom distinto que às vezes ouvimos).

estol O fenômeno de *separação maciça do escoamento* da superfície de uma asa quando o *ângulo de ataque* excede um valor crítico, e a conseqüente perda significativa de força de sustentação e aumento do arrasto. Um avião em estol cai rapidamente e deve ter seu nariz abaixado para restabelecer o escoamento com camada limite não separada, regenerar a força de sustentação e reduzir o arrasto.

fator de atrito É possível demonstrar a partir da *análise dimensional* e *da conservação do momento linear* aplicado ao escoamento em regime permanente e completamente desenvolvido em um tubo que a contribuição do atrito para a queda de pressão ao longo do tubo, adimensionalizada pela *pressão dinâmica* $\frac{1}{2}\rho V_{\text{média}}^2$ do escoamento, é proporcional à razão entre comprimento e diâmetro (L/D) do tubo. O fator de proporcionalidade f é chamado de fator de atrito. O fator de atrito é quantificado a partir de experiências (escoamento turbulento) e teoria (escoamento laminar) em relações empíricas, e no *diagrama de Moody,* como função do número de Reynolds e da rugosidade adimensional. A conservação do momento linear mostra que o fator de atrito é proporcional à tensão de cisalhamento na parede (ou seja, ao *atrito na superfície*).

fator de correção da energia cinética A análise de *volume de controle* da equação de *conservação da energia* aplicada aos tubos contém integrais de área do fluxo de energia cinética. As integrais com freqüência são aproximadas como proporcionais à energia cinética obtida com a média da velocidade por área, $V_{\text{méd}}$. A inexatidão dessa aproximação pode ser significativa, de modo que um fator de correção da energia cinética α multiplica o termo para melhorar a aproximação. A correção α depende da forma do *perfil de velocidade,* é maior para os perfis *laminares* (*escoamento de Poiseuille*) e é mais próxima de 1 nos escoamentos *turbulentos em tubos* com *números de Reynolds* muito altos.

fator de correção de escoamento do momento Um fator de correção que é adicionado para corrigir as aproximações feitas na simplificação dos integrais de área dos termos do escoamento de momento na forma de volume de controle da equação de *conservação do momento.*

fluido Material que, quando submetido a cisalhamento, se deforma continuamente no tempo durante o período de aplicação das forças de cisalhamento. Como contraste, as forças de cisalhamento aplicadas a um *sólido* fazem com que o material se deforme até uma posição estática fixa (após a qual a deformação pára) ou causem a fratura do material. Conseqüentemente, enquanto as deformações nos sólidos em geral são analisadas usando a tensão e o cisalhamento, os escoamentos de fluidos são analisados usando as taxas de deformação e cisalhamento (ver *taxa de deformação*).

fluido dilatante Ver *fluido não newtoniano.*

fluido ideal Ver *fluido perfeito.*

fluido não newtoniano Um fluido não newtoniano é aquele que se deforma a uma taxa que não é linearmente proporcional à tensão que causa a deformação. Dependendo da maneira pela qual a *viscosidade* varia com a *taxa de deformação,* os fluidos não newtonianos podem ser classificados como pseudoplásticos (*shear thinning*) (a viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação), dilatante (*shear thickening*) (a viscosidade aumenta com o aumento da taxa de deformação) e viscoelástico (quando as forças de cisalhamento são removidas, as partículas de fluido retornam parcialmente a uma forma anterior). As suspensões e os líquidos com moléculas de cadeia longa em geral são não newtonianos. Ver também *fluido newtoniano* e *viscosidade.*

fluido newtoniano Quando um fluido é submetido a uma *tensão de cisalhamento* ele muda continuamente de forma (deformação). Se o fluido for newtoniano, a taxa de deformação é proporcional à tensão de cisalhamento aplicada e a constante de proporcionalidade é chamada de *viscosidade.* Em escoamentos gerais, a taxa de deformação de uma *partícula de fluido* é descrita matematicamente por um tensor de *taxa de deformação* e a *tensão* por um *tensor de tensão.* Em escoamentos de fluidos newtonianos, o tensor de tensão é proporcional ao tensor da taxa de deformação e a constante de proporcionalidade é chamada de *viscosidade.* A maioria dos fluidos comuns (água, óleo, gasolina, ar, a maioria dos gases e vapores) sem partículas ou grandes moléculas em suspensão são newtonianos.

fluido perfeito Também chamado de *fluido ideal,* o conceito de um fluido fictício que pode escoar na ausência de todos os efeitos do atrito. Não existe um fluido perfeito, mesmo por aproximação, e o engenheiro não precisa considerar o conceito com mais detalhes.

fluido pseudoplástico Ver *fluido não newtoniano.*

força de arrasto A força sobre um objeto que se opõe ao movimento do objeto. Em um sistema de referência que se movimenta com o objeto, essa é a força exercida sobre o objeto na direção do escoamento. Existem várias componentes na força de arrasto:

- **arrasto induzido** A componente da força de arrasto sobre uma asa de envergadura finita que é "induzida" pela força de sustentação e associada aos *vórtices de ponta* que se formam nas pontas da asa e "escoam" para trás da asa.
- **arrasto por atrito** A parte do arrasto sobre um objeto resultante da integral de superfície da *tensão de cisalhamento* na direção do escoamento com relação ao objeto.
- **arrasto por pressão (ou forma)** A parte do arrasto sobre um objeto resultante da integral da *pressão* sobre a superfície do objeto na direção do escoamento com relação ao objeto. Pressão maior na frente de um *corpo rombudo* (como um automóvel) do que na traseira do corpo é resultado da *separação maciça do escoamento* e da formação de *esteira* na parte traseira.

força de flutuação A resultante para cima da força de pressão hidrostática que age sobre um objeto submerso ou parcialmente submerso em um fluido.

força de pressão Quando aplicável à segunda lei de Newton, essa é a força que atua sobre uma *partícula de fluido* provocada pelos gradientes espaciais da pressão dentro do fluido. Ver também *tensão, tensão de pressão.*

força de sustentação A força aerodinâmica resultante agindo em um objeto na direção perpendicular ao movimento do objeto.

força viscosa (ou de atrito) Quando aplicada à segunda lei de Newton, essa é a força que atua sobre uma *partícula de fluido* que surge dos gradientes espaciais das tensões viscosas (ou de atrito) dentro do fluido. A força viscosa em uma superfície é a tensão viscosa integrada sobre a superfície. Ver também *tensão, tensão viscosa.*

função de corrente As duas componentes da velocidade de um escoamento incompressível em regime permanente *bidimensional* podem ser definidas em termos de uma única função bidimensional ψ

que satisfaz automaticamente a conservação da massa (a equação da continuidade), reduzindo a solução do campo de velocidade de duas componentes à solução dessa única função de corrente. Isso é feito representando as duas componentes da velocidade como derivadas espaciais da função de corrente. Uma ótima propriedade da função de corrente é que as curvas de nível de ψ definem as *linhas de corrente* do escoamento.

função potencial Se uma região de escoamento tem *vorticidade* (a rotação das *partículas de fluido*) zero o vetor velocidade naquela região pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar, chamado função potencial da velocidade ou apenas função potencial. Na prática, as funções potenciais são muito usadas para modelar as regiões de escoamento nas quais os níveis de vorticidade são pequenos, mas não necessariamente zero.

gás ideal Um gás a uma densidade suficientemente baixa e/ou a uma temperatura suficientemente alta para que (a) a densidade, pressão e temperatura estejam relacionadas pela equação de estado dos gases ideais $P = \rho RT$ e (b) a energia interna específica e a entalpia sejam funções apenas da temperatura.

gravidade específica Densidade do fluido adimensionalizada pela densidade da água líquida a 4°C e pressão atmosférica (1 g/cm^3 ou 1000 kg/m^3). Assim, a gravidade específica GE = $\rho/\rho_{\text{água}}$.

hidráulica A *hidrodinâmica* do escoamento de líquido e vapor em tubos, dutos e canais abertos. Os exemplos incluem sistemas de tubulação de água e sistemas de ventilação.

hidrodinâmica O estudo e análise dos líquidos através das leis de conservação macroscópica da física (ver *mecânica/dinâmica dos fluidos*). O termo às vezes é aplicado aos escoamentos *incompressíveis* de gás e vapor, mas quando o fluido é o ar, geralmente é usado o termo *aerodinâmica* em seu lugar.

hidrodinamicamente completamente desenvolvido Ver *completamente desenvolvido.*

hipersônico Uma ou mais ordem de grandeza acima da velocidade do som (número de Mach >> 1).

homogeneidade dimensional A exigência de que os termos somados devem ter as mesmas *dimensões* (por exemplo, ρV^2, pressão P e tensão de cisalhamento τ_{xy} são dimensionalmente homogêneas, enquanto *potência,* entalpia específica h e $P\dot{m}$ não o são). A homogeneidade dimensional é a base da *análise dimensional.*

inércia/inercial O termo de aceleração na segunda lei de Newton, ou os efeitos relacionados a esse termo. Assim, um escoamento com inércia maior exige maior desaceleração para ser levado ao repouso.

jato Uma região dominada pelo atrito emitida a partir de um tubo ou orifício e formada por camadas limites de superfície que foram deixadas para trás pelo escoamento médio. Os jatos são caracterizados por alto *cisalhamento* com as velocidades mais altas no centro do jato e as velocidades mais baixas nas laterais. A *força de atrito, tensão viscosa* e *vorticidade* são significativas nos jatos.

lei de Poiseuille Ver *escoamento de Poiseuille.*

leis da conservação Os princípios fundamentais nos quais toda a análise da engenharia se baseia, pelos quais as propriedades materiais de massa, momento, energia e entropia podem variar apenas quando em balanço com outras propriedades físicas envolvendo forças, trabalho e *transferência de calor.* Essas leis se tornam leis de previsão quando escritas na forma matemática e combinadas apropriadamente com condições de contorno, condições iniciais e relações constitutivas.

conservação do momento Essa é a *Segunda Lei do Movimento de Newton,* uma lei fundamental da física que diz que a taxa de variação no tempo do momento de uma massa fixa (*sistema*) é balanceada pela resultante de todas as forças aplicadas à massa.

princípio da conservação de energia Essa é a *Primeira Lei da Termodinâmica,* uma lei fundamental da física que afirma que a taxa de variação da *energia* total no tempo de uma massa fixa (*sistema*) é balanceada pela taxa total de *trabalho* realizado na massa e pela *energia termica* transferida para a massa.

Observação: Para converter matematicamente a derivada no tempo da massa, do momento e da energia de massa de fluido em um sistema na derivada no tempo da massa, do momento e da energia em um *volume de controle,* aplica-se o *teorema de transporte de Reynolds.*

princípio da conservação de massa Uma lei fundamental da física cujo enunciado diz que um volume contendo sempre os mesmos átomos e moléculas (*sistema*) sempre deve conter a mesma massa. Assim, a taxa de variação no tempo da massa de um sistema é zero. Essa lei da física deve ser revisada quando a matéria se movimenta a velocidades que se aproximam da velocidade da luz, para que a massa e a energia possam ser trocadas de acordo com as leis da relatividade de Einstein.

linha de corrente Uma curva que em todos os pontos é tangente ao vetor velocidade de um *campo* de velocidade do fluido em um instante fixo de tempo. Assim, as linhas de corrente indicam a direção dos movimentos do fluido em cada ponto. Em um *escoamento em regime permanente,* as linhas de corrente são constantes com o tempo e as *partículas de fluido* se movimentam ao longo das linhas de corrente. Em um *escoamento não permanente,* as linhas de corrente mudam com o tempo e as *partículas de fluido não* se movem ao longo das linhas de corrente. Comparar com *linha de trajetória.*

linha de emissão Utilizada na visualização dos escoamentos de fluido, essa é a curva definida no tempo pela liberação de um marcador (tinta ou fumaça) de um ponto fixo do escoamento. Comparar com *linha de trajetória* e *linha de corrente.* Em um escoamento em regime permanente, as linhas de corrente, *linhas de trajetória* e *linhas de emissão* coincidem. Em um escoamento não permanente, porém, esses conjuntos de curvas são diferentes uns dos outros.

linha de tempo Usada para visualização dos escoamentos de fluido, essa é uma curva definida em algum momento pela liberação de um marcador a partir de uma linha do escoamento em algum instante anterior. A linha de tempo, quase sempre usada para aproximar um *perfil de velocidade* em um escoamento de laboratório, é muito diferente das *linhas de emissão, linhas de trajetória* e *linhas de corrente.*

linha de trajetória Uma curva que descreve a trajetória de uma *partícula de fluido* à medida que ela viaja através de um escoamento durante um período de tempo. Em termos matemáticos, essa é a curva que passa pelos pontos atingidos pelo *vetor posição material* $[x_{\text{partícula}}(t), y_{\text{partícula}}(t), z_{\text{partícula}}(t)]$ durante um período de tempo definido. Assim, as linhas de trajetória são formadas ao longo do tempo e cada partícula de fluido tem sua própria linha de trajetória. Em um escoamento em regime permanente, as partículas de fluido se movimentam ao longo de linhas de corrente, de modo que as linhas de trajetória e as linhas de corrente coincidem. Em um escoamento não permanente, porém, as linhas de trajetória e as linhas de corrente em geral são muito diferentes. Comparar com *linha de corrente.*

linhas piezométricas As curvas de somas de *carga.*

linha piezométrica de energia Curva que descreve a soma da *carga de pressão, carga de velocidade* e *carga de elevação.* Ver *carga.*

linha piezométrica hidráulica Curva que descreve a soma da *carga de pressão* e a *carga de elevação*. Ver *carga*.

manômetro Um dispositivo que mede a pressão com base nos princípios de pressão hidrostática dos líquidos.

massa de controle Ver *sistema*.

mecânica O estudo e análise da matéria através das leis macroscópicas de conservação da física (massa, momento, energia, Segunda Lei).

mecânica/dinâmica dos fluidos O estudo e a análise dos fluidos através das leis de conservação macroscópicas da física, ou seja, conservação da massa, do momento (*segunda lei de Newton*) e da energia (Primeira Lei da Termodinâmica) e a Segunda Lei da Termodinâmica.

média Uma média na/o área/volume/tempo de uma propriedade do fluido é a integral na/o área/volume/intervalo de tempo da propriedade dividida pela(o) correspondente área/volume/intervalo de tempo.

medidas da espessura da camada limite Diferentes medidas da espessura da camada limite como função da distância a jusante são usadas na análise do escoamento de fluidos. São elas:

espessura da camada limite A espessura total da camada viscosa que define a camada limite, da superfície até a margem. É difícil definir a margem com exatidão, de modo que a "margem" da camada limite quase sempre é definida como o ponto no qual a velocidade da camada limite é uma fração grande da velocidade de corrente livre (ou seja, δ_{99} é a distância entre a superfície e o ponto no qual a componente da velocidade na direção da corrente é 99% da velocidade de corrente livre).

espessura de deslocamento Uma medida da espessura da camada limite que quantifica a deflexão das linhas de corrente do fluido na direção oposta à superfície como resultado da redução da vazão em massa adjacente a superfície induzida pelo atrito. A espessura do deslocamento (δ^*) é uma medida da espessura dessa camada de déficit de vazão em massa. Em todas as camadas, limite $\delta^* < \delta$.

espessura do momento Uma medida da camada de maior déficit na vazão em momento adjacente à superfície, resultante da força de resistência do atrito (tensão de cisalhamento). Como a Segunda Lei de Newton diz que a força é igual à taxa de variação no tempo do momento, a espessura do momento θ é proporcional à tensão de cisalhamento. Em todas as camadas, limites $\theta < \delta$.

modelos de turbulência Modelos de relações constitutivas entre as *tensões de Reynolds* e o campo médio de velocidade dos escoamentos turbulentos. Tais equações modelo são necessárias para resolver a equação para a velocidade média. Um modelo simples e amplamente utilizado para as tensões de Reynolds é representá-las como a relação newtoniana para as tensões viscosas, proporcionais à taxa de deformação média, com a constante de proporcionalidade sendo uma *viscosidade turbulenta* ou *viscosidade turbilhonar*. Entretanto, ao contrário dos fluidos newtonianos, a viscosidade turbilhonar é uma forte função do próprio escoamento, e as diferentes maneiras pelas quais a viscosidade turbilhonar é modelada como função de outras variáveis calculadas do campo de escoamento constitui os diferentes modelos de viscosidade turbilhonar. Uma abordagem tradicional para modelar a viscosidade turbilhonar é em termos do *comprimento de mistura*, que é considerado como proporcional a um comprimento dependente do escoamento.

módulo de compressibilidade Ver *compressibilidade*.

momento (linear) O momento linear ou simplesmente momento de uma *partícula material* (ou *partícula de fluido*) é a massa da partícula material vezes sua velocidade. O momento de um volume macroscópico de partículas materiais é a integral de volume do momento l por unidade de volume, onde o momento por unidade de volume é a densidade da partícula material vezes sua velocidade. Observe que o momento é um vetor.

normalização Uma *particular adimensionalização* na qual o *parâmetro de escala* é selecionado de modo que a variável adimensional atinja um valor máximo que é da ordem de 1 (digamos, aproximadamente entre 0,5 e 2). A normalização é mais restritiva (e mais difícil de ser realizada adequadamente) do que a adimensionalização. Por exemplo, $P/(\rho V^2)$ discutido em *adimensionalização*, também é a pressão normalizada no caso de uma bola de beisebol voando (onde o número de Reynolds Re >>1), mas é apenas a adimensionalização da pressão na superfície de uma pequena conta de vidro caindo lentamente através do mel (onde Re << 1).

número de Froude Uma estimativa da ordem de grandeza da razão entre o termo inercial da lei de movimento de Newton e o termo de força gravitacional. O número de Froude é um grupo adimensional importante em escoamentos com superfícies livres, como em geral é o caso em canais, rios, escoamentos sobre superfícies etc.

número de Mach Razão adimensional entre a velocidade característica do escoamento e a velocidade do som. O número de Mach caracteriza o nível de *compressibilidade* em resposta às variações de pressão do escoamento.

número de Reynolds Uma estimativa da ordem de grandeza para a razão entre os dois seguintes termos da segunda lei de Newton do movimento em uma região do escoamento: o termo *inercial* (ou de aceleração) sobre o termo da força viscosa. A maioria, mas nem todos os números de Reynolds, pode ser escrita como uma velocidade característica apropriada V vezes uma escala de comprimento característica L consistente com a velocidade V, dividido pela viscosidade cinemática ν do fluido: $\mathrm{Re} = VL/\nu$. O número de Reynolds é, sem dúvida, o parâmetro de *similaridade* adimensional mais importante na análise de escoamento de fluido, uma vez que ele permite uma estimativa aproximada da importância geral da força de atrito no escoamento.

Observe que para altos números de Reynolds (Re >> 1), CL é uma variável normalizada enquanto; para Re << 1, CL é adimensional, mas não é normalizado (ver *normalização*). Ver também *coeficiente de arrasto*.

parâmetro de escala Uma única variável, ou uma combinação de variáveis, que é selecionada para adimensionalizar uma variável de interesse. Ver também *adimensionalização* e *normalização*.

partícula material Uma partícula ou elemento *infinitesimal* que sempre contém os mesmos átomos e as mesmas moléculas. Assim, uma partícula material tem massa fixa δm. Em um escoamento de fluido, isso é o mesmo que uma *partícula de fluido*.

partícula/elemento de fluido Uma partícula ou elemento *infinitesimal* imersa em um escoamento de fluido sempre contendo os mesmos átomos e moléculas. Assim, uma partícula de fluido tem massa fixa $\vec{V}$ e se movimenta com o escoamento à velocidade local $\vec{a}_{\text{partícula}} = D\vec{V}/Dt$ e trajetória $(x_{\text{partícula}}(t), y_{\text{partícula}}(t), t_{\text{partícula}}(t))$. Ver também *derivada material, partícula material, vetor posição material* e *linha de trajetória*.

perdas As *perdas de carga* por atrito nos escoamentos em tubos são separadas em perdas nas regiões de escoamento completamente desenvolvido dos tubos de uma rede de tubos, que são as *perdas majoritárias*, mais as perdas de carga de outras regiões de escoamento da rede, as *perdas minoritárias*. As regiões de perdas minoritárias incluem os *comprimentos de entrada*, as conexões de

tubos, curvas, válvulas etc. Não é raro que as perdas minoritárias sejam maiores do que as perdas majoritárias.

perdas majoritárias Ver *perdas.*

perdas minoritárias Ver *perdas.*

perfil de velocidade Ver *diagramas de perfil.*

periódico Um escoamento não permanente no qual o escoamento oscila em torno de um escoamento permanente médio.

período transiente Um período dependente do tempo da evolução de um escoamento que leva a um novo período de equilíbrio que geralmente, mas não necessariamente, é permanente. Um exemplo é o período de inicialização depois que o motor a jato é ligado, levando a um escoamento de jato em regime permanente (de equilíbrio).

peso específico O peso de um fluido por unidade de volume, ou seja, a densidade do fluido vezes a aceleração gravitacional (peso específico, $\gamma = \rho g$).

ponto de estagnação Um ponto de um escoamento de fluido no qual a velocidade se anula. Por exemplo, o ponto da *linha de corrente* que intercepta o nariz de um projétil em movimento é um ponto de estagnação.

potência *Trabalho* por unidade de tempo; a taxa no tempo com a qual o trabalho é realizado.

pressão Ver *tensão.*

pressão absoluta Ver *tensão, tensão de pressão.* Compare com *pressão manométrica.*

pressão de saturação A pressão na qual a fase de uma substância compressível simples varia entre líquido e vapor a uma temperatura fixa.

pressão de vapor A pressão abaixo da qual um fluido, em determinada temperatura, existirá no estado de vapor. Ver também *cavitação* e *pressão de saturação.*

pressão dinâmica Quando a *equação de Bernoulli* pára o *escoamento permanente e incompressível* e/ou a equação da *conservação de energia* ao longo de uma linha de corrente são escritas na forma onde cada termo das equações tem as *dimensões de* força/área, a pressão dinâmica é o termo da *energia cinética* (por unidade de volume) ou seja, $\frac{1}{2}\rho V^2$.

pressão estática Outro termo para *pressão*, usado no contexto com a *equação de Bernoulli* para distingui-lo da *pressão dinâmica.*

pressão hidrostática A componente de variação da *pressão* em um escoamento de fluido que existiria na ausencia de escoamento como resultado da força de volume gravitacional. Este termo aparece na equação hidrostática e na *equação de Bernoulli.* Ver também *pressão dinâmica* e *pressão estática.*

pressão manométrica *pressão* (P) relativa à pressão atmosférica (P_{atm}). Ou seja, $P_{man} = P - P_{atm}$. Ver também *tensão, tensão de pressão.* Assim, $P_{man} > 0$ ou $P_{man} < 0$ é apenas a pressão acima ou abaixo da pressão atmosférica.

Primeira Lei da Termodinâmica Ver *leis de conservação, conservação da energia.*

processo adiabático Processo sem nenhuma transferência de calor.

propriedade extensiva Uma propriedade de fluido que depende do volume total ou da massa total (por exemplo, a energia interna total). Ver *propriedade intensiva.*

propriedade intensiva Uma propriedade de fluido que não depende do volume ou da massa totais (ou seja, uma *propriedade extensiva* por unidade de massa ou às vezes por unidade de volume).

reologia O estudo e a representação matemática da deformação dos diferentes fluidos em resposta às forças de superfície ou à *tensão.* As relações matemáticas entre tensão e taxa de deformação são chamadas de *equações constitutivas.* A relação newtoniana entre *tensão* e *taxa de deformação* é o exemplo mais simples de uma equação constitutiva reológica. Ver também *fluido newtoniano* e *não newtoniano.*

rotação Ver *taxa de rotação* e *vorticidade.*

segunda lei de Newton Ver *conservação do momento.*

separação do escoamento Um fenômeno no qual uma *camada limite* adjacente a uma superfície é forçada a sair, ou se "separar", da superfície devido às forças de pressão "adversas" (ou seja, devido ao aumento de pressão) na direção do escoamento. A separação do escoamento ocorre nas regiões da superfície com alta curvatura, por exemplo, na parte traseira de um automóvel e em outros corpos rombudos.

similaridade O princípio que permite relacionar quantitativamente um escoamento a outro quando determinadas condições são satisfeitas. A *similaridade geométrica,* por exemplo, deve ser verdadeira para que a *similaridade cinemática* ou *dinâmica* seja obtida. A relação quantitativa que relaciona um escoamento a outro é deduzida usando uma combinação de análise dimensional e dados (em geral experimentais, mas também numéricos ou teóricos).

- **similaridade cinemática** Se dois objetos são *geometricamente similares,* e se as razões de todas as componentes da velocidade entre um ponto do escoamento que cerca um objeto e o ponto corresspondente por uma mudança apropriada de escala no escoamento que cerca o outro objeto são todas iguais em todos os pares de pontos correspondentes, o escoamento é *cinematicamente similar.*
- **similaridade dinâmica** Se dois objetos são *geometricamente* e *cinematicamente similares,* e se as razões de todas as forças (pressão, tensão viscosa, força da gravidade etc.) entre um ponto do escoamento que cerca um objeto e o ponto corresspondente por uma mudança apropriada de escala no escoamento que cerca o outro objeto são todas iguais em todos os pares de pontos correspondentes, o escoamento é *dinamicamente similar.*
- **similaridade geométrica** Dois objetos com tamanhos diferentes são geometricamente similares caso tenham a mesma forma geométrica (ou seja, se todas as dimensões de um são um múltiplo constante das dimensões correspondentes do outro).

sistema Em geral, quando a palavra *sistema* é usada sozinha, o *sistema fechado* está implícito, ao contrário do que acontece com um *volume de controle* ou *sistema aberto.*

- **sistema aberto** Um volume especificado para análise, onde o escoamento atravessa pelo menos parte da superfície do volume. Também chamado de *volume de controle.*
- **sistema fechado** Um volume especificado para análise que sempre inclui as mesmas *partículas de fluido.* Assim, nenhum escoamento atravessa nenhuma parte da superfície do volume e um sistema fechado deve se movimentar com o escoamento. Observe que a análise da lei de Newton das partículas sólidas em geral é uma análise de *sistema fechado,* às vezes também chamada de corpo livre.

sistema fechado Ver *sistema.*

sistema inglês Ver *unidades.*

Sistema Internacional de Unidades Ver *unidades.*

sólido Um material que quando submetido a cisalhamento sofre deformações até uma posição estática fixa (após o que a deformação pára) ou sofre fratura. Ver também *fluido.*

sonda estática de Pitot Um dispositivo usado para medir a velocidade do fluido pela aplicação da equação de Bernoulli com

medição simultânea das *pressões estática* e *de estagnação*. Também chamada sonda de Pitot-Darcy.

sônico Na velocidade do som (*número de Mach* = 1).

subcamada inercial Uma parte altamente turbulenta de uma camada limite turbulenta, próxima à parede, mas fora da *subcamada viscosa* e da *camada amortecedora*, onde as *tensões turbulentas* são grandes quando comparadas com as *tensões viscosas*.

subcamada viscosa A parte de uma camada limite turbulenta adjacente à superfície que contém as *tensões viscosas* mais altas. O gradiente de velocidade nessa camada adjacente à parede é excepcionalmente alto.

subsônico Abaixo da velocidade do som (*número de Mach* < 1).

supersônico Acima da velocidade do som (*número de Mach* > 1).

taxa de deformação É a taxa com a qual uma *partícula de fluido* se deforma (ou seja, muda de forma) em uma dada posição e instante em um escoamento de fluido. Para quantificar completamente todas as variações de forma possíveis de uma partícula de fluido *tridimensional* são necessários seis números. Em termos matemáticos, eles são as seis componentes independentes de um tensor de taxa de deformação simétrico de segunda ordem, em geral representados como uma matriz simétrica 3 × 3. A deformação é a taxa de deformação integrada no tempo e descreve a deformação de uma partícula de fluido após um período de tempo. Ver *tensão*.

- **taxa de deformação extensional** As componentes da taxa de deformação que descrevem o alongamento ou a compressão de uma *partícula de fluido* em uma das três direções de coordenadas. Elas são os três elementos diagonais do tensor de taxa de deformação. A definição de deformação extensional depende da escolha dos eixos de coordenadas. Também chamada de *taxa de deformação linear*.
- **taxa de deformação por cisalhamento** As componentes da taxa de deformação que descrevem a deformação de uma *partícula de fluido* em resposta ao cisalhamento que causa mudança do ângulo entre planos mutuamente perpendiculares aos três eixos de coordenadas. Estes são os elementos fora da diagonal principal do tensor de taxa de deformação. A definição de deformação por cisalhamento depende da escolha dos eixos de coordenadas.
- **taxa de deformação volumétrica** A taxa de variação do volume de uma *partícula de fluido* por unidade de volume. Também chamada de taxa de deformação da massa e taxa de dilatação volumétrica.

taxa de deformação linear Sinônimo de *taxa de deformação extensional*. Ver *taxa de deformação*.

taxa de rotação A velocidade angular, ou taxa de rotação, de uma *partícula de fluido* (um vetor, com unidades rad/s, dado pela metade do rotacional do vetor velocidade). Ver também *vorticidade*.

técnica do gráfico por sombras Uma técnica experimental para visualizar os escoamentos com base na refração da luz pela variação da densidade do fluido. O nível de luminescência de uma imagem de gráfico por sombras responde à segunda derivada espacial da densidade.

técnica estereoscópica (Schlieren) Uma técnica experimental para visualizar os escoamentos com base na refração da luz pela variação da densidade do fluido. O nível de luminescência de uma imagem estereoscópica responde à primeira derivada espacial da densidade.

temperatura de saturação A temperatura na qual a fase de uma substância compressível simples varia entre líquido e vapor a uma pressão fixa.

tensão Uma componente de uma força distribuída em uma área é escrita como a integral de uma tensão sobre aquela área. Assim, a tensão é a componente de força dF_i em um elemento infinitesimal de área dividido pela área do elemento dA_j (no limite $dA_j \to 0$), onde i e j indicam uma direção de coordenada x, y ou z. A tensão $\sigma_{ij} = dF_i/dA_j$, portanto, é uma componente de força por unidade de área na direção i na superfície j. Para obter a força de superfície a partir da tensão, integra-se a tensão ao longo da área da superfície correspondente. Em termos matemáticos, existem seis componentes independentes de um *tensor de tensão*, em geral representados como uma matriz simétrica 3 × 3.

- **tensão de cisalhamento** Uma tensão (componente de força por unidade de área) que age tangente à área. Assim, σ_{xy}, σ_{yx}, σ_{xz}, σ_{zx}, σ_{yz} e σ_{zy} são tensões de cisalhamento. A força de cisalhamento sobre uma superfície é a força resultante da tensão de cisalhamento, dada pela integração da tensão de cisalhamento sobre a área da superfície. As tensões de cisalhamento são os elementos fora da diagonal principal do *tensor de tensão*.
- **tensão de pressão** Em um fluido em repouso todas as tensões são normais e todas agem de fora para dentro em uma superfície. Em um ponto fixo, as três tensões normais são iguais e o módulo dessas tensões normais iguais é chamada de pressão. Assim, em um fluido estático $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P$, onde P é a pressão. Em um fluido em movimento, as tensões adicionais à pressão são *tensões viscosas*. Uma força de pressão sobre uma superfície é a tensão de pressão integrada sobre a superfície. A força de pressão por unidade de volume em uma *partícula de fluido* para a segunda lei de Newton, porém, é o oposto do gradiente (derivadas espaciais) da pressão naquele ponto.
- **tensão normal** Uma tensão (componente de força por unidade de área) que age perpendicular à área. Portanto, σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{zz} são tensões normais. A força normal sobre uma superfície é a força resultante da tensão de cisalhamento, dada pela integração da tensão de cisalhamento sobre a área de superfície. As tensões normais são os elementos diagonais do *tensor de tensão*.
- **tensão de Reynolds** As componentes da velocidade (e outras variáveis) dos escoamentos turbulentos são separadas em uma média mais componentes flutuantes. Quando a equação da componente média de velocidade na direção da corrente é deduzida da *equação de Navier–Stokes*, seis novos termos aparecem dados pela densidade do fluido vezes a média do produto de duas componentes da velocidade. Como esses termos têm as mesmas unidades que a *tensão* (força/área), eles são chamados de tensões turbulentas ou tensões de Reynolds (em homenagem a Osborne Reynolds que quantificou pela primeira vez variáveis turbulentas como média + flutuação). Assim como as *tensões viscosas* podem ser escritas como um tensor (ou matriz), definimos o tensor da tensão de Reynolds com as componentes da tensão normal de Reynolds e as componentes da tensão de cisalhamento de Reynolds. Embora as tensões de Reynolds não sejam verdadeiramente tensões, elas têm efeitos qualitativamente semelhantes aos das tensões viscosas, mas como resultado dos grandes movimentos *turbilhonares* caóticos da turbulência, em vez dos movimentos moleculares microscópicos que são a base das tensões viscosas.

tensão turbilhonar Ver *tensão de Reynolds*.

tensão viscosa O escoamento cria tensões no fluido que se somam às tensões de pressão hidrostática. Essas tensões adicionais são viscosas, uma vez que surgem das deformações do fluido induzidas pelo atrito dentro do escoamento. Por exemplo, $\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$,

$\sigma_{yy} = -P + \tau_{yy}$ e $\sigma_{zz} = -P + \tau_{zz}$ onde τ_{xx}, τ_{yy} e τ_{zz} são tensões normais viscosas. Todas as tensões de cisalhamento resultam do atrito em um escoamento e, portanto, são tensões viscosas. Uma força viscosa em uma superfície é uma tensão viscosa integrada sobre a superfície. A força viscosa por unidade de volume em uma *partícula de fluido* para a segunda lei de Newton, porém, é o divergente (derivadas espaciais) do tensor de tensão viscosa naquele ponto.

tensão superficial A força por unidade de comprimento em uma interface líquido-vapor ou líquido-líquido resultante do desequilíbrio das forças de atração entre moléculas semelhantes na interface.

tensão turbulenta Ver *tensão de Reynolds.*

tensor de tensão Ver *tensão.*

tensor de tensão de desvio Outro termo para *tensor de tensão viscosa.* Ver *tensão.*

tensor de tensão viscosa Ver *tensão.* Também chamada de *tensor de tensão de desvio.*

teorema de transporte de Reynolds A relação matemática entre a taxa de variação no tempo de uma propriedade do fluido em um *sistema* (volume de massa fixa que se movimenta com o escoamento) e a taxa de variação no tempo desta propriedade do fluido em um *volume de controle* (volume, em geral fixo no espaço, com massa de fluido se movimentando através de sua superfície). Essa expressão em volume finito está intimamente relacionada à *derivada material (tempo)* de uma propriedade do fluido ligada a uma *partícula de fluido* em movimento. Ver também *leis da conservação.*

Teorema Pi de Buckingham Um teorema matemático utilizado na *análise dimensional* que prevê o número de grupos adimensionais que devem estar funcionalmente relacionados a partir de um conjunto de parâmetros dimensionais que são considerados funcionalmente relacionados.

trabalho Ver *energia.*

trabalho de escoamento O termo de trabalho na *Primeira Lei da Termodinâmica* aplicada ao escoamento de fluido associado às forças de pressão no escoamento. Ver *energia, energia de escoamento.*

trabalho de pressão Ver *trabalho de escoamento.*

trajetória Ver *linha de trajetória.*

tubo de corrente Um grupo de linhas de corrente. Um tubo de corrente em geral é visualizado como uma superfície formada por um número infinito de linhas de corrente iniciadas dentro do escoamento a partir de um circuito circular e tendendo a formar uma superfície do tipo tubo em alguma região do escoamento.

unidades Um sistema específico para quantificar numericamente as dimensões de uma quantidade física. Os sistemas mais comuns de unidades são SI (kg, N, m, s), inglês (lbm, lbf, pé, s), BGS (slug, lb, pé, s) e cgs (g, dina, cm, s). Ver também *dimensões.*

unidimensional Ver *dimensões.*

velocidade Um vetor que quantifica a taxa de variação da posição e direção do movimento de uma partícula material.

velocimetria Laser-Dopppler (VLD) Também chamada de anemometria Laser-Doppler (ALD). Uma técnica para medir uma componente da velocidade localmente em um escoamento com base no efeito Doppler associado à passagem de pequenas partículas do escoamento através do pequeno volume alvo formado pelo cruzamento de dois raios laser. Ao contrário da *anemometria de fio quente* e de *filme quente* e como a *velocimetria por imagem de partícula,* não há interferência no escoamento.

velocimetria por imagem de partícula (PIV) Uma técnica para medir uma componente da velocidade localmente em um fluido com base na observação do movimento de pequenas partículas no escoamento em um período curto utilizando lasers pulsados. Ao contrário da *anemometria de fio quente* e de *filme quente* e do mesmo modo que na velocimetria de Doppler, não há interferência no escoamento.

vetor posição material Um vetor $[x_{\text{partícula}}(t), y_{\text{partícula}}(t), z_{\text{partícula}}(t)]$ que define a posição de uma *partícula material* como função do tempo. Assim, o vetor posição material de um escoamento de fluido define a trajetória de uma *partícula de fluido* no tempo.

viscosidade Ver *fluido newtoniano.* A viscosidade é uma propriedade de um fluido que quantifica a razão entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação de uma *partícula de fluido.* (Portanto, a viscosidade tem as dimensões de tensão/taxa de deformação, ou $Ft/L^2 = m/Lt$.) Qualitativamente, a viscosidade quantifica o nível com o qual um determinado fluido particular resiste à deformação quando sujeito à tensão de cisalhamento (resistência ao atrito ou *atrito*). A viscosidade é uma propriedade medida de um fluido e é uma função da temperatura. Para os fluidos newtonianos, a viscosidade não depende da taxa de tensão aplicada e da taxa de deformação. A natureza viscosa dos *fluidos não newtonianos* é mais difícil de ser quantificada, em parte porque a viscosidade varia com a taxa de deformação. Os termos *viscosidade absoluta, viscosidade dinâmica* e *viscosidade* são sinônimos. Ver também *viscosidade cinemática.*

viscosidade absoluta Ver *viscosidade.*

viscosidade cinemática *Viscosidade* do fluido dividida pela densidade.

volume de controle Um volume especificado para análise no qual o escoamento entra e/ou sai através de alguma(s) parte(s) da superfície do volume. Também chamado de *sistema aberto* (ver *sistema*).

viscosidade de turbulência Ver *modelos de turbulência.*

viscosidade dinâmica Ver *viscosidade.*

viscosidade turbulenta Ver *modelos de turbulência.*

volume/área/comprimento infinitesimal Um volume δV, uma área δA ou um comprimento δx pequenos no limite onde volume/área/comprimento se contraem para um ponto. Com freqüência, as derivadas são produzidas nesse limite. (Observe que δ às vezes é escrito como Δ ou d.)

vórtice Uma estrutura local de um escoamento de fluido caracterizada por uma concentração de vorticidade (ou seja, giro ou rotação de *partículas de fluido*) em um núcleo tubular com linhas de corrente circulares ao redor do eixo do núcleo. Um tornado, furacão e um vórtice de banheira são exemplos comuns de vórtices. O escoamento turbulento é preenchido com pequenos vórtices de diversos tamanhos, intensidades e orientações. Também chamado *turbilhão.*

vórtice de fuga Ver *vórtice de ponta.*

vórtice de ponta *Vórtice* formado a partir de cada ponta da asa de um avião como subproduto da força de sustentação. Sinônimo de vortice de fuga. Ver também *arrasto induzido.*

vorticidade O dobro da velocidade angular, ou taxa de rotação, de uma *partícula de fluido* (um vetor, com unidades rad/s, dado pelo rotacional do vetor velocidade). Ver também *taxa de rotação.*

ÍNDICE REMISSIVO

A

A, 15,16
Abordagem analítica, 328
Abordagem do volume de controle finito, 197
Abordagem experimental, 19, 197
Abordagem passo a passo, 20
Abordagens diferenciais, 197
Aceleração
  advectiva, 107
  axial, 108
  centrípeta, 110, 217, 451
  convectiva, 107
  local, 107
  material, 109
  na direção da corrente, 161
  normal, 161
Aceleração advectiva, 107
Aceleração axial, 108
Aceleração centrípeta, 110, 217, 451
Aceleração convectiva, 107
Aceleração da partícula de fluido, 161,162
Aceleração da partícula de fluido através do bocal, 108
Aceleração em trajetória reta, 84-86
Aceleração local, 107, 109
Aceleração material, 109, 110
Aceleração
  advectiva, 107
  axial, 108
  centrípeta, 110, 217, 451
  convectiva, 107
  local, 107
  material, 109
  na direção da corrente, 161
  normal, 161
Acessório de aspirador de pó, 444
Acoplado, 346
Adimensionalização, 237, 238
Aerodinâmica, 2, 506
Aerofólio, 514-517, 518, 520
Aerofólios invertidos, 514
Aerofólios não simétricos, 515
Aerofólios simétricos, 515
Aerostática, 68
Agricola, Georgius, 7
Água saturada, propriedades, 773
Album of Fluid Motion, An (Van Dyke), 11
Algarismos significativos, 24-26
Algoritmo de correção da pressão, 378
Algoritmo de rede de Boltzmann, 763
Altura metacêntrica (*GM*), 82
Amônia saturada, propriedades, 775
Ampère (A), 15
Análise da energia de escoamento estacionário, 179-188
  escoamento incompressível, atrito desprezível, 182
  exemplos, 183-187
  fator de correção da energia cinética, 182
Análise de regressão, 257
Análise de sistema, 104
Análise diferencial do escoamento de fluido
  campo de pressão, 375
  condições de contorno, 381
  Equação de Cauchy, 365
  equação de continuidade, 346. *Consulte também* Equação de continuidade
  equação de Navier-Stokes, 370
  exemplos, 382-396
  função corrente, 357. *Consulte também* Função de corrente
  reduzir EDP para EDO, 390
Análise diferencial, 345
Análise dimensional, 238
Análise do momento dos sistemas de escoamento, 197-232
  equação do momento angular. *Consulte* Equação do momento angular
  equação do momento linear. *Consulte* Equação do momento linear
  lei de Newton e conservação e do momento, 198
  momento angular, 216
  movimento de rotação, 215
  volume de controle, 199
Análise inspecional, 234
Análise multibloco, 728
Analogia da bola no chão, 80
Andando de bicicleta, 501, 503
Anemometria Laser Doppler (LDA), 329
Anemômetro de filme quente, 328
Anemômetro de fio quente, 328
Anemômetro de temperatura constante (CTA), 328
Anemômetros, 328
Ângulo de ataque, 494, 498, 519, 520
Ângulo de bordo de ataque, 665
Ângulo de choque, 559
Ângulo de contato, 47
Ângulo de deflexão, 559
Ângulo de inclinação da Pá, 672, 674
Ângulo de inclinação, 672
Ângulo de Mach, 563
Ângulo de onda, 559
Ângulo do bordo de ataque, 665
Ângulo do bordo de ataque, 665
Aplicação em foco,
  atuadores fluídificos, 136
  cavitação, 48,50
  estômago virtual, 763
  formação de gotículas, 480
  insetos, como voam, 262
  interações entre onda de choque/camada limite, 584
  medidoras de vazão de placa de orifício, 333
  rajadas nucleares *vs.* pingos de chuva, 28
  redução do arrasto, 525
Aproximação da camada limite, 445
  camada limite de placa plana turbulenta, 462
  camada limite sobre placa plana, 454, 457, 463, 466
  camadas limites laminares, 447, 449, 454, 471
  equação do integral de Kármán, 473, 474
  equações da camada limite, 499, 453
  espessura do deslocamento, 457, 460
  espessura do momento, 460-461
  gradientes de pressão, 467-471
  o que faz, 446
  procedimento passo a passo, 453
  resultados errados, 470
  solução da camada limite de Blasius, 455, 456
  técnica integral de momento, 471

Aproximação de diferença finita de primeira ordem, 108
Aproximação de escoamento irrotacional, 422
  equação da continuidade, 422
  equação de Bernoulli, 424
  equação do momento, 423
  escoamentos irrotacionais planares elementares, 430. *Consulte também* Escoamentos irrotacionais planares elementares
  paradoxo de d'Alembert, 440
  regiões de escoamento irrotacional de eixo axissimétrico, 428
  regiões de escoamento irrotacional planar, 427
  superposição, 430. *Consulte também* Superposição
Aproximação de escoamento lento, 414-417
Aquecimento de atrito, 278
Aquedutos romanos, 6
Área frontal, 494
Área projetada, 251
Aritmética de precisão dupla, 730
Arquimedes, 7, 78, 249
Arrasto, 492-495
Arrasto aerodinâmico, 440
Arrasto de atrito superficial, 495
Arrasto de atrito, 496, 511
Arrasto de carenagem, 496-511
Arrasto de forma, 495
Arrasto de superfície, 6
Arrasto em parede de seção de teste de túnel de vento, 475
Arrasto induzido, 518
Arrasto sobre esfera em escoamento lento, 416
Arrasto sobre objeto em escoamento lento, 416
Árvore, 503
Asas de avião, 494, 517-519
Asas de pássaros, 519
Asfalto, 3
atm, 57, 65
Atmosfera em grandes altitudes, propriedades, 897, 915
Atmosfera padrão (atm), 57, 65
Ato da Conversão Métrica, 15
Ato do Estudo Métrico, 15
Atrito
  escoamento compressível através de bocal convergente-divergente, 758
  escoamento de Fanno, 577, 581
  freios (automóvel), 492
  temperatura de fluido/perda de carga, 183
  tubo, 254-256
Atuadores fluídificos, 135
Automóveis modelo/protótipo, similaridade, 240, 241
Automóvel
  aerodinâmica, 506
  área frontal, 503, 505
  carros de corrida, 514
  coeficiente de arrasto, 495, 502, 506
  projeto dos espelhos, 504, 505
  vidros abertos, 504
Automóvel protótipo, força de arrasto aerodinâmico, 241-242
Avaria de cavitação, 36
Avião comercial, 518, 520-522
Avião de pesquisa Piper PA28, 689
Aviões caça, 518
Aviões comerciais de grande porte, 518

B

Bactéria *salmonella*, 414
Balanço de arrasto, 241
Balanço de energia mecânica, 180
Balanço de forças transversais de linhas de corrente, 166
Balanço de massa, 152
Balão de ar quente, 81
Balão de hélio, 79, 81
Bar, 57
Barômetro, 65,66
Bernoulli, Daniel, 7 , 163
bhp, 650
Billet, M. L., 50
Bingham, E. C., 42
Biot, Jean-Baptiste, 249
Blasius, Paul R. Heinrich, 8, 455
Blocos elementares, 723
Bloqueio de túnel de vento, 258
Bloqueio, 258
Bocal
  convergente, 546-550
  convergente-divergente, 550-553
  escoamento isentrópico, 545-553
  Laval, 541, 554
  seção transversal do, 541, 546
  subsônico, 543
  supersônico, 543
  Venturi, 540-541
Bocais convergentes, 540-541, 546-550
Bocais convergentes-divergentes, 541, 550-553, 558-559
Bocal de Laval, 541, 554
Bocal de Venturi, 540-541
Bocal subsônico, 543
Bola de aço oscilante, 160
Bola de tênis, 522-523
Bolha de sabão, pressão, 250-251
Bolha de separação, 467
Bolhas de cavitação, 36, 653
Bomba centrífuga, 220
Bomba com escoamento axial de vários estágios, 677
Bomba de engrenagens, 661
Bomba de escoamento misto, 663
Bomba de poço, 648
Bomba geometricamente similar, 681, 685
Bomba giratória de dois lóbulos, 661
Bomba peristáltica de tubo flexível, 661
Bomba peristáltica, 661
Bombas, 649-679
  análise dimensional, 680
  axiais, 672
  cavitação, 655
  centrífuga, 669-670
  coincidindo bomba com sistema de tubulação, 650
  confinada/aberta, 648
  deslocamento positivo, 661, 663
  dinâmica, 648, 669
  duplicando a velocidade da bomba, 684
  eixo giratório, 648
  leis de semelhança, 680, 684
  NPSH, 656
  organização em série, 658
  organização paralela, 658
  tamanho do rotor, 654
  terminologia, 647
  turbina com escoamento axial por propulsor, 692
  ventilador de escoamento axial de pás, 678
Bombas abertas, 648
Bombas axiais, 673
Bombas centrífugas, 663
Bombas confinadas, 648
Bombas de escoamento radial, 663
Bombas dinâmicas, 648
Bombas dinâmicas giratórias, 663
Bombas dinâmicas não giratórias, 663
Bombas em duto, 648
Bombas em paralelo, 658
Bombas em série, 658
Bombas geometricamente semelhantes, 681
Bombas por deslocamento positivo, 648, 663
Bombas rotodinâmicas, 663
Bomba-turbina, 702
Bombeamento de água, perda de carga/potência, 187

Bordo de ataque, 516
Bordo de ataque do rotor, 697
Bordo de fuga do rotor, 697
Bourdon, Eugene, 64
Boussinesq, Joseph, 205, 291
Braço do momento, 216
Brasseur, James G., 763
Brown, F. N. M., 110
Brown, Glenn, 7n, 249
Btu, 37
Buckingham, Edgar, 242

C

Cálculos CFD turbulento, 737
Cálculos da CFD do escoamento de canal aberto, 760
Cálculos de CFD laminar, 728
Cálculos de RANS em regime transiente, 738
Cálculos do CFD do escoamento compressível, 754
Calor, 37
Calores específicos, 249
Caloria (cal), 17,37
Camada amortecedora, 292
Camada de cisalhamento, 126
Camada de limite laminar em placa plana, 454-458, 463
Camada de superposição, 292
Camada externa, 292
Camada limite, 6, 281, 419, 445
Camada limite laminar, 447, 449, 454, 471
Camada limite de gradiente de pressão zero, 455
Camada limite laminar ou turbulenta, 507
Camada limite sobre placa plana turbulenta, 462
Camada turbulenta, 507
Camadas de cisalhamento livre, 447
Campo de aceleração, 104, 106–107
Campo de escoamento, 105
Campo de pressão, 106, 375
Campo de pressão em rotação de corpo sólido, 420
Campo de velocidade, 106, 359, 377
Campo de velocidade bidimensional permanente, 105-107
Campo distante de pressão, 726
Canal circular, 599
Canal retangular, 598, 599, 612, 613
Canal trapezoidal, 599, 613, 615
Candela (cd), 15
Capacidade, 649
Capilares, 47
Carga, 650
Carga bruta, 694
Carga de asa, 514
Carga de Bernoulli, 649
Carga de bomba útil, 651
Carga de elevação, 167
Carga de fechamento, 650
Carga de pressão, 59, 167
Carga de sucção positiva líquida (NPSH), 656
Carga de sucção positiva líquida requerida ($NPSH_{necessária}$), 656
Carga de velocidade, 167
Carga líquida necessária, 651
Carga líquida, 649, 695
Carga total, 167
Cargas, 167
Carro submerso, porta, força hidrostática, 73
Carro. *Consulte* Automóvel
Carros de corrida, 514
Carrossel, 127, 128
Cascata, 682, 742
Castelli, Benedetto, 7, 149
Cauchy, Augustin Louis de, 366
Cavitação, 35, 49, 50
Cavitação de bomba, 655
Cavitação de corpo, 50
Cavitação gasosa, 50
Cavitação vaporosa, 50
cd, 15
Célula, 718
Célula hexahedra, 718
Célula quadrilateral, 718
Centi, 15
Centipoise, 42
Centro de pressão, 69, 70
Centróide de superfície, 70
CFD. *Consulte* Dinâmica de fluidos computacional (CFD)
CGPM, 14-15
Chezy, Antonie, 7,607
Chips CI, 751
Chips de circuito integrado (CI), 751
Choque destacado, 759
Choques oblíquos, 559-563
Choques normais, 554-559
Choque oblíquo destacado, 562
Choques oblíquos fracos, 561, 562
Choques oblíquos sobre cunha, 759
Chuveiro, descarga, taxa de escoamento, 314
Ciclone de escoamento reverso, 275
Cilindro circular
  distribuição de pressão, 438
  escoamento ao redor, 731-745
  girando, 520
  superposição de uma corrente uniforme em um dipolo, 437
Cilindro circular em rotação, 520
Cinemática dos fluidos, 103-147
  campo de aceleração, 106-110
  definição, 104
  derivado material, 109
  descrição euleriana, 104-110
  descrição lagrangiana, 104-110
  escoamentos circulares, 127-129
  gráfico de contorno, 119
  gráfico de perfil, 117-119
  gráfico vetoriais, 118
  linha de corrente, 110-111
  linha de emissão, 113-114
  linha de tempo, 115-116
  linha de trajetória,
  movimento ou deformação dos elementos fluidos, 119-124
  representação gráfica dos dados de escoamento dos fluidos, 117-120
  rotação, 119-120
  rotacionalidade, 124-128
  taxa de deformação de cisalhamento, 122
  taxa de deformação linear, 120,121
  técnicas de refração para visualização de escoamento, 116-117
  técnicas de visualização do escoamento de superfície, 117
  translação, 119-120
  TTR, 130-138. *Consulte também* Teorema de transporte de Reynolds (TTR)
  tubo de corrente, 110-112
  visualização de escoamento, 110-117
Cinemática, 103. *Consulte também* cinemática de fluidos
Circulação, 434
Círculos de Mohr, 124
Coeficiente de adsorção, 266
Coeficiente de arrasto, 258
Coeficiente de arrasto de atrito, 495, 496, 506
Coeficiente de arrasto de carro, 495
Coeficiente de atrito, 285, 506, 507-510
Coeficiente de atrito local, 508
Coeficiente de atrito médio, 508
Coeficiente de atrito superficial, 463, 473
Coeficiente de Chezy, 607
Coeficiente de compressibilidade, 38-39
Coeficiente de descarga, 318, 628
Coeficiente de expansão volumétrica, 39-40
Coeficiente de Manning, 608
Coeficiente de perda, 301

Coeficiente de pressão, 248, 268, 439
Coeficiente de resistência, 301
Coeficiente de sustentação, 248, 252, 494
Coeficiente de viscosidade, 42
Coeficiente médio de arrasto, 511-512
Coeficientes de arrasto de geometrias comuns, 499-506
Colebrook, Cyril F., 295
Columbia, o desastre do ônibus espacial, 559
Combustor tubular, 573-575
Completamente desenvolvido, 254, 382
Componente de velocidade, 354
Componente de velocidade que falta, 354
Componente normal da velocidade, 152
Componente *x* da equação do momento da camada limite, 452
Comporta basculante, 601, 628
Comporta basculante com escoamento afogado, 629
Comporta cilíndrica controlada por gravidade, 76
Comporta de tambor, 627
Comportamento pseudoplástico, 53
Comportas de escoamento, 629
Compostos orgânicos voláteis (VOCs), 266
Compressão da mistura de ar e combustível, 350
Compressão de ar de alta velocidade no avião, 536
Compressibilidade isotérmica, 39
Compressor, 647. *Consulte também* Bomba
Compressor com escoamento axial de vários estágios, 677
Comprimento crítico, 581
Comprimento de corda, 742
Comprimento de entrada, 282
Comprimento de entrada hidrodinâmica, 282
Comprimento de mistura, 292
Comprimento equivalente, 302
Comprimento máximo, 581
Comprimento sônico, 581
Comprimento viscoso, 293
Concentração de massa, 266
Condição de continuidade não temperatura, 6
Condição de contorno de eixo, 727
Condição de contorno de escoamento de saída, 726
Condição de contorno periódica, 726
Condição de entrada sem choque, 666
Condição de não-escorregamento, 5-6, 381, 596
Condições de contorno, 346, 381, 425, 728
  análise de multibloco, 722
  bocal convergente-divergente, 756
  cálculos da CFD do escoamento de canal aberto, 760
  cálculos de CFD laminares, 728
  cálculos de CFD turbulento, 737
  campo de pressão, 375, 376
  choques oblíquos sobre cunha, 759
  cilindro circular ao redor do escoamento (Re = 150), 731
  condições iniciais, 719
  configuração de pseudo tempo, 719
  definição, 717
  DNS, 737
  equação de RANS, 738
  equações do movimento, 717
  escoamento ao redor de um cilindro circular (Re = 10.000), 739
  escoamento ao redor de um cilindro circular (Re = 10^7), 741
  escoamento através de comporta basculante (salto hidráulico), 761
  escoamento sobre placa plana e infinitesimalmente fina, 476
  escoamento sobre saliência no fundo de canal, 760
  escopo do capítulo, 717
  estado atual, 717
  estator (ventilador de escoamento axial de pás), 741
  geração de malha, 720, 732
  inclinação, 721
  independência de malha, 720
  LES, 737
  multimalha, 719
  perfil de velocidade, 255, 256
  procedimento de solução, 714-716
  região de entrada do escoamento em tubo (Re = 500), 729
  resfriamento de matriz de chips CI, 751
  transferência de calor, 748
  trocador de calor de escoamento cruzado, elevação da temperatura, 749
  turbina, 703
Condições de contorno de entrada, 388
Condições de contorno de entrada e saída de escoamento, 725
Condições de contorno de interface, 381
Condições de contorno de parede, 725
Condições de contorno de superfície livre, 382
Condições de contorno periódicas, 726
Condições de contorno simétricas, 382
Condições de contorno translacionalmente periódicas, 727
Condições de fronteira interna, 727
Condições iniciais, 382
Conduíte. *Consulte* Escoamento em tubos
Condutividade térmica, 265
Conservação da energia, 149
Conservação da massa, 149, 150, 346. *Consulte também* Equação de continuidade
  escoamento incompressível, 154
  princípio, 151, 155
  processos de escoamento em regime permanente, 154
  taxa de escoamento de massa, 151
  vazão de volume, 151
  volumes de controle móveis/deformáveis, 153
Conservação do momento, 149
Conservação do momento linear, 164, 365. *Consulte também* equação de Cauchy
Conservação do princípio do momento linear, 161
Conservação geral de massa, 152
Constante de Bernoulli, 483
Constante de tempo elétrica, 275
Constante dimensional, 234
Constante específica de gás ideal $R_{gás}$, 264
Constante universal do gás, 34
Constante universal dos gases ideais, 264
Contêiner cilíndrico, girando, 86-88
Contínuo, 32, 106
Contorno de velocidade axial, 730
Contração gradual, 303
Contração repentina, 303
Contra-pressão, 545, 546, 548, 549, 551
Convenção do lado esquerdo, 361
Convexão sobre as mãos de mulher, 39
Coordenadas cartesianas
  campo de pressão, 375
  equação da continuidade incompressível, 352
  equação da continuidade permanente, 352
  equação da continuidade, 357
  equação de Navier-Stokes, 374
  função de corrente, 357
  operador laplaciano, 373
Coordenadas cilíndricas, 351
  campo de pressão, 375
  equação da continuidade incompressível, 352
  equação de continuidade, 351

equação da continuidade permanente, 352
equação de Navier-Stokes, 373
função de corrente, 363
operador laplaciano, 373
Coordenadas polares cilíndricas, 351
Coração, humano, 648
Corda, 498
Coriolis, Gaspard, 7, 182
Corpos flutuantes, 81
Correlação de Sutherland, 43
Corrente uniforme, 431, 454
Cotovelo, 306
Coulombs (C), 275
Crise de arrasto, 512
Curie, Pierre e Jacques, 65
Curva, 306
Curva característica, 310
Curva de demanda, 370
Curvas características, 650
Curvas de contorno da pressão de estagnação, 757
Curvas de contorno do número de Mach, 760
Curvas de desempenho de bomba adimensionais, 681
Curvas de desempenho de bomba, 650
Curvas de número de Mach, 758

D

d'Alembert, Jean-le-Rond, 7, 440
Dahm, Werner J. A., 712
Daniels, Brian, 480
Darcy, Henry P. G., 7, 249, 317
Deci, 15
Defeito da velocidade, 294
Definições. *Consulte* Terminologia
Deformação extensional, 119
Deformação linear, 119, 120
Deka, 15
Densidade, 33-35, 40
Densidade relativa, 33
Derivação lagrangiana, 109
Derivada material, 109, 135
Derivada total, 109
Derivativa de partícula, 109
Derivativa substancial, 109
Descarga da água de um tanque, 155-156
Descarga da água de um tanque grande, 170
Descrição euleriana, 104
Descrição lagrangiana, 104-107
Desempenho idealizado do compressor, 667
Deslocamento angular, 2
Desprendimento de vórtice, 498
Destaque histórico, pessoas homenageadas por parâmetros não adimensionais, 249. *Consulte também* Parâmetros adimensionais
Diagrama de Moody, 295
Diagramas de contorno de temperatura, 750
Diâmetro do duto de ar, 298
Diâmetro hidráulico, 280, 598
Dickinson, Michael, 262
Diferença de pressão, 46
Difusividade do momento, 280
Difusividade turbilhonar de momento, 291
Difusividade viscosa, 280
Difusor, 664
Difusor subsônico, 543
Difusor supersônico, 543
Dimensão, 14, 232
Dimensionalidade do escoamento, 12
Dimensões básicas, 232
Dimensões de força, 232
Dimensões derivadas, 14
Dimensões fundamentais, 14, 232
Dimensões primárias da constante de Bernoulli, 234
Dimensões primárias da tensão superficial, 232
Dimensões primárias, 14, 232
Dimensões secundárias, 14
Dinâmica, 2
Dinâmica dos fluidos, 2
Dinâmica dos gases, 2
Dipolo, 435
Dispositivos com escoamento axial de vários estágios, 705
Dispositivos com escoamento em regime permanente, 11
Dispositivos com escoamento radial, 220
Dispositivos de corrente única, 180
Dispositivos de medição de pressão, 71-75
Dispositivos produtores de energia, 647. *Consulte também* Turbina
Dispositivos que absorvem energia, 647. *Consulte também* Bomba
Dissipação de energia, 624
RVF, 616
salto hidráulico, 624
tubos. *Consulte* Perda de carga em tubo
Distância vertical, 69
Distribuição da pressão em cilindro circular, 438-439
Distribuição da pressão hidrostática, 384
Divergente, 347
Divisor de raio, 330
DNS, 737
DoD, 480
Domínio computacional, 718, 724
Domínio de escoamento, 104, 346
Domo de sonar, 50
Droplet-on Demand (DoD), 480
Duplamente regulado, 692
Duplicando a velocidade da bomba, 684
Duto convergente compressível, 353
Duto convergente-divergente, 539-541
Duto retangular, 284
Dutos. *Consulte* Escoamento em tubos

E

Eckert, Ernst R. G., 249
EDO, 390
EDP, 390
Efeito capilar, 47-49
Efeito Doppler, 325
Efeito ER, 53
Efeito Magnus, 519
Efeito piezelétrico, 65
Efeito presso elétrico, 65
Efeito reológico (ER), 53
Efeitos da superfície livre, 413
Efeitos do atrito, 161, 166, 168
Eficiência
BEP, 650
bomba, 158, 309, 649
energia mecânica, 156-161
gerador, 158
global, 158
mecânico, 157
motor, 158
turbina, 158, 695-696
Eficiência combinada, 158
Eficiência da bomba, 158, 649
Eficiência da turbina, 695
Eficiência de conversão, 158
Eficiência de gerador, 158
Eficiência de turbina, 158, 696
Eficiência do motor, 158
Eficiência global, 158
Eficiência mecânica, 158
EGL, 168, 649
Elemento material, 351
Elevação capilar, 48
Elevação de pressão (expansão gradual em tubo), 305
Elevação do líquido durante rotação, 88
Elevação do oceano (furacão), 172-173
Elevação em uma asa, 251
Elíptico, 459
Embreagem ER, 53

Empuxo, 208
Energia, 36-37
calores específicos e, 36-37
cinética,36, 157, 163, 180
cinética rotacional, 217
cinética turbulenta, 744
conservação, 149, 175, 178
equação da energia para um escoamento em regime permanente, 180
equação geral da energia, 175-180
escoamento, 36, 37, 157, 163
específica, 603
interna, 36, 180
macroscópica, 36
mecânica, 186
microscópica, 36
potencial, 36, 157, 163, 180
térmica, 36, 156, 157, 176
total, 36
Energia cinética, 36, 157, 163, 180
Energia cinética turbulenta, 738
Energia crítica, 603
Energia de escoamento, 37, 157, 163, 180
Energia e eficiência mecânica, 156-161
Energia específica, 602-603
Energia interna, 36, 180
Energia macroscópica, 36
Energia mecânica, 156, 157
Energia microscópica, 36
Energia potencial, 36, 157, 163, 180
Energia térmica, 37, 156, 176
Energia total, 36
Engineering Equation Solver (EES), 23
Entalpia, 37, 534
Entalpia de estagnação, 534
Entalpia estática, 534
Entalpia total, 534
Entrada de pressão, 725
Entrada de velocidade, 725
Equação admensionais de Navier-Stokes, 412
Equação da conservação da energia, 178
Equação da continuidade, 149, 266, 346
adimensionalização, 414, 419
componente de velocidade que falta, 354
coordenadas cartesianas, 357
coordenadas cilíndricas, 351
dedução usando o teorema do divergente, 347
dedução usando o volume de controle infinitesimal, 348
equação de Navier-Stokes, 372. *Consulte também* equação de Navier-Stokes
escoamento compressível permanente, 352
escoamento de Fanno, 575
escoamento de Rayleigh, 567
escoamento em canal aberto, 605
escoamento incompressível, 352
exemplo, 353
forma alterantiva da equação, 351
forma geral da equação, 347
procedimento passo a passo para solução de problemas, 380
Equação da difusão unidimensional, 395
Equação da energia
escoamento de Fanno, 575
escoamento em canal aberto, 605
Equação da inclinação, 721
Equação de Bernoulli em um sistema de referência giratório, 668
Equação de Bernoulli incompressível em regime permanente (regiões não viscosas do escoamento), 420
Equação de Bernoulli incompressível em regime permanente (regiões irrotacionais do escoamento), 424
Equação de Bernoulli, 161-175, 234
aplicações, 169-177
bombas, 669
cargas, expressas em termos de, 167
enunciado, equação, 163
escoamento ao longo de uma linha de corrente, 167
escoamento compressível, 174-175
escoamento em regime intermitente, 164
escoamento em regime permanente, 166
escoamento incompressível, 167
escoamento sem atrito, 166
forma adimensionalizada, 234
homogeneidade dimensional, 233-234
limitações de uso, 166-167
pressão estática, dinâmica, de estagnação, 164
princípio da conservação da energia mecânica, como, 163
regiões de alta e baixa pressão, 515
regiões irrotacionais do escoamento,424
regiões sem viscosidade do escoamento, 419-420
teoria da obstrução de Bernoulli, 333
trabalho de eixo, 166
transferência de calor, 167
Equação de Cauchy, 365
dedução usando a segunda lei de Newton, 369
dedução usando o volume de controle infinitesimal, 367
derivação usando o teorema do divergente, 366
forma alternativa, 369
forma geral, 366
Equação de Colebrook, 295, 580
Equação de continuidade adimensional, 412
Equação de correção de eficiência de Moody para turbinas, 700
Equação de energia com escoamento em regime permanente, 180
Equação de estado
definição, 34
equação de Navier-Stokes, 370
linha de Rayleigh, 568
Equação de estado do gás ideal, 34
Equação de Euler, 418
Equação de Gauckler-Manning, 608
Equação de Kármán (von Kármán), 296
Equação de Laplace, 423, 427
Equação de Manning, 608
Equação de Navier-Stokes (RANS) média ponderada de Reynolds, 738
Equação de Navier-Stokes
admensionalização, 411-414
coordenadas cartesianas, 374
coordenadas cilíndricas, 374
escoamento incompressível, 372
fluidos newtonianos/não newtonianos, 371
forma geral, 373
importância, 373
procedimento passo a passo para solução de exatas, 380
solução aproximada *vs.* solução exata, 410. *Consulte também* Soluções aproximadas da equação de Navier-Stokes
Equação de Poisson, 378
Equação de Prandtl, 296
Equação de RANS, 738
Equação de Reynolds, 483
Equação de Torricelli, 170
Equação de turbomáquina, 707
Equação de turbomáquina de Euler, 666
Equação de von Kármán, 296. *Consulte também* Kármán, Theodor von
Equação diferencial parcial (EDP), 389,395
Equação do momento angular, 217-225
dispositivos com escoamento radial, 220

escoamento em regime permanente, 219
forma geral da equação, 218
problemas, 229
sem torques externos, 220
VC constante, 220
Equação do momento de momento, 222
Equação do momento linear fixo, 204
Equação do movimento, 83
Equação geral da energia, 175-179
trabalho de eixo, 177
trabalho realizado por forças de pressão, 177-179
transferência de energia por calor, 176
transferência de energia por trabalho, 176-179
Equação incompressível de Navier-Stokes, 373
Equação integral de Kármán, 473
Equação LDV, 330
Equação para a correção de eficiência das bombas, 682
Equação vetorial, 204, 369
Equações — nomes específicos
equação da continuidade, 149. *Consulte também* Equação de continuidade
equação da difusão 1-D, 395
equação de Bernoulli. *Consulte* Equação de Bernoulli
equação de Cauchy, 365
equação de Chezy, 607
equação de Colebrook, 301
equação de estado do gás ideal, 34
equação de estado. *Consulte* Equação de estado
Equação de Euler, 418-419
equação de Laplace, 423
equação de Manning, 608
equação de Poisson, 378
equação de Prandtl, 296
equação de RANS, 738
equação de Toricelli, 170
equação de turbomáquina de Euler, 686
equação de von Kármán, 302
equação do momento angular. *Consulte* Equação do momento angular
equação do momento linear. *Consulte* Equação do momento linear
equação geral da energia, 175-180
equação integral de Kármán, 473
equação LDV, 330
equações da camada limite, 449
equações de balanço, 149
equações de perfil da camada de limite turbulenta, 465
número de Reynolds, 483
Equações constitutivas, 370
Equações da camada limite, 449, 453
Equações da camada limite laminar, 452-453
Equações de balanço, 149
Equações de Chezi, 607
Equações de perfil da camada limite turbulenta, 465-466
Equações diferenciais, 9, 375, 380
Equações diferenciais ordinária (EDO), 390
Equações do movimento adimensionais, 414
Equações
acopladas, 346
adimensionalização, 234, 236, 237, 238
constitutivas, 370
diferenciais, 375, 389
específicas. *Consulte* Equações — nomes específicos
homogeneidade dimensional, 233
vetor, 366
Erro constante, 24
Erro de exatidão, 24
Erro de precisão, 24
Erro sistemático, 24
Erro, função, 395
Erros de arredondamento, 26
Erupção vulcânica, 417
Escala de comprimento turbulento, 738
Escala de Kelvin, 34
Escala de Rankine (R), 34
Escala de tempo capilar, 543
Escoamento
canal aberto, 9. *Consulte também* Escoamento de canal aberto
circular, 127
compressível, 9. *Consulte também* Escoamento compressível
de compressão, 563
de expansão, 563
de Fanno, 575-580
dimensionalidade, 12
eixo axissimétrico, 363
em regime permanente, 10-11, 596
em regime transiente, 10-11
em tubos. *Consulte* Escoamento em tubos
escoamento de Couette, 142, 270
escoamento de fricção, 418
escoamento de Rayleigh, 566-575
externo, 19
forçado, 10
GVF, 616
Hagen-Poiseuille, 285
Hele-Shaw, 361
hidrodinamicamente desenvolvido, 281
incompressível, 9
interno, 9
isentrópico, 539-553
laminar, 10
não uniforme, 596-597
não viscoso, 8-9
natural, 10
Número de Mach, 538
planar, 364
Poiseuille, 142, 143, 272
quase permanente, 413
reverso, 468
RVF, 623
sem viscosidade, 418
sônico, 538
subcrítico 600
supercrítico, 600
totalmente desenvolvido, 12
turbulento, 10
uniforme, 607-609
Escoamento adiabático reversível, 566
Escoamento ao redor de um cilindro circular (Re = 10.000), 739
Escoamento ao redor de um cilindro circular (Re = 10^7), 741
Escoamento ao redor de um cilindro circular (Re = 150), 731
Escoamento através de comporta basculante (salto hidráulico), 761
Escoamento axissimétrico, 369, 427, 498
Escoamento bidimensional, 12-13, 491, 492
propriedades cinemáticas, 123
rotacionalidade, 128
Escoamento com número de Reynolds baixo, 419
Escoamento com simetria axial em uma bala, 13
Escoamento completamente desenvolvido em tubo redondo — escoamento de Poiseuille, 390
Escoamento completamente turbulento, 295, 296
Escoamento compressível, 9, 533-600
bocais convergentes, 540, 541
bocais convergentes-divergentes, 540, 550-553
cálculos de CFD, 754
choques normais, 554-559
choques oblíquos,559-563

entalpia, 534
equação de Bernoulli, 174, 175
escoamento de Fanno, 575-583
escoamento de Rayleigh, 566-575
escoamento isentrópico através de bocais, 543-553
escoamento isentrópico unidimensional, 539-545
escoamento isoentrópico dos gases ideais, 543-545
número de Mach, 538-539
ondas de choque, 553-563
ondas de expansão de Prandtl-Meyer, 563-566
propriedades de estagnação, 534-536
velocidade do fluido e área do escoamento, 541-543
velocidade do som, 537-538
Escoamento Couette, 144, 269, 270, 382
Escoamento crítico uniforme, 608
Escoamento da vazão do ar em duto, 298
Escoamento de água através de bocal de mangueira de jardim, 155
Escoamento de água em tubo impulsionado a gravidade, 313
Escoamento de compressão, 563
Escoamento de Couette com gradiente de pressão aplicado, 386
Escoamento de Couette totalmente desenvolvido, 382
Escoamento de Fanno, 575-583
Escoamento de gás através de bocal convergente, 549-550
Escoamento de gás, relações críticas, 545
Escoamento de Hagen-Poiseuille, 285
Escoamento de Poiseouille, 144, 145, 272, 285
Escoamento de Poiseuille com simetria axial, 145
Escoamento de Rayleigh, 566-575
Escoamento de saída afogado, 627
Escoamento de saída submerso, 627
Escoamento de transição, 280
Escoamento do tipo Bernoulli idealizado, 168
Escoamento em duto convergente, 139
Escoamento em expansão, 563
Escoamento em óleo quente sobre placa plana, 509-510
Escoamento em regime transiente, 10-11
Escoamento em tubos, 277-344
atrito, 254-255
diagrama de Moody, 295
dispositivos de medição do escoamento. *Consulte* Dispositivos de medição do escoamento
escoamento laminar em tubos, 282
escoamento turbulento em tubos, 290
número de Reynolds, 279
perda de carga. *Consulte* Perda de carga em tubo
perdas menores, 301
perfil de velocidade turbulenta, 292
queda de pressão, 284, 289
redes de tubulação, 307
região de entrada, 280
tipos de problemas de escoamento de fluidos, 297
tubos inclinados, 286, 288
tubos não circulares, 287
turbulenta, tensão de cisalhamento, 291
vazão de escoamento em tubos horizontais e inclinados, 288
Escoamento em um acessório de aspirador, 441
anemômetros térmicos, 328
fluxômetros de roda de pás, 323
LDV, 329
medidores de vazão de área variável (rotâmetros), 323
medidores de vazão eletromagnéticos, 326
medidores de vazão de turbina, 322
medidores de vazão por deslocamento positivo, 321
medidores de vazão por obstrução, 318
medidores de vazão ultra-sônicos, 324
PIV, 330
sonda de Pitot e sonda estática de Pitot, 317
Escoamento em vazão canal aberto, 9, 595, 642, 644
Escoamento estrangulado de Fanno, 581-582
Escoamento estrangulado Rayleigh, 573-575
Escoamento externo, 9, 491
Escoamento forçado, 10
Escoamento gradualmente variado (GVF), 616
Escoamento Hele-Shaw, 361
Escoamento hipersônico, 538
Escoamento ideal, 180
Escoamento incompressível, 9, 356, 492
Escoamento interno, 9, 277
Escoamento isentrópico, 175, 539-553
Escoamento isentrópico através de bocais, 545-553
Escoamento isentrópico dos gases ideais, 543-545
Escoamento isentrópico unidimensional, 539-545
Escoamento laminar, 10, 279, 598
Escoamento laminar em tubos, 282
Escoamento não uniforme, 596
Escoamento natural, 10
Escoamento paralelo sobre placas planas, 506-510
Escoamento permanente, 10-11, 596
Escoamento planar de Poiseuille, 388
Escoamento potencial, 409. *Consulte também* Aproximação do escoamento irrotacional, 502
Escoamento rapidamente variado (RVF), 623
Escoamento reverso, 468, 469
Escoamento sem fricção, 418
Escoamento sem viscosidade, 418
Escoamento sobre cilindros e esferas, 510-513
Escoamento sobre corpos, 490-532
aerofólio, 514-517, 519
andando de bicicleta, 502-504
arrasto, 492-495
arrasto de atrito, 496
arrasto de pressão, 495
asas de avião, 494
avião comercial, 518, 520-522
carros, 502-506. *Consulte também* Automóvel
coeficiente de atrito, 507-513
coeficientes de arrasto de geometrias comuns, 499-506
definição, 491
efeito Magnus, 519
escoamento paralelo sobre placas planas, 506-510
escoamento sobre cilindros e esferas, 510-513
lei de Stokes, 499
número de Reynolds, 499, 500, 510-512
rotação, 519-523
rugosidade de superfície, 515
separação de escoamentos, 498
superposição, 504
sustentação, 492-494, 514-522
vôo de avião, 500, 514-520, 521
Escoamento sobre saliência alta, 631
Escoamento sobre saliência na parte inferior de um canal, 760
Escoamento sobre uma saliência com atrito desprezível, 630

Escoamento sônico, 538, 542
Escoamento subcrítico sobre saliência, 634-635
Escoamento subcrítico, 600
  cálculos do CFD, 760
  canais com rugosidade não uniforme, 610
  canais trapezoidais, 613-615
  canal retangular, 613
  coeficiente de Chezy, 607
  coeficiente de Manning, 608
  comportas de escoamento, 629
  controle e medição do escoamento, 627
  definição, 596
  energia específica, 602-604
  equação da energia, 606
  equação de continuidade, 605
  escoamento crítico uniforme, 608
  escoamento em regime permanente e uniforme, 596
  escoamento laminar/turbulento em canais, 597
  escoamento sobre uma saliência com atrito desprezível, 630
  escoamento uniforme, 607
  escoamento uniforme/variado, 596-597
  GVF, 616
  HGL, 169
  inclinação do canal, 622
  inclinação por atrito, 606
  melhor seção transversal hidráulica, 611
  número de Froude, 598, 599
  número de Reynolds, 597-598
  perfil de superfície, 617-622
  perímetros não uniformes, 609
  reservatório, 631-634
  RVF, 623
  salto hidráulico, 623-626
  unidimensionalidade, 596
  velocidade das ondas de superfície, 600-601
  velocidade de onda, 600
Escoamento subsônico, 538, 542
Escoamento subsônico a jusante, 561
Escoamento supercrítico, 600
Escoamento supersônico, 542, 543
Escoamento supersônico a jusante, 561
Escoamento totalmente desenvolvido, 12, 254, 607
Escoamento tranquilo, 600
Escoamento transônico, 538
Escoamento tridimensional, 12, 493
Escoamento turbulento, 279
Escoamento turbulento completamente rugoso, 290, 607
Escoamento turbulento em regime transiente, 739
Escoamento turbulento em tubos, 290
Escoamento unidimensional, 12
Escoamento uniforme, 596
Escoamento variado, 596
Escoamento viscoso, 8-9

Escoamento, arrasto, 499
Escoamentos axissimétricos com turbilhão, 727
Escoamentos básicos, 430. *Consulte também* Escoamentos irrotacionais planares elementares
Escoamentos circulares, 127
Escoamentos com superfícies livres, 260
Escoamentos de fluidos, 8-13
Escoamentos irrotacionais planares elementais, 430
  corrente uniforme, 431
  fonte/sumidouro de linha, 431
  linha de vórtice, 434
Escoamentos lentos, 270
ESP, 275
Espaçamento de lâmina, 742
Espessura da camada limite, 447, 463, 469
Espessura do deslocamento, 457
Esquiadores , 501
Estabilidade de corpos imersos/flutuantes, 80-82
Estabilidade rotacional de corpo imerso, 81
Estabilidade vertical, 81
Estabilização de chama, 331
Estado de estagnação isentrópica, 535
Estados Unidos, 14, 15
Estática, 2
Estática dos fluidos, 2, 68. *Consulte também* Pressão e estática de fluidos
Estator (ventilador de escoamento axial de pás), 741-748
Estável, 81
Esteira de vórtices periódicos alternados de Kármán, 114, 735, 740
Esteira, 161, 498
Esteira móvel, 241, 257
Estol, 468, 498
Estômago humano, 763
Estômago virtual, 763
Estrangulado, 546, 631
Estrutura de referência inercial, 203
Etapa de pseudotempo, 719
Euler, Leonhard, 7, 106, 163, 249
Evaporação, 35
Excesso de velocidade, 478
Exemplo de resfriamento de chip, 751
Expansão da série de Taylor, 348
Expansão gradual, 305
Expansão repentina, 303, 306
Explosões nucleares, 25
Expoentes, multiplicação/divisão, 243
Extrapolação de dados não adimensionalizados, 237

F

Faixa, 786
Falcões, 518
Fanning, John T., 249
Farads, 275
Fator de atrito, 285, 290, 496, 580
Fator de atrito de Darcy, 247, 254
Fator de atrito de Darcy-Weisbach, 285
Fator de atrito de Fanning, 247, 255
Fator de correção da energia cinética, 182
Fator de correção do fluxo do momento, 205
Fator de forma, 473
Fatores de correção, 133
Fechamento da viscosidade de vórtices, 292
Fileira, 114
Fileira de Pás do rotor, 676
Filmes de Hollywood, 69, 372
Filtro passa baixo, 275
Fio de fumaça, 114, 116
Fios de disparo, 448
FLUENT, 24
Fluido, 2
  de cisalhamento, 371
  dilatante, 42, 372
  ER, 53
  MR, 53
  não newtoniano, 371
  newtoniano, 42,371
  plástico, 372
  plástico de Bingham, 372
  propriedades. *Consulte* Propriedades dos fluidos
  pseudoplástico, 42, 371
  queda livre, 84
  várias camadas, 75
  viscosidade, 44-45
Fluidos ER, 53
Fluido de várias camadas, 76
Fluido em repouso, 84
Fluidos de queda livre, 84
Fluidos dilatantes, 42, 372
Fluidos magnetoreológicos (MR), 53
Fluidos MR, 61

Fluidos não newtonianos, 371
Fluidos newtonianos, 42, 371
Fluidos plásticos, 372
Fluidos plásticos de Bingham, 372
Fluidos pseudoplásticos, 42
Flutuação e estabilidade, 77-78
Fonte, 266
Força, 16
Força centrípeta, 270
Força da gravidade, 16
Força de arrasto, 41
Força de arrasto aerodinâmica (carro protótipo), 241-242
Força de arrasto agindo sobre tubo no rio, 513-514
Força de cisalhamento, 42
Força de flutuação, 77
Força líquida, torneira de flange, 214
Força, manter cotovelo defletor no lugar, 208
Força, manter cotovelo reverso no lugar, 209
Forças adesivas, 47
Forças coesivas, 47
Forças de corpo, 83, 198
Forças de superfície, 83, 201
Formação de gotículas, 480
Formação em V (aviões), 518
Fórmula
  Pitot, 324
  Swamee-Jain, 303
  turbina de Euler, 221, 666
Fórmula da turbina de Euler, 221
Fórmula de Pitot, 318
Fórmulas de Swamee-Jain, 297
Fourier, Jean B. J., 249
Fr, 236, 248, 260, 412, 599, 600
Francis, James B., 7
Fronteira, 13
Froude, William, 7, 249
Função corrente compressível, 365
Função de corrente, 146, 357, 365
  campo de velocidade, 358, 359
  compressível, 365
  convenção do lado esquerdo, 361
  coordenadas cartesianas, 357
  coordenadas cilíndricas, 363
  escoamento axissimétrico, 363
  escoamento planar, 363
  forma geral (coordenadas cartesianas), 357
  linha de corrente, 357, 358
  significado físico, 357, 360
  velocidade relativa, 361
Função
  corrente, 363-371. *Consulte também* Função de corrente
  erro, 395
  erro complementar (erfc), 396
  escoamento de Rayleigh, 901
  harmônicas, 428
  potencial de velocidade, 422
  potencial, 422
  Prandtl-Meyer, 563
Função de corrente axissimétrica incompressível, 370
Função de corrente planar incompressível, 363
Função de erro(ferr), 395
Função potencial, 422
Função de potencial de velocidade, 422
Função de Prandtl-Meyer, 563
Função puntual, 108
Funções de parede, 725
Funções harmônicas, 428
Furacão, 172
Furacão classe, 5, 198

G

g, 17, 60, 235
Galilei, Galileo, 7
GAMBIT, 720
Garganta, 540, 541
Gás, 3
Gás ideal, 34
Gauss, Johann Carl Friedrich, 347
General Conference of Weights and Measures (CGPM), 15–16
Geometria de placa de reservatório de desfiladeiro de soleira delgada, 634
Geometria simétrica, 737
Geração de malha, 720, 734
Geração de potência hidroelétrica de represa, 185
Geração/carga de energia da turbina eólica, 211
Gerador a turbina hidráulica, 159
Gerador de turbina a gás, 705
Giga, 15
GM, 82
Golfinhos, 500
Golpe de aríete, 38
Gotas de chuva, 28
Grade, 718
Gradiente adverso de pressão, 467
Gradiente de pressão favorável, 467
Gradientes de pressão, 8, 467
Gráfico de contornos, 119-120
Gráfico de curva preenchida, 119
Gráfico de isocurvas, 119
Gráfico de perfil de velocidade, 118
Gráfico do vetor de velocidade, 121, 122, 745
Gráfico vetorial, 122-123
Gráficos de contorno da velocidade axial normalizada, 730
Grashof, Franz, 249
Gravidade, 200
Gravidade específica, 33-35, 79
Grupo Pi, 412
GVF, 616

H

Haaland, S. E., 295
Hagen, Gotthilf, 7, 285
H_{bomba}, *u*, 651
$H_{disponível}$, 650
Head, M. R., 470
Hecto, 15
Herschel, Clemens, 7, 319
HGL, 167-168
Hidráulica, 2
Hidrodinâmica, 2
Hidrologia, 2
Hidrômetro, 79
Hidrostática, 68
Hidroturbinas, 687
Hipersônico, 10
Homogeneidade dimensional, 17, 233-239
Homólogo, 681
Hugoniot, Pierre Henry, 554
Hydrodynamica (Bernoulli), 7

I

Iceberg, 102
Idealização do meio contínuo, 32
Identidade vetorial, 419-422
Imagem espelhada, 442
Imagem estereoscópica, 117
Impluso invertido, 674
Impurezas, 46
Inclinação crítica, 608
Inclinação de canal, 622
Inclinação por atrito, 606
Inconsistências de unidade, 19
Independência de malha, 724
Inexatidão, 24
Infusões intravenosas, 99
Inseto que pode caminhar sobre as águas, 232
Insetos, como voam, 262
Instável, 81
Integração parcial, 386
Integração unidimensional de Leibnitz, 135
Intensidade do dipolo, 436
Intensidade do som, 276
Interação viscosa, não viscosa, 584

Interações entre onda de choque/camada limite, 584
Interferometria, 116
International Electrotechnical Commission (IEC), 700
Intervalos, 720
Irmãos Wright, 8
Irrotacional, 124, 127, 422
Isóbaros, 85

J

J, 37
J/m^2, 45
Jakob, Max, 249
Jato de água atingindo uma placa fixa, 210
Jato supersônico superexpandido, 564
Jogando uma bola de beisebol na Lua, 237
Jogos olímpicos, 501
joule (J), 37

K

K, 15, 34
Kaplan, Viktor, 692
Kármán, Theodor von, 8, 473
Kelvin (K), 15, 34
Kelvin, Lord, 8
kg, 15
kgf, 16
kgf/cm2,57
Kilojoule (kJ), 37
kJ, 37
Knudsen, Martin, 249
kPa, 57

L

Lagrange, Joseph Louis, 104, 357
Lamb, Sir Horace, 8
Laplace, Pierre, 634
Laplaciano, 373
Laser Doppler, velocimetria (LDV), 34-336
Laser, velocimetria (LV), 329
Lauchle, G. C., 50
Laval, Carl G. B. de, 541
Lavar pratos, 602
lbf, 16, 18
lbf/pé, 45
lbf/pol^2, 57
lbm, 15, 16
LDA, 329
LDV, 329
Lei da condução de calor de Fourier, 265
Lei da homogeneidade dimensional, 233
Lei da parede, 293
Lei da parede de Spalding, 465
Lei da parede normalizada, 293
Lei da potência um sétimo, 462, 466
Lei de Hooke, 371
Lei de King, 328
Lei de Ohm, 264
Lei de Pascal, 60, 62
Lei de Stokes, 499
Lei do defeito da velocidade, 294
Lei dos gases ideais, 264
Lei dos cossenos, 668
Lei logarítmica, 294, 465
Lei. *Consulte* Teoremas etc.
Leis de conservação, 149
Leis de escala de turbomaquinaria
  bombas, 680
  turbinas, 699
Leis de semelhança
  bombas, 680-687
  turbinas, 687-705
Leque de expansão, 563, 564
Leques de expansão de Prandtl-Meyer, 563
LES, 743
Lewis, Warren K., 249
Libra-força (lbf), 16, 18
Libra-força por polegada quadrada (lbf/in^2), 57
Libra-massa (lbm), 15
Liburdy, James A., 480
Ligações intermoleculares, 3
Limite de Betz, 213
Linha de corrente, 110-111, 357, 358
Linha de corrente de estagnação, 165
Linha de corrente divisória, 362, 442, 470
Linha de emissão, 113-114
Linha de Fanno, 554, 557, 576
Linha de fonte, 432
Linha de Rayleigh, 554, 568, 570
Linha de reconexão, 753
Linha de tempo, 115-117
Linha de trajetória, 112-113
Linha de vórtice, 434
Linha piezométrica, (EGL), 167-168,649
Linhas de corrente curvas, 451
Linhas de emissão de fumaça, 114
Linhas equipotenciais, 427
LV, 329

M

m, 15
m^2/s, 43
Ma, 9, 175, 248, 252, 538, 539, 547
Mach, Ernst, 249, 538
Madidores de vazão com roda de pás, 323
Madidores de vazão de área variável, 323
Magnus, Heinrich, 519
Malha híbrida, 723
Malha não estruturada, 721
Malha quadrilateral não estruturada, 721
Malha triangular não estruturada, 721
Manning, Robert, 608
Manômetro, 61-64
Manômetro de vários fluidos, 63
Máquina de fluidos, 648. *Consulte também* Turbomaquinaria
Máquinas de deslocamento positivo, 648
Máquinas dinâmicas, 648
Mariotte, Edme, 7
Massa, 16-17. *Consulte também* Conservação de massa
Massa de ar em uma sala, 34
Massa de controle, 13
Matriz de teste de fatorial fracional, 256
Matriz de teste fatorial completo, 256
Mecânica, 2
Mecânica dos fluidos
  áreas de aplicação, 4-5
  definição, 2
  visão geral do histórico, 6-8
Medição da velocidade pelo tubo de Pitot, 172
Medições no túnel de vento para a carreta modelo, 258
Medidas de vazão eletromagnética de escoamento total, 317
Medidor de flutuação, 323
Medidor de vazão com base em gravidade, 324
Medidor de vazão por turbina manual, 322
Medidor de Venturi, 319
Medidores de bocal, 319
Medidores de orifício, 319-321
Medidores de vazão a propulsor, 322
Medidores de vazão com disco de nutação, 321
Medidores de vazão eletromagnéticos de inserção, 327
Medidores de vazão eletromagnéticos, 326
Medidores de vazão por deslocamento positivo, 321
Medidores de vazão por obstrução, 318
Medidores de vazão tipo turbina, 322

Medidores de vazão ultrasônicos, 324
Medidores de vazão ultrasônico com tempo de trânsito, 324
Medidores de vazão ultrasônicos por efeito Doppler, 325
Medidores de vazão, 316. *Consulte também* Dispositivos de medição de escoamento
Mega, 15
Megapascal (MPa), 57
Mel, 414
Melhor ponto de eficiência (BEP), 650
Melhor seção transversal hidráulica, 611
Menisco, 47
Meteorologia, 2
Método das variáveis repetidas, 242-247
Método de imagens, 442
Método de telúrio, 447
Metro (m), 15
Micro, 15
Mili, 15
Modelagem, 19-20
Modelagem matemática, 19-20
Modelo, 238
Modelo característico de Herschel-Bulkley, 53
Modelo de tornado de duas regiões, 425-426
Modelo distorcido, 260
Modelo escalado dinamicamente (mosca robô), 262
Modelos avançados de tratamento de paredes, 736
Modelo de turbulência k-ε, 737, 758
Modelos de turbulência de duas equações, 738
Modelos de turbulência, 297, 738
Módulo de compressibilidade em volume, 38
Módulo de elasticidade de Young, 38
Módulo de elasticidade em volume, 38
Moinho de vento, 687
mol (mol), 15
Momento, 215, 218
Momento angular, 217, 219
Momento de guinada, 493
Momento de inércia, 216
Momento de inércia de área, 70
Momento de restauração, 81
Momento de rolagem, 493
Momento do momento, 218, 265
Momento linear, 149, 198
  casos especiais, 204
  enunciado da equação, 198
  escoamento em regime permanente (forma algébrica), 204
  escoamento em regime permanente, 204
  fator de correção do fluxo do momento, 205
  sem forças externas, 207
Momentos de inércia centróide/centroidal, 81
Moody, Lewis F., 295
Mosca de fruta, 262
Motor turboventilador, 678
Motores de aviões a jato, 705
Motores de foguete, 550
Movimento de aceleração retilíneo, 84
Movimento de corpo rígido, fluidos no, 82-89
Movimento de vórtice forçado, 86
Movimento ou deformação dos elementos fluidos, 119-124
Movimento rotacional, 215
Movimento súbito de placa plana infinita, 394
Movimento/deformação de elemento fluido, 119-128
MPa, 57

N

N · m, 17
N · m/m^2, 45
N, 16
N/m, 45
N/m2, 57
Nadadores, 501
Nano, 15
Navier, Louis Marie Henri, 7, 373
necessária, 650, 651, 652, 653
Neutramente estável, 81
Newton (N), 16
Newton por metro quadrado (N/m^2), 57
Newton, Sir Isaac, 7, 42
Newton-metro (N · m), 17
Nikuradse, Johann, 8, 295
Nomenclatura. *Consulte* Terminologia
Normal unitária exterior, 130
Normalizada, 234
Notação de tensor, 205
NPSH, 655
$NPSH_{necessário}$, 656
Núcleos de cavitação, 50
Número crítico de Reynolds, 447
Número de Arquimedes, 247, 272
Número de Biot, 247
Número de Bond, 247
Número de cavitação, 247
Número de Eckert, 247
Número de Euler, 247, 412, 450
Número de Fourier, 248
Número de Froude (Fr), 235, 248, 260, 268, 598
Número de Grashof, 248
Número de Jakob, 248
Número de Knudsen, 248
Número de Lewis, 248
Número de Mach (Ma), 9, 175, 248, 252, 538-539, 547, 560
Número de Nusselt, 248
Número de Ohnesorge, 480
Número de Power, 248
Número de Prandtl, 248, 274
Número de Rayleigh, 248
Número de Reynolds, 10, 118, 412
  aproximação da camada limite, 453
  coeficiente de arrasto, 499-500
  crítico, 447
  crítico de engenharia, 448
  DNS, 737
  escoamento compressível, 580
  escoamento de transição, 286
  escoamento sobre cilindro/esfera, 510-512
  escoamento sobre placa infinitesimalmente fina, 476
  escoamento sobre placa plana, 506
  escoamento uniforme em um canal aberto, 597
  escoamentos supersônicos, 559
  espessura da camada limite, 447
  simulação CFD do cilindro circular de escoamento, 736
  superfícies livres, 260
  transição, 447
  viscosidade, fluidos, 496
Número de Reynolds crítico de engenharia, 448
Número de Reynolds de transição, 447
Número de Reynolds, 248, 252, 253, 255, 258, 248, 479
Número de Reynolds, independência, 259
Número de Schmidt, 248, 274
Número de Sherwood, 248
Número de Stanton, 248, 274
Número de Strouhal, 248
Nusselt, Wilhelm, 249

O

Oceanografia, 2
Oklahoma Wind Power Center, 8
Onda curva, 759
Onda de explosão, 272
Onda de Mach, 563
Onda de proa, 562
Ondas de choque, 272, 554-557
Ondas de choque normal, 554
Ondas de contração antral peristálticas, 763

Ondas de expansão, 563-566
Ondas de expansão de Prandtl-Meyer, 563-566
Ondas de superfície infinitesimais, 601
Ônibus espacial, 208
Operador de gradiente, 109
Operador Del, 107
Operador derivada parcial, 107
Operador derivada total, 107
Operador laplaciano, 373, 428
Ortogonalidade mútua, 428

P

*P**, 551
Π dependente, 239
Pá, 704-705
Pacotes de programas de engenharia, 24
  FLUENT, 24
Pacotes de software, 22-23. *Consulte também* Pacotes de software de engenharia
Padrões de escoamento (escoamento em regime não permanente), 114
Pal, Anupam, 763
Panela de pressão, 98
Parábola, 87
Parabólica, 453
Paraboloides de revolução, 87
Paradoxo de d'Alembert, 440
Parâmetro adimensional da rugosidade, 680
Parâmetros adimensionais, 234
  bombas, 680
  dependente/independente, 239
  fator de atrito de Darcy, 285
  número de Froude, 235
  número de Reynolds, 279
  parâmetros, lista, 247, 249
  pessoas homenageadas, 249
  turbinas, 699
Parâmetros adimensionais para turbinas, 699-701
Parâmetros de bomba adimensionais, 680
Parâmetros de escala, 235, 412
Parâmetros repetidos, 243, 244, 245
Parâmetros sem dimensão. *Consulte* Parâmetros adimensionais
Parâmetros, 234
Pára-quedas, 503
Parede não viscosa, 725
Partícula de fluido, 106
Partícula material, 107
Partículas com cobertura metálica, 332
Partículas de carboneto de silício, 332
Partículas sinalizadoras, 112
Pás de estator, 675, 742
Pás de propulsor, 648, 664
Pás de roda, 648, 691
Pás do estator de turbina, 705
Pás do estator radial, 742
Pás do propulsor, 664
Pás do rotor, 663
Pás inclinadas para a frente, 664
Pás inclinadas para trás, 670, 665
Pás radiais, 664
Pás retas, 664
Pascal, Blaise, 7, 60
Pássaros, 500
PCI, 751
Pé, 15, 584, 758
Peclet, Jean C. E., 249
Peixe tropical, 500
Peixes, 500
Película de óleo escoando abaixo de uma parede vertical, 388
Pelton, Lester, 7
Perda de carga de tubo
  contração de escoamento, 303
  definição, 284
  entrada do tubo, 303
  exemplos, 289, 297, 306
  expansão gradual, 306
  tubo de água, 297
Perda de energia mecânica, 168, 180
Perda de escoamento circulatório, 671
Perda de peso de objeto na água do mar, 80
Perdas de passagem, 671
Perdas menores, 301
Perfil de camada limite de Blasius, 456, 488, 507
Perfil de superfície, 617-622
Perfil de velocidade da lei da potência um sétimo, 294
Perfil de velocidade da lei de potência, 294
Perfil de velocidade totalmente desenvolvido, 281
Perfil de velocidade turbulento, 292
Perfil de velocidade universal, 294
Perfil de velocidade, 41, 255, 336
Perfis de superfície líquida, 617-620
Perfuração de bala através do ar, 492
Pergamon, 6
Periódico, 11
Peso, 16
Peso atômico, 264
Peso de uma libra massa, 19
Peso específico, 16, 33
Peso molecular, 34
Philippe-Gaspard Gauckler, 608
Phillips, H. F., 491
pi π 239. *Consulte também* Parâmetros não dimensionais
Pico, 15
Piezômetro, 165
Pitot, Henri de, 317
PIV, 112-113, 330
Placa, 518
Placa de circuito impresso (PCI), 751
Placa retangular submersa, 72-73
Plantas, 500
Plásticos de Bingham, 42
Poise, 42
Poiseuille, Jean, 7, 285
Ponto crítico, 545, 603, 622
Ponto de estagnação, 105, 165, 172, 515, 516, 520
Ponto de inflexão, 468
Ponto de pressão zero, 440
Ponto de recolamento, 498
Ponto de separação, 6, 468, 469
Ponto operacional, 650
Ponto singular, 432
Pontos de controle, 622
Pós-processadores, 719
Postulado de estado, 32
Potência, 176
Potência da água, 649
Potência de bomba, aquecimento por atrito (bomba), 184
Potência de bombeamento útil, 158
Potência no eixo (bhp), 649
Potencial de velocidade, 427
Prandtl, Ludwig, 8, 249, 496
Precipitador eletrostático (ESP), 275
Prédios altos, 503
Prefixos (SI), 15
Pressão
  absoluta, 57, 58
  atmosférica padrão, 65
  atmosférica, 65-66
  barométrica, 65
  capilar, 480
  contrapressão, 545, 547-549, 551
  de estagnação, 164, 534
  definição, 3, 57
  dinâmica total, 439
  estática, 164
  gástrica, 763
  hidrostática, 67-68, 167
  impacto, 431
  manométrica, 57
  mecânica, 371
  média, 371
  saturação, 35, 665
  termodinâmica, 370
  total, 165
  vácuo, 57

vapor, 35-36, 655
Pressão absoluta, 57, 58
Pressão atmosférica padrão, 65
Pressão atmosférica, 65-66
Pressão barométrica, 65
Pressão capilar, 480
Pressão de estagnação, 165, 535
Pressão de impacto, 439
Pressão de saturação, 35, 655
Pressão de vácuo, 57
Pressão de vapor, 35-36,655
Pressão dinâmica, 164, 494
Pressão dinâmica total, 439
Pressão e estática dos fluidos, 56-102
  aceleração em trajetória reta, 84-86
  barômetro, 65-66
  definições, 57
  dispositivos de medição de pressão, 61-64
  estabilidade de corpos imersos/ flutuantes, 80-82
  estática dos fluidos, 68
  fluidos de queda livre, 84
  fluidos em repouso, 84
  flutuação e estabilidade, 77-80
  manômetro, 61-64
  movimento de corpo rígido, fluidos no, 82-86
  peso do pistão, efeito sobre a pressão do cilindro, 66-67
  placa retangular submersa, 72-73
  pressão atmosférica, 65-66
  pressão em um Ponto, 58-59
  rotação em contêiner cilíndrico, 86-89
  superfícies curvadas submersas, 74-75
  superfícies planas submersas, 69-73
  transdutores de pressão, 64-65
  uma bolha de sabão, pressão em, 250
  unidades de pressão, 57
  variação da pressão com a profundidade, 59-61
Pressão em uma bolha de sabão, 250
Pressão estática, 164
Pressão hidrostática, 67-68, 165
Pressão manométrica, 57
Pressão modificada, 413
Pressão total, 165
Primeira Lei da Termodinâmica, 163, 175
Primeiro momento de área, 69-70
Princípio da conservação da energia mecânica, 163
Princípio da conservação do dinheiro, 154
Princípio da conservação do momento angular, 199
Princípio de Arquimedes, 78, 79
Princípio de conservação da energia, 149, 175
Princípio de conservação da massa, 151-153
Princípio de conservação do momento, 149, 198
Princípios. *Consulte* Teoremas etc.
Prisma de pressão, 71
Procedimento da camada limite, 453
Processo adiabático, 176
Processo de estagnação, 535
Processo isotérmico, 175
Processos de escoamento em regime permanente, análise da energia. *Consulte* Análise da energia dos processos com escoamento em regime permanente.
Produto exterior, 366
Produto interno, 201
Produto interno, contratação, 201
Profundidade alternativa, 603,604
Profundidade crítica, 600
Profundidade do escoamento, 596
Profundidade hidráulica, 602
Profundidade normais, 597, 607, 622
Programas de computador, 22-24. *Consulte também* Pacotes de software de engenharia
Projeto propulsor de avião, 674
Prony, Riche de, 7
Propano saturado, propriedades, 776
Propriedade, 32
Propriedades críticas, 544
Propriedades de estagnação, 534-536
Propriedades dos fluidos, 31-55. *Consulte também* Tabelas e diagramas de propriedades
  cavitação, 36
  coeficiente de compressibilidade, 38-39
  coeficiente de expansão volumétrica, 39-40
  contínuo, 32-33
  densidade, 33-35
  efeito capilar, 47-48
  energia e calores específicos, 36-37
  escoamento de Fanno, 571
  escoamento de Rayleigh, 571
  escoamento isentrópico dos gases ideais, 543-545
  gravidade específica, 33-35
  pressão de vapor, 35-36
  propriedades de estagnação, 534-536
  tensão superficial, 45-47
  viscosidade, 41-45
Propriedades específicas, 32
Propriedades extensivas, 32, 129
Propriedades independentes, 32
Propriedades intensivas, 32, 129
Propriedades refrativas, 116
Propulsor, 664, 672
Protótipo, 238
psi, 57

Q

Quase permanente, 413
Queda brusca, 168, 169
Queda capilar, 48
Queda de pressão, 284
Quilo, 15
Quilograma (kg), 15
Quilograma-força (kgf), 16
Quilograma-força por centímetro quadrado (kgf/cm^2), 57
Quilopascal (kPa), 57

R

R, 34
Raio hidráulico, 598
Raman, Ganesh, 136
Rankine (R), 34
Rankine, William, 554
Rápido, 600
Rayleigh, Lord, 8, 249, 480, 567
Razão de profundidade, 624
Redes de tubulação, 307
  exemplos, 311
  sistemas com bombas e turbinas, 309
  tubos paralelos, 308, 311
Redução do arrasto, 525
Reduzir EDP para EDO, 390
Refratado, 116
Refrigerante-134a saturado, propriedades, 774
Região da camada limite, 281, 506
Região de entrada (tubos), 280
Região de entrada do escoamento em tubo (Re = 500), 729
Região de entrada hidrodinâmica, 282
Região de escoamento externo, 446
Região de escoamento irrotacional (núcleo), 281
Região de escoamento irrotacional, 422, 506
Região de escoamento não viscoso, 8, 9
Região de escoamento viscoso, 9
Região hidrodinamicamente completamente desenvolvida, 282
Região separada, 498

Regiões com número de Reynolds alto, 418, 445
Regiões de escoamento irrotacional axissimétrico, 428-429
Regiões de escoamento irrotacional bidimensionais, 427
Regiões de escoamento irrotacional planar, 428
Regiões de escoamento potencial, 422
Regiões de escoamento sem viscosidade, 161, 419
Regiões de interrogação, 331
Regiões irrotacionais de escoamento bidimensionais, 427-429
Regra da mão direita, 124
Regra de cadeia, 106
Regra do produto, 473
Regra do produto ao contrário, 473
Regras de similaridade, 684
Regulagem simples, 693
Relação de Haaland, 580
Relação do gás ideal, 34
Relação entre espessura e comprimento da corda, 497
Relação entre sustentação e arrasto, 516
Relação, razão de aspecto, 518, 612
Relação: de estagnação e massa estática, 544
Relações críticas, 544, 545
Relações entre as propriedades de estática e estagnação, 541
Reologia, 371
Reposicionamento de satélite, 217-218
Represa de Hoover, 69, 696
Represa, geração de energia elétrica, 185
Representação gráfica de curvas de vorticidade, 736, 744, 745, 747
Representação gráfica dos dados de escoamento dos fluidos, 117-119
Reservatório, 631
Reservatório de soleira espessa, 632
Reservatório retangular, 633
Reservatório retangular de soleira espessa, 633
Reservatório retangular de soleira espessa, 633-634
Reservatório triangular, 634
Reservatório triangular de soleira espessa, 634
Resfriamento de matriz de chips CI, 751
Resfriamento do ar do computador, 187-188
Resistência à deformação, 43
Reynolds, Osborne, 7, 10, 129, 249
$R_{gás}$, 264
Riabouchinsky, Dimitri, 242
Richardson número de, 248, 269
Riemann, G. F. Bernhard, 554
Roda de Pelton, 689
Rotação, 119-120, 519-523
Rotação de corpo sólido, 420
Rotação em contêiner cilíndrico, 86-88
Rotacionalidade, 124-126
Rotacionalmente simétrico, 727
Rotâmetros, 323
Rotor, 664, 693
Rouse, Hunter, 295
RTT. *Consulte* Teorema de transporte de Reynolds (RTT)
Rugosidade de superfície, 462, 496, 509, 515
Rugosidade não uniforme, 610
Rugosidade relativa, 295
RVF, 623

S

s, 15
Saída de escoamento livre, 627
Saída de pressão, 725
Salto abrupto, 168, 169
Salto de pressão, 46
Salto estável, 625
Salto fraco, 625
Salto hidráulico, 600, 623
Salto impossível, 625
Salto ondular, 625
Salto oscilante, 625
Santos Dumont, 8
Schmidt, Ernst, 249
Segunda Lei da Termodinâmica, 157
Segunda lei de Newton, 149
  elemento de fluido diferencial, 83
  equação de Bernoulli, 161
  equação de Cauchy, 369
  equação do momento angular, 217
  exercício de final de capítulo, 265
  partícula de fluido, 106
Segundo (s), 15
Segundo momento de, 70
Semelhança incompleta, 257
Separação da camada de limite laminar, 510
Separação de escoamento, 6, 467, 497-499
Settles, Gary S., 584
Sherwood, Thomas K., 249
SI, 14-15
Sigurdson, Lorenz, 333
Similaridade, 239-242
  automóveis modelo/protótipo, 241-242
  cinemática, 239
  dinâmica, 239
  filmes de Hollywood, 262
  geométrica, 239
  semelhança incompleta, 235
Similaridade cinemática, 239
Similaridade dinâmica, 239
Similaridade geométrica, 239-240
Simulação das grandes escalas, 743
Simulação numérica direta (DNS), 743
Singularidade, 432
Sistema, 13
Sistema aberto, 13, 128-129
Sistema de coordenadas da camada limite, 449
Sistema de coordenadas inercial, 203
Sistema de ventilação, 651
Sistema fechado, 13, 128
Sistema inglês, 14-15
Sistema Internacional, 14
Sistema isolado, 13
Sistema LDV de raio duplo, 329
Sistema métrico, 14-15
Sistemas de corrente única, 207
Sistemas de escoamento em regime permanente de corrente única, 154
Sistemas de irrigação, 597
Sistemas de unidades, 14-17
Sólido, 2
Solução aproximada, 410
Solução de camada de limite de Blasius, 455, 457
Solução exata, 410
Soluções aproximadas da equação de Navier-Stokes, 409, 489
  aproximação da camada limite, 445, 478. *Consulte também* Aproximação da camada de fronteira
  aproximação de escoamento lento, 414, 422
  regiões de altos números de Reynolds, 418, 419, 445
Sonda de fio quente, 328
Sonda de Pitot, 317
Sonda de Pitot-Darcy, 317
Sonda estática de Pitot, tubo, 128, 317
Sônico, 10
Sonoluminescência, 50
Soprador, 647. *Consulte também* Bomba
Spoilers, 514
Spray de desodorante, 129
Stanton, Thomas E., 249
Stevin, Simon, 7, 60
Stoke, 43
Stokes, número, 248

Stokes, Sir George Gabriel, 7, 249, 499
Strouhal, Vincenz, 249
Strutt, William (Lord Rayleigh), 8, 249, 480, 567
Subcamada inercial, 292
Subcamada laminar, 292
Subcamada linear, 292, 467
Subcamada viscosa, 292, 467, 507
Submarino, 81
Subsônico, 10
Substâncias incompressíveis, 9
Subtração vetorial, 153
Sumidouro de imagem, 442
Superfície de controle em ângulo com o escoamento, 154
Superfície de controle, 128
Superfície de controle normal ao escoamento, 153
Superfície livre, 596
Superfícies curvadas submersas, 74-77
Superfícies livres, 260
Superfícies planas submersas, 69-73
Superposição
  coeficiente de arrasto, 504
  corrente uniforme/dipolo, 437
  definição, 430
  escoamento em canal aberto, 610
  escoamentos irrotacionais, 436
  regiões irrotacionais do escoamento, 430
  sumidouro/fonte de linha de intensidade igual, 433
  sumidouro/linha de vórtice, 436
Supersônico, 10
Sustentação, 492-497, 514-523. *Consulte também* Escoamento sobre corpos

T

Tabelas e diagramas de propriedades, 770-787
  água saturada, 773
  amônia saturada, 775
  ar a pressão de 1 atm, 779, 780, 781
  atmosfera a altitude elevada, 782
  calores específicos do gás ideal, 771
  constante do gás, 771
  diagrama de Moody, 783
  funções de choque normal unidimensionais, 785
  funções de escoamento compressível isoentrópico unidimensionais, 784
  funções de escoamento de Fanno, 787
  funções de escoamento de Rayleigh, 786
  líquidos, 777
  massa molar, 771
  metais líquidos, 778
  propano saturado, 776
  propriedades do ponto de congelamento, 772
  propriedades do ponto de ebulição, 772
  refrigerante saturado 134a, 774
Tabelas e diagramas. *Consulte* Função; tabelas e diagramas de propriedades
Taxa de deformação, 41, 42
Taxa de deformação de cisalhamento, 122-123
Taxa de deformação em volume, 121
Taxa de deformação linear, 120-121
Taxa de deformação volumétrica, 122, 265
Taxa de dilatação volumétrica, 121
Taxa de dissipação, 624
Taxa de dissipação da energia, 624
Taxa de dissipação turbulenta, 738
Taxa de escoamento de massa diferencial, 152
Taxa de rotação, 120, 669
Taxa de transferência de calor, 176
Taxa de variação de massa, 152
Taxas de conversão de unidades, 18
Taxas de deformação, 119-125
Taylor, Brook, 348
Taylor, G. I., 554
Técnica de solução de problemas, 20-22
  cálculos, 21
  designação de problema, 20
  esquemática, 21
  hipóteses/aproximações, 21
  leis físicas, 21
  propriedades, 21
  raciocínio, verificação, discussão, 21-22
Técnica estereoscópica, 116
Técnica integral de momento, 471
Técnica numérica de Runge-Kutta, 456
Técnicas de ajuste de curva, 257
Técnicas de Refração para visualização do escoamento refrativo, 116-117
Técnicas de visualização de escoamento de superfície, 117
Temperatura de estagnação, 535
Temperatura de saturação, 35
Temperatura dinâmica, 535
Temperatura total, 535
Temperatura/pressão críticas do escoamento de gás, 545
Tempo artificial, 719
Tempo de relaxamento de partícula, 274
Tempo de residência, 108
Tensão, 2-3
Tensão de cisalhamento, 3, 42, 201
Tensão de cisalhamento turbulenta, 291
Tensão de Reynolds, 297, 739
Tensão normal, 3, 57, 68, 201
Tensão superficial, 46-47, 232
Tensão turbulenta, 291
Tensor de segunda ordem, 201
Tensor de taxa de deformação, 122
Tensor de tensão de desvio, 371
Tensor de tensão específico de Reynolds, 738
Tensor de tensão, 201
Tensor de tensão viscosa, 371
Teorema da divergência
  equação da continuidade, 347
  equação de Cauchy, 366
  estendido, 366
Teorema de Gauss, 347
Teorema de Leibnitz, 133
Teorema de transporte de Reynolds (TTR), 128-135
  conservação geral de massa, 152
  dedução alternativa, 133-134
  derivado material, 135
  equação da conservação da energia, 178
  equação do momento angular, 217
  equação do momento linear, 203
  TTR alternativo, VC fixo, 131
  TTR alternativo, VC não fixo, 132
  TTR, entradas bem definidas, 132
  TTR, VC fixo, 131
  TTR, VC não fixo, 131
  velocidade relativa, 134
Teorema do divergente estendido, 372
Teorema do eixo paralelo, 70
Teorema Pi de Buckingham, 243
Teorema tridimensional de Leibnitz, 133, 134
Teorema unidimensional de Leibnitz, 135
Teoremas etc.
  lei da parede, 293
  lei da potência um sétimo, 462
  lei das variáveis de parede, 466
  lei de Hooke, 371
  lei de King, 328
  lei de Pascal, 60,62
  lei de Poiseuille, 291
  lei de Spalding da parede, 465
  lei de Stokes, 499
  lei do defeito da velocidade, 294
  lei logarítmica, 465
  princípio de Arquimedes, 78
  teorema de Leibnitz, 133

teorema do eixo paralelo, 70
teorema Pi de Buckingham, 243
teoria da obstrução de Bernoulli, 333
teoria do escoamento de gás rarefeito, 33
TTR, 128. *Consulte também* Teorema de transporte de Reynolds (TTR)
Teoria cinética dos gases, 43
Teoria da obstrução de Bernoulli, 333
Teoria do escoamento de gás rarefeito, 33
Teorias. *Consulte* Teoremas etc.
Tera, 15
Terminologia
bomba, 651, 664
equações. *Consulte* Equações
escoamento em tubos, 278
escoamento sem atrito, 418
escoamento sem viscosidade, 418
fórmula. *Consulte* Fórmula
função. *Consulte* Função
glossário, 788
leis. *Consulte* Teoremas etc.
princípios. *Consulte* Teoremas etc.
teoremas. *Consulte* Teoremas etc.
teorias. *Consulte* Teoremas etc.
turbomáquina(s), 647-649
Teste de túnel de/em vento, 257-258
Testes experimentais, 256
Thomson, William (Lord Kelvin), 8
Tirando gasolina com sifão de tanque de combustível, 171
Tomada de pressão estática, 165, 438
Tornado, 380, 425
Torneira com flange, força líquida, 214
Torque de flexão, base do tubo de água, 222
Torr, 65
Torricelli, Evangelista, 7, 65
Toyota Prius, 540
Trabalho, 17, 177
Trabalho de eixo, 157, 167, 177
Trabalho de escoamento, 37, 157-179
Traçado de contornos de velocidade tangencial, 747
Traçado de curva de pressão, 746
Traçado de curva em escala de cinza para a velocidade tangencial, 747
Transbordamento livre de tanque de água durante aceleração, 85-86
Transdutor capacitivo, 65
Transdutores de pressão, 64-65
Transdutores de pressão absoluta, 65
Transdutores de pressão diferencial, 65
Transdutores de pressão extensométricos, 65
Transdutores de pressão manométrica, 64
Transdutores piezelétrico, 65
Transferência de calor, 176, 748
Transferência de calor e velocidade do escoamento, 571
Transferência de energia por calor, 176-180
Transferência de trabalho, 176
Transformação de sistema em voluma de controle, 131
Transições, 620
Transiente, 11
Translação, 119, 120
Tratado de Convenção Métrica, 14
Triângulo equilátero, 722
Trocador de calor, 338
Trocador de calor de carcaça e tubos, 338
Trocador de calor de escoamento cruzado, elevação da temperatura, 749
Troposfera, 98
Tubo de corrente, 111, 112
Tubo de Pitot, 165, 172, 318
Tubo de sucção, 695
Tubo piezômetro, 165
Tubos de água. *Consulte* Escoamento em tubos
Tubos circulares, 278
Tubos de Bourdon, 64
Tubos em série, 308
Tubos inclinados, 286
Tubos não circulares, 287
Tubos paralelos, 308
Tubos. *Consulte* Escoamento em tubos
Tufos, 117
Túnel de vento, 459, 678-679
Turbilhão, 673
Turbilhão reverso, 697
Turbilhões, 290
Turbina, 687-689
a gás, 687
bomba-turbina, 702
confinadas/aberta, 649
de Kaplan, 692
de reação, 691-699
deslocamento positivo, 648, 688
dinâmica, 649, 688-689
eficiência, 696
eólica, 687
Francis, 692-699
hidráulica, 687
impulso, 689
leis de semelhança, 700
leis de semelhança/escala, 700-705
parâmetros adimensionais, 699-701
roda de Pelton, 689-691
velocidade específica da turbina, 702-704
Turbina a gás MS7001F, 705
Turbina a gás, 693, 710-711
Turbina a vapor, 687, 705
Turbina com escoamento axial de vários estágios, 677
Turbina de escoamento misto de Francis, 692
Turbina de escoamento radical de Francis, 692, 693
Turbina de Francis, 692
Turbina de Kaplan, 692
Turbina eólica, 649, 687
Turbina hidráulica com roda de Pelton, 149
Turbina hidráulica, 687

Turbinas a vapor de usina, 705
Turbinas abertas, 649
Turbinas confinadas, 649
Turbinas de deslocamento positivo, 648
Turbinas de escoamento axial, 692
Turbinas de reação, 691
Turbinas dinâmicas, 649, 688-689
Turbinas por impulso, 689
Turbomaquinaria, 646-715
bomba. *Consulte* Bomba
classificação e terminologia, 647-649
leis de semelhança de bomba, 680-687
leis de semelhança de turbina, 699
máquinas de deslocamento positivo, 648
máquinas dinâmicas, 648
turbina. *Consulte também* Turbina
Turboventilador Pratt & Whitney PW4000, 678

U

Unidade de pressão, 57
Unidade térmica britânica (Btu), 37
Unidade, 14, 232
Unidades de força, 16
Unidades secundárias, 18
United States Customary System (USCS), 14
USCS, 14

V

Valores de rugosidade relativa, 295
Válvula, 306
Válvula de ângulo, 306
Válvula de gaveta, 300
Válvula de globo, 306

Van Dyke, Milton, 11
Vapor, 4
Variação da entropia
  escoamento de Fanno, 576, 577
  escoamento de Rayleigh, 567, 573
Variáveis adimensionais, 234
Variáveis da lei de parede, 466
Variáveis de campo, 104
Variáveis dimensionais, 234
Variáveis internas, 466
Variável de campo escalar, 104
Variável de campo vetorial, 104
Variável de similaridade, 455
Vazão de escoamento, 635
Vazão de escoamento em massa, 149, 649
Vazão de escoamento em tubos horizontais e inclinados, 288
Vazão volumétrica, 151, 154, 647-663
VC. *Consulte* Volume de controle
Veículos de reentrada espacial, 559
Velocidade angular, 120, 217
Velocidade crítica, 603
Velocidade de atrito, 293, 465
Velocidade de corrente livre, 491
Velocidade de deriva, 275
Velocidade de escoamento uniforme, 607
Velocidade de fluido e área do escoamento, 541-543
Velocidade de onda, 600
Velocidade do escoamento, 571
Velocidade do som, 10, 537-545
Velocidade específica da bomba, 682
Velocidade específica de turbina, 702-704
Velocidade final de partícula de um vulcão, 417
Velocidade gradiente, 41
Velocidade média, 151
Velocidade relativa,131, 134, 135
Velocidade sônica, 537
Velocidade terminal, 495
Velocimetria de imagem de partícula (PIV), 114-115, 336-337
Vena contracta, 305
Ventilador, 179, 647, 651. *Consulte também* Bomba
Ventilador axial por pás de transmissão direta, 676
Ventilador com escoamento axial em duto, 672
Ventilador de escoamento axial, 672
Ventilador de escoamento axial de pás, 678-679, 741
Ventilador de teto, 647
Ventilador tubo-axial movido a esteira, 682
Ventilador tubo-axial, 675, 681
Ventilador, resfriamento de ar do computador, 185-186
Ventiladores, 676
Ventiladores de túnel de vento, 675
Ventos fortes, 493
Venturi, Giovanni, 319
Vetor de posição, 104
Vetor de posição material, 106
Vetor de taxa de rotação, 120, 124
Vetor de taxa de translação, 120
Vetor de velocidade angular, 120
Vetor de vorticidade, 124, 419
Vetores de velocidade, 106, 666
Vetores de velocidade absoluta, 665
Vetores de velocidade relativa, 666
Visão geral do histórico, 6-8
Viscoelástico, 371
Viscosidade, 41-45
Viscosidade absoluta, 42
Viscosidade aparente, 42
Viscosidade cinemática, 43, 280
Viscosidade de turbilhamento, cinemática, 291
Viscosidade de vórtices, 292
Viscosidade dinâmica, 42, 43
Viscosidade turbulenta, 291
Viscosidade turbulenta cinemática, 291
Viscosímetro, 44
Visualização de óleo de superfície, 117
Visualização do escoamento, 110-117, 497, 470, 512
Vizinhança, 13
Volume de controle, 13-14
  definição, 126-127
  deformável, 200
  descrição euleriana, 104
  equação da continuidade, 347
  Equação de Cauchy, 366, 369
  fixo, 200
  leis da conservação, 149
  móvel, 200
Volume de controle deformável, 200, 204
Volume de controle fixo, 200
Volume de medição, 330
Volume específico, 33
Volume fechado, 662
Volume focal, 330
Volume material, 134
Volumes de controle móveis/deformáveis, 153
Voluta, 664, 691
Vôo, avião, 500, 521, 522
Vórtice inicial, 516
Vórtice, 114, 517
Vórtices, 498
Vórtice, linha, 140, 440
Vórtices de fuga, 518
Vórtices turbulentos, 737
Vorticidade, 124-127

W

Weber, Moritz, 249
Weisbach, Julius, 285
Winglets, 518
Wortmann, F. X., 447

Z

Zona, 722

a	Constante de Manning $m^{1/3}/s$; altura da parte inferior do canal até a parte inferior da comporta basculante, m
$\vec{a}$, a	Aceleração e sua magnitude, m/s^2
A, A_c	Área, m^2; área de seção transversal, m^2
Ar	Número de Arquimedes
AR	Taxa de aspecto
b	Largura ou distância, m; propriedade intensiva na análise RTT; largura da lâmina de turbomaquinaria, m
bhp	Potência de freio, hp ou kW
B	Centro de flutuação; propriedade extensiva na análise RTT
Bi	Número de Biot
Bo	Número de Bond
c	Calor específico para substância incompressível, kJ/kg · K; velocidade do som, m/s; velocidade da luz no vácuo, m/s; comprimento da corda de um perfil aerodinâmico, m
c_a	Velocidade de onda, m/s
c_p	Calor específico a pressão constante, kJ/kg · K
c_v	Calor específico a volume constante, kJ/kg · K
C	Dimensão da quantidade de luz
C	Constante de Bernoulli, m^2/s^2 ou $m/t^2 \cdot L$, dependendo da forma da equação de Bernoulli; coeficiente de Chezy, $m^{1/2}/s$; circunferência, m
Ca	Número de cavitação
C_D, C_{Dx}	Coeficiente de arrasto; coeficiente local de arrasto
C_d	Coeficiente de descarga
C_f, C_{fx}	Fator de atrito de Fanning ou coeficiente de atrito; coeficiente de atrito local
C_H	Coeficiente de carga
C_L, C_{Lx}	Coeficiente de elevação; coeficiente de elevação local
C_{NPSH}	Coeficiente de carga de sucção
CP	Centro de pressão
C_p	Coeficiente de pressão
C_P	Coeficiente de potência
C_Q	Coeficiente de capacidade
CS	Superfície de controle
CV	Volume de controle
C_{sd}	Coeficiente de descarga de reservatório
D ou d	Diâmetro, m (em geral d para um diâmetro menor do que D)
D_{AB}	Especifica o coeficiente de difusão, m^2/s
D_h	Diâmetro hidráulico, m
D_p	Diâmetro de partícula, m
e	Energia específica total, kJ/kg
$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$	Vetor unitário nas direções r- e θ- respectivamente
E	Voltagem, V
E, $\dot{E}$	Energia total, kJ; e taxa de energia, kJ/s
Ec	Número de Eckert
EGL	Linha piezométrica, m
E_s	Energia específica em escoamentos de canal aberto, m
Eu	Número de Euler
f	Frequência, ciclos/s; camada de fronteira de Blasius dependente da variável de similaridade
f, f_x	Fator de atrito de Darcy; e fator de atrito de Darcy local
$\vec{F}$, F	Força e sua magnitude, N
F_B	Magnitude da força de flutuação, N
F_D	Magnitude da força de arrasto, N
F_f	Magnitude da força de arrasto devido ao atrito, N
F_L	Magnitude da força de elevação, N
Fo	Número de Fourier
Fr	Número de Froude
F_T	Magnitude da força de tensão, N
$\vec{g}$, g	Aceleração gravitacional e sua magnitude, m/s^2
$\dot{g}$	Taxa de geração de calor por volume unitário, W/m^3
G	Centro de gravidade
GM	Altura metacêntrica, m
Gr	Número de Grashof
h	Entalpia específica, kJ/kg; altura, m; carga, m; coeficiente de transferência de calor convectiva, $W/m^2 \cdot K$
h_{fg}	Calor latente de vaporização, kJ/kg
h_L	Perda de carga, m
H	Fator de forma da camada de fronteira; altura, m; carga líquida de uma bomba ou turbina, m; energia total de um líquido no escoamento de canal aberto, expressa como uma carga, m; carga do reservatório, m
$\vec{H}$, H	Momento do momento e sua magnitude, N · m · s

HGL	Linha piezométrica, m
H_{bruto}	Carga bruta agindo sobre uma turbina, m
i	Índice dos intervalos de uma grade CFD (em geral na direção x)
$\vec{i}$	Vetor unitário na direção x
I	Dimensão da corrente elétrica
I	Momento de inércia, N · m · s^2; corrente, A; intensidade da turbulência
I_{xx}	Segundo momento de inércia, m^4
j	Redução do teorema Pi de Buckingham; índice dos intervalos de uma grade CFD (em geral na direção y)
$\vec{j}$	Vetor unitário na direção y
Ja	Número de Jakob
k	Taxa de calor específico; número esperado de Π no teorema Pi de Buckingham; condutividade térmica, W/m · K; energia cinética turbulenta por unidade de massa, m^2/s^2; índice dos intervalos de uma grade CFD (em geral na direção z)
$\vec{k}$	Vetor unitário na direção z
ec	Energia cinética específica, kJ/kg
K	Força dipolo, m^3/s
EC	Energia cinética, kJ
K_L	Coeficiente de perda menor
Kn	Número de Knudsen
ℓ	Comprimento ou distância, m; escala de comprimento turbulento, m
L	Dimensão do comprimento
L	Comprimento ou distância, m
Le	Número de Lewis
L_c	Comprimento de corda de um perfil aerodinâmico, m; comprimento característico, m
L_h	Comprimento de entrada hidrodinâmica, m
L_w	Comprimento de Weirs
m	Dimensão de massa
m, $\dot{m}$	Massa, kg; e taxa de escoamento de massa, kg/s
M	Massa molar, kg/kmol
$\vec{M}$, M	Momento do momento e sua magnitude, N · m
Ma	Número de Mach
n	Número de parâmetros do teorema Pi de Buckingham; coeficiente de Manning
n, $\dot{n}$	Número de rotações; e taxa de rotação, rpm
$\vec{n}$	Vetor unitário normal
N	Dimensão da quantidade de matéria
N	Número de mols, mol ou kmol; número de lâminas de uma turbomaquinaria
N_P	Número de Power
NPSH	Carga de sucção líquida positiva, m
N_{Sp}	Velocidade específica de bomba
N_{St}	Velocidade específica de turbina
Nu	Número de Nusselt
p	Perímetro molhado, m
ep	Energia específica potencial, kJ/kg
P, P'	Pressão e pressão modificada, N/m^2 ou Pa
EP	Energia potencial, kJ
Pe	Número de Peclet
$P_{manométrica}$	Pressão manométrica, N/m^2 ou Pa
P_m	Pressão mecânica, N/m^2 ou Pa
Pr	Número de Prandtl
P_{sat} ou P_v	Pressão de saturação ou pressão de vapor, kPa
P_{vac}	Pressão de vácuo, N/m^2 ou Pa
P_w	Altura do reservatório, m
q	Transferência de calor por unidade de massa, kJ/kg
$\dot{q}$	Fluxo de calor (taxa de transferência de calor por unidade de área), W/m^2
Q, $\dot{Q}$	Transferência total de calor, e taxa de transferência de calor, W ou kW
Q_{EAS}	Inclinação equiângula de uma grade CFD
$\vec{r}$, r	Braço de momento e sua magnitude, m; coordenada radial, m; raio, m
R	Constante do gás, kJ/kg · K; raio, m; resistência elétrica, Ω
Ra	Número de Rayleigh
Re	Número de Reynolds
R_h	Raio hidráulico, m
Ri	Número de Richardson
R_u	Constantes do gás universal, kJ/kmol · K
s	Distância submersa ao longo do plano de uma placa, m; distância ao longo de uma superfície ou linha de corrente, m; entropia específica, kJ/kg · K; espaçamento da orla em LDV, m; espaçamento da lâmina da turbomaquinaria, m
S_o	Inclinação da parte inferior de um canal em escoamento de canal aberto
Sc	Número de Schmidt
S_c	Inclinação crítica em um escoamento de canal aberto
S_f	Inclinação do atrito em escoamento de canal aberto
GE	Gravidade específica
Sh	Número de Sherwood
SP	Propriedade em um ponto de estagnação

St	Número de Stanton; número de Strouhal
Stk	Número de Stokes
t	Dimensão de tempo
t	Tempo, s
T	Dimensão de temperatura
T	Temperatura, °C ou K
$\vec{T}$, T	Torque e sua magnitude, N · m
u	Energia interna específica, kJ/kg; componente de velocidade cartesiano na direção x, m/s
u_s	Energia interna específica, kJ/kg; componente de velocidade cartesiano na direção x, m/s
u_r	Componente de velocidade cilíndrico na direção r, m/s
u_θ	Componente de velocidade cilíndrico na direção θ, m/s
u_z	Componente de velocidade cilíndrico na direção z, m/s
U	Energia interna, kJ; componente x da velocidade fora de uma camada de fronteira (paralela à parede), m/s
v	Componente de velocidade cartesiano na direção y, m/s
v	Volume específico, m^3/kg
V, $\dot{V}$	Volume, m^3; e taxa de escoamento de volume m^3/s
$\vec{V}$, V	Velocidade e sua magnitude (velocidade), m/s; velocidade média, m/s
V_0	Velocidade de escoamento uniforme no escoamento em canal aberto, m/s
w	Trabalho por unidade de massa, kJ/kg; componente de velocidade cartesiano na direção z, m/s; largura, m
W	Peso, N; largura, m
W, $\dot{W}$	Transferência de trabalho, kJ; e taxa de trabalho (potência), W ou kW
We	Número de Weber
x	Coordenada cartesiana (em geral à direita), m
$\vec{x}$	Vetor de posição, m
y	Coordenada cartesiana (em geral acima ou na página), m; profundidade do líquido no escoamento em canal aberto, m
y_n	Profundidade normal no escoamento em canal aberto, m
z	Coordenada cartesiana (em geral acima), m

Letras Gregas

α	Ângulo; ângulo de ataque; fator de correção da energia cinética; difusividade térmica, m^2/s; compressibilidade isotérmica, kPa^{-1} ou atm^{-1}
$\vec{\alpha}$, α	Aceleração angular e sua magnitude, s^{-2}
β	Coeficiente de expansão de volume, K^{-1}; fator de correção do fluxo do momento; taxa de diâmetro nos fluxômetros por obstrução; ângulo de choque oblíquo; ângulo da lâmina de turbomaquinaria
δ	Espessura da camada de fronteira, m; distância entre linhas de corrente, m; ângulo; pequena variação na quantidade
δ^*	Espessura de deslocamento da camada de fronteira, m
ε	Rugosidade de superfície média, m; taxa de dissipação turbulenta, m^2/s^3
ε_{ij}	Tensor de taxa de tensão, s^{-1}
Φ	Função de dissipação, $kg/m \cdot s^3$
ϕ	Ângulo; função potencial de velocidade, m^2/s
γ_s	Peso específico, N/m^3
Γ	Força de circulação ou vórtice, m^2/s
η	Eficiência; variável de similaridade independente da camada de fronteira de Blasius
κ	Módulo de compressibilidade, kPa ou atm; constante da lei logarítmica na camada de fronteira turbulenta
λ	Comprimento de trajetória livre média, m; comprimento de onda, m; segundo coeficiente de viscosidade, kg/m · s
μ	Viscosidade, kg/m · s; ângulo Mach
ν	Viscosidade cinemática m^2/s
ν(Ma)	Função de Prandtl–Meyer para ondas de expansão, graus ou radianos
Π	Parâmetro não dimensional na análise dimensional
θ	Coordenada de ângulo ou angular; espessura do momento da camada de fronteira, m; espaçamento angular de uma lâmina de turbomaquinaria; ângulo de viragem ou de deflexão do choque oblíquo
ρ	Densidade, kg/m^3
σ	Tensão normal, N/m^2
σ_{ij}	Tensor de tensão, N/m^2
σ_s	Tensão de superfície, N/m
τ	Tensão de cisalhamento, N/m^2
τ_{ij}	Tensor de tensão viscosa (também chamado de tensor de tensão de cisalhamento), N/m^2
$\tau_{ij,\ \text{turbulento}}$	Tensor de tensão específico de Reynolds, m^2/s^2
$\vec{\omega}$, ω	Vetor angular de velocidade e sua magnitude, rad/s; frequência angular, rad/s
ψ	Função de corrente, m^2/s
$\vec{\zeta}$,ζ	Vetor de vorticidade e sua magnitude, s^{-1}

Índices Subscritos

∞	Propriedade do campo distante
0	Propriedade de estagnação; propriedade na origem ou em um ponto de referência
abs	Absoluta
atm	Atmosférica
média	Quantidade média
b	Propriedade da parte traseira ou saída de um

	bocal, por exemplo, contra-pressão P_b
C	Agindo no centroide
c	Pertencente a uma seção transversal
cr	Propriedade crítica
CL	Pertencente à linha central
SC	Pertencente a uma superfície de controle
VC	Pertencente a um volume de controle
s	Propriedade em uma saída; parte extraída
ef	Propriedade efetiva
f	Propriedade de um fluido, geralmente um líquido
H	Agindo horizontalmente
lam	Propriedade de um escoamento laminar
L	Parte perdida pelas irreversibilidades
m	Propriedade de um modelo
máx	Valor máximo
mec	Propriedade mecânica
mín	Valor mínimo
n	Componente normal
P	Agindo no centro da pressão
p	Propriedade de um protótipo; propriedade de uma partícula; propriedade de um pistão
R	Resultante
r	Relativo (estrutura de referência móvel)
ret	Propriedade retangular
rl	Propriedade do bordo de ataque do rotor
rt	Propriedade do bordo de fuga do rotor
S	Atuando em uma superfície
s	Propriedade de um sólido
sat	Propriedade de saturação; propriedade de um satélite
es	Propriedade do bordo de ataque do estator
est	Propriedade do bordo de fuga do estator
sub	Parte submersa
sis	Pertencente a um sistema
t	Componente tangencial
tri	Propriedade triangular
turb	Propriedade de um escoamento turbulento
u	Parte útil
V	Agindo verticalmente
v	Propriedade de um vapor
vac	Vácuo
w	Propriedade em uma parede

Índices Sobrescritos

_(sublinhado)	Quantidade média
·(ponto superior)	Quantidade por unidade de tempo; derivativa de tempo
′(primo)	Quantidade flutuante; derivativa de uma variável; variável modificada
*	Propriedade não dimensional; propriedade sônica
+	Lei da variável de parede na camada de fronteira turbulenta
→ (seta superior)	Quantidade vetorial

Fatores de Conversão

DIMENSÃO	MÉTRICA	MÉTRICA/INGLESA
Aceleração	1 m/s^2 = 100 cm/s^2	1 m/s^2 = 3,2808 pés/s^2 1 pé/s^2 = 0,3048* m/s^2
Área	1m^2 = 104 cm^2 = 106 mm^2 = 10^{-6} km^2	1 m^2 = 1550 pol^2 = 10,764 $pés^2$ 1 $pé^2$ = 144 pol^2 = 0,09290304* m^2
Densidade	1 g/cm^3 = 1 kg/L = 1.000 kg/m^3	1 g/cm^3 = 62,428 lbm/$pé^3$ = 0,036127 lbm/pol^3 1 lbm/pol^3 = 1728 lbm/$pé^3$ 1 kg/m^3 = 0,062428 lbm/$pé^3$
Energia, calor, trabalho e energia específica	1 kJ = 1000 J = 1000 N · m = 1 kPa · m^3 1 kJ/kg = 1000 m^2/s^2 1 kWh = 3600 kJ	1 kJ = 0,94782 Btu 1 Btu = 1,055056 kJ = 5,40395 psia · $pé^3$ = 778,169 lbf · pé 1 Btu/lbm = 25,037 $pé^2/s^2$ = 2,326* kJ/kg 1 kWh = 3,412,14 Btu
Força	1 N = 1 kg · m/s^2 = 10^5 dina 1 kgf = 9,80665 N	1 N = 0,22481 lbf 1 lbf = 32,174 lbm · $pé/s^2$ = 4,44822 N 1 lbf = 1 slug · $pé/s^2$
Comprimento	1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm 1 km = 1000 m	1 m = 39.370 pol = 3,2808 pés = 1,0926 jardas 1 pé = 12 pol = 0,3048* m 1 milha = 5280 pés = 1,6093 km 1 pol = 2,54* cm
Massa	1 kg = 1000 g 1 tonelada métrica = 1000 kg	1 kg = 2,2046226 lbm 1 lbm = 0,45359237* kg 1 onça = 28,3495 g 1 slug = 32,174 lbm = 14,5939 kg 1 tonelada americana = 2000 lbm = 907,1847 kg
Potência	1 W = 1 J/s 1 kW = 1000 W = 1 kJ/s 1 hp‡ = 745,7 W	1 kW = 3412,14 Btu/h = 1,341 hp = 737,56 lbf · pé/s 1 hp = 550 lbf · pé/s = 0,7068 Btu/s = 42,41 Btu/min = 2,544,5 Btu/h = 0,74570 kW 1 Btu/h = 1,055056 kJ/h
Pressão ou tensão, e pressão expressa como uma carga	1 Pa = 1 N/m^2 1 kPa = 10^3 Pa = 10^{-3} MPa 1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bar = 760 mm Hg a 0°C = 1,03323 kgf/cm^2 1 mm Hg = 0,1333 kPa	1 Pa = 1,4504 × 10^{-4} psi = 0,020886 $lbf/pé^2$ 1 psi = 144 $lbf/pé^2$ = 6,894757 kPa 1 atm = 14,696 psi = 29,92 polegadas de Hg a 30°F 1 pol de Hg = 13,60 polegadas de H_2O = 3,387 kPa
Calor específico	1 kJ/kg · °C = 1 kJ/kg · K = 1 J/g · °C	1 Btu/lbm · °F = 4,1868 kJ/kg · °C 1 Btu/lbmol · R = 4,1868 kJ/kmol · K 1 kJ/kg · °C = 0,23885 Btu/lbm · °F = 0,23885 Btu/lbm · R
Volume específico	1 m^3/kg = 1000 L/kg = 1000 cm^3/g	1 m^3/kg = 16,02 $pés^3$/lbm 1 m^3/kg = 0,062428 m^3/lbm
Temperatura	T(K) = T(°C) + 273,15 ΔT(K) = ΔT(°C)	T(R) = T(°F) + 459,67 = 1,8T(K) T(°F) = 1,8 T(°C) + 32 ΔT(°F) = ΔT(R) = 1,8* ΔT(K)
Velocidade	1 m/s = 3,60 km/h	1 m/s = 3,2808 pés/s = 2,237 mi/h 1 mi/h = 1,46667 pés/s 1 mi/h = 1,6093 km/h
Viscosidade, dinâmica	1 kg/m · s = 1 N · s/m^2 = 1 Pa · s = 10 poise	1 kg/m · s = 2,419,1 lbm/pés · h = 0,020886 lbf · $s/pé^2$ = 0,67197 lbm/pé · s

*Fator exato de conversão entre unidades métricas e inglesas.

‡Cavalo-vapor mecânico. O cavalo-vapor elétrico é assumido como exatamente 746 W.

DIMENSÃO	MÉTRICA	MÉTRICA/INGLESA
Viscosidade, cinemática	1 m^2/s = 104 cm^2/s 1 stoke = 1 cm^2/s = 10^{-4} m^2/s	1 m^2/s = 10,764 $pés^2/s$ = 3,875 × 10^4 $pés^2/h$ 1 m^2/s = 10,764 $pés^2/s$
Volume	1 m^3 = 1000 L = 10^6 cm^3 (cc)	1 m^3 = 6,1024 × 10^4 pol^3 = 35,315 $pés^3$ = 264,17 gal (U.S.) 1 galão americano = 231 pol^3 = 3,7854L 1 fl onça = 29,5735 cm^3 = 0,0295735 L 1 galão americano = 128 fl onças
vazão de volume	1 m^3/s = 60,000 L/min = 10^6 cm^3/s	1 m^3/s = 15,850 gal/min = 35,315 $pés^3/s$ = 2,118,9 $pés^3$/min (CFM)

*Fator exato de conversão entre unidades métricas e inglesas.

Algumas Constantes Físicas

CONSTANTE FÍSICA	MÉTRICA	INGLESA
Aceleração padrão da gravidade	g = 9,80665 m/s^2	g = 32,174 $pés/s^2$
Pressão atmosférica padrão	P_{atm} = 1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bar = 760 mm Hg (0°C) = 10,3323 m H_2O (4°C)	P_{atm} = 1 atm = 14,696 psia = 2116,2 $lbf/pés^2$ = 29,9213 polegadas de Hg (32°F) = 406,78 polegadas H_2O (39,2°F)
Constante universal do gás	Ru = 8,31447 kJ/kmol · K = 8,31447 kN · m/kmol · K	R_u = 1,9859 Btu/lbmol · R = 154,37 pés · lbf/lbmol · R

Propriedades Normalmente Usadas

PROPRIEDADE	MÉTRICA	INGLESA
Ar a 20°C (68°F) e 1 atm		
Constante específica do gás*	R_{ar} = 0,2870 kJ/kg · K = 287,0 m^2/s^2 · K	R_{ar} = 0,06855 Btu/lbm · R = 53,34 pés · lbf/lbm · R = 1,716 $pés^2/s^2$ · R
Razão entre calores específicos	$k = c_p/c_v$ = 1,40	$k = c_p/c_v$ = 1,40
Calores específicos	c_p = 1,007 kJ/kg · K = 1007 m^2/s^2 · K c_v = 0,7200 kJ/kg · K = 720,0 m^2/s^2 · K	c_p = 0,2404 Btu/lbm · R = 187,1 pés · lbf/lbm · R = 6,019 $pés^2/s^2$ · R c_v = 0,1719 Btu/lbm · R = 133,8 pés · lbf/lbm · R = 4,304 $pés^2/s^2$ · R
Velocidade do som	c = 343,2 m/s = 1,236 km/h	c = 1126 pés/s = 767,7 mi/h
Densidade	ρ = 1,204 kg/m^3	ρ = 0,07518 $lbm/pé^3$
Viscosidade	μ = 1,825 × 10^{-5} kg/m · s	μ = 1,227 × 10^{-5} lbm/pés · s
Viscosidade cinemática	ν = 1,516 × 10^{-5} m^2/s	ν = 1,632 × 10^{-4} $pés^2/s$
Água líquida a 20°C (68°F) e 1 atm		
Calor específico ($c = c_p = c_v$)	c = 4,182 kJ/kg · K = 4182 m^2/s^2 · K	c = 0,9989 Btu/lbm · R = 777,3 pés · lbf/lbm · R = 25.009 $pés^2/s^2$ · R
Densidade	ρ = 998,0 kg/m^3	ρ = 62,30 $lbm/pés^3$
Viscosidade	μ = 1,002 × 10^{-3} kg/m · s	μ = 6,733 × 10^{-4} lbm/pés · s
Viscosidade cinemática	ν = 1,004 × 10^{-6} m^2/s	ν = 1,081 × 10^{-5} $pés^2/s$

*Independentemente da pressão ou temperatura